$$\Sigma\frac{1}{a^n} = \pm\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{1.2.3\ldots(n-1)da^{n-1}} = \pm\frac{d^{n-1}L(a)}{2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}.$$

Or on a $\Sigma\frac{1}{a} = L(a) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{x-1}dx$. On en tire, en différentiant par rapport à a,

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)}{x-1}dx,$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{da^{n-1}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{n-1}}{x-1}dx.$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^2} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1}lx}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^3} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^2}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^4} = -\frac{1}{2\cdot 3}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^3}{x-1}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n}} = -\frac{1}{2.3.4\ldots(2n-1)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{2n-1}}{x-1}dx,$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n+1}} = +\frac{1}{2.3\,4\ldots2n}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(lx)^{2n}}{x-1}dx.$$

En général, quel que soit α, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

Désignons $\Sigma\frac{1}{a^\alpha}$ par $L(a,\alpha)$, nous aurons

$$(1) \qquad L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx + C.$$

En développant $\frac{x^{a-1}}{x-1}$ en série infinie, il viendra

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 x^{a-2}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx + \int_0^1 x^{a-3}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx \right.$$
$$\left. + \int_0^1 x^{a-4}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx + \cdots\right];$$

or $\int_0^1 x^{a-k-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^\alpha}$, par conséquent

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{(a-1)^\alpha} + \frac{1}{(a-2)^\alpha} + \frac{1}{(a-3)^\alpha} + \cdots + C,$$

où C est une constante indépendante de a. Pour la trouver, faisons dans (1) $a=1$, ce qui donne $L(1,\alpha)=0$ et $x^{a-1}=x^0=1$; par conséquent

$$C = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}dx.$$

On tire de là

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{x-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx,$$

où a peut être positif, négatif où zéro. On a

$$x^{a-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a+1} = 1-(a-1)\left(l\frac{1}{x}\right) + \frac{(a-1)^2}{2}\cdot\left(l\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{(a-1)^3}{2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 + \text{etc.}$$

Substituant cette valeur, on aura

$$L(a,\alpha) =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{(a-1)\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^\alpha}{1-x}dx - \frac{(a-1)^2}{2}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{1-x}dx + \frac{(a-1)^3}{2.3}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+2}}{1-x}dx - \cdots\right\}.$$

Considérons l'expression $\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx$. En développant $\frac{1}{1-x}$, on aura

$$\int \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}dx = \int\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \int x\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \int x^2\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \cdots;$$

or $\int_0^1 x^n\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+1)^{k+1}}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}\,dx = \Gamma(k+1)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{4^{k+1}}+\cdots\right),$$

donc enfin

$$\begin{aligned}
L(a,\alpha) = {} & \frac{(a-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\cdots\right)\\
& -\frac{(a-1)^2.\Gamma(\alpha+2)}{2.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\cdots\right)\\
& +\frac{(a-1)^3.\Gamma(\alpha+3)}{2.3.\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\cdots\right)\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

or on a $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha+2)=\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ et en général $\Gamma(\alpha+k) =\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha)$. Substituant ces valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}
L(a,\alpha) = {} & \frac{a-1}{1}\alpha\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+1}}+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{4^{\alpha+1}}+\cdots\right)\\
& -\frac{(a-1)^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+2}}+\frac{1}{3^{\alpha+2}}+\frac{1}{4^{\alpha+2}}+\cdots\right)\\
& +\frac{(a-1)^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\left(1+\frac{1}{2^{\alpha+3}}+\frac{1}{3^{\alpha+3}}+\frac{1}{4^{\alpha+3}}+\cdots\right)\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Si l'on pose a infini, on aura

$$L(\infty,\alpha)=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\cdots,$$

donc en désignant $L(\infty,\alpha)$ par $L'(\alpha)$

$$L(a,\alpha)=$$
$$\alpha.(a-1)L'(\alpha+1)-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(a-1)^2L'(\alpha+2)+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2.3}(a-1)^3L'(\alpha+3)-\cdots.$$

Si dans la formule (1) on met $\frac{m}{a}$ au lieu de a, on aura

$$L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{m}{a}-1}-1\right)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}\,dx.$$

Faisant $x^{\frac{1}{a}}=y$, x devient $=y^a$, $dx=ay^{a-1}$, $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}=a^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}$ et par suite

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(y^{m-a}-1)\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^{a-1}}{y^a-1}\,dy=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{y^{m-1}-y^{a-1}}{y^a-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy.$$

On tire de là

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1}\,dy+\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{y^{m-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a-1}\,dy.$$

Si maintenant $m-1<a$, ce qu'on peut supposer, la fraction $\frac{y^{m-1}}{y^a-1}$ est résoluble en fractions partielles de la forme $\frac{A}{1-cy}$. On aura donc

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=\left\{A\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}\,dy+A'\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-c'y}\,dy+\cdots\right\}\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.$$

Si l'on développe $\frac{1}{1-cy}$ en série, on voit que

$$\int\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}\,dy=\int\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+c\int y\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+c^2\int y^2\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+\cdots$$

or $\int_0^1\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^k\,dy=\frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^\alpha}$, donc

$$\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}\,dy=\Gamma(\alpha)\left(1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\cdots\right),$$

donc en désignant $1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\cdots$ par $L'(\alpha,c)$, on aura

$$\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.\,dy=\Gamma(\alpha).L'(\alpha,c);$$

on obtiendra donc enfin:

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=a^\alpha[A.L'(\alpha,c)+A'.L'(\alpha,c')+A''.L'(\alpha,c'')+\text{etc.}].$$

La fonction $L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)$ peut donc, lorsque m et a sont des nombres entiers, être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $L'(\alpha,c)$. Soit par exemple $m=1$, $a=2$, on aura

$$L(\tfrac{1}{2},\alpha)=\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{1-y}{y^2-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy=-\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+y}\,dy.$$

On a par conséquent $A=-1$ et $c=-1$, donc

$$L(\tfrac{1}{2},\alpha)=-2^\alpha.L'(\alpha,-1)=-2^\alpha\left(1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots\right).$$

Lorsque α est un nombre entier, on sait que la somme de cette série peut s'exprimer par le nombre π ou par le logarithme de 2. Soit $\alpha=1$, on a $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log 2$, donc $L(\frac{1}{2},1)=L(\frac{1}{2})=-2\log 2$.

En posant $\alpha=2$, on a $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$, donc

$$L(\tfrac{1}{2}, 2)=-\frac{\pi^2}{3}.$$

On peut en général exprimer $L(\frac{1}{2},2n)$ par $-M\pi^{2n}$, où M est un nombre rationnel.

II.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$.

Dans les Exercices de calcul intégral de M. *Legendre* on trouve l'expression suivante

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx=\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)} \tag{1}$$

donc

$$\log\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx=\log\Gamma a+\log\Gamma c-\log\Gamma(a+c).$$

En différentiant par rapport à a et à c, et remarquant que

$$\frac{dl\,\Gamma(a)}{da}=La-C$$

on aura

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx}=La-L(a+c),$$

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x).dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx}=Lc-L(a+c).$$

Ces deux équations combinées avec l'équation (1), donnent

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}lx.dx=[La-L(a+c)]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l(1-x)dx = [Lc - L(a+c)]\frac{\Gamma a \,.\, \Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

La dernière équation peut aussi se déduire de l'avant-dernière en échangeant a et c entre eux, et mettant $1-x$ à la place de x.

Lorsque $c=1$, on a, à cause de $L(1+a)=\frac{1}{a}+L(a)$, et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$,

$$\int_0^1 x^{a-1}\, lx \,.\, dx = -\frac{1}{a^2},$$

résultat connu, et

$$\int_0^1 x^{a-1}l(1-x)\,dx = -\frac{L(1+a)}{a},$$

donc

$$L(1+a) = -a\int_0^1 x^{a-1}l(1-x)\,dx.$$

En développant $(1-x)^{c-1}$ en série, on trouvera

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 x^{a-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx - (c-1)\int_0^1 x^a l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$+\frac{(c-1)(c-2)}{2}\int_0^1 x^{a+1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx - \cdots;$$

or $\int_0^1 x^k l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{(k+1)^2}$, donc

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{a^2} - (c-1)\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\cdot\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^2} + \cdots;$$

mais $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = [L(a+c) - La]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$, donc

(2) $$[L(a+c)-La]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$
$$= \frac{1}{a^2} - (c-1)\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}\cdot\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^2} + \cdots.$$

Soit par exemple $c=1-a$, on a

$$L(a+c) - La = -La,\quad \Gamma(a+c)=1,$$
$$\Gamma a\,.\,\Gamma c = \Gamma a\,.\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

donc

$$-La\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a(a+1)}{2(a+2)^2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2\,.\,3\,.\,(a+3)^2} + \cdots.$$

Soit $a=\frac{1}{2}$, on a $-La = 2\log 2$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, donc

$$2\pi\log 2 = 2^2 + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{2\,.\,5^2} + \frac{3\,.\,5}{2^2\,.\,3\,.\,7^2} + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2^3\,.\,3\,.\,4\,.\,9^2} + \cdots.$$

Soit $a=1-x$, $c=2x-1$; on aura en remarquant que $L(1-x)-Lx = \pi\cot\pi x$,

$$-\pi\,.\cot\pi x\cdot\frac{\Gamma(1-x)\,.\,\Gamma(2x-1)}{\Gamma x}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2x-2}{(2-x)^2} + \frac{(2x-2)(2x-3)}{2(3-x)^2} - \frac{(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{2\,.\,3\,.\,(4-x)^2} + \cdots.$$

En échangeant a et c entre eux dans l'équation (2), on obtient

$$[L(a+c)-Lc]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)} = \frac{1}{c^2} - (a-1)\frac{1}{(c+1)^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2} - \cdots.$$

En divisant l'équation (2) par celle-ci membre à membre, on aura

$$\frac{L(a+c)-L(a)}{L(a+c)-L(c)} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{c-1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2(a+2)^2} - \cdots}{\frac{1}{c^2} - \frac{a-1}{(c+1)^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2} - \cdots}.$$

De cette équation on tirera, en y faisant $c=1$,

$$L(1+a) = a - \frac{a(a-1)}{2^2} + \frac{a(a-1)(a-2)}{2\,.\,3^2} - \cdots,$$

donc en écrivant $-a$ pour a,

$$L(1-a) = -\left(a + \frac{a(a+1)}{2^2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2\,.\,3^2} + \cdots\right).$$

et en mettant $a-1$ au lieu de a,

$$La = (a-1) - \frac{(a-1)(a-2)}{2^2} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{2\,.\,3^2} - \cdots;$$

on tire de là

$$L(1-a) - La = \pi\,.\cot\pi a$$
$$= -\left(2a-1 + \frac{a(a+1)-(a-1)(a-2)}{2^2} + \frac{a(a+1)(a+2)+(a-1)(a-2)(a-3)}{2\,.\,3^2} + \cdots\right).$$

Si dans l'équation (2) on pose $a=1$, on aura

$$[L(c+1)-L(1)]\frac{\Gamma(1)\,\Gamma c}{\Gamma(c+1)} = \frac{L(1+c)}{c} = 1 - \frac{(c-1)}{2^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2\,.\,3^2} - \cdots$$

comme auparavant. En faisant $c=0$, il vient

$$\frac{L(1)}{0}=\frac{0}{0}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Nous avons vu que

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\,l\left(\frac{1}{x}\right)dx=[L(a+c)-La]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

En différentiant cette équation logarithmiquement, il viendra

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\,l\left(\frac{1}{x}\right)dx}=-\frac{\frac{dL(a+c)}{da}-\frac{dL(a)}{da}}{L(a+c)-La}+L(a+c)-L(a).$$

Or on a $\frac{dLa}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2}$; soit $\Sigma\frac{1}{a^2}=L'(a)$, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2.dx$$
$$=[(L'(a+c)-L'a)+(L(a+c)-La)^2]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$

Si l'on désigne $\Sigma\frac{1}{a^3}$ par $L''a$, $L\frac{1}{a^4}$ par $L'''a$ etc., on obtiendra par des différentiations répétées

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 dx=[2(L''(a+c)-L''a)+$$
$$3(L'(a+c)-L'a)(L(a+c)-La)+(L(a+c)-La)^3]\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}.$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^4 dx=\text{etc.}$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à a, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2 dx$$
$$=2\left(\frac{1}{a^3}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{(c-1)(c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(a+2)^3}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^3}+\cdots\right),$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 dx$$
$$=2\,.\,3\left(\frac{1}{a^4}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{(c-1)(c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(a+2)^4}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^4}+\cdots\right),$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$$
$$=\Gamma\alpha\left(\frac{1}{a^\alpha}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^\alpha}+\frac{(c-1)(c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(a+2)^\alpha}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{(a+3)^\alpha}+\cdots\right).$$

Or la fonction $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$ est exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', $\ldots L^{(\alpha-1)}$, donc la somme de la série infinie

$$\frac{1}{a^\alpha}-\frac{c-1}{1}\cdot\frac{1}{(a+1)^\alpha}+\frac{(c-1)(c-2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{(a+2)^\alpha}-\cdots$$

est exprimable par ces mêmes fonctions.

Il y a encore d'autres intégrales qui peuvent s'exprimer par les mêmes fonctions. En effet, soit

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi(a,c),$$

on obtiendra par des différentiations successives par rapport à c,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}\,l(1-x)\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi'c,$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^2\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi''c,$$
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^3\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi'''c,$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^{\beta-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\varphi^{(\beta-1)}c.$$

Or on a $\varphi(a,c)=(-1)^{\alpha-1}\frac{d^{\alpha-1}\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}}{da^{\alpha-1}}$, donc en substituant cette valeur, on obtiendra l'expression générale suivante,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}[l(1-x)]^n(lx)^m\,dx=\frac{d^{m+n}\frac{\Gamma a\,.\,\Gamma c}{\Gamma(a+c)}}{da^m\,.\,dc^n},$$

et cette fonction est, comme nous venons de le voir, exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', $\ldots L^{(n-1)}\ldots L^{(m-1)}$.

On sait que

$$\text{(A)}\qquad \int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \Gamma\alpha.$$

En différentiant par rapport à α on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{d\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = \frac{\frac{d\,\Gamma\alpha}{\Gamma\alpha}\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = \Gamma\alpha\,.\,\frac{dl\,\Gamma\alpha}{d\alpha},$$

or $\frac{dl\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = L\alpha - C$, donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{x}\right) dx = \Gamma\alpha\,.(L\alpha - C);$$

en différentiant encore, on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^2 dx = \Gamma\alpha\,[(L\alpha - C)^2 - L'\alpha)].$$

Une expression générale pour la fonction

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx$$

peut se trouver aisément comme il suit. En différentiant l'équation (A) n fois de suite, on aura:

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{d^n\,\Gamma\alpha}{d\alpha^n}.$$

or $\frac{dl\,\Gamma\alpha}{d\alpha} = L\alpha - C$, donc

$$l\,\Gamma\alpha = \int (L\alpha - C)\,d\alpha \quad\text{et}\quad \Gamma\alpha = e^{\int [L\alpha - C]\,d\alpha},$$

donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(ll\frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n},$$

fonction qui est exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'' . . . L^{n-1}

Si l'on met e^y à la place de x, on a $l\frac{1}{x} = -y$, $ll\frac{1}{x} = l(-y)$, $dx = e^y\,dy$; donc

$$\int_{-\infty}^0 (-y)^{\alpha-1}[l(-y)]^n e^y\,dy = \frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n},$$

ou en changeant y en $-y$

$$\int_\infty^0 y^{\alpha-1}(ly)^n e^{-y}\,dy = -\frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n}.$$

Faisant $y = z^{\frac{1}{\alpha}}$, on a $y^{\alpha-1}dy = \frac{1}{\alpha}\,d(y)^\alpha = \frac{1}{\alpha}\,dz$, $ly = \frac{1}{\alpha}\,lz$, $e^{-y} = e^{-\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)}$, et par suite

$$\int_0^\infty (lz)^n e^{-\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)} dz = \alpha^{n+1}\,\frac{d^n e^{\int (L\alpha - C)\,d\alpha}}{d\alpha^n}.$$

Si l'on met α au lieu de $\frac{1}{\alpha}$, on aura en posant $n = 0$,

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}.\,dx = \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right);$$

en posant $n = 1$,

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^\alpha} dx = -\frac{1}{\alpha^2}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right) - C\right].$$

Si par exemple $\alpha = 2$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad\text{et}\quad \int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(C + 2\log 2),$$

en remarquant que $L(\frac{1}{2}) = -2\log 2$. Il faut se rappeler que la constante C est égale à 0,57721566 . . .

Si dans l'équation (A) on pose $x = y^n$, on trouvera

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha},\ \text{lorsque } n \text{ est positif,}$$

$$\int_\infty^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = \frac{\Gamma\alpha}{-n^\alpha},\ \text{lorsque } n \text{ est négatif.}$$

En différentiant cette équation par rapport à α, on aura, lorsque n est positif,

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} ll\left(\frac{1}{y}\right) dy = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}(L\alpha - C - \log n).$$

Soit $y = e^{-x}$, on trouvera

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{\alpha-1}\,lx\,.\,dx = \frac{\Gamma\alpha}{n^\alpha}(L\alpha - C - \log n),$$

résultat qu'on peut aussi déduire aisément de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha} l\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{\alpha^2}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right) - C\right].$$

III.

SOMMATION DE LA SÉRIE $y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\cdots+\varphi(n)x^n$, n ÉTANT UN NOMBRE ENTIER POSITIF FINI OU INFINI, ET $\varphi(n)$ UNE FONCTION ALGÉBRIQUE RATIONELLE DE n.

La fonction $\varphi(n)$ étant algébrique et rationnelle, elle est résoluble en termes de la forme An^α et $\frac{B}{(\alpha+n)^\beta}$; y est donc résoluble en plusieurs séries de la forme

$$p=A.0^\alpha+Ax+A.2^\alpha x^2+A.3^\alpha x^3+\cdots+An^\alpha x^n \quad \text{et}$$
$$q=\frac{B}{\alpha^\beta}+\frac{Bx}{(\alpha+1)^\beta}+\frac{Bx^2}{(\alpha+2)^\beta}+\frac{Bx^3}{(\alpha+3)^\beta}+\cdots+\frac{Bx^n}{(\alpha+n)^\beta}.$$

La sommation de la série proposée est donc réduite à la sommation de ces deux séries.

Considérons d'abord la quantité p. $A.0^\alpha$ étant une quantité constante et A facteur de chaque terme de la série, nous poserons

$$\frac{p-A.0^\alpha}{A}=f(\alpha,x).$$

On a donc

$$f(\alpha,x)=x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+4^\alpha x^4+\cdots+n^\alpha x^n;$$

divisant par x, on a

$$\frac{f(\alpha,x)}{x}=1+2^\alpha x+3^\alpha x^2+\ldots+n^\alpha x^{n-1};$$

en multipliant par dx et intégrant, il vient

$$\int\frac{f(\alpha,x)}{x}\,dx=x+2^{\alpha-1}x^2+3^{\alpha-1}x^3+\cdots+n^{\alpha-1}x^n;$$

en comparant cette série à la précédente, on voit que

$$\int\frac{f(\alpha,x)}{x}\,dx=f(\alpha-1,x);$$

différentiant et multipliant par x, on tire de là

$$f(\alpha,x)=\frac{x.df(\alpha-1,x)}{dx},$$

ou en écrivant $f\alpha$ au lieu de $f(\alpha,x)$,

$$f\alpha=\frac{x.df(\alpha-1)}{dx}.$$

Connaissant la valeur de $f(\alpha-1)$, on peut en déduire celle de $f(\alpha)$.

Mettant $\alpha-1$ au lieu de α, on aura

$$f(\alpha-1)=\frac{x.df(\alpha-2)}{dx};$$

en substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$f\alpha=\frac{x.d[x.df(\alpha-2)]}{dx^2};$$

mettant de plus $\alpha-2$, $\alpha-3$ etc. au lieu de α, on obtient

$$f(\alpha-2)=\frac{x.df(\alpha-3)}{dx},$$
$$f(\alpha-3)=\frac{x.df(\alpha-4)}{dx},$$
$$f(\alpha-4)=\frac{x.df(\alpha-5)}{dx},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(2)=\frac{x.df(1)}{dx},$$
$$f(1)=\frac{x.df(0)}{dx}.$$

Substituant ces valeurs on trouve

$$f\alpha=\frac{x.d(x.d(x\ ..d(x.df(0)\ldots)))}{dx^\alpha}.$$

On a ainsi la fonction $f\alpha$ déterminée par la fonction $f(0)$. Or on a

$$f(0)=x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x},$$

donc

$$f(\alpha)=x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+\cdots+n^\alpha x^n=\frac{x.d\left(x.d\left(x\ldots d\frac{x(1-x^n)}{1-x}\ldots\right)\right)}{dx^\alpha}$$

On connaît ainsi la fonction $f(\alpha)$; et par suite on connaît de même la fonction p. Si la suite va à l'infini, on a $f(0)=\frac{x}{1-x}$, et par conséquent

$$x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+4^\alpha x^4+\cdots=\frac{x.d\left(x.d\left(x\ldots d\frac{x}{1-x}\ldots\right)\right)}{dx^\alpha}.$$

En faisant successivement $\alpha=0,1,2,3$ etc., on aura

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=\frac{x.d\frac{x}{1-x}}{dx}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\cdots=\frac{x.d\left(x.d\frac{x}{1-x}\right)}{dx^2}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

. . . .

Considérons ensuite l'autre série, savoir

$$F\alpha=\frac{1}{a^\alpha}+\frac{x}{(a+1)^\alpha}+\frac{x^2}{(a+2)^\alpha}+\frac{x^3}{(a+3)^\alpha}+\cdots+\frac{x^n}{(a+n)^\alpha};$$

en multipliant par x^a et différentiant, on aura

$$\frac{d(F\alpha.x^a)}{dx}=\frac{x^{a-1}}{a^{\alpha-1}}+\frac{x^a}{(a+1)^{\alpha-1}}+\frac{x^{a+1}}{(a+2)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{x^{n+a-1}}{(a+n)^{\alpha-1}};$$

ou bien

$$\frac{d(F\alpha.x^a)}{dx}=x^{a-1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}}+\frac{x}{(a+1)^{\alpha-1}}+\frac{x^2}{(a+2)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{x^n}{(a+n)^{\alpha-1}}\right).$$

On voit par là que

$$\frac{d(F\alpha.x^a)}{dx}=x^{a-1}F(\alpha-1);$$

en multipliant par dx et intégrant, on obtient

$$F\alpha=\frac{\int dx.x^{a-1}F(\alpha-1)}{x^a}.$$

On peut donc déterminer $F\alpha$ par $F(\alpha-1)$.

En mettant maintenant $\alpha-1$, $\alpha-2$, etc. au lieu de α, on aura

$$F(\alpha-1)=\frac{\int dx.x^{a-1}F(\alpha-2)}{x^a},$$

$$F(\alpha-2)=\frac{\int dx.x^{a-1}F(\alpha-3)}{x^a},$$

. . . .

$$F(2)=\frac{\int dx.x^{a-1}F(1)}{x^a},$$

$$F(1)=\frac{\int dx.x^{a-1}F(0)}{x^a}.$$

On peut donc déterminer $F(\alpha)$ par $F(0)$, car on aura par substitution:

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int dx.x^{a-1}F(0),$$

or $F(0)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc

$$F\alpha=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx.(x^{a-1}-x^{n+a})}{1-x}.$$

Si la série va à l'infini, on a $F(0)=\frac{1}{1-x}$, et par suite

$$F\alpha=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}\int dx\,\frac{x^{a-1}}{1-x}.$$

Les quantités constantes dues aux intégrations successives doivent être des valeurs particulières des fonctions $F(0), F(1), F(2)\ldots F(\alpha)$.

Ayant ainsi déterminé les fonctions $f\alpha$ et $F\alpha$, on en tirera aisément la somme de la série proposée

$$\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\cdots+\varphi(n)x^n.$$

Le procédé dont on a fait usage pour trouver la somme de cette série à l'aide de la série $1+x+x^2+\cdots+x^n$, peut aussi servir à la détermination de la somme de la série

$$z=f(0)\varphi(0)+f(1)\varphi(1)x+f(2)\varphi(2)x^2+\cdots+f(n)\varphi(n)x^n$$

à l'aide de la série

$$f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\cdots+f(n)x^n,$$

où fn désigne une fonction quelconque, et φn une fonction rationnelle. En effet la série z est résoluble en plusieurs séries de la forme

$$A(f(1)x+2^\alpha f(2)x^2+3^\alpha f(3)x^3+\cdots+n^\alpha f(n)x^n),\ \text{et}$$

$$A'\left(\frac{f(0)}{a^\alpha}+\frac{f(1)x}{(a+1)^\alpha}+\frac{f(2)x^2}{(a+2)^\alpha}+\cdots+\frac{f(n)x^n}{(a+n)^\alpha}\right).$$

Si l'on pose $f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(n)x^n = s$, on trouvera précisément de la même manière que ci-dessus:

$$f(1)x + 2^a f(2)x^2 + 3^a f(3)x^3 + \cdots + n^a f(n)x^n = \frac{x \,.\, d(x \,.\, d(x \ldots d(x \,.\, ds)))}{dx^a}$$

$$\frac{f(0)}{a^a} + \frac{f(1)}{(a+1)^a} \cdot x + \frac{f(2)}{(a+2)^a} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f(n)}{(a+n)^a} \cdot x^n$$

$$= \frac{1}{x^a} \int \frac{dx}{x} \cdot \int \frac{dx}{x} \cdots \int \frac{dx}{x} \int dx \,.\, x^{a-1} \,.\, s.$$

Soit par exemple $s = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \cdots$,
on aura

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a+1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a+2} + \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{a+3} + \cdots = \frac{1}{x^a}\int dx \,.\, x^{a-1} e^x$$

$$= \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{(a-1)}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} - \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{x^3} + \cdots\right) + \frac{c}{x^a}.$$

IV.

SUR L'EQUATION DIFFÉRENTIELLE $dy + (p + qy + ry^2)\,dx = 0$, OÙ p, q ET r SONT DES FONCTIONS DE x SEUL.

On peut toujours réduire l'équation $dy + (p + qy + ry^2)\,dx = 0$, à une autre de la forme

$$dy + (P + Qy^2)\,dx = 0.$$

Première méthode. Soit $y = z + r'$, on aura

$$dz + dr' + (p + qr' + r'^2 r)\,dx + z(q + 2rr')\,dx + rz^2\,dx = 0.$$

Pour que le terme multiplié par z disparaisse, il faut poser $q + 2rr' = 0$, d'où l'on tire $r' = -\frac{q}{2r}$. Cette valeur étant substituée pour r', donne

(1) $$dz + \left(p - \frac{q^2}{4r} - \frac{dq}{dx}\frac{1}{2r} + \frac{dr}{dx}\frac{q}{2r^2} + rz^2\right)dx = 0;$$

donc

$$dz + (P + Qz^2)\,dx = 0,$$

$$\text{où } P = p - \frac{q^2}{4r} - \frac{dq}{dx}\frac{1}{2r} + \frac{dr}{dx}\frac{q}{2r^2} \text{ et } Q = r.$$

Seconde méthode. Soit $y = zr'$ et par conséquent $dy = r'dz + zdr'$, on aura

$$r'dz + p\,dx + z(dr' + r'q\,dx) + z^2 r'^2 r\,dx = 0.$$

Pour que z s'évanouisse, on fera $dr' + r'q\,dx = 0$, d'où l'on tire

$$r' = e^{-\int q\,dx}.$$

En substituant cette valeur pour r' on aura

(2) $$dz+\left(p\,e^{\int q dx}+r\,e^{-\int q dx}z^2\right)dx=0.$$

Si donc on peut résoudre les équations (1) ou (2), on peut aussi résoudre la proposée, et réciproquement.

L'équation (2) est résoluble dans le cas où l'on a

$$p\,e^{\int q dx}=ar\,e^{-\int q dx};$$

car on a alors

$$\frac{dz}{a+z^2}=-\frac{p}{a}e^{\int q dx}\,dx;$$

donc

$$\text{arc tang}\,\frac{z}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\int p\,dx\,e^{\int q dx};$$

et de là

$$z=-\sqrt{a}\,\text{tang}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int p\,dx\,e^{\int q dx}\right);$$

mais $y=zr'=z\,e^{-\int q dx}$; donc

$$y=-\sqrt{a}\,.\,e^{-\int q dx}\,\text{tang}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int e^{\int q dx}p\,dx\right);$$

maintenant $pe^{\int q dx}=ar\,e^{-\int q dx}$; donc

$$e^{2\int q dx}=\frac{ar}{p},\quad e^{\int q dx}=\sqrt{\frac{ar}{p}},$$

$$\int q\,dx=\tfrac{1}{2}\log\frac{ar}{p},\quad q\,dx=\tfrac{1}{2}\frac{dr}{r}-\tfrac{1}{2}\frac{dp}{p},\quad q=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\right).$$

L'équation $dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$, deviendra donc

$$dy+\left[p+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{rdx}-\frac{dp}{pdx}\right)y+ry^2\right]dx=0,$$

et son intégrale sera

$$y=-\sqrt{\frac{p}{r}}\,\text{tang}\left(\int\sqrt{rp}\,dx\right),$$

ou bien, en mettant pour la tangente son expression exponentielle,

$$y=\sqrt{-\frac{p}{r}}\cdot\frac{1-e^{2\int dx\sqrt{-pr}}}{1+e^{2\int dx\sqrt{-pr}}}.$$

Soit par exemple $p=-r=\frac{1}{x}$, on aura

$$dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x}\right)dx=0,$$

$$y=\frac{1-e^{2\int\frac{dx}{x}}}{1+e^{2\int\frac{dx}{x}}}=\frac{1-cx^2}{1+cx^2}.$$

En supposant $p=x^m$ et $r=x^n$, on aura $\frac{dr}{rdx}=\frac{n}{x}$ et $\frac{dp}{pdx}=\frac{m}{x}$,

$$\sqrt{\frac{p}{r}}=x^{\frac{m-n}{2}},\ \int dx\sqrt{pr}=\int x^{\frac{m+n}{2}}dx=c+\frac{2}{m+n+2}x^{\frac{1}{2}(m+n+2)};$$

donc

$$dy+\left(x^m+\tfrac{1}{2}(n-m)\frac{y}{x}+x^ny^2\right)dx=0,$$

$$y=-x^{\frac{m-n}{2}}\,\text{tang}\left(c+\frac{2}{m+n+2}x^{\frac{1}{2}(m+n+2)}\right).$$

Soit $n=-m-2$, on aura

$$dy+\left(x^m-(m+1)\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^{m+2}}\right)dx=0,$$

$$y=-x^{m+1}\,\text{tang}\,(k+\log x)=-x^{m+1}\,\text{tang}\,(\log k'x),$$

d'où l'on tire

$$k'x=e^{-\text{arc tang}\,(y\,x^{-m-1})}.$$

Si dans l'équation (2) on met $-\frac{1}{z}$ à la place de z, on aura

$$dz+\left(r\,e^{-\int q dx}+p\,e^{\int q dx}z^2\right)dx=0,$$

et puisque $y=-\frac{1}{z}e^{-\int q dx}$, on a

$$dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0.$$

Lorsque $p=0$, on a $dy+(qy+ry^2)\,dx=0$,

$$dz=-r\,.\,e^{-\int q dx}dx,\quad z=-\int r e^{-\int q dx}dx,$$

$$y=\frac{1}{e^{\int q dx}\int e^{-\int q dx}r\,dx}.$$

Telle est donc l'intégrale de l'équation

$$dy+(qy+ry^2)\,dx=0.$$

Si dans l'équation proposée on fait $\frac{p}{c}=\frac{q}{2a}=r$, on obtient

$$c\,dy+(c+2ay+y^2)\,p\,dx=0,$$

donc

$$\int\frac{c\,dy}{c+2ay+y^2}=-\int p\,dx,$$

or $\frac{dy}{y^2+2ay+c}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-c}}\left(\frac{dy}{y+a-\sqrt{a^2-c}}-\frac{dy}{y+a+\sqrt{a^2-c}}\right)$; donc

$$-\int p\,dx=\frac{c}{2\sqrt{a^2-c}}\left[\log\left(y+a-\sqrt{a^2-c}\right)-\log\left(y+a+\sqrt{a^2-c}\right)\right],$$

ou bien

$$-\int p\,dx=\log\left(\frac{y+a-\sqrt{a^2-c}}{y+a+\sqrt{a^2-c}}\right)^{\frac{c}{2\sqrt{a^2-c}}},$$

et de là

$$\frac{y+a-\sqrt{a^2-c}}{y+a+\sqrt{a^2-c}}=e^{-\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx},$$

$$y=-a+\sqrt{a^2-c}\,\frac{1+e^{-\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}{1-e^{-\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}.$$

Dans ce cas, l'équation (2) devient

$$c\,dz+\left(ce^{\frac{2a}{c}\int p\,dx}+e^{-\frac{2a}{c}\int p\,dx}z^2\right)p\,dx=0;$$

mais on a

$$z=\frac{y}{r'}=y\,e^{\int q\,dx}=y\,e^{\frac{2a}{c}\int p\,dx};$$

donc on aura

$$z=e^{\frac{2a}{c}\int p\,dx}\left\{-a+\sqrt{a^2-c}\,\frac{1+e^{-\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}{1-e^{-\frac{2}{c}\sqrt{a^2-c}\int p\,dx}}\right\}.$$

Si l'on fait $p=1$, ce qui ne diminue pas la généralité, on a $\int p\,dx=x+k$, et par là

$$c\,dz+\left(c\,e^{\frac{2a}{c}(x+k)}+e^{-\frac{2a}{c}(x+k)}z^2\right)dx=0;$$

$$z=e^{\frac{2a}{c}(x+k)}\left\{-a+\sqrt{a^2-c}\,\frac{1+e^{-\frac{2}{c}(x+k)\sqrt{a^2-c}}}{1-e^{-\frac{2}{c}(x+k)\sqrt{a^2-c}}}\right\}.$$

Lorsqu'on connaît une valeur de y qui satisfait à l'équation

$$dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0,$$

on pourra aisément trouver l'intégrale complète. Soit y' cette valeur particulière. On fera $y=y'+z$, et on aura

$$dz+dy'+(p+qy'+ry'^2)\,dx+[z(q+2ry')+rz^2]\,dx=0.$$

Or par l'hypothèse on a $dy'+(p+qy'+ry'^2)\,dx=0$; donc

$$dz+[(q+2ry')z+rz^2]\,dx=0,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$z=\frac{1}{e^{\int(q+2ry')\,dx}\int e^{-\int(q+2ry')\,dx}\,r\,dx};$$

mais $y=z+y'$, donc

$$y=y'+\frac{e^{-\int(q+2ry')\,dx}}{\int e^{-\int(q+2ry')\,dx}\,r\,dx}.$$

Soit par exemple

$$dy+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{ay}{x}+cy^2\right)dx=0.$$

Faisant $y=\frac{b}{x}$ on trouvera

$$-b+1+ab+cb^2=0,$$

et de là

$$b=-\frac{a-1}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{a-1}{2c}\right)^2-\frac{1}{c}};$$

donc $y'=\left\{\frac{1-a}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2-\frac{1}{c}}\right\}\frac{1}{x}$ est une intégrale particulière, et comme on a $q=\frac{a}{x}$, $r=c$, l'intégrale complète de l'équation proposée est

$$y=\left\{\frac{1-a}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2-\frac{1}{c}}\right\}\frac{1}{x}+\frac{e^{-\left\{1\pm\sqrt{(1-a)^2 4-c}\right\}\int\frac{dx}{x}}}{c\int dx\,e^{-\left\{1\pm\sqrt{(1-a)^2 4-c}\right\}\int\frac{dx}{x}}},$$

et en effectuant les intégrations,

$$y=\left\{\frac{1-a}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2-\frac{1}{c}}\right\}\frac{1}{x}+\frac{k\,x^{-\left\{1\pm\sqrt{(1-a)^2 4-c}\right\}}}{C\pm\frac{ck}{\sqrt{(1-a)^2-4c}}\,x^{\mp\sqrt{(1-a)^2 4-c}}},$$

où k et C sont les constantes arbitraires dues aux intégrations.

Quoiqu'on puisse, comme on vient de le voir, résoudre plusieurs cas en employant des substitutions convenables, il semble pourtant plus commode pour l'intégration des équations différentielles de chercher le facteur par lequel l'équation doit être multipliée pour devenir intégrable. Soit z ce facteur, de sorte que l'équation

$$zdy+z(p+qy^2)\,dx=0$$

soit une différentielle complète. On doit avoir, comme on sait,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d[z(p+qy^2)]}{dy},$$

et en effectuant la différentiation,

$$\frac{dz}{dx}=(p+qy^2)\frac{dz}{dy}+2qyz.$$

Soit $z=e^r$, on aura

$$\frac{dr}{dx}=(p+qy^2)\frac{dr}{dy}+2qy.$$

Quoique cette équation en général ne soit pas moins difficile à résoudre que la proposée, elle peut néanmoins servir à découvrir plusieurs cas particuliers dans lesquels celle-ci est résoluble.

Supposons par exemple que $r=a\log(\alpha+\beta y)$, où a est une quantité constante, et α et β des fonctions de x seul. En substituant cette valeur de r on obtiendra

$$\frac{a\alpha'+a\beta' y}{\alpha+\beta y}-\frac{a\beta(p+qy^2)}{\alpha+\beta y}-2qy=0,$$

où $\alpha'=\frac{d\alpha}{dx}$ et $\beta'=\frac{d\beta}{dx}$. En multipliant par $\alpha+\beta y$ on aura

$$a\alpha'-a\beta p+(a\beta'-2\alpha q)y-(a\beta q+2\beta q)y^2=0,$$

d'où

$$a\alpha'-a\beta p=0,\ a\beta'-2\alpha q=0,\ a\beta q+2\beta q=0.$$

La dernière équation donne $a=-2$, et en substituant cette valeur dans les deux autres équations, on obtiendra

$$\alpha'-\beta p=0,\ \beta'+\alpha q=0.$$

Si de ces deux équations on tirait α et β en p et q, on parviendrait à une équation différentielle du second ordre; mais on trouve $p=\frac{\alpha'}{\beta}$ et $q=-\frac{\beta'}{\alpha}$; si donc ces deux conditions ont lieu, on a $r=-2\log(\alpha+\beta y)$, et par suite $z=e^r=\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2}$.

Il suit de là que l'équation différentielle

$$dy+\left(\frac{\alpha'}{\beta}-\frac{\beta'}{\alpha}\cdot y^2\right)dx=0$$

peut être intégrée, et que le facteur qui la rend intégrable est $\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2}$. L'intégrale sera

$$\int\frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2}+fx=0,$$

c'est-à-dire

$$fx-\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)}=0.$$

Pour trouver fx, il faut différentier, ce qui donnera

$$\left(f'x+\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'+2\beta\beta' y}{\beta^2(\alpha+\beta y)^2}\right)dx+\frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2}=0;$$

mais $dy=-\frac{(\alpha\alpha'-\beta\beta' y^2)}{\alpha\beta}dx$, donc

$$f'x+\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'+2\beta\beta' y}{\beta^2(\alpha+\beta y)^2}-\frac{\alpha\alpha'-\beta\beta' y^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta y)^2}=0,$$

d'où en réduisant,

$$f'x=-\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}\ \text{ et }\ fx=-\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}dx.$$

L'intégrale de l'équation

$$dy+\left(\frac{\alpha'}{\beta}-\frac{\beta'}{\alpha}y^2\right)dx=0$$

sera donc

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)}+\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}dx=0,$$

d'où l'on tire

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta^2\left(C-\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}dx\right)}.$$

Supposons $\beta'=\alpha=\frac{dp}{dx}$, on aura

$$dy+\left(\frac{d^2p}{p\,dx^2}-y^2\right)dx=0,$$

$$y=-\frac{dp}{pdx}+\frac{1}{p^2\left(C-\int\frac{dx}{p^2}\right)}.$$

Voy. Memorie della società Italiana t. III, p. 236.

V.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$.

Cette équation peut toujours être réduite à la forme

$$zdz+(P+Qz)\,dx=0.$$

A cet effet je pose $y=\alpha+\beta z$; donc $dy=d\alpha+\beta dz+zd\beta$; donc en substituant:

$$(\alpha+s+\beta z)(d\alpha+zd\beta+\beta dz)+(p+q\alpha+q\beta z+r\alpha^2+2r\alpha\beta z+r\beta^2z^2)\,dx=0,$$

ou bien

$$\left(z+\frac{\alpha+s}{\beta}\right)dz+\frac{(s+\alpha)\,d\alpha+(p+q\alpha+r\alpha^2)\,dx}{\beta^2}$$
$$+z\,\frac{(\alpha+s)\,d\beta+\beta\,[d\alpha+(q+2r\alpha)\,dx]}{\beta^2}+\left(rdx+\frac{d\beta}{\beta}\right)z^2=0.$$

Pour que cette équation soit de la forme $zdz+(P+Qz)\,dx=0$, on doit avoir les deux équations suivantes:

$$\frac{\alpha+s}{\beta}=0,\ \text{et}\ rdx+\frac{d\beta}{\beta}=0,$$

donc

$$\alpha=-s,\ \beta=e^{-\int rdx},$$

$$P=(p-qs+rs^2)\,e^{2\int rdx},\ Q=\left[q-2rs-\frac{ds}{dx}\right]e^{\int rdx}.$$

Si donc dans l'équation $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$, au lieu de y on met $\alpha+\beta z=-s+z\,e^{-\int rdx}$, on obtient

$$zdz+\left[(p-qs+rs^2)\,e^{2\int rdx}+\left(q-2rs-\frac{ds}{dx}\right)e^{\int rdx}z\right]dx=0.$$

Donc, si cette équation est résoluble, celle-là l'est de même. Cela a lieu si

$$p-qs+rs^2=0,$$

ou bien si

$$q-2rs-\frac{ds}{dx}=0.$$

Dans le premier cas on a

$$dz+\left(q-2rs-\frac{ds}{dx}\right)e^{\int rdx}\,dx=0,$$

d'où

$$z=\int\left(2rs+\frac{ds}{dx}-q\right)e^{\int rdx}\,dx;$$

et dans le second cas

$$zdz+(p-qs+rs^2)\,e^{2\int rdx}\,dx=0,$$

d'où

$$z=\sqrt{2\int(qs-p-rs^2)\,e^{2\int rdx}\,dx}.$$

L'équation différentielle

$$(y+s)\,dy+(qs-rs^2+qy+ry^2)\,dx=0$$

a donc pour intégrale

$$y=-s+e^{-\int rdx}\int\left(2rs+\frac{ds}{dx}-q\right)e^{\int rdx}\,dx;$$

et celle-ci:

$$(y+s)\,dy+\left[p+\left(2rs+\frac{ds}{dx}\right)y+ry^2\right]dx=0$$

a pour intégrale

$$y=-s+e^{-\int rdx}\sqrt{2\int\left(rs^2-p+\frac{sds}{dx}\right)e^{2\int rdx}\,dx}.$$

On peut aussi donner une autre forme à l'équation

$$zdz+(P+Qz)\,dx=0.$$

En mettant $y+\alpha$ au lieu de z on a

$$(y+\alpha)(dy+d\alpha)+[P+Q(y+\alpha)]\,dx=0;$$

c'est-à-dire

$$(y+\alpha)\,dy+\alpha d\alpha+Pdx+Q\alpha dx+y(Qdx+d\alpha)=0.$$

En posant maintenant

$$Qdx+d\alpha=0, \text{ où } \alpha=-\int Qdx,$$

on aura

$$\left(y-\int Qdx\right)dy+Pdx=0,$$

et en faisant $-\int Qdx=R$ et par conséquent $Q=-\frac{dR}{dx}$,

$$(y+R)\,dy+Pdx=0, \text{ d'où } dy+\frac{P}{y+R}\,dx=0.$$

Si l'on fait $Pdx=dv$, on a

$$dv+(y+fv)\,dy=0.$$

Je vais maintenant chercher le facteur qui rend l'équation

$$ydy+(p+qy)\,dx=0$$

une différentielle complète. Soit z ce facteur, on aura

$$\frac{d(zy)}{dx}=\frac{d[z(p+qy)]}{dy},$$

ou bien

$$y\frac{dz}{dx}-(p+qy)\frac{dz}{dy}-zq=0.$$

Soit $z=e^r$, on aura

$$\frac{dz}{dx}=z\frac{dr}{dx} \text{ et } \frac{dz}{dy}=z\frac{dr}{dy}.$$

Donc

$$y\frac{dr}{dx}-(p+qy)\frac{dr}{dy}-q=0.$$

Supposons $r=\alpha+\beta y$, on aura

$$y\left(\frac{d\alpha}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}\right)-(p+qy)\beta-q=0,$$

c'est-à-dire

$$y^2\frac{d\beta}{dx}+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-q\beta\right)-p\beta-q=0.$$

On en tire

$$\frac{d\beta}{dx}=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}-q\beta=0,\quad p\beta+q=0.$$

et par conséquent

$$\beta=-c,\quad \alpha=-c\int qdx,\quad -cp+q=0.$$

Le facteur cherché sera donc

$$e^r=e^{-c\left(y+\int qdx\right)}.$$

Soit maintenant $r=\alpha+\beta y+\gamma y^2$, on aura

$$y\left(\frac{d\alpha}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}+y^2\frac{d\gamma}{dx}\right)-(p+qy)(\beta+2\gamma y)-q=0;$$

donc en développant

$$y^3\frac{d\gamma}{dx}+y^2\left(\frac{d\beta}{dx}-2q\gamma\right)+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-\beta q-2p\gamma\right)-q-p\beta=0.$$

On en conclut

$$\frac{d\gamma}{dx}=0,\quad \frac{d\beta}{dx}-2q\gamma=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}-\beta q-2p\gamma=0,\quad q+p\beta=0,$$

d'où

$$\gamma=c,\quad \beta=2c\int qdx,\quad q+2cp\int qdx=0,$$

$$\alpha=2c\int dx\left(q\int qdx+p\right)=2c\int qdx\int qdx-\int\frac{qdx}{\int qdx}:$$

L'équation deviendra donc

$$ydy-\frac{qdx}{2c\int qdx}+qydx=0,$$

et la facteur sera e^r, où

$$r=2c\int qdx\int qdx-\int\frac{qdx}{\int qdx}+2cy\int qdx+cy^2.$$

Faisant $q=1$ et écrivant $-c$ au lieu de $2c$, on a $\frac{qdx}{\int qdx}=\frac{dx}{x+a}$ et

$$ydy+\left(\frac{1}{c(x+a)}+y\right)dx=0;$$

et le facteur deviendra

$$\frac{1}{x+a}\,e^{-\frac{c}{2}(x+y+a)^2}.$$

Lorsque $a=0$, on a

$$ydy+\left(y+\frac{1}{cx}\right)dx=0,$$

et le facteur sera $\frac{1}{x}\,e^{-\frac{c}{2}(x+y)^2}$. L'intégrale sera donc

$$\frac{1}{x}\int ye^{-\frac{c}{2}(y+x)^2}\,dy+fx=0,$$

ou bien

$$\int y\,e^{-\frac{c}{2}(y+s)^2}\,dy+Fx=0.$$

Supposons en général

$$r=\alpha+\alpha_1 y+\alpha_2 y^2+\alpha_3 y^3+\cdots+\alpha_n y^n;$$

on aura en différentiant successivement par rapport à x et à y:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha_1}{dx}y+\frac{d\alpha_2}{dx}y^2+\frac{d\alpha_3}{dx}y^3+\cdots+\frac{d\alpha_n}{dx}y_n,$$

$$\frac{dr}{dy}=\alpha_1+2\alpha_2 y+3\alpha_3 y^2+\cdots+n\alpha_n y^{n-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$y\frac{dr}{dx}-(p+qy)\frac{dr}{dy}-q=0,$$

et réduisant, on obtiendra

$$\frac{d\alpha_n}{dx}y^{n+1}+\left(\frac{d\alpha_{n-1}}{dx}-nq\alpha_n\right)y^n+\left(\frac{d\alpha_{n-2}}{dx}-(n-1)q\alpha_{n-1}-np\alpha_n\right)y^{n-1}$$
$$+\left(\frac{d\alpha_{n-3}}{dx}-(n-2)q\alpha_{n-2}-(n-1)p\alpha_{n-1}\right)y^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{d\alpha_1}{dx}-2q\alpha_2-3p\alpha_3\right)y^2+\left(\frac{d\alpha}{dx}-q\alpha_1-2p\alpha_2\right)y-q-p\alpha_1=0.$$

On a donc les équations

$$\frac{d\alpha_n}{dx}=0,\ \frac{d\alpha_{n-1}}{dx}-nq\alpha_n=0,\ \frac{d\alpha_{n-2}}{dx}-(n-1)q\alpha_{n-1}-np\alpha_n=0\ \text{etc.},$$
$$\frac{d\alpha_1}{dx}-2q\alpha_2-3p\alpha_3=0,\ \frac{d\alpha}{dx}-q\alpha_1-2p\alpha_2=0,\ q+p\alpha_1=0.$$

Voilà $n+2$ équations, mais comme le nombre des quantités inconnues n'est que $n+1$, il restera après l'élimination de celles-ci, entre p et q une équation de condition, qui par conséquent doit avoir lieu pour que le facteur puisse avoir la forme supposée. En intégrant on aura

$$\alpha_n=c,\ \alpha_{n-1}=n\int\alpha_n q\,dx,\ \alpha_{n-2}=(n-1)\int\alpha_{n-1}q\,dx+n\int\alpha_n p\,dx,$$
$$\alpha_{n-3}=(n-2)\int\alpha_{n-2}q\,dx+(n-1)\int\alpha_{n-1}p\,dx,\ \ldots$$
$$\alpha_{n-m}=(n-m+1)\int\alpha_{n-m+1}q\,dx+(n-m+2)\int\alpha_{n-m+2}p\,dx,\ \ldots$$
$$\alpha_1=2\int\alpha_2 q\,dx+3\int\alpha_3 p\,dx,\ \alpha=\int\alpha_1 q\,dx+2\int\alpha_2 p\,dx,\ q+p\alpha_1=0,$$

ou bien

$$\alpha_n=c,\ \alpha_{n-1}=nc\int q\,dx,\ \alpha_{n-2}=n(n-1)c\int q\,dx\int q\,dx+nc\int p\,dx,$$

$$\alpha_{n-3}=n(n-1)(n-2)c\int q\,dx\int q\,dx\int q\,dx+n(n-2)c\int q\,dx\int p\,dx$$
$$+n(n-1)c\int p\,dx\int q\,dx\ \text{etc.}$$

Soit par exemple $n=3$, on aura

$$\alpha_3=c,\ \alpha_2=3c\int q\,dx,\ \alpha_1=6c\int q\,dx\int q\,dx+3c\int p\,dx,$$
$$\alpha=6c\int q\,dx\int q\,dx\int q\,dx+3c\int q\,dx\int p\,dx+6c\int p\,dx\int q\,dx.$$

L'équation de condition deviendra donc

$$q+6cp\int q\,dx\int q\,dx+3cp\int p\,dx=0.$$

Soit $r=\frac{1}{\alpha+\beta y}$, on a $\frac{dr}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}+y\frac{d\beta}{dx}}{(\alpha+\beta y)^2}$, $\frac{dr}{dy}=-\frac{\beta}{(\alpha+\beta y)^2}$; on aura donc

$$\frac{-y\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}y\right)}{(\alpha+\beta y)^2}+\frac{\beta(p+qy)}{(\alpha+\beta y)^2}-q=0,$$

d'où en réduisant

$$y^2\left(\frac{d\beta}{dx}+\beta^2 q\right)+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-\beta q+2\alpha\beta q\right)+\alpha^2 q-\beta p=0;$$

donc

$$\frac{d\beta}{dx}+\beta^2 q=0,\ \frac{d\alpha}{dx}-\beta q+2\alpha\beta q=0,\ \alpha^2 q-\beta p=0;$$

donc

$$\beta=\frac{1}{\int q\,dx},\ \alpha=\sqrt{\frac{p}{q\int q\,dx}},\ \frac{d\alpha}{dx}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q\int q\,dx}{p}}\cdot\frac{d}{dx}\frac{p}{q\int q\,dx};$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q\int q\,dx}{p}}\cdot\frac{d}{dx}\frac{p}{q\int q\,dx}-\frac{q}{\int q\,dx}+2\sqrt{\frac{p}{q\int q\,dx}}\cdot\frac{q}{\int q\,dx}=0.$$

Si l'on fait $q=-\frac{d\beta}{\beta^2 dx}$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{\beta dx}-2\alpha\frac{d\beta}{\beta dx}=0,$$

d'où l'on tire successivement

$$\alpha=C\beta^2+\tfrac{1}{2}=\frac{C}{(\int q\,dx)^2}+\tfrac{1}{2},$$

$$(C\beta^2+\tfrac{1}{2})^2 q-\beta p=0,\ p=\frac{(C\beta^2+\frac{1}{2})^2 q}{\beta};$$

mais $\beta=\dfrac{1}{\int q\,dx}$, donc

$$p=\left(\frac{C}{(\int q\,dx)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 q\int q\,dx.$$

On rendra donc l'équation

$$y\,dy+\left[\left(\frac{C}{(\int q\,dx)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 q\int q\,dx+qy\right]dx=0$$

intégrable en la multipliant par le facteur $e^{\frac{1}{\alpha+\beta y}}$, où

$$\alpha+\beta y=\frac{C}{(\int q\,dx)^2}+\tfrac{1}{2}+\frac{y}{\int q\,dx}.$$

Faisant $q=1$ on aura

$$y\,dy+\left[\left(\frac{C}{(x+a)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2(x+a)+y\right]dx=0,$$

et le facteur deviendra $e^{\frac{C+(x+a)y+\frac{1}{2}(x+a)^2}{(x+a)^2}}$. Si $a=0$ et $C=a$, on a

$$y\,dy+\left(\frac{a^2}{x^3}+\frac{a}{x}+\tfrac{1}{4}x+y\right)dx=0,$$

et le facteur sera $e^{\frac{a}{x^2}+\frac{y}{x}+\frac{1}{2}}$.

Supposons maintenant $r=a\log(\alpha+\beta y)$, on aura

$$\frac{dr}{dx}=\frac{a\frac{d\alpha}{dx}+ay\frac{d\beta}{dx}}{\alpha+\beta y},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{a\beta}{\alpha+\beta y};$$

par conséquent

$$y\left\{\frac{a\frac{d\alpha}{dx}+ay\frac{d\beta}{dx}}{\alpha+\beta y}\right\}-(p+qy)\frac{a\beta}{\alpha+\beta y}-q=0,$$

et en réduisant

$$y^2 a\frac{d\beta}{dx}+y\left(a\frac{d\alpha}{dx}-a\beta q-\beta q\right)-ap\beta-\alpha q=0;$$

donc

$$\frac{d\beta}{dx}=0,\quad a\frac{d\alpha}{dx}-a\beta q-\beta q=0,\quad ap\beta+\alpha q=0;$$

donc

$$\beta=c,\ \alpha=\frac{(a+1)c}{a}\int q\,dx;\ acp+\frac{(a+1)c}{a}q\int q\,dx=0,\ p=-\frac{a+1}{a^2}q\int q\,dx.$$

L'équation deviendra donc

$$y\,dy-\left(\frac{a+1}{a^2}q\int q\,dx-qy\right)dx=0,$$

et le facteur sera

$$e^r=\left(\frac{(a+1)c}{a}\int q\,dx+cy\right)^a.$$

Soit $q=1$, on aura

$y\,dy-\left(\dfrac{a+1}{a^2}(x+b)-y\right)dx=0$, et le facteur sera $\left(\dfrac{(a+1)}{a}(x+b)+y\right)^a$;

mais l'équation étant homogène, la résolution ne présente aucune difficulté.

Soit ensuite $r=a\log(y+\alpha)+a'\log(y+\alpha')$; donc

$$\frac{dr}{dx}=\frac{a\frac{d\alpha}{dx}}{y+\alpha}+\frac{a'\frac{d\alpha'}{dx}}{y+\alpha'},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{a}{y+\alpha}+\frac{a'}{y+\alpha'},$$

$$y\left\{\frac{a\frac{d\alpha}{dx}}{y+\alpha}+\frac{a'\frac{d\alpha'}{dx}}{y+\alpha'}\right\}-(p+qy)\left(\frac{a}{y+\alpha}+\frac{a'}{y+\alpha'}\right)-q=0;$$

donc en réduisant

$$y^2\left(a\frac{d\alpha}{dx}+a'\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a'+1)q\right)$$
$$+y\left(a\alpha'\frac{d\alpha}{dx}+a'\alpha\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a')p-q(a\alpha'+a'\alpha+\alpha+\alpha')\right)$$
$$-p(a\alpha'+a'\alpha)-q\alpha\alpha'=0.$$

On aura donc les trois équations suivantes

$$a\frac{d\alpha}{dx}+a'\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a'+1)q=0,$$

$$a\alpha'\frac{d\alpha}{dx}+a'\alpha\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a')p-q(a\alpha'+a'\alpha+\alpha+\alpha')=0,$$

$$p(a\alpha'+a'\alpha)+q\alpha\alpha'=0.$$

La première équation donne

$$a\alpha+a'\alpha'=(a+a'+1)\int q\,dx;$$

donc

$$\alpha'=\frac{(a+a'+1)\int q\,dx-a\alpha}{a'}=\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q\,dx-\frac{a}{a'}\alpha.$$

En substituant cette valeur dans la seconde et la troisième équation on obtiendra

$$\left[\left(a+\frac{a}{a'}(1+a)\right)\int q\,dx-\frac{a^2}{a'}\alpha\right]\frac{d\alpha}{dx}+\alpha\left((a'+a+1)\,q-a\,\frac{d\alpha}{dx}\right)-(a+a')\,p$$
$$-q\left[(a+1)\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q\,dx-(a+1)\frac{a}{a'}\alpha+(a'+1)\,\alpha\right]=0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{dx}\left[\left(a+\frac{a(a+1)}{a'}\right)\int q\,dx-\alpha\left(\frac{a^2}{a'}+a\right)\right]$$
$$+\alpha\left[(a'+a+1)q+q\left((a+1)\frac{a}{a'}-(a'+1)\right)\right]-(a+a')\,p$$
$$-q\left(a+1+\frac{(a+1)^2}{a'}\right)\int q\,dx=0,$$

et

$$p\left[\left(a+\frac{a}{a'}(1+a)\right)\int q\,dx-\frac{a^2}{a'}\alpha+a'\alpha\right]+q\alpha\left[\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q\,dx-\frac{a}{a'}\alpha\right]=0.$$

Soit $a+a'=0$, ou $a'=-a$; on aura

$$\frac{d\alpha}{dx}\int q\,dx+\alpha q-\frac{a+1}{a}q\int q\,dx=0,$$

donc

$$\frac{d\alpha}{dx}+\alpha\frac{q}{\int q\,dx}-\frac{a+1}{a}q=0,$$

et en intégrant

$$\alpha=\frac{a+1}{a}e^{-\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}}\int e^{\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}}q\,dx;$$

or $\int\frac{q\,dx}{\int q\,dx}=\log\left(\int q\,dx\right)$; donc

$$\alpha=\frac{(a+1)\int\left(\int q\,dx\right)q\,dx}{a\int q\,dx};$$

c'est-à-dire

$$\alpha=\frac{(a+1)\left[C+\frac{1}{2}\left(\int q\,dx\right)^2\right]}{a\int q\,dx}=\frac{a+1}{2a}\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx},$$

ou bien

$$\alpha=\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx},$$

donc

$$\alpha'=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx};$$

maintenant on a

$$p=-\frac{q\alpha\alpha'}{a\alpha'+a'\alpha}=\frac{q}{4\int q\,dx}\left[\left(\int q\,dx+\frac{2k}{\int q\,dx}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\int q\,dx\right)^2\right].$$

Il suit de là que l'équation

$$y\,dy+\left\{\frac{q}{4\int q\,dx}\left[\left(\int q\,dx+\frac{2k}{\int q\,dx}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\int q\,dx\right)^2\right]+qy\right\}dx=0$$

devient intégrable quand on la multiplie par le facteur

$$e^r=\left\{\frac{y+\frac{1}{2}\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx}+\frac{1}{2a}\int q\,dx}{y+\frac{1}{2}\int q\,dx+\frac{k}{\int q\,dx}-\frac{1}{2a}\int q\,dx}\right\}^a.$$

En faisant $q=1$, l'équation deviendra

$$y\,dy+\left\{\frac{1}{4x}\left[\left(x+\frac{2k}{x}\right)^2-\frac{x^2}{a^2}\right]+y\right\}dx=0,$$

et le facteur sera

$$\left\{\frac{y+\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{x}}{y+\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{x}}\right\}^a.$$

VI.

DETERMINATION D'UNE FONCTION AU MOYEN D'UNE ÉQUATION QUI NE CONTIENT QU'UNE SEULE VARIABLE.

1.

La fonction fx étant donnée, trouver la fonction φx par l'équation

$$\varphi x + 1 = \varphi(fx).$$

Soit $x = \psi y$ et $fx = \psi(y+1)$, on aura

$$1 + \varphi\psi y = \varphi\psi(y+1),$$

ou bien

$$\varphi\psi(y+1) - \varphi\psi y = 1,$$

c'est-à-dire

$$\Delta\varphi\psi y = 1;$$

donc en intégrant

$$\varphi\psi y = y + \chi y,$$

où χy désigne une fonction périodique quelconque de y, de sorte que

$$\chi(y+1) = \chi y.$$

Or $\psi y = x$, d'où l'on tire $y = {}'\psi x$, et par conséquent

(1) $$\varphi x = {}'\psi x + \chi({}'\psi x).$$

Il s'agit maintenant de trouver la fonction ${}'\psi x$. Cela se fait comme il suit. On a $x = \psi y$ et $fx = \psi(y+1)$; donc

(2) $$\psi(y+1) = f\psi y.$$

Voilà une équation aux différences finies, d'où l'on tire ψy, et cette fonction étant connue, on a

$$x = \psi y \quad \text{d'où} \quad y = {}'\psi x.$$

Par ce qui précède on voit que le problème est toujours résoluble, et qu'il a même une infinité de solutions.

Supposons par exemple $fx = x^n$, l'équation (2) deviendra

$$\psi(y+1) = (\psi y)^n.$$

En mettant ici successivement $y+1$, $y+2$, etc. à la place de y, on aura

$$\psi(y+2) = [\psi(y+1)]^n = (\psi y)^{n^2},$$
$$\psi(y+3) = [\psi(y+2)]^n = (\psi y)^{n^3},$$

et en général

$$\psi(y+x) = (\psi y)^{n^x}.$$

En faisant $y = 0$ et $\psi(0) = a$, on a $\psi x = a^{n^x}$, et par suite $\psi y = a^{n^y}$; or $\psi y = x$; donc $a^{n^y} = x$, d'où $n^y = \frac{\log x}{\log a}$, et

$$y = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n};$$

donc

$${}'\psi x = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}.$$

L'équation (1) deviendra donc

$$\varphi x = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}\right),$$

ce qui donne la fonction cherchée.

Si l'on met x^n au lieu de x, on aura

$$\varphi(x^n) = \frac{\log\log x^n - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log\log x^n - \log\log a}{\log n}\right)$$
$$= \frac{\log n + \log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log n + \log\log x - \log\log a}{\log n}\right)$$
$$= 1 + \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(1 + \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}\right) = 1 + \varphi x.$$

La fonction a donc la propriété demandée. Le cas le plus simple est celui où $\chi y = 0$ et $a = e$, $\log e$ étant $= 1$; on aura alors

$$\varphi x = \frac{\log\log x}{\log n}, \quad \text{et} \quad \frac{\log\log x}{\log n} + 1 = \frac{\log\log x^n}{\log n}.$$

2.

Considérons en général l'équation

$$F[x, \varphi(fx), \varphi(\psi x)] = 0,$$

où F, f et ψ sont des fonctions données, et où l'on cherche la fonction φ.

Soit $fx = y_t$ et $\psi x = y_{t+1}$, l'équation devient

$$F(x, \varphi y_t, \varphi y_{t+1}) = 0.$$

Soit $\varphi y_t = u_t$, on aura $\varphi y_{t+1} = u_{t+1}$, et par conséquent

$$F(x, u_t, u_{t+1}) = 0.$$

De l'équation $fx = y_t$ on déduit $x = {}'fy_t$; donc en substituant cette valeur dans l'équation $\psi x = y_{t+1}$, on obtient

(1) $$y_{t+1} = \psi({}'fy_t).$$

De cette équation on tire y_t, et par conséquent aussi $x = {}'fy_t$, en fonction de t. Cette valeur étant substituée dans l'équation $F(x, u_t, u_{t+1}) = 0$, donne

(2) $$F({}'fy_t, u_t, u_{t+1}) = 0.$$

De cette équation on tire $u_t = \theta t = \varphi(y_t)$. Faisant $y_t = z$, on trouvera $t = {}'y_z$; donc enfin

$$\varphi z = \theta({}'y_z).$$

Exemple. Trouver la fonction φ déterminée par l'équation

$$(\varphi x)^2 = \varphi(2x) + 2.$$

Soit $\varphi x = u_t = \varphi y_t$, et $\varphi(2x) = u_{t+1} = \varphi(y_{t+1})$, on aura

$$(u_t)^2 = u_{t+1} + 2.$$

On en tire

$$u_{t+1} = u_t^2 - 2.$$

Supposons

$$u_1 = a + \frac{1}{a},$$

donc

$$u_2 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$u_3 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

et en général

$$u_t = a^{2^{t-1}} + \frac{1}{a^{2^{t-1}}}.$$

Ayant $x = y_t$ et $2x = y_{i+1}$, on a $y_{t+1} = 2y_t$, d'où l'on tire

$$y_t = c \,.\, 2^{t-1} = x;$$

donc

$$2^{t-1} = \frac{x}{c}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$\varphi x = u_t = a^{2^{t-1}} + a^{-2^{t-1}},$$

donne

$$\varphi x = a^{\frac{x}{c}} + a^{-\frac{x}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^x + \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{-x},$$

ou bien

$$\varphi x = b^x + b^{-x}.$$

On a en effet

$$(b^x + b^{-x})^2 = b^{2x} + b^{-2x} + 2.$$

VII.

PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DE LA FONCTION $y=\varphi x$ DÉTERMINÉE PAR L'ÉQUATION $fy\,dy-dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\dots(a_m-y)}=0$, fy ÉTANT UNE FONCTION QUELCONQUE DE y QUI NE DEVIENT PAS NULLE OU INFINIE LORSQUE $y=a,\ a_1,\ a_2,\dots a_m$.

Soit pour abréger $(a-y)(a_1-y)\dots(a_m-y)=\psi y$, on aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{fy}\sqrt{\psi y}.$$

En différentiant on aura un résultat de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{\sqrt{\psi y}}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{P}{fy},$$

où P est une fonction qui ne devient pas infinie lorsque $\psi y=0$. En différentiant de nouveau, on aura

$$\frac{d^3y}{dx^3}=P_1\frac{dy}{dx}=\frac{P_1}{fy}\sqrt{\psi y};$$

de même

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{P_2}{\sqrt{\psi y}}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{P_2}{fy},\quad \frac{d^5y}{dx^5}=P_3\frac{dy}{dx}=\frac{P_3}{fy}\sqrt{\psi y},$$

etc.

où P, P_1, P_2, P_3 etc. sont des fonctions de y qui ne deviennent pas infinies lorsque $\psi y=0$.

Cela posé, considérons l'équation

$$\varphi(x+v)=y+v^2Q_2+v^4Q_4+v^6Q_6+\cdots$$
$$+\sqrt{\psi y}\,(vQ_1+v^3Q_3+v^5Q_5+\cdots),$$

où Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 etc. sont des fonctions qui ne deviennent pas infinies lorsque $\psi y=0$. Supposons que y ait une valeur qui rende ψy égale à zéro, par exemple $y=a$, on aura

$$\varphi(\alpha+v)=a+v^2Q_2+v^4Q_4+v^6Q_6+\cdots;$$

Q_2, Q_4, etc. sont ici des constantes, et α est la valeur de x qui répond à $y=a$, et qui est déterminée par l'expression

$$\alpha=\int^a\frac{fy\,.\,dy}{\sqrt{\psi y}}.$$

La fonction $\varphi(\alpha+v)$ est donc une fonction paire de v. On a par conséquent

$$\varphi(\alpha+v)=\varphi(\alpha-v),$$

d'où l'on déduit, en mettant $\alpha-v$ au lieu de v,

$$\varphi(2\alpha-v)=\varphi v.$$

Cela posé, on a de même

$$\varphi(2\alpha_1-v)=\varphi v,$$

en désignant par α_1 l'expression $\int^{a_1}\frac{fy\,dy}{\sqrt{\psi y}}$, donc aussi

$$\varphi(2\alpha-v)=\varphi(2\alpha_1-v),$$

d'où l'on tire, en mettant $2\alpha_1-v$ au lieu de v,

$$\varphi(2\alpha-2\alpha_1+v)=\varphi v,$$

ce qui nous montre que la fonction φ est périodique. De là on déduit ensuite sans peine

$$\varphi[\pm 2n(\alpha-\alpha_1)+v]=\varphi v,$$

n étant un nombre entier quelconque.

On a de la même manière

$$\varphi[\pm 2n(\alpha-\alpha_2)+v]=\varphi v,$$

donc

$$\varphi[\pm 2n(\alpha-\alpha_1)+v]=\varphi[\pm 2n_1(\alpha-\alpha_2)+v]$$

d'où

$$\varphi[v\pm 2n(\alpha-\alpha_1)\pm 2n_1(\alpha-\alpha_2)]=\varphi v.$$

En général on aura

$$\varphi v=\varphi[v+2n(\alpha-\alpha_1)+2n_1(\alpha-\alpha_2)+2n_2(\alpha-\alpha_3)+\cdots+2n_{m-1}(\alpha-\alpha_m)],$$

n, n_1, n_2 etc. étant des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs. Ou bien

$$\varphi v=\varphi(v+2n\alpha+2n_1\alpha_1+2n_2\alpha_2+\cdots+2n_m\alpha_m),$$
$$\text{où } n+n_1+n_2+\cdots+n_m=0.$$

Si l'on suppose que $\varphi k=0$, on aura, en faisant $v=k$,

$$\varphi(k+2n\alpha+2n_1\alpha_1+\cdots+2n_m\alpha_m)=0.$$

On peut donc trouver une infinité de solutions de l'équation

$$\varphi x=0,$$

savoir

$$x=k+2(n\alpha+n_1\alpha_1+\cdots+n_m\alpha_m),$$
$$\text{où } n+n_1+n_2+\cdots+n_m=0.$$

On peut aussi trouver une infinité de valeurs de x qui rendent φx infinie. En effet il suffit pour cela de changer y en $\frac{1}{z}$ dans l'équation

$$x=\int\frac{fy.dy}{\sqrt{\psi y}},$$

et de chercher ensuite par la méthode précédente les valeurs de x qui rendent $z=0$.

Pour éclaircir ce qui précède je donnerai un exemple. Soit $fy=1$, $\psi y=1-y^2=(1-y)(1+y)$, on aura

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\text{arc}\sin y,$$

donc

$$y=\sin x=\varphi x.$$

Dans cet exemple on a $a=1$, $a_1=-1$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_1=-\frac{\pi}{2}$, on a donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}+v\right),$$
$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}-v\right)=\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+v\right),$$
$$\varphi(\pi-v)=\varphi v,\ \ \varphi v=\varphi(v\pm 2n\pi),\ \ 0=\varphi(\pm n\pi).$$

VIII.

SUR UNE PROPRIÉTÉ REMARQUABLE D'UNE CLASSE TRÈS ÉTENDUE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Soit y une fonction de x, déterminée par l'équation

$$0=sy+t\frac{dy}{dx},$$

s et t étant deux fonctions entières de x. Soit de même

$$\int rydx=tvy,$$

on aura en différentiant

$$ry=\left(v\frac{dt}{dx}+t\frac{dv}{dx}\right)y+vt\frac{dy}{dx};$$

or $t\frac{dy}{dx}=-sy$, donc

$$r=v\left(\frac{dt}{dx}-s\right)+t\frac{dv}{dx}.$$

Cela posé, soit $v=\frac{1}{x-a}$, on aura

$$r=\frac{\frac{dt}{dx}-s}{x-a}-\frac{t}{(x-a)^2},$$

ou, en faisant $t=\varphi x$ et $s=fx$,

$$r=\frac{\varphi' x-fx}{x-a}-\frac{\varphi x}{(x-a)^2}.$$

Or on voit sans peine que

$$\frac{\varphi' x - fx}{x-a} = \frac{\varphi' a - fa}{x-a} + \varphi'' a - f' a + \frac{\varphi''' a - f'' a}{2}(x-a) + \frac{\varphi'''' a - f''' a}{2\,.\,3}(x-a)^2 + \cdots,$$

$$\frac{\varphi x}{(x-a)^2} = \frac{\varphi a}{(x-a)^2} + \frac{\varphi' a}{x-a} + \frac{\varphi'' a}{2} + \frac{\varphi''' a}{2\,.\,3}(x-a) + \frac{\varphi'''' a}{2\,.\,3\,.\,4}(x-a)^2 + \cdots,$$

donc on aura

$$r = -\frac{\varphi a}{(x-a)^2} - \frac{fa}{x-a} + R;$$

d'où l'on tire, en multipliant par ydx et intégrant,

$$vty = -\varphi a \int \frac{ydx}{(x-a)^2} - fa \int \frac{ydx}{x-a} + \int Rydx.$$

Cela posé, soit $z = \int \frac{ydx}{x-a}$, on aura en différentiant

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{ydx}{(x-a)^2},$$

donc en substituant

$$vty = -\varphi a \frac{dz}{da} - fa\,.\,z + \int Rydx.$$

Soit $z = qp$, on aura en substituant

$$\int Rydx - vty = \varphi a\,.\,p\frac{dq}{da} + \varphi a\,.\,q\frac{dp}{da} + pq\,.\,fa.$$

Soit

$$\varphi a \frac{dq}{da} + fa\,.\,q = 0,$$

on aura en faisant $y = \psi x$,

$$q = \psi a, \quad \int Rydx - \frac{t\,.\,\psi x}{x-a} = \varphi a\,.\,\psi a\,\frac{dp}{da},$$

donc

$$p = \iint \frac{R\,.\,\psi x}{\varphi a\,.\,\psi a}\,dx\,da - \int \frac{\psi x\,.\,\varphi x}{\psi a\,.\,\varphi a}\,\frac{da}{x-a},$$

donc

(1) $$\frac{1}{\psi a}\int \frac{\psi x\,.\,dx}{x-a} - \psi x\,.\,\varphi x \int \frac{da}{(a-x)\,\psi a\,.\,\varphi a} = \iint \frac{R\,.\,\psi x}{\varphi a\,.\,\psi a}\,dx\,da,$$

où l'on a

$$R = \tfrac{1}{2}\varphi'' a - f' a + (\tfrac{1}{3}\varphi''' a - \tfrac{1}{2} f'' a)(x-a) + \left(\frac{1}{2\,.\,4}\varphi'''' a - \frac{1}{2\,.\,3} f''' a\right)(x-a)^2 + \cdots.$$

Le second membre de l'équation (1) peut toujours, comme on le voit, être développé en plusieurs termes de la forme:

$$A_{m,n} \int \frac{a^m\,.\,da}{\varphi a\,.\,\psi a} \int x^n \psi x\,.\,dx.$$

En faisant

$$\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots,$$

$$fx = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots,$$

il est facile de trouver

$$A_{m,n} = (n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1};$$

on aura donc la formule générale:

(2) $$\frac{1}{\psi a}\int \frac{\psi x\,.\,dx}{x-a} - \psi x\,.\,\varphi x \int \frac{da}{(a-x)\,\varphi a\,.\,\psi a}$$
$$= \Sigma\left[(n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\right] \int \frac{a^m\,da}{\varphi a\,.\,\psi a} \int x^n \psi x\,.\,dx.$$

Il faut remarquer que les intégrales par rapport à x doivent être prises depuis une valeur de x qui réduit à zéro la fonction $\psi x\,.\,\varphi x$, et celles par rapport à a depuis une valeur de cette variable qui réduit à zéro la fonction $\frac{1}{\psi a}$.

La fonction $y = \psi x$ étant déterminée par l'équation

$$y\,.\,fx + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0,$$

il est clair qu'on a

$$y = e^{-\int \frac{fx}{\varphi x} dx};$$

donc y est de la forme

$$\psi x = \frac{e^p}{(x-\delta)^m (x-\delta_1)^{m_1} \ldots},$$

m, m_1, etc. étant des nombres positifs moindre que l'unité. p est une fonction rationnelle, qui s'évanouit lorsque tous les facteurs de φx sont inégaux, si en même temps le degré de fx est moindre que celui de φx.

Supposons maintenant qu'on prenne les intégrales entre deux limites de x qui rendent égale à zéro la fonction $\varphi x\,.\,\psi x$, on aura

(3) $$\int \frac{\psi x\,.\,dx}{x-a} = \psi a\,\Sigma\left[(n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\right] \int x^n \psi x\,dx\,.\int \frac{a^m\,da}{\varphi a\,.\,\psi a}.$$

Si l'on donne de même à a une valeur telle que $\frac{1}{\psi a}$ devienne égal à zéro, on aura

(4) $$0 = \Sigma\left[(n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\right] \int x^n \psi x\,dx\,.\int \frac{a^m\,da}{\varphi a\,.\,\psi a}.$$

Il y a un cas remarquable qu'il est important de considérer à part, savoir celui où

$$\frac{1}{\psi x} = \varphi x . \psi x;$$

on a alors

$$\psi x = y = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}},$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\varphi' x}{(\sqrt{\varphi x})^3}.$$

L'équation $y . fx + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0$ devient donc

$$fx - \tfrac{1}{2}\varphi' x = 0,$$

donc

$$\beta_m = \tfrac{1}{2}(m+1)\alpha_{m+1}.$$

L'équation (2) devient dans ce cas:

$$(5) \qquad \sqrt{\varphi a}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}} - \Sigma\tfrac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n+2}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{\varphi x}}\int\frac{a^n da}{\sqrt{\varphi a}}.$$

Pour vérifier cette formule dans un cas particulier, soit $\varphi x = 1 - x^2$, on aura $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$,

$$\sqrt{1-a^2}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}} = 0,$$

ce qui est vrai, car on a

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}\log\frac{ax-1+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}{ax-1-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\log\frac{ax-1+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}{ax-1-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Si l'on fait $\varphi x = (1-x^2)(1-c^2x^2)$, on a $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -(1+c^2)$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = c^2$, donc

$$\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} - \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

$$= c^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}} - c^2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}.$$

Cette formule contient implicitement les propriétés remarquables des fonctions elliptiques que M. *Legendre* a données dans ses Ex. de calc. int. t. 1. p. 134 et sq.

IX.

EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Soit y une fonction qui satisfasse à l'équation

$$(1) \qquad 0 = sy + s_1\frac{dy}{dx} + s_2\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + s_m\frac{d^my}{dx^m},$$

$s, s_1, s_2 \ldots$ étant des fonctions entières de x.

Soit de même

$$\int rydx = vy + v_1\frac{dy}{dx} + \cdots + v_{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + ts_m\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

on aura en différentiant:

$$ry = \frac{dv}{dx}y + \left(v + \frac{dv_1}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(v_1 + \frac{dv_2}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + \left(v_{m-2} + \frac{d(ts_m)}{dx}\right)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + ts_m\frac{d^my}{dx^m};$$

or

$$s_m\frac{d^my}{dx^m} = -sy - s_1\frac{dy}{dx} - s_2\frac{d^2y}{dx^2} - \cdots - s_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}};$$

donc on aura en substituant et égalant ensuite à zéro les divers coefficiens:

$$-r = st - \frac{dv}{dx},$$

$$v = s_1t - \frac{dv_1}{dx},$$

$$v_1 = s_2t - \frac{dv_2}{dx},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_{m-2} = s_{m-1}t - \frac{d(ts_m)}{dx}.$$

De là on tire aisément

$$(2)\quad \begin{cases} v_{\mu-1} = s_\mu t - \dfrac{d(s_{\mu+1}t)}{dx} + \dfrac{d^2(s_{\mu+2}t)}{dx^2} - \cdots, \\ -r = s.t - \dfrac{d(s_1 t)}{dx} + \dfrac{d^2(s_2 t)}{dx^2} - \cdots \pm \dfrac{d^{m-1}(s_{m-1}t)}{dx^{m-1}} \mp \dfrac{d^m(s_m t)}{dx^m}. \end{cases}$$

Cela posé, soit $t = \dfrac{1}{x-a}$, et supposons que

$$(3)\quad \begin{cases} st = \dfrac{s'}{x-a} + R, \\ s_1 t = \dfrac{s'_1}{x-a} + R_1, \\ s_2 t = \dfrac{s'_2}{x-a} + R_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ s_{m-1} t = \dfrac{s'_{m-1}}{x-a} + R_{m-1}, \\ s_m t = \dfrac{s'_m}{x-a} + R_m, \end{cases}$$

s', s'_1, s'_2 etc. étant des constantes et R, R_1, $R_2 \dots$ des fonctions entières de x; il est clair que s'_μ est la même fonction de a que s_μ l'est de x. En différentiant on trouvera

$$\frac{d^\mu(s_\mu t)}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Gamma(\mu+1) \frac{s'_\mu}{(x-a)^{\mu+1}} + \frac{d^\mu R_\mu}{dx^\mu},$$

donc la valeur de $-r$ devient

$$(4)\quad -r = \frac{s'}{x-a} + \frac{s'_1}{(x-a)^2} + \Gamma(3)\frac{s'_2}{(x-a)^3} + \cdots + \Gamma(m+1)\frac{s'_m}{(x-a)^{m+1}} + \varrho,$$

en faisant

$$\varrho = R - \frac{dR_1}{dx} + \frac{d^2 R_2}{dx^2} - \cdots \mp \frac{d^m R_m}{dx^m}.$$

Cela posé soit

$$z = \int \frac{y\,dx}{x-a};$$

on aura en différentiant par rapport à a,

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{y\,dx}{(x-a)^2},$$

$$\frac{d^2 z}{da^2} = \Gamma(3) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^m z}{da^m} = \Gamma(m+1) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}};$$

or en multipliant la valeur de r par $y\,dx$ et intégrant, on obtiendra

$$-\chi' = s' \int \frac{y\,dx}{x-a} + s'_1 \int \frac{y\,dx}{(x-a)^2} + s'_2\, \Gamma(3) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^3} + \cdots + s'_m\, \Gamma(m+1) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}} + \int \varrho y\,dx$$

en faisant pour abréger

$$\chi = vy + v_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + v_{m-2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + s_m t \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \text{ et } \chi' = \chi - \chi_0.$$

On a donc l'équation suivante en z

$$(5)\quad -\chi' - \int \varrho y\,dx = s' z + s'_1 \frac{dz}{da} + s'_2 \frac{d^2 z}{da^2} + \cdots + s'_m \frac{d^m z}{da^m}.$$

Supposons maintenant qu'on connaisse l'intégrale complète de l'équation différentielle qui détermine la fonction y, et soit

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_m y_m$$

cette intégrale. On trouvera alors, comme on le voit sans peine,

$$z = y'_1 \int p_1\, da + y'_2 \int p_2\, da + y'_3 \int p_3\, da + \cdots + y'_m \int p_m\, da,$$

où y'_μ est la même fonction de a que y_μ l'est de x, et p_1, $p_2 \dots$ des fonctions rationnelles de y'_1, y'_2, $y'_3 \dots$ et de leurs dérivées, et des fonctions entières de $\chi' + \int \varrho y\,dx$ de la forme

$$p_\mu = \frac{\theta_\mu(\chi' + \int \varrho y\,dx)}{s'_m}.$$

On a donc

$$(6)\quad \int \frac{y\,dx}{x-a} = y'_1 \int \frac{da.\theta_1(\chi' + \int \varrho y\,dx)}{s'_m} + y'_2 \int \frac{da.\theta_2(\chi' + \int \varrho y\,dx)}{s'_m} + \cdots + y'_m \int \frac{da.\theta_m(\chi' + \int \varrho y\,dx)}{s'_m}.$$

Quant aux quantités θ_1, θ_2, etc. on peut remarquer qu'elles sont déterminées par les équations suivantes:

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = y'_1 \theta_1 + y'_2 \theta_2 + y'_3 \theta_3 + \cdots + y'_m \theta_m, \\ 0 = \dfrac{dy'_1}{da}\theta_1 + \dfrac{dy'_2}{da}\theta_2 + \dfrac{dy'_3}{da}\theta_3 + \cdots + \dfrac{dy'_m}{da}\theta_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = \dfrac{d^{m-2}y'_1}{da^{m-2}}\theta_1 + \dfrac{d^{m-2}y'_2}{da^{m-2}}\theta_2 + \dfrac{d^{m-2}y'_3}{da^{m-2}}\theta_3 + \cdots + \dfrac{d^{m-2}y'_m}{da^{m-2}}\theta_m, \\ -1 = \dfrac{d^{m-1}y'_1}{da^{m-1}}\theta_1 + \dfrac{d^{m-1}y'_2}{da^{m-1}}\theta_2 + \dfrac{d^{m-1}y'_3}{da^{m-1}}\theta_3 + \cdots + \dfrac{d^{m-1}y'_m}{da^{m-1}}\theta_m. \end{cases}$$

Les quantités θ_1, θ_2, θ_3... sont donc des fonctions de a seul. Pour appliquer ce qui précède, supposons $m=1$ et $m=2$.

1. Si $m=1$, on aura

$$-1=y'_1\theta_1, \text{ donc } \theta_1=-\frac{1}{y'_1};$$

de même en supposant $\chi_0=0$

$$\chi'=\chi=s_1 ty=\frac{s_1 y}{x-a},$$

donc l'équation (6) deviendra

$$\int\frac{y\,dx}{x-a}=-y'_1\int da\,\frac{1}{s'_1 y'_1}\left(\frac{s_1 y}{x-a}+\int\varrho y\,dx\right),$$

c'est-à-dire

$$\int\frac{y\,dx}{x-a}+s_1 y'_1 y\int\frac{da}{(x-a)y'_1 s'_1}=-y'_1\iint\varrho\,\frac{y}{y'_1 s'_1}\,dx\,da,$$

la même équation que l'équation (1) du mémoire précédent.

2. Si $m=2$, on aura

$$0=y'_1\theta_1+y'_2\theta_2,\quad -1=\frac{dy'_1}{da}\theta_1+\frac{dy'_2}{da}\theta_2,$$

d'où l'on tire

$$\theta_1=\frac{y'_2}{y'_1\frac{dy'_2}{da}-y'_2\frac{dy'_1}{da}},\quad \theta_2=\frac{y'_1}{y'_2\frac{dy'_1}{da}-y'_1\frac{dy'_2}{da}}.$$

Or des deux équations

$$\frac{d^2y'_1}{da^2}+\frac{s'_1}{s'_2}\frac{dy'_1}{da}+\frac{s'}{s'_2}y'_1=0,$$

$$\frac{d^2y'_2}{da^2}+\frac{s'_1}{s'_2}\frac{dy'_2}{da}+\frac{s'}{s'_2}y'_2=0,$$

on tirera

$$y'_2\frac{d^2y'_1}{da^2}-y'_1\frac{d^2y'_2}{da^2}+\frac{s'_1}{s'_2}\left(y'_2\frac{dy'_1}{da}-y'_1\frac{dy'_2}{da}\right)=0;$$

donc

$$y'_2\frac{dy'_1}{da}-y'_1\frac{dy'_2}{da}=e^{-\int\frac{s'_1}{s'_2}da};$$

par conséquent

$$\theta_1=-y'_2\,e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da};\quad \theta_2=y'_1\,e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}.$$

On a de même

$$\chi=vy+s_2 t\frac{dy}{dx};$$

or $v=s_1 t-\frac{d(s_2 t)}{dx}=\frac{s'_1}{x-a}+\frac{s'_2}{(x-a)^2}+R_1-\frac{dR_2}{dx}$, et $s_2 t=\frac{s'_2}{x-a}+R_2$, donc

$$\chi=\frac{s'_1 y+s'_2\frac{dy}{dx}}{x-a}+\frac{s'_2 y}{(x-a)^2}+\left(R_1-\frac{dR_2}{dx}\right)y+R_2\frac{dy}{dx}.$$

L'équation (6) deviendra donc dans ce cas

$$\begin{aligned}
\int\frac{y\,dx}{x-a}=&-y'_1y^1\int\frac{da}{x^1-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2-y'_1\frac{dy^1}{dx^1}\int\frac{da}{x^1-a}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2\\
&+y'_1y^0\int\frac{da}{x^0-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2+y'_1\frac{dy^0}{dx^0}\int\frac{da}{x^0-a}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2\\
&+y'_2y^1\int\frac{da}{x^1-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1+y'_2\frac{dy^1}{dx^1}\int\frac{da}{x^1-a}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1\\
&-y'_2y^0\int\frac{da}{x^0-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1-y'_2\frac{dy^0}{dx^0}\int\frac{da}{x^0-a}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1\\
&-y'_1y^1\int\frac{da}{(x^1-a)^2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2+y'_1y^0\int\frac{da}{(x^0-a)^2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2\\
&+y'_2y^1\int\frac{da}{(x^1-a)^2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1-y'_2y^0\int\frac{da}{(x^0-a)^2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1\\
&-y'_1\iint\frac{y'_2}{s'_2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\varrho y\,dx\,da+y'_2\iint\frac{y'_1}{s'_2}e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\varrho y\,dx\,da\\
&-y'_1y^1\int\frac{da}{s'_2}\left(R^1_1-\frac{dR^1_2}{dx^1}\right)e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2+y'_1y^0\int\frac{da}{s'_2}\left(R^0_1-\frac{dR^0_2}{dx^0}\right)e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2\\
&+y'_2y^1\int\frac{da}{s'_2}\left(R^1_1-\frac{dR^1_2}{dx^1}\right)e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1-y'_2y^0\int\frac{da}{s'_2}\left(R^0_1-\frac{dR^0_2}{dx^0}\right)e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1\\
&-y'_1\frac{dy^1}{dx^1}\int\frac{da}{s'_2}R^1_2e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2+y'_1\frac{dy^0}{dx^0}\int\frac{da}{s'_2}R^0_2e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2\\
&+y'_2\frac{dy^1}{dx^1}\int\frac{da}{s'_2}R^1_2e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1-y'_2\frac{dy^0}{dx^0}\int\frac{da}{s'_2}R^0_2e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_1,
\end{aligned}$$

ou bien en faisant

$$\chi=\left[\left(s_1-\frac{ds_2}{dx}\right)y+s_2\frac{dy}{dx}\right]\frac{1}{x-a}+\frac{ys_2}{(x-a)^2}=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{(x-a)^2},$$

et

$$\chi'=\frac{p^1}{x^1-a}-\frac{p^0}{x^0-a}+\frac{q^1}{(x^1-a)^2}-\frac{q^0}{(x^0-a)^2},$$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{y\,dx}{x-a} &= y'_1\iint\frac{\theta_1}{s'_2}\,\varrho y\,da\,dx + y'_2\iint\frac{\theta_2}{s'_2}\,\varrho y\,da\,dx \\ &+ y'_1 p^1\int\frac{\theta_1}{s'_2}\cdot\frac{da}{x^1-a} - y'_1 p^0\int\frac{\theta_1}{s'_2}\cdot\frac{da}{x^0-a} \\ &+ y'_2 p^1\int\frac{\theta_2}{s'_2}\cdot\frac{da}{x^1-a} - y'_2 p^0\int\frac{\theta_2}{s'_2}\cdot\frac{da}{x^0-a} \\ &+ y'_1 q^1\int\frac{\theta_1}{s'_2}\cdot\frac{da}{(x^1-a)^2} - y'_1 q^0\int\frac{\theta_1}{s'_2}\cdot\frac{da}{(x^0-a)^2} \\ &+ y'_2 q^1\int\frac{\theta_2}{s'_2}\cdot\frac{da}{(x^1-a)^2} - y'_2 q^0\int\frac{\theta_2}{s'_2}\cdot\frac{da}{(x^0-a)^2}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose $s_1=0$, $s_2=0$ pour $x=x^1$ et $x=x^0$, on aura la formule:

$$(9)\qquad \int\frac{y\,dx}{x-a} = c\left(y'_1\iint\frac{y'_2}{s'_2}\,e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\,\varrho y\,da\,dx - y'_2\iint\frac{y'_1}{s'_2}\,e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\,\varrho y\,da\,dx\right).$$

Dans la formule (8) on peut faire $y=\sqrt[n]{p+\sqrt{p^2-q^n}}+\dfrac{q}{\sqrt[n]{p+\sqrt{p^2-q^n}}}$.

Soit

$$z=\int\left(\frac{\alpha_1}{x-a}+\frac{\alpha_2}{(x-a)^2}+\frac{\Gamma(3)\,\alpha_3}{(x-a)^3}+\frac{\Gamma(4)\,\alpha_4}{(x-a)^4}+\cdots+\frac{\Gamma m\,.\,\alpha_m}{(x-a)^m}\right)y\,dx,$$

α_1, $\alpha_2\ldots\alpha_m$ étant des fonctions de a, cherchons s'il est possible de faire en sorte que z satisfasse à l'équation

$$\beta z+\gamma\,\frac{dz}{da}=\int\varrho y\,dx+vy+v_1\,\frac{dy}{dx}+\cdots+v_{m-2}\,\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}+\frac{s_m}{x-a}\cdot\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

En différentiant l'expression de z par rapport à a, on aura

$$\frac{dz}{da}=\int\left\{\frac{\frac{d\alpha_1}{da}}{x-a}+\frac{\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}}{(x-a)^2}+\frac{\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)\Gamma(3)}{(x-a)^3}+\frac{\left(\alpha_3+\frac{d\alpha_4}{da}\right)\Gamma(4)}{(x-a)^4}+\cdots\right\}y\,dx;$$

donc en substituant on obtient une équation de la forme

$$\int ry\,dx=\chi,$$

où

$$-r=\varrho-\frac{\beta\alpha_1+\gamma\frac{d\alpha_1}{da}}{x-a}-\frac{\beta\alpha_2+\gamma\left(\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}\right)}{(x-a)^2}-\frac{\left[\beta\alpha_3+\gamma\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)\right]\Gamma(3)}{(x-a)^3}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\left[\beta\alpha_m+\gamma\left(\alpha_{m-1}+\frac{d\alpha_m}{da}\right)\right]\Gamma m}{(x-a)^m}-\frac{\gamma\alpha_m\,\Gamma(m+1)}{(x-a)^{m+1}}.$$

Or on a vu que

$$-r=\varrho+\frac{s'}{x-a}+\frac{s'_1}{(x-a)^2}+\frac{s'_2\,\Gamma(3)}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{s'_m\,\Gamma(m+1)}{(x-a)^{m+1}};$$

on a donc les équations suivantes:

$$s'+\beta\alpha_1+\gamma\,\frac{d\alpha_1}{da}=0,$$

$$s'_1+\beta\alpha_2+\gamma\left(\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}\right)=0,$$

$$s'_2+\beta\alpha_3+\gamma\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)=0,$$

$$s'_3+\beta\alpha_4+\gamma\left(\alpha_3+\frac{d\alpha_4}{da}\right)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s'_{m-1}+\beta\alpha_m+\gamma\left(\alpha_{m-1}+\frac{d\alpha_m}{da}\right)=0,$$

$$s'_m+\gamma\,\alpha_m=0.$$

Donc

$$\alpha_n=-\frac{s'_n}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}\,\alpha_{n+1}-\frac{d\alpha_{n+1}}{da},$$

ou bien

$$\alpha_n=\delta_n+\varepsilon\,\alpha_{n+1}-\frac{d\alpha_{n+1}}{da},$$

en faisant pour abréger $-\dfrac{s'_n}{\gamma}=\delta_n$ et $-\dfrac{\beta}{\gamma}=\varepsilon$. De là on tire

$$\alpha_{n+1}=\delta_{n+1}+\varepsilon\,\alpha_{n+2}-\frac{d\alpha_{n+2}}{da};$$

donc

$$\alpha_n=\delta_n+\varepsilon\delta_{n+1}+\left(\varepsilon^2-\frac{d\varepsilon}{da}\right)\alpha_{n+2}-2\varepsilon\,\frac{d\alpha_{n+2}}{da}-\frac{d\delta_{n+1}}{da}+\frac{d^2\alpha_{n+2}}{da^2}.$$

Comme on a $m+1$ équations et $m+2$ indéterminées, on peut faire ε constant; alors on a

$$\alpha_n=\delta_n+\varepsilon\delta_{n+1}-\frac{d\delta_{n+1}}{da}+\varepsilon^2\,\alpha_{n+2}-2\varepsilon\,\frac{d\alpha_{n+2}}{da}+\frac{d^2\alpha_{n+2}}{da^2}.$$

Il est clair que α_n est de la forme

$$\begin{aligned}\alpha_n = \delta_n + \varepsilon\,\delta_{n+1} - \frac{d\delta_{n+1}}{da} \\ + \varepsilon^2\delta_{n+2} - 2\varepsilon\frac{d\delta_{n+2}}{da} + \frac{d^2\delta_{n+2}}{da^2} \\ + \varepsilon^3\delta_{n+3} - 3\varepsilon^2\frac{d\delta_{n+3}}{da} + 3\varepsilon\frac{d^2\delta_{n+3}}{da^2} - \frac{d^3\delta_{n+3}}{da^3} + \cdots\end{aligned}$$

En faisant $n=0$, on aura

$$\begin{aligned}0 = \delta + \varepsilon\delta_1 - \frac{d\delta_1}{da} \\ + \varepsilon^2\delta_2 - 2\varepsilon\frac{d\delta_2}{da} + \frac{d^2\delta_2}{da^2} \\ + \varepsilon^3\delta_3 - 3\varepsilon^2\frac{d\delta_3}{da} + 3\varepsilon\frac{d^2\delta_3}{da^2} - \frac{d^3\delta_3}{da^3} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \varepsilon^m\delta_m - m\varepsilon^{m-1}\frac{d\delta^m}{da} + \frac{m(m-1)}{2}\varepsilon^{m-2}\frac{d^2\delta_m}{da^2} - \cdots \pm \frac{d^m\delta_m}{da^m}.\end{aligned}$$

Cette équation détermine la fonction γ.

En substituant au lieu de δ_n sa valeur $-\frac{s'_n}{\gamma} = s'_n\,\omega$, on aura une équation linéaire en ω.

Ayant ainsi trouvé toutes les inconnues, on a

$$\gamma\left(\frac{dz}{da} - \varepsilon z\right) = \chi + \int \varrho y\,dx,$$

d'où l'on tirera la valeur de z.

X.

SUR LA COMPARAISON DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Soit y une fonction algébrique quelconque déterminée par l'équation

(1) $$0 = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots + \alpha_m y^m,$$

α, α_1, α_2 ... étant des fonctions entières de x. Soit de même

(2) $$0 = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + \cdots + q_{m-1} y^{m-1},$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions entières de x et d'un nombre quelconque d'autres variables, savoir les coefficiens des diverses puissances de x dans les fonctions q, q_1, q_2, etc. Soient a, a_1, a_2, a_3 ... ces coefficiens. Cela posé, on peut tirer des deux équations (1) et (2) la fonction y exprimée rationnellement en x et en a, a_1, a_2 etc. Soit r cette fonction, on aura

(3) $$y = r.$$

En substituant cette valeur de y dans l'une des équations (1) et (2), on aura une équation

(4) $$s = 0,$$

s étant une fonction entière de x, a, a_1, a_2 ....

Cette équation donne x en fonction des quantités a, a_1, a_2 etc. En différentiant par rapport à ces quantités on aura

$$\frac{ds}{dx}dx + d's = 0,$$

la caractéristique d' étant uniquement relative aux quantités a, a_1, a_2 etc.

De là on tire

$$dx = -\frac{d's}{\frac{ds}{dx}},$$

et en multipliant par $f(y, x)$, où f désigne une fonction rationnelle de y et x,

$$f(y, x)\,dx = -\frac{f(r, x)}{\frac{ds}{dx}}\,d's, \tag{5}$$

où on a mis r au lieu de y dans le second membre. On aura donc, en développant la différentielle $d's$, une équation de cette forme:

$$f(y, x)\,dx = \varphi x \,.\, da + \varphi_1 x \,.\, da_1 + \varphi_2 x \,.\, da_2 + \cdots, \tag{6}$$

φx, $\varphi_1 x$ etc. étant des fonctions rationnelles de x, a, a_1, a_2 etc.

Cela posé, soient $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ les racines de l'équation $s = 0$; on aura, en substituant ces valeurs au lieu de x dans l'équation (6), n équations semblables qui, ajoutées ensemble, donneront celle-ci:

$$\begin{aligned} f(y_1, x_1)\,dx_1 + f(y_2, x_2)\,dx_2 + \cdots + f(y_n, x_n)\,dx_n \\ = [\varphi x_1 + \varphi x_2 + \varphi x_3 + \cdots + \varphi x_n]\,da \\ + [\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \varphi_1 x_3 + \cdots + \varphi_1 x_n]\,da_1 \\ + [\varphi_2 x_1 + \varphi_2 x_2 + \varphi_2 x_3 + \cdots + \varphi_2 x_n]\,da_2 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f(y_1, x_1)\,dx_1 + f(y_2, x_2)\,dx_2 + \cdots + f(y_n, x_n)\,dx_n = R\,da + R_1\,da_1 + R_2\,da_2 + \cdots,$$

où R, R_1, $R_2 \ldots$ sont, comme il est aisé de le voir, des fonctions rationnelles de a, a_1, $a_2 \ldots$.

Maintenant le premier membre de cette équation est une différentielle complète; le second membre est donc aussi immédiatement intégrable. En désignant donc

$$\int (R\,da + R_1\,da_1 + R_2\,da_2 + \cdots)$$

par ϱ, il est clair que ϱ est une fonction algébrique et logarithmique de a, a_1, $a_2 \ldots$.

On aura donc, en intégrant et désignant $\int f(y, x)\,dx$ par ψx,

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 + \cdots + \psi x_n = C + \varrho. \tag{7}$$

Cette équation exprime, comme on le voit, une propriété de la fonction ψx, qui en général est transcendante.

Les quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ étant des fonctions des variables indépendantes a, a_1, $a_2 \ldots$, il est clair qu'en supposant que le nombre de ces variables est μ, on peut regarder un nombre μ des quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ comme indéterminées, et les $n - \mu$ autres comme des fonctions de celles-ci. On peut trouver ces fonctions de la manière suivante.

Soient x_1, x_2, $x_3 \ldots x_\mu$ données, et faisons

$$p = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_\mu),$$

on aura, en divisant l'équation $s = 0$ par p, une équation

$$s' = 0,$$

dont les racines sont les quantités $x_{\mu+1}$, $x_{\mu+2}, \ldots x_n$.

Dans cette équation les coefficiens contiendront les quantités a, a_1, $a_2 \ldots a_{\mu-1}$; il faut donc exprimer ces quantités au moyen des quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_\mu$. Cela peut se faire de la manière la plus facile en mettant dans l'équation (2) au lieu de x successivement x_1, x_2, $x_3 \ldots x_\mu$. En effet, on obtiendra alors μ équations linéaires en a, a_1, $a_2 \ldots a_{\mu-1}$ qui serviront à les déterminer. En substituant ensuite ces valeurs dans l'équation $s' = 0$, on aura une équation du degré $n - \mu$, dont tous les coefficiens sont des fonctions des quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_\mu$; par cette équation on peut donc déterminer les fonctions $x_{\mu+1}$, $x_{\mu+2} \ldots x_n$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que, quel que soit le nombre μ, on peut toujours faire en sorte que $n - \mu$ devienne indépendant de μ. Au moyen de l'équation (7) on peut donc exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la forme ψx par un nombre déterminé de fonctions de la même forme, savoir:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = C + \varrho - (\psi z_1 + \psi z_2 + \psi z_3 + \cdots + \psi z_\nu),$$

en faisant

$$x_{\mu+k} = z_k \text{ et } n - \mu = \nu.$$

On peut déterminer la constante en donnant à chacune des quantités x_1, $x_2 \ldots x_\mu$, une valeur particulière. Alors la formule devient

$$\begin{aligned} \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\mu \\ - \varrho' - \psi z_1 - \psi z_2 - \cdots - \psi z_\nu \\ + \psi z'_1 + \psi z'_2 + \cdots + \psi z'_\nu, \end{aligned} \tag{8}$$

en désignant par z'_k la valeur de z_k lorsqu'on donne aux variables x_1, $x_2, \ldots x_\mu$ les valeurs x'_1, $x'_2 \ldots x'_\mu$.

Dans le cas où μ est plus grand que ν on peut trouver une formule beaucoup plus simple. En effet supposons qu'on ait entre les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ les relations suivantes:

$$c_1 = z_1,\ c_2 = z_2,\ c_3 = z_3, \ldots\ c_\nu = z_\nu, \tag{9}$$

on aura aussi

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = c + \varrho,$$

ou bien

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho - \varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\mu.$$

Parmi les quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, $\mu - \nu$ sont des variables indépendantes, les autres sont des fonctions de celles-ci, déterminées par les équations (9). On peut donc faire

$$\psi x'_{\nu+1} = 0,\ \psi x'_{\nu+2} = 0 \ldots \psi x'_\mu = 0, \tag{10}$$

et alors on aura

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho - \varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\nu. \tag{11}$$

Les quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$ sont liées entre elles par les équations (9), mais comme ces équations contiennent $\mu + \nu$ indéterminées, savoir

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_\mu,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \ldots c_\nu,$$

il est clair qu'on peut regarder les μ quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\mu$ comme variables. Les quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_\nu$ se déterminent par les équations (10). Pour cela soit

$$z_k = \varphi_k(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_\mu),$$

on aura les équations

$$c_1 = \varphi_1(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\mu),\ c_2 = \varphi_2(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\mu), \ldots c_\nu = \varphi_\nu(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\mu)$$
$$c_1 = \varphi_1(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu),\ c_2 = \varphi_2(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu), \ldots c_\nu = \varphi_\nu(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu).$$

Or les équations (10) donnent

$$x'_{\nu+1} = \beta_1,\ x'_{\nu+2} = \beta_2, \ldots x'_\mu = \beta_{\mu-\nu};$$

en substituant donc ces valeurs, on aura les ν équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_1(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \\ \varphi_2(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_2(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \\ \varphi_3(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_3(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_\nu(x_1,\ x_2 \ldots x_\mu) = \varphi_\nu(x'_1,\ x'_2 \ldots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots \beta_{\mu-\nu}), \end{array}\right. \tag{12}$$

qui donnent les valeurs des quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_\nu$.

Ces équations sont très compliquées; il est plus simple d'employer la méthode suivante.

En supposant dans l'équation (7) $n = \mu + \nu$ et $x_{\mu+1} = c_1$, $x_{\mu+2} = c_2$, $\ldots x_n = c_\nu$, cette équation deviendra

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = C + \varrho,$$

où les quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ sont liées entre elles par les équations suivantes:

$$\theta x_1 = 0,\ \theta x_2 = 0,\ \theta x_3 = 0, \ldots\ \theta x_\mu = 0, \tag{13}$$

$$\theta c_1 = 0,\ \theta c_2 = 0,\ \theta c_3 = 0, \ldots\ \theta c_\nu = 0. \tag{14}$$

Cela posé, si l'on fait $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $\ldots\ x_\nu = x'_\nu$, et $x'_{\nu+1} = \beta_1$, $x'_{\nu+2} = \beta_2$, $\ldots\ x'_\mu = \beta_{\mu-\nu}$, on aura

$$C = -\varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\nu$$

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = \varrho - \varrho' + \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\nu,$$

où $x'_1, x'_2 \ldots x'_\nu$ sont déterminés par les équations

$$\theta x'_1 = 0,\ \theta x'_2 = 0,\ \theta x'_3 = 0, \ldots\ \theta x'_\nu = 0, \tag{15}$$

$$\theta \beta_1 = 0,\ \theta \beta_2 = 0,\ \theta \beta_3 = 0, \ldots\ \theta \beta_{\mu-\nu} = 0, \tag{16}$$

$$\theta c_1 = 0,\ \theta c_2 = 0,\ \theta c_3 = 0, \ldots\ \theta c_\nu = 0. \tag{17}$$

Désignons maintenant la fonction s par $\theta_1 x$, il est clair qu'on aura aussi

$$\theta_1 x'_k = 0,\ \theta_1 \beta_k = 0,\ \theta_1 c_k = 0,$$

pourvu que $a, a_1, a_2 \ldots a_{\mu-1}$ soient déterminés par les équations (16) et (17).

On aura donc

$$\theta_1 x = (x - x'_1)(x - x'_2)(x - x'_3) \ldots (x - x'_\nu)$$
$$\times (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \ldots (x - \beta_{\mu-\nu})$$
$$\times (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots (x - c_\nu).$$

En divisant l'équation $\theta_1 x = 0$ par le produit

$$(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_{\mu-\nu})(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_\nu),$$

on aura une équation du degré ν dont les différentes racines sont les quantités $x'_1, x'_2 \ldots x'_\nu$.

Dans ce qui précède il faut remarquer que si plusieurs des quantités β_1, β_2 etc. sont égales, par exemple si

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k,$$

on aura, au lieu des équations

$$\theta_1\beta_1 = 0,\ \theta_1\beta_2 = 0,\ \ldots\ \theta_1\beta_k = 0,$$

celles-ci:

$$\theta_1\beta_1 = 0,\ \theta'_1\beta_1 = 0,\ \theta''_1\beta_1 = 0, \ldots\ \theta_1^{(k-1)}\beta_1 = 0.$$

La même chose a lieu, si quelques-unes des quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ sont égales entre elles.

Ayant ainsi déterminé les quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_\nu$ en fonction de $c_1, c_2, c_3 \ldots c_\nu$, il est clair qu'on peut regarder ces quantités comme des variables et déterminées par les équations (13) et (14). Les quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ deviennent alors indépendantes et $x'_1, x'_2 \ldots x'_\mu$ des fonctions de ces variables.

Application de la théorie précédente.

Je vais maintenant éclaircir la théorie précédente par plusieurs exemples. Soit

$$0 = a + a_1 y.$$

Dans ce cas on a $m = 1$, et par conséquent l'équation (2) devient

(18) $$0 = q = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = s,$$

d'où l'on tire en différentiant

(19) $$y\,dx = \frac{da + x\,da_1 + x^2 da_2 + \cdots + x^{n-1} da_{n-1}}{\frac{ds}{dx}} \cdot \frac{a}{a_1}.$$

En désignant donc $\int y\,dx$ par ψx, l'équation (7) devient

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 + \cdots + \psi x_n = \varrho,$$

où

(20) $$\left\{\begin{aligned} -d\varrho = &\left\{\frac{y_1}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{y_2}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \frac{y_3}{\frac{ds_3}{dx_3}} + \cdots + \frac{y_n}{\frac{ds_n}{dx_n}}\right\} da \\ &+ \left\{\frac{x_1 y_1}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2 y_2}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \cdots\cdots + \frac{x_n y_n}{\frac{ds_n}{dx_n}}\right\} da_1 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \left\{\frac{x_1^{n-1} y_1}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2^{n-1} y_2}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \cdots + \frac{x_n^{n-1} y_n}{\frac{ds_n}{dx_n}}\right\} da_{n-1}.\end{aligned}\right.$$

Comme le nombre des variables $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ et celui des quantités $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ est le même, toutes les quantités $x_1, x_2 \ldots x_n$ sont des variables indépendantes.

De l'équation que nous venons de trouver, on peut déduire deux formules qui seront d'une grande utilité dans ces recherches. Soit d'abord $y = x^m$, on aura

$$\int y\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \psi x.$$

La formule (20) deviendra donc

(21) $$\frac{1}{m+1}\left(x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \cdots + x_n^{m+1}\right) = -\int (P_m\,da + P_{m+1}\,da_1 + P_{m+2}\,da_2 + \cdots + P_{m+n-1}\,da_{n-1}),$$

en faisant pour abréger

(22) $$P_m = \frac{x_1^m}{\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2^m}{\frac{ds_2}{dx_2}} + \frac{x_3^m}{\frac{ds_3}{dx_3}} + \cdots + \frac{x_n^m}{\frac{ds_n}{dx_n}}.$$

Maintenant le premier membre de l'équation (21) peut s'exprimer par une fonction rationnelle et entière des quantités $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$. En désignant donc cette fonction par $\frac{1}{m+1} Q_{m+1}$, il est clair qu'on aura

$$P_{m+k} = -\frac{1}{m+1}\frac{dQ_{m+1}}{da_k}.$$

En faisant $m = 0$, on aura

$$P_k = -\frac{dQ_1}{da_k}.$$

Or $Q_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$. La fonction Q_1 ne contient donc que la variable a_{n-1}. On aura par conséquent

$$P_0 = 0,\ P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots P_{n-2} = 0,\ P_{n-1} = 1.$$

Soit maintenant $y = \frac{1}{(x-\alpha)^m}$, on aura

$$\int y\,dx = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} = \psi x;$$

donc

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(x_1-\alpha)^{m-1}} + \frac{1}{(x_2-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{(x_n-\alpha)^{m-1}}\right) = \int (P_m^{(0)} da + P_m^{(1)} da_1 + P_m^{(2)} da_2 + \cdots + P_m^{(n-1)} da_{n-1}),$$

en faisant pour abréger

$$P_m^{(k)} = \frac{x_1^k}{(x_1-\alpha)^m \frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x_2^k}{(x_2-\alpha)^m \frac{ds_2}{dx_2}} + \cdots + \frac{x_n^k}{(x_n-\alpha)^m \frac{ds_n}{dx_n}}.$$

Si l'on fait

$$\frac{1}{(x_1-\alpha)^{m-1}} + \frac{1}{(x_2-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{(x_n-\alpha)^{m-1}} = Q'_{m-1},$$

on aura

$$P_m^{(k)} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{dQ'_{m-1}}{da_k}.$$

Si $m=1$, cette équation devient illusoire; or dans ce cas on a

$$\int y\,dx = \log(x-\alpha),$$

donc si l'on fait

$$t = (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)\ldots(x_n-\alpha) = (-1)^n(a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n),$$

on aura

$$P_1^{(k)} = -\frac{dt}{da_k} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{\alpha^k}{a + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n}.$$

Dans l'équation (20) la fonction ϱ est en général une fonction logarithmique et algébrique, mais on peut toujours établir entre les quantités x_1, x_2 etc. des relations telles que cette quantité devienne égale à zéro.

En effet soit

$$0 = \delta + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \alpha_1(a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + x^\mu) = s;$$

on aura en différentiant

$$0 = \left(\frac{ds}{dx}\right)dx + \alpha_1(da + x\,da_1 + x^2\,da_2 + \cdots + x^{\mu-1}da_{\mu-1}),$$

donc

$$y\,dx = \frac{\alpha(da + x\,da_1 + x^2 da_2 + \cdots + x^{\mu-1}da_{\mu-1})}{\frac{ds}{dx}},$$

et

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = \varrho,$$

ϱ étant en général une fonction entière, qui s'évanouit lorsque le degré de α est moindre que celui de α_1. Dans ce cas on a donc

(23) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = C.$$

Les quantités $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sont liées entre elles par les équations

$$a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{\mu-1}x_1^{\mu-1} + x_1^\mu = \frac{fx_1}{\varphi x_1},$$

$$a + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{\mu-1}x_2^{\mu-1} + x_2^\mu = \frac{fx_2}{\varphi x_2},$$

. . . .

$$a + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{\mu-1}x_n^{\mu-1} + x_n^\mu = \frac{fx_n}{\varphi x_n},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\alpha_1 = \varphi x, \text{ et } -(\delta + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \delta_{n-1}x^{n-1}) = fx.$$

En faisant dans l'équation (23) $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ etc. on aura

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_n.$$

Dans cette équation on peut regarder δ, δ_1 etc. comme des variables; par conséquent on peut regarder $x_1, x_2, x_3 \ldots$ comme des variables indépendantes, et faire en sorte que $\psi x'_n = 0$, $\psi x'_{n-1} = 0 \ldots$ $\psi x'_{\mu+1} = 0$.

On aura donc la formule

(24) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_n = \psi x'_1 + \psi x'_2 + \cdots + \psi x'_\mu.$$

Soit par exemple $\alpha = 1$, $\alpha_1 = x$, on aura $\psi x = -\int\frac{dx}{x} = -\log x$,

$$0 = \delta + ax + a_1 x^2 + \cdots + a_{\mu-1}x^\mu + x^{\mu+1},$$

$$\delta = (-1)^{\mu+1} x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\mu+1},$$

$$\delta = (-1)^{\mu+1} x'_1 x'_2 x'_3 \ldots x'_{\mu+1};$$

donc si l'on fait $x'_2 = x'_3 = \cdots = x'_{\mu+1} = 1$, on aura

$$x'_1 = x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\mu+1};$$

par conséquent

$$\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_{\mu+1} = \log(x_1 x_2 x_3 \ldots x_{\mu+1}),$$

comme on sait.

Soit maintenant $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 1 + x^2$, on aura

$$\psi x = -\text{arc tang}\, x,$$

$$0 = \delta + \delta_1 x_1 + (1 + x_1^2)(a + x_1),$$

$$0 = \delta + \delta_1 x_2 + (1 + x_2^2)(a + x_2),$$

$$0 = \delta + \delta_1 x_3 + (1 + x_3^2)(a + x_3),$$

$$\text{arc tang}\, x_1 + \text{arc tang}\, x_2 + \text{arc tang}\, x_3 = C;$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\delta - a;\ \ x_1 + x_2 + x_3 = -a;\ \ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \delta_1 + 1;$$

donc

$$(25)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3=\delta \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-1=\delta_1. \end{cases}$$

Soit pour déterminer C, $x_3=x'_2$, $x_2=-x'_2$, $x_1=x'_1$, on aura

$$C=\operatorname{arc\,tang} x'_1,\quad x'_1+x'_1(x'_2)^2=\delta,\quad 1+(x'_2)^2=-\delta_1.$$

Des deux dernières équations on tire, en éliminant x'_2,

$$-\frac{\delta}{\delta_1}=x'_1;$$

or les équations (25) donnent

$$-\frac{\delta}{\delta_1}=\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3},$$

donc en substituant on aura

$$\operatorname{arc\,tang} x_1+\operatorname{arc\,tang} x_2+\operatorname{arc\,tang} x_3=\operatorname{arc\,tang}\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}.$$

Pour trouver la valeur de $d\varrho$, il faut, selon ce qu'on a vu, exprimer en fonction de a, a_1 $a_2\ldots$ des fonctions symétriques de x_1, $x_2\ldots x_n$ de la forme

$$\frac{fx_1}{\frac{ds_1}{dx_1}}+\frac{fx_2}{\frac{ds_2}{dx_2}}+\cdots+\frac{fx_n}{\frac{ds_n}{dx_n}};$$

mais comme cela est en général très laborieux par les méthodes ordinaires, je vais développer quelques formules qui sont d'une grande utilité dans ces recherches, et qu'on peut déduire de la théorie précédente.

Soit, dans ce qui précède, y une fonction rationnelle fx, on aura $m=1$, et par conséquent

$$0=q=a+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=s=\varphi x,$$

d'où l'on tirera en différentiant

$$fx.dx=-\frac{da+x\,da_1+x^2\,da_2+\cdots+x^n\,da_n}{\varphi' x}fx$$

donc l'équation (20) deviendra

$$\int fx_1.dx_1+\int fx_2.dx_2+\int fx_3.dx_3+\cdots+\int fx_n.dx_n=\varrho, \text{ où}$$

$$\begin{aligned}-d\varrho=\,&da\left(\frac{fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{fx_n}{\varphi' x_n}\right)\\ &+da_1\left(\frac{x_1.fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{x_2.fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{x_n.fx_n}{\varphi' x_n}\right)\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+da_n\left(\frac{x_1^n.fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{x_2^n.fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{x_n^n.fx_n}{\varphi' x_n}\right).\end{aligned}$$

Cela posé, soit

$$\int fx\,dx=\psi x+\Sigma A\log(x-\delta),$$

on aura

$$\varrho=\psi x_1+\psi x_2+\cdots+\psi x_n+\Sigma A\log(x_1-\delta)(x_2-\delta)(x_3-\delta)\ldots(x_n-\delta).$$

La quantité $\psi x_1+\psi x_2+\cdots+\psi x_n$ est une fonction symétrique de x_1, x_2, $x_3\ldots x_n$; on peut donc exprimer cette fonction par une fonction rationnelle de a, a_1, $a_2\ldots a_n$. Soit p cette fonction. La quantité $(x_1-\delta)(x_2-\delta)\ldots(x_n-\delta)$ est la même chose que $(-1)^n\frac{\varphi\delta}{a_n}$; on aura donc

$$\varrho=p+\Sigma A(\log\varphi\delta-\log a_n),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\varrho}{da_m}=\frac{dp}{da_m}+\Sigma A\left[\frac{1}{\varphi\delta}\cdot\frac{d\varphi\delta}{da_m}-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{da_n}{da_m}\right];$$

on aura aussi

$$\frac{d\varrho}{da_m}=-\left(\frac{x_1^m.fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{x_2^m.fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{x_n^m.fx_n}{\varphi' x_n}\right);$$

donc

$$Q_m=\frac{x_1^m fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{x_2^m fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{x_n^m fx_n}{\varphi' x_n}=-\frac{dp}{da_m}-\Sigma A\left[\frac{1}{\varphi\delta}\cdot\frac{d\varphi\delta}{da_m}-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{da_n}{da_m}\right];$$

or $\frac{d\varphi\delta}{da_m}=\delta^m$, donc

$$(26)\qquad \frac{x_1^m fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{x_2^m fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{x_n^m fx_n}{\varphi' x_n}=-\frac{dp}{da_m}-\Sigma\frac{A\delta^m}{\varphi\delta}+\Sigma\frac{A}{a_n}\left(\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\right).$$

Le signe $+$ a lieu, si $m=n$, et le signe $-$, si $m<n$.

Si l'on fait $m=0$, on aura

$$\frac{fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{fx_2}{\varphi' x_2}+\cdots+\frac{fx_n}{\varphi' x_n}=-\frac{dp}{da}-\Sigma\frac{A}{\varphi\delta}.$$

De l'équation (26) on tire aisément celle-ci

$$(27)\qquad \frac{Fx_1.fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{Fx_2.fx_2}{\varphi' x_2}+\frac{Fx_3.fx_3}{\varphi' x_3}+\cdots+\frac{Fx_n.fx_n}{\varphi' x_n}$$

$$= -\beta\frac{dp}{da} - \beta_1\frac{dp}{da_1} - \beta_2\frac{dp}{da_2} - \cdots - \beta_n\frac{dp}{da_n} - \Sigma\frac{A\,.\,F\delta}{\varphi\delta} + \frac{\beta_n}{a_n}\Sigma A,$$

où $F(x) = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n$.

En faisant $fx = 1$, on aura $\psi x = x$, donc

$$p = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\quad A = 0;$$

donc

$$\frac{Fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{Fx_2}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{Fx_n}{\varphi' x_n} = \frac{\beta_{n-1}}{a_n} - \frac{\beta_n a_{n-1}}{a_n^2}.$$

Il suit de là que

(28) $$\frac{x_1^m}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^m}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^m}{\varphi' x_n} = 0,$$

si m est moindre que $n-1$; que

(29) $$\frac{x_1^{n-1}}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^{n-1}}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^{n-1}}{\varphi' x_n} = \frac{1}{a_n},$$

et que

(30) $$\frac{x_1^n}{\varphi' x_1} + \frac{x_2^n}{\varphi' x_2} + \cdots + \frac{x_n^n}{\varphi' x_n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n^2}.$$

Si l'on fait $fx = \dfrac{1}{x-\delta}$, on aura $p = 0$, $A = 1$, donc

(31) $$\frac{Fx_1}{(x_1-\delta)\varphi' x_1} + \frac{Fx_2}{(x_2-\delta)\varphi' x_2} + \cdots + \frac{Fx_n}{(x_n-\delta)\varphi' x_n} = \frac{\beta_n}{a_n} - \frac{F\delta}{\varphi\delta}.$$

De cette équation on déduira, en différentiant m fois de suite par rapport à δ,

(32) $$\frac{Fx_1}{(x_1-\delta)^{m+1}\varphi' x_1} + \frac{Fx_2}{(x_2-\delta)^{m+1}\varphi' x_2} + \cdots + \frac{Fx_n}{(x_n-\delta)^{m+1}\varphi' x_n} = -\frac{1}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{d^m\left(\frac{F\delta}{\varphi\delta}\right)}{(d\delta)^m},$$

ou bien, en développant le second membre de cette équation,

(33) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{Fx_1}{(x_1-\delta)^{m+1}\varphi' x_1} + \frac{Fx_2}{(x_2-\delta)^{m+1}\varphi' x_2} + \cdots + \frac{Fx_n}{(x_n-\delta)^{m+1}\varphi' x_n} = \\ &-\frac{1}{\Gamma(m+1)}\left\{\frac{d^m\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{d\delta^m}F\delta + m\frac{d^{m-1}\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{d\delta^{m-1}}\cdot\frac{dF\delta}{d\delta} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}\cdot\frac{d^nF\delta}{d\delta^n}\cdot\frac{d^{m-n}\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{d\delta^{m-n}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Par exemple, si $m = 1$, on aura

$$\frac{Fx_1}{(x_1-\delta)^2.\varphi' x_1} + \frac{Fx_2}{(x_2-\delta)^2.\varphi' x_2} + \cdots + \frac{Fx_n}{(x_n-\delta)^2.\varphi' x_n} = -\frac{F'\delta}{\varphi\delta} + \frac{F\delta.\varphi'\delta}{(\varphi\delta)^2}.$$

XI.

SUR LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES ET LEURS DÉTERMINANTES.

Soit $\varphi(x, y, z\ldots)$ une fonction quelconque de plusieurs variables $x, y, z\ldots$, on peut toujours trouver une fonction $f(u, v, p\ldots)$ telle que

(1) $$\varphi(x, y, z\ldots) = \int e^{xu+yv+zp+\cdots} f(u, v, p\ldots)\,du\,dv\,dp.$$

Dans cette équation j'appellerai φ la fonction génératrice de f, et f la déterminante de φ, et je ferai usage des notations suivantes:

(2) $$\left\{\begin{aligned}&\varphi(x, y, z\ldots) = \mathrm{fg}\,f(u, v, p\ldots)\\ &f(u, v, p\ldots) = \mathrm{D}\,\varphi(x, y, z\ldots).\end{aligned}\right.$$

Cela posé, considérons d'abord les fonctions d'une seule variable, et soit

(3) $$\varphi x = \int e^{vx} fv\,.\,dv,$$

on aura

(4) $$\begin{aligned}\varphi x &= \mathrm{fg}\,.\,fv,\\ fv &= \mathrm{D}\,\varphi x.\end{aligned}$$

Soit de même

$$\varphi_1 x = \int e^{xv} f_1 v\,.\,dv,$$

on aura

$$\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{xv}(fv + f_1 v)\,dv,$$

donc

$$\mathrm{D}(\varphi x + \varphi_1 x) = fv + f_1 v;$$

or $fv = \mathrm{D}\varphi x$, $f_1 v = \mathrm{D}\varphi_1 x$, donc

$$\mathrm{D}(\varphi x + \varphi_1 x) = \mathrm{D}\varphi x + \mathrm{D}\varphi_1 x.$$

On aura en général

(5) $\mathrm{D}(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x + \cdots) = \mathrm{D}\varphi x + \mathrm{D}\varphi_1 x + \mathrm{D}\varphi_2 x + \mathrm{D}\varphi_3 x + \cdots,$

donc aussi

(6) $$\mathrm{fg}(fv + f_1 v + f_2 v + \cdots) = \mathrm{fg}\,fv + \mathrm{fg}\,f_1 v + \mathrm{fg}\,f_2 v + \cdots;$$

(7) $$\begin{cases} \mathrm{D}(a\varphi x) = a\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{fg}(afv) = a\,.\,\mathrm{fg}\,fv. \end{cases}$$

En mettant $x + \alpha$ au lieu de x, on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \int e^{xv} e^{\alpha v} fv\,.\,dv,$$

donc

(8) $$\begin{cases} \mathrm{D}\varphi(x+\alpha) = e^{\alpha v}\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{fg}\,(e^{\alpha v}\,\mathrm{D}\varphi x) = \varphi(x+\alpha) = \mathrm{fg}\,(e^{\alpha v} fv). \end{cases}$$

En différentiant l'équation (3) on aura

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \int e^{xv}\, v fv\,.\,dv,$$

donc

(9) $$\begin{cases} \mathrm{D}\left(\dfrac{d\varphi x}{dx}\right) = vfv = v\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{fg}\,(vfv) = \mathrm{fg}\,(v\,\mathrm{D}\varphi x) = \dfrac{d\varphi x}{dx}. \end{cases}$$

De la même manière on aura, en différentiant l'équation (3) n fois de suite,

$$\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = \int e^{vx} v^n fv\,.\,dv,$$

donc

(10) $$\begin{cases} \mathrm{D}\left(\dfrac{d^n\varphi x}{dx^n}\right) = v^n\,.\,fv = v^n\,.\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{fg}\,(v^n fv) = \mathrm{fg}(v^n\,\mathrm{D}\varphi x) = \dfrac{d^n\varphi x}{dx^n} \end{cases}$$

De même:

(11) $$\begin{cases} \mathrm{D}\left(\int^n \varphi x\,dx^n\right) = v^{-n} fv = v^{-n}\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{fg}\,(v^{-n} fv) = \mathrm{fg}\,(v^{-n}\,\mathrm{D}\varphi x) = \int^n \varphi x\,dx^n. \end{cases}$$

En prenant la différence finie de l'équation (3) n fois de suite, on aura

$$\Delta_\alpha^n \varphi x = \int e^{vx} (e^{v\alpha} - 1)^n fv\,.\,dv,$$

en désignant par α la différence de x; donc

(12) $$\begin{cases} \mathrm{D}\,\Delta_\alpha^n \varphi x = (e^{v\alpha} - 1)^n fv, \\ \mathrm{fg}\,[(e^{v\alpha} - 1)^n fv] = \Delta_\alpha^n \varphi x, \\ \mathrm{D}\,\Sigma_\alpha^n (\varphi x) = (e^{v\alpha} - 1)^{-n} fv, \\ \mathrm{fg}\,[(e^{v\alpha} - 1)^{-n} fv] = \Sigma_\alpha^n \varphi x, \end{cases}$$

On trouvera de la même manière

(13) $$\begin{cases} \mathrm{D}\,[\Delta_\alpha^n \Delta_{\alpha'}^{n'} \Delta_{\alpha''}^{n''} \ldots d^m \varphi(x+\beta)] = e^{v\beta} v^m (e^{v\alpha} - 1)^n (e^{v\alpha'} - 1)^{n'} (e^{v\alpha''} - 1)^{n''} \ldots fv, \\ \mathrm{fg}[e^{v\beta} v^m (e^{v\alpha} - 1)^n (e^{v\alpha'} - 1)^{n'} (e^{v\alpha''} - 1)^{n''} \ldots fv] = \Delta_\alpha^n \Delta_{\alpha'}^{n'} \Delta_{\alpha''}^{n''} \ldots d^m \varphi(x+\beta). \end{cases}$$

Soit en général

(14) $$\delta(\varphi x) = A_{n,\alpha} \frac{d^n \varphi(x+\alpha)}{dx^n} + A_{n',\alpha'} \frac{d^{n'} \varphi(x+\alpha')}{dx^{n'}} + \cdots,$$

on aura

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx} fv\,(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'} v^{n'} e^{v\alpha'} + \cdots)\,dv,$$

donc

$$\mathrm{D}\,(\delta\varphi x) = fv\,(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'} v^{n'} e^{v\alpha'} + \cdots).$$

Soit

(15) $$A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'} v^{n'} e^{v\alpha'} + \cdots = \psi v,$$

on aura

(16) $$\mathrm{D}\,(\delta\varphi x) = \psi v\,.\,fv = \psi v\,.\,\mathrm{D}\varphi x,$$

Soit de même

(17) $$\begin{cases} \mathrm{D}\,(\delta_1 \varphi x) = \psi_1 v\,.\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{D}\,(\delta_2 \varphi x) = \psi_2 v\,.\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{D}\,(\delta_\mu \varphi x) = \psi_\mu v\,.\,\mathrm{D}\varphi x, \end{cases}$$

on trouvera aisément

$$\mathrm{D}\,(\delta\delta_1 \varphi x) = \psi v\,.\,\psi_1 v\,.\,fv,$$

$$\mathrm{D}\,(\delta\delta_1\delta_2 \varphi x) = \psi v\,.\,\psi_1 v\,.\,\psi_2 v\,.\,fv,$$

et en général

(18) $$\begin{cases} \mathrm{D}\,(\delta\delta_1\delta_2 \ldots \delta_\mu \varphi x) = \psi v\,.\,\psi_1 v\,.\,\psi_2 v \ldots \psi_\mu v\,.\,fv, \\ \mathrm{D}\,(\delta^n \varphi x) = (\psi v)^n\,.\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{D}\,(\delta^n \delta_1^{n_1} \delta_2^{n_2} \ldots \delta_\mu^{n_\mu} \varphi x) = (\psi v)^n (\psi_1 v)^{n_1} (\psi_2 v)^{n_2} \ldots (\psi_\mu v)^{n_\mu}\,\mathrm{D}\varphi x, \\ \mathrm{fg}\,[(\psi v)^n (\psi_1 v)^{n_1} \ldots (\psi_\mu v)^{n_\mu}\,\mathrm{D}\varphi x] = \delta^n \delta_1^{n_1} \ldots \delta_\mu^{n_\mu} \varphi x. \end{cases}$$

Application de la théorie précédente.

La théorie précédente des fonctions génératrices est très féconde pour le développement des fonctions en séries.

Supposons par exemple qu'on veuille développer $\varphi(x+\alpha)$ suivant les coefficiens différentiels de φx. La déterminante de $\varphi(x+\alpha)$ est $e^{v\alpha} fv$, et celle de $\frac{d^n \varphi x}{dx^n}$ sera $v^n fv$. Il s'agit donc seulement de développer $e^{v\alpha}$ en termes de la forme $A_n v^n$; or on a

$$e^{v\alpha} = 1 + v\alpha + \frac{v^2}{1.2}\alpha^2 + \frac{v^3}{1.2.3}\alpha^3 + \cdots + \frac{v^n}{1.2.3\ldots n}\alpha^n + \cdots,$$

donc

$$e^{v\alpha} fv = fv + \alpha v fv + \frac{\alpha^2}{1.2} v^2 fv + \frac{\alpha^3}{1.2.3} v^3 fv + \cdots.$$

En prenant la fonction génératrice de chaque membre de cette équation, on aura, en remarquant que $\mathrm{fg}(e^{v\alpha} fv) = \varphi(x+\alpha)$, et $\mathrm{fg}(v^n fv) = \frac{d^n \varphi x}{dx^n}$,

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} + \cdots.$$

comme on sait.

Supposons en général qu'on ait une relation quelconque entre plusieurs fonctions de la forme ψv, $\psi_1 v, \ldots$ etc., composée de termes de la forme

$$A_{n, n_1, n_2 \ldots n_\mu} (\psi v)^n (\psi v_1)^{n_1} \ldots (\psi v_\mu)^{n_\mu},$$

et désignons cette relation par

(19) $$\Sigma A_{n, n_1, n_2 \ldots n_\mu} (\psi v)^n (\psi v_1)^{n_1} \ldots (\psi v_\mu)^{n_\mu} = 0.$$

En multipliant par fv et prenant la fonction génératrice, on aura

$$\Sigma A_{n, n_1, n_2 \ldots n_\mu} \mathrm{fg}\left[fv \,.\, (\psi v)^n (\psi v_1)^{n_1} \ldots (\psi v_\mu)^{n_\mu}\right] = 0;$$

c'est-à-dire

(20) $$\Sigma A_{n, n_1, n_2 \ldots n_\mu} \delta^n \delta_1^{n_1} \delta_2^{n_2} \ldots \delta_\mu^{n_\mu} \varphi x = 0.$$

Cette équation exprimera une relation générale entre les différentes opérations indiquées par les lettres δ, δ_1, $\delta_2, \ldots$.

Problème I. Soit $\delta \varphi x = \varphi(x+\alpha) + a\varphi x$, et proposons-nous de développer $\delta^n \varphi x$ en termes de la forme $A_m \varphi(x+m\alpha)$. La déterminante de $\varphi(x+\alpha)$ étant $e^{v\alpha} fv$, et celle de φx, fv, il est clair que

$$\mathrm{D}\,\delta \varphi x = (e^{v\alpha} + a) fv,$$

donc

$$\mathrm{D}\,\delta^n \varphi x = (e^{v\alpha} + a)^n fv;$$

ayant de même $\mathrm{D}\,\varphi(x+m\alpha) = e^{vm\alpha} fv$, il faut développer $(e^{v\alpha}+a)^n$ suivant les puissances de $e^{v\alpha}$; or on a

$$(a + e^{v\alpha})^n = a^n + n a^{n-1} e^{v\alpha} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} e^{2v\alpha} + \cdots,$$

donc

$$\delta^n \varphi x = a^n \varphi x + n a^{n-1} \varphi(x+\alpha) + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \varphi(x+2\alpha) + \cdots;$$

on a aussi

$$(a + e^{v\alpha})^n = e^{nv\alpha} + n a\, e^{(n-1)v\alpha} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 e^{(n-2)v\alpha} + \cdots,$$

donc

$$\delta^n \varphi x = \varphi(x+n\alpha) + n a\, \varphi[x+(n-1)\alpha] + \frac{n(n-1)}{2} a^2 \varphi[x+(n-2)\alpha] + \cdots$$

En faisant $a = -1$, on a $\delta^n \varphi x = \Delta_\alpha^n \varphi x$, donc

$$\Delta_\alpha^n \varphi x = \varphi(x+n\alpha) - n\varphi[x+(n-1)\alpha] + \frac{n(n-1)}{2} \varphi[x+(n-2)\alpha] - \cdots.$$

Problème II. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x+\alpha) + a\varphi x$, $\delta_1 \varphi x = \varphi(x+\alpha_1) + a_1 \varphi x$ et proposons-nous d'exprimer l'opération δ_1^n par δ^m. On a

$$\mathrm{D}\,\delta^n \varphi x = (e^{v\alpha} + a)^n fv, \quad \mathrm{D}\,\delta_1^n \varphi x = (e^{v\alpha_1} + a_1)^n fv.$$

Il faut donc exprimer $(e^{v\alpha_1} + a_1)^n$ en termes de la forme $A_m (e^{v\alpha} + a)^m$. Soit $e^{v\alpha_1} + a_1 = y$, $e^{v\alpha} + a = z$, on aura

$$e^v = (y - a_1)^{\frac{1}{\alpha_1}} = (z - a)^{\frac{1}{\alpha}};$$

donc

$$y = a_1 + (z-a)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}},$$

$$y^n = \left(a_1 + (z-a)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\right)^n,$$

$$y^n = \Sigma A_m z^m,$$

donc

$$\delta_1^n \varphi x = \Sigma A_m \delta^m \varphi x.$$

Soit par exemple $\alpha_1 = \alpha$, on a

$$y^n = (a_1 - a + z)^n = (a_1 - a)^n + n(a_1 - a)^{n-1} z + \cdots = z^n + n(a_1 - a) z^{n-1} + \cdots,$$

donc

$$\delta_1^n \varphi x = (a_1 - a)^n \varphi x + n(a_1 - a)^{n-1} \delta\varphi x + \frac{n(n-1)}{2} (a_1 - a)^{n-2} \delta^2 \varphi x + \cdots,$$

$$\delta_1^n \varphi x = \delta^n \varphi x + n(a_1 - a)\delta^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}(a_1 - a)^2 \delta^{n-2}\varphi x + \cdots.$$

En faisant $a_1 = 0$, on aura $\delta_1^n \varphi x = \varphi(x + n\alpha)$, donc

$$\varphi(x + n\alpha) = \delta^n \varphi x - na\,\delta^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2} a^2 \delta^{n-2}\varphi x - \cdots;$$

si $a = -1$, on aura

$$\varphi(x + n\alpha) = \Delta_\alpha^n \varphi x + n\,\Delta_\alpha^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta_\alpha^{n-2}\varphi x + \cdots.$$

Problème III. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x + \alpha) - a\varphi x$ et $\delta_1 \varphi x = c\varphi x + k\frac{d\varphi x}{dx}$ et proposons-nous de déterminer δ_1^n par δ. On a

$$\mathrm{D}\delta_1 \varphi x = (c + kv) f v,$$

donc

$$\mathrm{D}\delta_1^n \varphi x = (c + kv)^n f v;$$

or

$$\mathrm{D}\delta\varphi x = (e^{v\alpha} - a) f v;$$

il faut donc développer $(c + kv)^n$ suivant les puissances de $e^{v\alpha} - a$. Soit $c + kv = y$, $e^{v\alpha} - a = z$, on aura

$$v = \frac{1}{\alpha}\log(z + a),\quad y = c + \frac{k}{\alpha}\log(z + a).$$

$$y = c + \frac{k}{\alpha}\log a + \frac{k}{\alpha}\left(\frac{z}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} + \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{a^3} - \cdots\right),$$

$$y^n = \left[c + \frac{k}{\alpha}\log a + \frac{k}{\alpha}\left(\frac{z}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} + \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{a^3} - \cdots\right)\right]^n = \Sigma A_m z^m,$$

donc

$$\delta_1^n \varphi x = \Sigma A_m \delta^m \varphi x.$$

Soit $c = 0$, $a = 1$, $k = 1$, on aura $\delta_1^n \varphi x = \frac{d^n \varphi x}{dx^n}$; donc

$$\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = \Sigma A_m . \Delta_\alpha^m \varphi x,$$

où

$$\Sigma A_m z^m = \frac{1}{\alpha^n}\left(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \cdots\right)^n;$$

en faisant $n = 1$, on aura

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{1}{\alpha}\left(\Delta\varphi x - \tfrac{1}{2}\Delta^2\varphi x + \tfrac{1}{3}\Delta^3\varphi x - \cdots\right).$$

Problème IV. Développer la fonction $\varphi(x + \alpha)$ en termes de la forme

$$\frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n}.$$

On a $\mathrm{D}\varphi(x + \alpha) = e^{\alpha v} f v$, et $\mathrm{D}\frac{d^n \varphi(x + n\beta)}{dx^n} = e^{n\beta v} v^n f v$. Il s'agit donc de développer $e^{\alpha v}$ suivant les puissances de $v e^{\beta v}$. Or on a (*Legendre* Exerc. de calc. int. t. 2, p. 234)

$$b^v = 1 + lb . vc^v + lb(lb - 2lc)\frac{(v . c^v)^2}{2} + lb(lb - 3lc)^2\frac{(v . c^v)^3}{2 . 3} + \cdots$$

Soit $b = e^\alpha$, $c = e^\beta$, on aura $lb = \alpha$, $lc = \beta$, donc

$$e^{\alpha v} = 1 + \alpha v e^{\beta v} + \alpha(\alpha - 2\beta)\frac{v^2 e^{2\beta v}}{2} + \alpha(\alpha - 3\beta)^2\frac{v^3 . e^{3\beta v}}{2 . 3} + \cdots,$$

donc

$$\varphi(x + \alpha) = \varphi x + \alpha\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx} + \frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{2}\cdot\frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2} + \frac{\alpha(\alpha-3\beta)^2}{2 . 3}\cdot\frac{d^3\varphi(x+3\beta)}{dx^3} + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}}{1 . 2 . 3 \ldots n}\cdot\frac{d^n\varphi(x + n\beta)}{dx^n} + \cdots.$$

En posant $x = 0$, et écrivant ensuite x au lieu de α, on aura

$$\varphi x = \varphi(0) + x\varphi'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2}\varphi''(2\beta) + \frac{x(x-3\beta)^2}{2 . 3}\varphi'''(3\beta) + \cdots.$$

Soit $\varphi x = x^m$, on a $\varphi(x + n\beta) = (x + n\beta)^m$, donc

$$\varphi^{(n)}(x + n\beta) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(x + n\beta)^{m-n},$$

et par suite

$$(x + \alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x + \beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha(\alpha - 2\beta)(x + 2\beta)^{m-2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 . 2 . 3 \ldots n}\alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}(x + n\beta)^{m-n} + \cdots$$

Soit $\varphi x = \log x$, on aura $\varphi(x + n\beta) = \log(x + n\beta)$; donc

$$\varphi^{(n)}(x + n\beta) = \pm\frac{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)}{(x + n\beta)^n};$$

donc

$$\log(x + \alpha) = \log x + \frac{\alpha}{x+\beta} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{x+2\beta}\cdot\frac{2\beta - \alpha}{x + 2\beta} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{x + 3\beta}\cdot\left(\frac{3\beta - \alpha}{x + 3\beta}\right)^2 + \cdots.$$

Soit $x = 1$, on aura

$$\log(1 + \alpha) = \frac{\alpha}{1+\beta} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+2\beta}\cdot\frac{2\beta - \alpha}{1 + 2\beta} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{1 + 3\beta}\cdot\left(\frac{3\beta - \alpha}{1 + 3\beta}\right)^2 + \cdots,$$

$$\log(1 + \alpha) = \frac{\alpha}{1+\beta} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+2\beta}\left(1 - \frac{1+\alpha}{1+2\beta}\right) + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{1+3\beta}\left(1 - \frac{1+\alpha}{1+3\beta}\right)^2 + \cdots.$$

Soit $\alpha = 2\beta$, on aura

$$\log(1 + 2\beta) = \frac{2\beta}{1+\beta} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\beta^3}{(1+3\beta)^3} + \tfrac{1}{4}\frac{2 . 2^3 . \beta^4}{(1+4\beta)^4} + \cdots,$$

$$\log(3) = 1 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4})^3 + \tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot(\tfrac{2}{5})^3 + \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot(\tfrac{3}{6})^4 + \tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot(\tfrac{4}{7})^5 + \cdots + \frac{2}{n}\,\frac{1}{n+1}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n-1} + \cdots.$$

Problème V. Développer $\Delta_a^n \varphi x$ suivant les puissances de n. On a

$$\mathrm{D}\,\Delta_a^n \varphi x = (e^{va} - 1)^n fv;$$

donc

$$\mathrm{D}\,\Delta_a^n \varphi x = fv\left(1 + n\log(e^{va} - 1) + \frac{n^2}{2}[\log(e^{va} - 1)]^2 + \cdots\right),$$

d'où l'on tire, en prenant la fonction génératrice,

$$\Delta_a^n \varphi x = \varphi x + n\,\mathrm{fg}[\log(e^{va} - 1)fv] + \frac{n^2}{2}\mathrm{fg}[(\log(e^{va} - 1))^2 fv] + \cdots.$$

Soit

$$\mathrm{fg}[\log(e^{va} - 1)fv] = \delta\varphi x,$$

on aura

$$\mathrm{fg}[(\log(e^{va} - 1))^n fv] = \delta^n \varphi x;$$

donc

$$\Delta_a^n \varphi x = \varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots.$$

Pour déterminer $\delta\varphi x$ il faut développer la quantité $\log(e^{va} - 1)$. On a

$$\log(e^{va} - 1) = \log[e^{va}(1 - e^{-va})] = va - e^{-va} - \tfrac{1}{2}e^{-2va} - \tfrac{1}{3}e^{-3va} - \cdots,$$

donc

$$\delta\varphi x = \alpha\frac{d\varphi x}{dx} - \varphi(x - \alpha) - \tfrac{1}{2}\varphi(x - 2\alpha) - \tfrac{1}{3}\varphi(x - 3\alpha) - \tfrac{1}{4}\varphi(x - 4\alpha) - \cdots.$$

En différentiant cette expression par rapport à α, on aura

$$d(\delta\varphi x) = d\alpha\left(\frac{d\varphi x}{dx} + \varphi'(x - \alpha) + \varphi'(x - 2\alpha) + \varphi'(x - 3\alpha) + \cdots\right).$$

Soit

$$\varphi x + \varphi(x - \alpha) + \varphi(x - 2\alpha) + \cdots = \delta_1\varphi x,$$

on aura

$$\mathrm{D}\varphi x + \mathrm{D}\varphi(x - \alpha) + \mathrm{D}\varphi(x - 2\alpha) + \cdots = \mathrm{D}\delta_1\varphi x;$$

donc

$$(1 + e^{-\alpha v} + e^{-2\alpha v} + \cdots)fv = \frac{fv}{1 - e^{-\alpha v}} = \mathrm{D}\delta_1\varphi x;$$

donc

$$\mathrm{D}\delta_1\varphi x = \frac{e^{\alpha v}fv}{e^{\alpha v} - 1} = [1 + (e^{\alpha v} - 1)^{-1}]fv;$$

donc

$$\delta_1\varphi x = \varphi x + \Delta_\alpha^{-1}\varphi x;$$

donc

$$\delta_1\varphi' x = \varphi' x + \Delta_\alpha^{-1}\varphi' x;$$

donc

$$\frac{d(\delta\varphi x)}{d\alpha} = \varphi' x + \Sigma_\alpha \varphi' x,$$

et

$$\delta\varphi x = \alpha\varphi' x + \int d\alpha\,\Sigma_\alpha\,\varphi' x.$$

Si l'on veut exprimer $\delta\varphi x$ par $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$, il faut développer $\log(e^{va} - 1)$ suivant les puissances de v. On aura

$$e^{va} - 1 = v\alpha + \frac{v^2\alpha^2}{2} + \frac{v^3\alpha^3}{2.3} + \cdots,$$

donc en posant

$$\log\left(\alpha v + \frac{\alpha^2}{2}v^2 + \cdots\right) = \log v + \log\alpha + \alpha A_1 v + \alpha^2 A_2 v^2 + \cdots,$$

on aura

$$\delta\varphi x = \mathrm{fg}(\log v\,.\,fv) + \log\alpha\,.\,\varphi x + \alpha A_1\varphi' x + \alpha^2 A_2\varphi'' x + \alpha^3 A_3\varphi''' x + \cdots.$$

Problème VI. Développer $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$ suivant les puissances de n. On a

$$\mathrm{D}\left(\frac{d^n\varphi x}{dx^n}\right) = v^n fv = fv\left(1 + n\log v + \frac{n^2}{2}(\log v)^2 + \cdots\right);$$

donc

$$\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = \varphi x + n\,.\,\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots,$$

où

$$\mathrm{D}(\delta\varphi x) = \log v\,.\,fv;$$

or

$$\log v = -\log\left(1 + \frac{1}{v}\right) + \log(1 + v) = v - \frac{1}{v} - \tfrac{1}{2}\left(v^2 - \frac{1}{v^2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(v^3 - \frac{1}{v^3}\right) + \cdots,$$

donc

$$\delta\varphi x = \begin{cases} \varphi' x - \tfrac{1}{2}\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\varphi''' x - \cdots \\ -\int\varphi x\,.\,dx + \tfrac{1}{2}\int^2\varphi x\,.\,dx^2 - \tfrac{1}{3}\int^3\varphi x\,.\,dx^3 + \cdots. \end{cases}$$

On peut exprimer $\delta\varphi x$ de plusieurs autres manières. Soit par exemple

$$\log v = \log(1 + v - 1) = v - 1 - \tfrac{1}{2}(v - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(v - 1)^3 - \cdots$$

on aura

$$\delta\varphi x = \delta_1\varphi x - \tfrac{1}{2}\delta_1^2\varphi x + \tfrac{1}{3}\delta_1^3\varphi x - \cdots,$$

où

$$\delta_1\varphi x = \varphi' x - \varphi x.$$

Problème VII. Développer $\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}$ suivant les puissances de n. On a

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n} = e^x\left(\varphi x + n\varphi' x + \frac{n(n-1)}{2}\varphi'' x + \cdots\right) = e^x \psi x;$$

donc

$$\mathrm{D}\,\psi x = \left(1 + nv + \frac{n(n-1)}{2}v^2 + \cdots\right) fv = (1+v)^n fv,$$

$$\mathrm{D}\,\psi x = fv\left(1 + n\log(1+v) + \frac{n^2}{2}[\log(1+v)]^2 + \cdots\right);$$

donc

$$\psi x = \varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots,$$

donc

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n} = e^x\left(\varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x + \cdots\right),$$

où

$$\mathrm{D}\,\delta\varphi x = \log(1+v).fv = fv\left(v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \cdots\right);$$

donc

$$\delta\varphi x = \varphi' x - \tfrac{1}{2}\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\varphi''' x - \cdots.$$

On a

$$\mathrm{D}\,\varphi(x+\alpha) = e^{\alpha v} fv;$$

donc

$$\mathrm{D}\,\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}) = e^{\alpha v\sqrt{-1}} fv \quad \text{et} \quad \mathrm{D}\,\varphi(x-\alpha\sqrt{-1}) = e^{-\alpha v\sqrt{-1}} fv,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{D}\,\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2} = \cos\alpha v.fv,$$

$$\mathrm{D}\,\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}) - \varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \sin\alpha v.fv.$$

Or on a, comme on sait,

$$\tfrac{1}{2} = \cos\alpha v - \cos 2\alpha v + \cos 3\alpha v - \cdots,$$

donc en multipliant par fv et prenant la fonction génératrice,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\varphi x = {} & \frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2} - \frac{\varphi(x+2\alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x-2\alpha\sqrt{-1})}{2} \\ & + \frac{\varphi(x+3\alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x-3\alpha\sqrt{-1})}{2} - \frac{\varphi(x+4\alpha\sqrt{-1}) + \varphi(x-4\alpha\sqrt{-1})}{2} \\ & + \text{etc.},\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\varphi x = {} & \varphi(x+\alpha) + \varphi(x-\alpha) - \varphi(x+2\alpha) - \varphi(x-2\alpha) \\ & + \varphi(x+3\alpha) + \varphi(x-3\alpha) - \varphi(x+4\alpha) - \varphi(x-4\alpha) \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Supposons qu'on ait

(21) $$\psi v = \int f(v,t)\,dt,$$

et soit

$$\psi v.fv = \mathrm{D}\,\delta\varphi x,$$

on aura, d'après la définition de la déterminante,

$$\delta\varphi x = \int e^{vx}\psi v.fv.dv$$

c'est-à-dire

$$\delta\varphi x = \int e^{vx} fv.dv \int f(v,t)\,dt = \int dt \int e^{vx} fv.f(v,t)\,dv.$$

Cela posé, soit

$$fv.f(v,t) = \mathrm{D}\,\delta_1\varphi x,$$

on aura

$$\delta_1\varphi x = \int e^{vx} fv.f(v,t)\,dv,$$

donc

(22) $$\delta\varphi x = \int dt.\delta_1\varphi x;$$

or on a $\mathrm{D}\,\delta\varphi x = \int \mathrm{D}\,\delta_1\varphi x.dt$, donc

(23) $$\mathrm{D}\int dt.\delta_1\varphi x = \int \mathrm{D}\,\delta_1\varphi x.dt, \quad \text{et} \quad \int dt.\mathrm{fg}[fv.f(v,t)] = \mathrm{fg}\left[\int dt\, fv.f(v,t)\right].$$

Ces équations peuvent servir à exprimer $\delta\varphi x$ par une autre opération $\delta_1\varphi x$ au moyen d'une intégrale définie.

On a par exemple

$$(e^{v\alpha} - 1)^{-1} - (v\alpha)^{-1} + \tfrac{1}{2} = 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt.\sin(v\alpha t)}{e^{2\pi t} - 1};$$

donc en prenant la fonction génératrice,

$$\Sigma_\alpha\varphi x - \frac{1}{\alpha}\int\varphi x\,dx + \tfrac{1}{2}\varphi x = 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) - \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

On a

$$\int_{a'}^{a} e^{(1-\alpha v)t}\,dt = e^{a}e^{-a\alpha v}\frac{1}{1-\alpha v} - e^{a'}.e^{-a'\alpha v}\frac{1}{1-\alpha v};$$

c'est-à-dire

$$\int_{a'}^{a} e^{t}e^{-\alpha vt}\,dt = e^{a}(e^{-a\alpha v}+\alpha v\,e^{-a\alpha v}+\alpha^2v^2e^{-a\alpha v}+\cdots)$$
$$-e^{a'}(e^{-\alpha a'v}+\alpha v\,e^{-\alpha a'v}+\alpha^2v^2e^{-\alpha a'v}+\cdots).$$

En multipliant par fv, et prenant la fonction génératrice, on aura en remarquant que $\text{fg}\,(v^n e^{-a\alpha v}fv) = \frac{d^n\varphi(x-\alpha a)}{dx^n}$, $\text{fg}\,(e^{-\alpha vt}fv) = \varphi(x-\alpha t)$,

$$\int_{a'}^{a} e^{t}\varphi(x-\alpha t)\,dt$$
$$=e^{a}[\varphi(x-\alpha a)+\alpha\varphi'(x-\alpha a)+\alpha^2\varphi''(x-\alpha a)+\alpha^3\varphi'''(x-\alpha a)+\cdots]$$
$$-e^{a'}[\varphi(x-\alpha a')+\alpha\varphi'(x-\alpha a')+\alpha^2\varphi''(x-\alpha a')+\alpha^3\varphi'''(x-\alpha a')+\cdots];$$

donc en faisant $a=0$ et $a'=-\frac{1}{0}$,

$$\varphi x+\alpha\varphi' x+\alpha^2\varphi'' x+\alpha^3\varphi''' x+\cdots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0} e^{t}\varphi(x-\alpha t)\,dt;$$

donc en différentiant par rapport à x et mettant $-\alpha$ à la place de α,

$$\varphi' x-\alpha\varphi'' x+\alpha^2\varphi''' x-\alpha^3\varphi'''' x+\cdots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0} e^{t}\varphi'(x+\alpha t)\,dt;$$

en multipliant par $d\alpha$ et intégrant, on aura

$$\alpha\varphi' x-\tfrac{1}{2}\alpha^2\varphi'' x+\tfrac{1}{3}\alpha^3\varphi''' x-\tfrac{1}{4}\alpha^4\varphi'''' x+\cdots=C+\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}\varphi(x+\alpha t)\,dt}{t}.$$

En faisant $\alpha=0$, on aura $C=-\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}\,dt}{t}\varphi x$; donc

$$\alpha\varphi' x-\tfrac{1}{2}\alpha^2\varphi'' x+\tfrac{1}{3}\alpha^3\varphi''' x-\tfrac{1}{4}\alpha^4\varphi'''' x+\cdots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}\,dt}{t}[\varphi(x+\alpha t)-\varphi x],$$

et lorsque $\alpha=1$,

$$\varphi' x-\tfrac{1}{2}\varphi'' x+\tfrac{1}{3}\varphi''' x-\cdots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}.\,dt}{t}[\varphi(x+t)-\varphi x].$$

De là il suit qu'on aura

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}=e^x\left(\varphi x+n\delta\varphi x+\frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x+\frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x+\cdots\right),$$

$$\text{où }\ \delta\varphi x=\int_{\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{-t}\,dt}{t}[\varphi(x-t)-\varphi x].$$

On a

$$\frac{e^{\alpha av}}{\alpha v}-\frac{e^{\alpha a'v}}{\alpha v}=\int_{a'}^{a}e^{\alpha vt}\,dt,$$

donc en prenant la fonction génératrice,

$$\int\varphi(x+\alpha a)\,dx-\int\varphi(x+\alpha a')\,dx=\alpha\int_{a'}^{a}\varphi(x+\alpha t)\,dt.$$

On a (*Legendre* Exerc. de calc. int. t. II, p. 176)

$$\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\cos(\alpha vt)}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha v},$$

donc

$$\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2}=\frac{\pi}{2}\varphi(x\pm\alpha).$$

Soit par exemple $\varphi x=\frac{1}{x}$, on aura

$$\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{(1+t^2)(\alpha^2t^2+x^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x(x\pm\alpha)}.$$

En effet,

$$\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{(1+t^2)(\alpha^2t^2+x^2)}=\frac{1}{x^2-\alpha^2}\left(\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}-\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{\alpha^2\,dt}{x^2+\alpha^2t^2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x(x+\alpha)}.$$

Soit $\varphi x=\frac{1}{x^n}$, on aura, en faisant $\alpha t=z\sin\varphi$, $x=z\cos\varphi$,

$$\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2}=z^{-n}\cos n\varphi,$$

or $z=\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}$, $\varphi=\text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x}$, donc

$$\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{\cos\left(n.\text{arc tang}\,\frac{\alpha t}{x}\right)}{(x^2+\alpha^2t^2)^{\frac{n}{2}}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(x+\alpha)^n}.$$

Soit par exemple $n=\frac{1}{2}$, on aura $\cos\frac{1}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}}\right)}$;

donc

$$\frac{\cos n\varphi}{z^n}=\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{z^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+\alpha^2t^2})}}{\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}};$$

donc

$$\int_{0}^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}}}{\sqrt{x^2+\alpha^2t^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

On a $z=\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{\alpha t}{\sin\varphi}$, donc $t=\frac{x}{\alpha}\operatorname{tang}\varphi$; on tire de là

$$\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\alpha x d\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi};$$

$$z^{-n}\cos n\varphi=\frac{(\cos\varphi)^n}{x^n}\cos n\varphi;$$

donc

$$\frac{dt}{1+t^2}z^{-n}\cos n\varphi=\frac{\alpha}{x^{n-1}}\cdot\frac{(\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi};$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{\alpha(x+\alpha)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi}{(x\sin\varphi)^2+(\alpha\cos\varphi)^2}.$$

Soit $\alpha=x$, on aura

$$\frac{\pi}{2^{n+1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi.$$

On trouve encore chez M. *Legendre* les deux intégrales suivantes:

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt\,.\sin at}{t(1+t^2)}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-a}),$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt\,.\sin at}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a};$$

donc on aura, en faisant $a=\alpha v$ et prenant la fonction génératrice,

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{t(1+t^2)}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}[\varphi x-\varphi(x\pm\alpha)]$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{1+t^2}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}\varphi(x\pm\alpha).$$

En ajoutant, on aura une troisième formule,

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{t}\cdot\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}\varphi x,$$

ou bien en faisant $\alpha=1$:

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{t}\cdot\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}\varphi x.$$

Soit par exemple $\varphi x=\frac{1}{x^n}$, $t=x\,.\operatorname{tang}\varphi$, on aura

$$\frac{dt}{t}=\frac{d\varphi}{\cos\varphi\,.\sin\varphi},$$

$$\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=-\left(\frac{\cos\varphi}{x}\right)^n\sin n\varphi,$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}(\cos\varphi)^{n-1}\sin n\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

XII.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

On a vu précédemment que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^n \cos n\varphi \,.\, d\varphi}{x^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{\alpha(x+\alpha)^n};$$

or

$$(\cos\varphi)^n = 1 + n\log\cos\varphi + \frac{n^2}{2}(\log\cos\varphi)^2 + \cdots,$$

$$\cos n\varphi = 1 - \frac{n^2}{2}\varphi^2 + \frac{n^4}{2\,.\,3\,.\,4}\varphi^4 - \cdots,$$

donc

$$(\cos\varphi)^n \cos n\varphi = 1 + n\log\cos\varphi + \frac{n^2}{2}[(\log\cos\varphi)^2 - \varphi^2]$$

$$+ \frac{n^3}{2\,.\,3}[(\log\cos\varphi)^3 - 3\varphi^2 \log\cos\varphi] + \cdots + \frac{n^m}{\Gamma(m+1)} A_m + \cdots,$$

où l'on a, en faisant pour abréger $\log\cos\varphi = t$,

$$\frac{A_m}{\Gamma(m+1)} = \frac{t_m}{\Gamma(m+1)} - \frac{t^{m-2}\varphi^2}{\Gamma(3)\,\Gamma(m-1)} + \frac{t^{m-4}\varphi^4}{\Gamma(5)\,\Gamma(m-3)} - \frac{t^{m-6}\varphi^6}{\Gamma(7)\,\Gamma(m-5)} + \cdots.$$

Or $\frac{x^n}{(x+\alpha)^n} = 1 + n\log\frac{x}{x+\alpha} + \frac{n^2}{2}\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^2 + \cdots$, donc on aura

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x\alpha}\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A_m\, d\varphi}{x^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi}.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi}.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x\alpha} \log\frac{x}{x+\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\cos\varphi \,.\, d\varphi}{x^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi}.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x\alpha}\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(\log\cos\varphi)^2 - \varphi^2]\, d\varphi}{x^2 \sin^2\varphi + \alpha^2 \cos^2\varphi}.$$

En faisant $x = \alpha$ on aura

$$\frac{\pi}{2}(\log\tfrac{1}{2})^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_m\, d\varphi;$$

par exemple

$$\frac{\pi}{2}\log\tfrac{1}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \,.\, \log\cos\varphi.$$

Soit $\cos\varphi = y$, on aura $d\varphi = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, donc

$$\frac{\pi}{2}\log 2 = \int_1^0 \frac{\log y \,.\, dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

En effet on a

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx\, \log\frac{1}{x}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int_0^1 \frac{(x^{p-1} - x^{p+q-1})\,dx}{1-x^n},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{y}\, dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \int_0^1 \frac{1-y}{1-y^2}\, dy;$$

or

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \int_0^1 \frac{1-y}{1-y^2}\, dy = \log 2.$$

On a

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2} = \frac{\pi}{2}\varphi(x+\alpha).$$

Soit $\varphi x = (\log x)^n$, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{[\log(x+\alpha t\sqrt{-1})]^n + [\log(x-\alpha t\sqrt{-1})]^n}{2} = \frac{\pi}{2}[\log(x+\alpha)]^n.$$

Or on a

$$\begin{aligned}\log(x+\alpha t\sqrt{-1}) &= \log x + \log\left(1+\frac{\alpha}{x}t\sqrt{-1}\right)\\ &= \log x + \frac{\log\left(1+\frac{\alpha}{x}t\sqrt{-1}\right)-\log\left(1-\frac{\alpha}{x}t\sqrt{-1}\right)}{2} + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}t^2\right)\\ &= \log x + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}t^2\right) + \sqrt{-1}\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{\alpha t}{x}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\log(x^2+\alpha^2t^2) + \sqrt{-1}\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{\alpha t}{x}\right).\end{aligned}$$

Soit $\frac{\alpha t}{x} = \text{tang}\,\varphi$, on aura

$$\log(x+\alpha t\sqrt{-1}) = \log x - \log\cos\varphi + \varphi\sqrt{-1}$$

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha x\,.\,d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x^2\sin^2\varphi+\alpha^2\cos^2\varphi} \cdot \frac{\left(\log\frac{x}{\cos\varphi}+\varphi\sqrt{-1}\right)^n + \left(\log\frac{x}{\cos\varphi}-\varphi\sqrt{-1}\right)^n}{2} = \frac{\pi}{2x\alpha}[\log(x+\alpha)]^n.$$

En faisant $x=\alpha=1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\left(\log\frac{1}{\cos\varphi}-\varphi\sqrt{-1}\right)^n + \left(\log\frac{1}{\cos\varphi}+\varphi\sqrt{-1}\right)^n\right] = \pi(\log 2)^n.$$

On a aussi en général, en faisant $t = \text{tang}\,u$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du\,[\varphi(x+\alpha\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)] = \pi\varphi(x+\alpha);$$

donc en faisant $x=\alpha=1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du\,[\varphi(1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)+\varphi(1-\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)] = \pi\varphi(2).$$

Soit $\varphi x = \frac{x^m}{1+\alpha x^n}$, on aura

$$\begin{aligned}\varphi(1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u) &= \frac{(1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)^m}{1+\alpha(1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,u)^n} = \frac{(\cos mu+\sqrt{-1}\sin mu)(\cos u)^{n-m}}{(\cos u)^n+\alpha\cos nu+\alpha\sqrt{-1}\sin nu}\\ &= \frac{(\cos u)^{n-m}}{[(\cos u)^n+\alpha\cos nu]^2+\alpha^2\sin^2 nu}[(\cos u)^n\cos mu+\alpha\cos(m-n)u\\ &\qquad +\sqrt{-1}((\cos u)^n\sin mu+\alpha\sin(m-n)u)];\end{aligned}$$

on tire de là

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^{n-m}[\cos mu(\cos u)^n+\alpha\cos(n-m)u]}{(\cos u)^{2n}+2\alpha\cos nu(\cos u)^n+\alpha^2}du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^m}{1+\alpha 2^n}.$$

Soit $m=0$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^n[(\cos u)^n+\alpha\cos nu]\,du}{(\cos u)^{2n}+2\alpha\cos nu(\cos u)^n+\alpha^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha 2^n}.$$

Soit $m=n$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nu(\cos u)^n+\alpha}{(\cos u)^{2n}+2\alpha\cos nu(\cos u)^n+\alpha^2}du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^n}{1+\alpha 2^n}.$$

Si par exemple $n=1$, on aura

$$\frac{\pi}{1+2\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^2+\alpha}{(\cos u)^2(1+2\alpha)+\alpha^2}du = \int_0^1 \frac{y^2+\alpha}{y^2(1+2\alpha)+\alpha^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Reprenons la formule

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^n\cos n\varphi\,.\,d\varphi.$$

Soit $n=\frac{m}{n}$, on aura

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{m}{n}}\cos\frac{m}{n}\varphi\,.\,d\varphi.$$

Soit $\frac{\varphi}{n}=\theta$, on aura

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\theta)^{\frac{m}{n}}\cos m\theta\,.\,d\theta;$$

or

$$\cos n\theta = (\cos\theta)^n - \frac{n(n-1)}{2}(\cos\theta)^{n-2}\sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}(\cos\theta)^{n-4}\sin^4\theta - \cdots,$$

donc en faisant $\cos\theta = y$, $d\theta = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$,

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{2n}} \sqrt[n]{(\psi y)^m}\, fy \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

où

$$\psi y = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2}(1-y^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} y^{n-4}(1-y^2)^2 - \cdots,$$

$$fy = y^m - \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2}(1-y^2) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} y^{m-4}(1-y^2)^2 - \cdots,$$

Soit par exemple $m=1$, $n=4$, on aura

$$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{8}} \sqrt[4]{1-8y^2+8y^4}\,\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Si l'on fait $y^2 = 1 - z^2$, on trouvera

$$\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \int_0^{\sin\frac{\pi}{8}} dz \sqrt[4]{1-8z^2+8z^4}.$$

XIII.

THÉORIE DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES.

CHAPITRE I.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ *par des fonctions algébriques.*

1. Pour plus de simplicité je désigne le radical par $\sqrt{R}$; on a donc à considérer l'integrale

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}},$$

P désignant une fonction algébrique rationnelle de x. On peut, comme on sait, décomposer P en plusieurs termes de la forme

$$A x^m \quad \text{et} \quad \frac{A}{(x-\alpha)^m},$$

m étant un nombre entier quelconque. L'intégrale proposée $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ est donc immédiatement décomposable en plusieurs autres intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m . \sqrt{R}}.$$

Cherchons les réductions qu'on peut faire avec ces deux intégrales, en les considérant d'abord séparément, et puis ensemble.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$.

2. Pour trouver la réduction générale dont cette intégrale est susceptible au moyen de fonctions algébriques, il s'agit de trouver la fonction algébrique la plus générale, dont la différentielle puisse se décomposer en termes de la forme $\frac{Ax^m\,dx}{\sqrt{R}}$; car après avoir intégré la différentielle ainsi décomposée, il est clair qu'on obtiendra la relation la plus générale qu'on puisse obtenir entre les intégrales de la forme $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$.

Or on sait par le calcul différentiel qu'en différentiant une fonction qui contient des radicaux, ces mêmes radicaux se trouvent aussi dans la différentielle; il est donc impossible que la fonction cherchée puisse contenir d'autres radicaux que $\sqrt{R}$; elle est donc de la forme $f(x, \sqrt{R})$, f désignant une fonction algébrique rationnelle de x et de $\sqrt{R}$. Une telle fonction est, comme on sait, toujours réductible à la forme $Q' + Q\sqrt{R}$, Q' et Q désignant deux fonctions rationnelles de x. Or il est clair qu'on peut faire abstraction du premier terme Q', puisque sa différentielle ne contient que des quantités rationnelles; on a donc

$$f(x, \sqrt{R}) = Q\sqrt{R}.$$

En différentiant $Q\sqrt{R}$, on voit au premier coup d'oeil que la différentielle contiendra nécessairement des termes de la forme $\frac{A\,.\,dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ si Q est fractionnaire; car supposons que Q contienne un terme $\frac{1}{(x-a)^m}$, on aura, en différentiant $\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}$,

$$d\left(\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}\right) = \left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}}\right\}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Or, quel que soit m, il est impossible que le coefficient de $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ dans l'expression précédente puisse devenir entier, à moins que R ne contienne deux ou plusieurs facteurs égaux; mais ce cas doit être exclu, puisqu'alors l'intégrale proposée serait de la forme $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}$; donc, comme la différentielle ne

doit contenir que des termes de la forme $\frac{Ax^m\,dx}{\sqrt{R}}$, il faut que Q soit une fonction algébrique entière de x; on a donc

$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(n)x^n.$$

3. Différentions maintenant la fonction trouvée $Q\sqrt{R}$. On obtiendra d'abord

$$d(Q\sqrt{R}) = dQ\,.\,\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{Q\,dR}{\sqrt{R}},$$

donc

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{R\,dQ + \frac{1}{2}Q\,dR}{dx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = S\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$\text{où}\quad S = R\frac{dQ}{dx} + \tfrac{1}{2}Q\frac{dR}{dx}.$$

On a

$$R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$
$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(n)x^n,$$

donc en différentiant

$$\frac{dR}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3,$$
$$\frac{dQ}{dx} = f(1) + 2f(2)x + 3f(3)x^2 + \cdots + nf(n)x^{n-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de S, on obtiendra

$$S = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)[f(1) + 2f(2)x + \cdots + nf(n)x^{n-1}]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)[f(0) + f(1)x + \cdots + f(n)x^n].$$

Soit

$$S = \varphi(0) + \varphi(1)x + \cdots + \varphi(m-1)x^{m-1} + \varphi(m)x^m.$$

On obtiendra, en développant et comparant les coefficiens, l'équation générale

$$\varphi(p) = (p+1)f(p+1)\,.\,\alpha + pf(p)\,.\,\beta + (p-1)f(p-1)\,.\,\gamma + (p-2)f(p-2)\,.\,\delta$$
$$+ (p-3)f(p-3)\,.\,\varepsilon + \tfrac{1}{2}f(p)\,.\,\beta + f(p-1)\,.\,\gamma + \tfrac{3}{2}f(p-2)\,.\,\delta + 2f(p-3)\,.\,\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\text{(a)}\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(p) = {} & (p+1)f(p+1)\,.\,\alpha + (p+\tfrac{1}{2})f(p)\,.\,\beta + pf(p-1)\,.\,\gamma \\ & + (p-\tfrac{1}{2})f(p-2)\,.\,\delta + (p-1)f(p-3)\,.\,\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

En faisant successivement $p = 0, 1, 2, 3 \ldots m$, on obtiendra toutes les équations qui résultent de l'égalité des deux valeurs de S.

Quant à la valeur de n, on trouvera $n + 3 = m$, donc

$$n = m - 3.$$

4. De l'équation $d(Q\sqrt{R}) = S\,\frac{dx}{\sqrt{R}}$, on tire en intégrant

$$Q\sqrt{R} = \int S\,\frac{dx}{\sqrt{R}};$$

et en substituant les valeurs de Q et de S,

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \cdots + \varphi(m-1)\int\frac{x^{m-1}.\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(m)\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}} \\ &\qquad = \sqrt{R}\,[f(0) + f(1).x + f(2).x^2 + \cdots + f(m-3).x^{m-3}]. \end{aligned}\right.$$

Cette équation contient la relation la plus générale qu'on puisse trouver par des fonctions algébriques entre plusieurs intégrales de la forme $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$, et c'est de cette équation qu'il faut tirer toutes les réductions dont les intégrales de cette forme sont susceptibles. Le premier membre de cette équation est en même temps l'intégrale la plus générale de la forme $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$, P désignant une fonction entière de x, qui est intégrable par des fonctions algébriques.

5. Considérons maintenant l'équation (b). Comme la fonction multipliée par $\sqrt{R}$ du second membre doit être entière, il faut que m soit égal ou plus grand que 3. Il suit de là qu'il est impossible de trouver une relation entre les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$, et que par conséquent ces trois intégrales sont irréductibles entre elles par des fonctions algébriques. Si au contraire m est égal ou supérieur à 3, on voit qu'il est toujours possible de réduire l'intégrale $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$ à des intégrales de la même forme dans lesquelles m est moindre; et il est évident que les seules intégrales irréductibles sont les trois suivantes

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Ces intégrales sont donc les seules fonctions transcendantes contenues dans l'intégrale $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$, P étant une fonction entière.

6. Pour réduire l'intégrale $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$, faisons dans l'équation (b), $\varphi(m) = -1$, nous aurons

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \cdots + \varphi(m-1)\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}\,[f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(m-3)x^{m-3}].$$

D'après ce qui précède on peut faire

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \cdots = \varphi(3) = 0,$$

on a donc

$$\text{(c)}\quad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} \\ &\qquad - \sqrt{R}\,[f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots + f(m-3)x^{m-3}]. \end{aligned}\right.$$

Il reste à déterminer les coefficiens

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ f(0),\ f(1),\ f(2) \ldots f(m-3).$$

Pour cela faisons dans l'équation (a) $p = 0$, $p = 1, \ldots p = m$, on obtiendra les équations suivantes, au nombre de $m + 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= f(1).\alpha + \tfrac{1}{2}f(0).\beta, \\
\varphi(1) &= 2f(2).\alpha + \tfrac{3}{2}f(1).\beta + f(0).\gamma, \\
\varphi(2) &= 3f(3).\alpha + \tfrac{5}{2}f(2).\beta + 2f(1).\gamma + \tfrac{3}{2}f(0).\delta, \\
0 &= 4f(4).\alpha + \tfrac{7}{2}f(3).\beta + 3f(2).\gamma + \tfrac{5}{2}f(1).\delta + 2f(0).\varepsilon, \\
0 &= 5f(5).\alpha + \tfrac{9}{2}f(4).\beta + 4f(3).\gamma + \tfrac{7}{2}f(2).\delta + 3f(1).\varepsilon, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (m-3)f(m-3).\alpha + (m-\tfrac{7}{2})f(m-4).\beta + (m-4)f(m-5).\gamma \\
&\qquad + (m-\tfrac{9}{2})f(m-6).\delta + (m-5)f(m-7).\varepsilon, \\
0 &= (m-\tfrac{5}{2})f(m-3).\beta + (m-3)f(m-4).\gamma + (m-\tfrac{7}{2})f(m-5).\delta + (m-4)f(m-6).\varepsilon, \\
0 &= (m-2)f(m-3).\gamma + (m-\tfrac{5}{2})f(m-4).\delta + (m-3)f(m-5).\varepsilon, \\
0 &= (m-\tfrac{3}{2})f(m-3).\delta + (m-2)f(m-4).\varepsilon, \\
-1 &= (m-1)f(m-3).\varepsilon,
\end{aligned}$$

en remarquant que $\varphi(m) = -1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = \cdots = \varphi(m-1) = 0$.

Au moyen des $m-2$ dernières équations on peut déterminer les $m-2$ quantités $f(0), f(1), \ldots f(m-3)$, et les trois premières serviront ensuite à déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$. En éliminant on trouvera

$$f(m-3) = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon},$$

$$f(m-4) = \frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-1)(m-2)}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2},$$

$$f(m-5) = \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^3},$$

$$\begin{aligned} f(m-6) = {} & \frac{(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-4)}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-3)}{(m-1)(m-2)(m-4)}\cdot\frac{\delta\gamma}{\varepsilon^3} - \frac{(m-2)(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-3)(m-4)}\cdot\frac{\delta\gamma}{\varepsilon^3} \\ & + \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m-7) = {} & \frac{(m-3)}{(m-1)(m-5)}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-2)(m-5)}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^3} - \frac{(m-\frac{5}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^3} \\ & - \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)}\cdot\frac{\gamma^2}{\varepsilon^3} + \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-4)}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4} \\ & + \frac{(m-\frac{3}{2})(m-3)(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-2)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4} + \frac{(m-2)(m-\frac{7}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-3)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4} \\ & - \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^5}. \end{aligned}$$

7. Pour exprimer en général le coefficient $f(m-p)$, faisons $\varepsilon=\varepsilon^{(0)}$, $\delta=\varepsilon^{(1)}$, $\gamma=\varepsilon^{(2)}$, $\beta=\varepsilon^{(3)}$, $\alpha=\varepsilon^{(4)}$. Cela posé, on peut aisément se convaincre que $f(m-p)$ est composé de termes de la forme

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p-2}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')\ldots(m-k^{(n-1)})(m-k^{(n)})(m-p+2)}$$
$$\times\frac{\varepsilon^{(k-1)}.\varepsilon^{(k'-k)}.\varepsilon^{(k''-k')}\ldots\varepsilon^{(k^{(n)}-k^{(n-1)})}.\varepsilon^{(p-k^{(n)}-2)}}{\varepsilon^{n+3}},$$

où les quantités k, k', k'', etc. $p-2$ suivent l'ordre de leur grandeur, de manière que $k'>k$, $k''>k'$, etc. $p-2>k^{(n)}$.

En donnant avec cette restriction toutes les valeurs entières aux quantités k, k', k'' etc. $k^{(n)}$, et à n toutes les valeurs entières depuis le plus grand nombre entier compris dans $\frac{p}{4}-2$ jusqu'à $p-5$, et en remarquant que chaque dénominateur aura $n+3$ facteurs binomes, on obtiendra tous les termes dont $f(m-p)$ est composé. On a donc

$$\text{(d)}\left\{\begin{aligned} f(m-p) = \Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{\varepsilon^{n+3}}\cdot & \frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p-2}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')\ldots(m-k^{(n)})(m-p+2)} \\ & \times\varepsilon^{(k-1)}.\varepsilon^{(k'-k)}.\varepsilon^{(k''-k')}\ldots\varepsilon^{(p-k^{(n)}-2)}. \end{aligned}\right.$$

Ayant ainsi trouvé les quantités $f(0), f(1), f(2) \ldots f(m-3)$, on a ensuite

$$\text{(e)}\quad\left\{\begin{aligned} \varphi(0) &= \alpha.f(1)+\tfrac{1}{2}\beta.f(0), \\ \varphi(1) &= 2\alpha.f(2)+\tfrac{3}{2}\beta.f(1)+\gamma.f(0), \\ \varphi(2) &= 3\alpha.f(3)+\tfrac{5}{2}\beta.f(2)+2\gamma.f(1)+\tfrac{3}{2}\delta.f(0). \end{aligned}\right.$$

8. Appliquons ce qui précède à un exemple, et proposons-nous de réduire l'intégrale

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}}.$$

On a $m=4$, $n=m-3=1$, donc

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}[f(0)+f(1).x].$$

Par les équations précédentes on a, en faisant $m=4$,

$$f(1) = -\frac{1}{3\varepsilon},\ f(0)=\frac{5\delta}{12\varepsilon^2},\ f(2)=f(3)=\text{etc.}=0.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (e), on aura

$$\varphi(0) = \tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

$$\varphi(1) = \tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon},$$

$$\varphi(2) = \tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\begin{aligned} \int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}} = {} & \left(\tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} \\ & +\left(\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}. \\ & +\left(\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} \\ & -\left(\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon}x\right)\sqrt{R}. \end{aligned}$$

9. Dans le cas où $\beta=\gamma=\delta=0$, la valeur de $f(m-p)$ se simplifie beaucoup, et se réduit à un seul terme. En effet, comme $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon^{(2)}=\varepsilon^{(3)}=0$, $\varepsilon^{(4)}=\alpha$, il est clair que tous les termes s'évanouiront dans l'expression de $f(m-p)$, excepté ceux dans lesquels on a $k-1=k'-k=k''-k'=\cdots=p-2-k^{(n)}=4$. On a donc $k=5$, $k'=9$, $k''=13$, $\ldots k^{(n)}=4n+5$, $p=4n+11$, d'où $n=\frac{p-11}{4}$. Chacune de ces quantités n, k, k', $\ldots k^{(n)}$ n'a donc qu'une seule valeur, d'où il suit que $f(m-p)$ ne contient qu'un seul terme. De plus comme on a trouvé $p=4n+11$, il est clair que toutes les quantités $f(m-p)$ s'évanouiront, excepté celles de la forme $f(m-4n-11)$, dont la valeur est

$$(-1)^{n+1}\frac{(m-3)(m-7)(m-11)\ldots(m-4n-7)}{(m-1)(m-5)(m-9)\ldots(m-4n-9)}\cdot\frac{\alpha^{n+2}}{\varepsilon^{n+3}},$$

ou bien en mettant $n-3$ au lieu de n,

$$f(m-4n+1)=(-1)^n\frac{(m-3)(m-7)(m-11)\ldots(m-4n+5)}{(m-1)(m-5)(m-9)\ldots(m-4n+3)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

Pour déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, il faut distinguer quatre cas:

1) si $m=4r$, 2) si $m=4r+1$, 3) si $m=4r+2$, 4) si $m=4r+3$.

Dans le premier cas on a

$$f(4r-4n+1)=(-1)^n\frac{(4r-3)(4r-7)\ldots(4r-4n+5)}{(4r-1)(4r-5)\ldots(4r-4n+3)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(1)=(-1)^r\frac{5.9.13\ldots(4r-3)}{3.7.11\ldots(4r-1)}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(0)=\alpha.f(1),\ \varphi(1)=\varphi(2)=0.$$

Dans le second cas on a

$$f(4r-4n+2)=(-1)^n\frac{(4r-2)(4r-6)\ldots(4r-4n+6)}{4r(4r-4)\ldots(4r-4n+4)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(2)=(-1)^r\frac{6.10.14\ldots(4r-2)}{4.8.12\ldots4r}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(1)=2\alpha.f(2),\ \varphi(0)=\varphi(2)=0.$$

Dans le troisième cas on a

$$f(4r-4n+3)=(-1)^n.\frac{(4r-1)(4r-5)\ldots(4r-4n+7)}{(4r+1)(4r-3)\ldots(4r-4n+5)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(3)=(-1)^r\frac{7.11.15\ldots(4r-1)}{5.\ 9.13\ldots(4r+1)}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(2)=3\alpha.f(3),\ \varphi(0)=\varphi(1)=0.$$

Dans le quatrième cas on a

$$f(4r-4n+4)=(-1)^n.\frac{4r(4r-4)(4r-8)\ldots(4r-4n+8)}{(4r+2)(4r-2)\ldots(4r-4n+6)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n},$$

donc

$$f(1)=f(2)=f(3)=0,\ \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(2)=0.$$

10. On a vu que trois fonctions transcendantes sont nécessaires pour intégrer la différentielle $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, P étant une fonction entière. Donc si l'on veut réduire ce nombre, il en résultera nécessairement certaines relations entre les quantités α, β, γ, δ, ε. Si l'on veut par exemple que $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ soit intégrable algébriquement, on doit faire $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(2)=0$, d'où il résultera, entre les cinq quantités α, β, γ, δ, ε, trois relations, par lesquelles on en peut déterminer trois en fonction des deux autres. Déterminons par exemple α, β, γ, δ, ε de manière que $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}}$ devienne intégrable algébriquement.

On a vu précédemment que dans ce cas

$$\varphi(0)=\tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

$$\varphi(1)=\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon},$$

$$\varphi(2)=\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

Comme ces quantités doivent être égalées à zéro, on trouvera

$$\gamma=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon}=\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon},$$

$$\beta=2.\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon}=\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2}=\tfrac{25}{32}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2},$$

$$\alpha=\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon}=\tfrac{125}{256}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^3},$$

donc

$$R=\tfrac{125}{256}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^3}+\tfrac{25}{32}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2}x+\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon}x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4;$$

donc lorsque R a cette valeur, on a

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{R}}=-\left(\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon}x\right)\sqrt{R}.$$

En faisant $\delta=4$ et $\varepsilon=5$, on obtiendra

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1+2x+3x^2+4x^3+5x^4}}=\tfrac{1}{15}(x-1)\sqrt{1+2x+3x^2+4x^3+5x^4}.$$

Réduction de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$.

11. Pour réduire cette intégrale il faut, d'après ce qu'on a vu précédemment, différentier $Q\sqrt{R}$ en supposant Q fractionnaire. Faisons d'abord

$$Q=\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\frac{\psi(3)}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}},$$

d'où l'on déduit en différentiant

$$dQ=-\frac{\psi(1)\,dx}{(x-a)^2}-\frac{2\psi(2)\,dx}{(x-a)^3}-\frac{3\psi(3)\,dx}{(x-a)^4}-\cdots-\frac{(m-1)\,\psi(m-1)\,dx}{(x-a)^m}.$$

Pour rendre les calculs plus faciles, faisons

$$R=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4=\alpha'+\beta'(x-a)+\gamma'(x-a)^2+\delta'(x-a)^3+\varepsilon'(x-a)^4.$$

Pour déterminer α', β', γ', δ', ε', mettons $x+a$ au lieu de x, nous aurons

$$\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2+\delta'x^3+\varepsilon'x^4=\alpha+\beta(x+a)+\gamma(x+a)^2+\delta(x+a)^3+\varepsilon(x+a)^4.$$

On tire de là

$$\begin{aligned}\alpha'&=\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4,\\ \beta'&=\beta+2\gamma a+3\delta a^2+4\varepsilon a^3,\\ \gamma'&=\gamma+3\delta a+6\varepsilon a^2,\\ \delta'&=\delta+4\varepsilon a,\\ \varepsilon'&=\varepsilon.\end{aligned}$$

En différentiant R on aura

$$\frac{dR}{dx}=\beta'+2\gamma'(x-a)+3\delta'(x-a)^2+4\varepsilon'(x-a)^3.$$

Maintenant la différentielle de $Q\sqrt{R}$ donne

$$d(Q\sqrt{R})=\frac{R\,dQ+\frac{1}{2}Q\,dR}{\sqrt{R}};$$

donc en substituant les valeurs de R, Q, dR et dQ on obtiendra:

$$\begin{aligned}d(Q\sqrt{R})=&[\alpha'+\beta'(x-a)+\gamma'(x-a)^2+\delta'(x-a)^3+\varepsilon'(x-a)^4]\left(-\frac{\psi(1)}{(x-a)^2}-\frac{2\psi(2)}{(x-a)^3}-\cdots-\frac{(m-1)\psi(m-1)}{(x-a)^m}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}}\\ &+\tfrac{1}{2}[\beta'+2\gamma'(x-a)+3\delta'(x-a)^2+4\varepsilon'(x-a)^3]\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}}=S\frac{dx}{\sqrt{R}}.\end{aligned}$$

Supposons

$$S=\varphi'(0)+\varphi'(1)(x-a)+\varphi'(2)(x-a)^2+\frac{\chi(1)}{x-a}+\frac{\chi(2)}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{\chi(m)}{(x-a)^m}.$$

Cela posé, on obtiendra aisément

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=-\tfrac{1}{2}\delta'\psi(2)-\varepsilon'\psi(3),\\ \varphi'(1)&=\quad\tfrac{1}{2}\delta'\psi(1),\\ \varphi'(2)&=\quad\varepsilon'\psi(1),\end{aligned}$$

$$(\text{f})\quad\left\{\begin{aligned}\chi(p)=&-\alpha'(p-1)\psi(p-1)-\beta'(p-\tfrac{1}{2})\psi(p)-\gamma'p\,\psi(p+1)\\ &-\delta'(p+\tfrac{1}{2})\psi(p+2)-\varepsilon'(p+1)\psi(p+3).\end{aligned}\right.$$

Faisons

$$\varphi'(0)+\varphi'(1)(x-a)+\varphi'(2)(x-a)^2=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=\varphi'(0)-a\varphi'(1)+a^2\varphi'(2)=-\varepsilon'\psi(3)-\tfrac{1}{2}\delta'\psi(2)-(\tfrac{1}{2}a\delta'-\varepsilon'a^2)\psi(1),\\ &\varphi(1)=\varphi'(1)-2a\varphi'(2)=(\tfrac{1}{2}\delta'-2a\varepsilon')\psi(1),\\ &\varphi(2)=\varphi'(2)=\varepsilon\psi(1),\end{aligned}$$

ou bien, en substituant les valeurs de δ' et ε',

$$(\text{g})\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi(0)=-(\tfrac{1}{2}a\delta+\varepsilon a^2)\psi(1)-\tfrac{1}{2}(\delta+4a\varepsilon)\psi(2)-\varepsilon\psi(3),\\ &\varphi(1)=\tfrac{1}{2}\delta\psi(1),\\ &\varphi(2)=\varepsilon\psi(1).\end{aligned}\right.$$

12. Si l'on multiplie la valeur de S par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$, et qu'on prenne ensuite l'intégrale de chaque membre, on obtiendra en substituant la valeur de Q,

$$(\text{h})\quad\left\{\begin{aligned}&\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}\\ &+\chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\chi(2)\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}+\cdots+\chi(m)\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}\\ &=\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\frac{\psi(3)}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right).\end{aligned}\right.$$

Il est clair que par cette équation on peut toujours réduire l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ si m est différent de 1; car elle suppose évidemment $m>1$. $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ peut donc être exprimée par les trois intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ et par l'integrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; mais celle-ci est en général irréductible. Je dis en général, car on conçoit qu'on pourrait déterminer les quantités a, α, β, γ, δ, ε, de telle sorte qu'elle devînt réductible, ce qui a effectivement lieu, comme on le verra ci-après.

En faisant dans l'équation (h) $\chi(m) = -1$, $\chi(2) = \chi(3) = \chi(4) = \cdots = \chi(m-1) = 0$, on obtiendra

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} &= \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \\ &\quad - \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}} \right). \end{aligned} \right.$$

13. Pour déterminer les coefficiens, faisons dans l'équation (f) $p = 1, 2, 3, \ldots m$, nous aurons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \chi(1) &= -\tfrac{1}{2} \beta' \psi(1) - \gamma' \psi(2) - \tfrac{3}{2} \delta' \psi(3) - 2\varepsilon' \psi(4), \\ 0 &= \alpha' \psi(1) + \tfrac{3}{2} \beta' \psi(2) + 2\gamma' \psi(3) + \tfrac{5}{2} \delta' \psi(4) + 3\varepsilon' \psi(5), \\ 0 &= 2\alpha' \psi(2) + \tfrac{5}{2} \beta' \psi(3) + 3\gamma' \psi(4) + \tfrac{7}{2} \delta' \psi(5) + 4\varepsilon' \psi(6), \\ 0 &= 3\alpha' \psi(3) + \tfrac{7}{2} \beta' \psi(4) + 4\gamma' \psi(5) + \tfrac{9}{2} \delta' \psi(6) + 5\varepsilon' \psi(7), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= (m-3)\alpha' \psi(m-3) + (m-\tfrac{5}{2})\beta' \psi(m-2) + (m-2)\gamma' \psi(m-1), \\ 0 &= (m-2)\alpha' \psi(m-2) + (m-\tfrac{3}{2})\beta' \psi(m-1), \\ 1 &= (m-1)\alpha' \psi(m-1). \end{aligned}$$

En éliminant on trouvera

$$\psi(m-1) = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\alpha'}$$

$$\psi(m-2) = -\frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-1)(m-2)} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'^2}$$

$$\psi(m-3) = \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)} \cdot \frac{\beta'^2}{\alpha'^3} - \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)} \cdot \frac{\gamma'}{\alpha'^2}.$$

Pour exprimer le coefficient général, faisons $R = fx$. On tire de là

$$\alpha' = fa, \quad \beta' = \frac{d\,fa}{da}, \quad \gamma' = \frac{d^2 fa}{2\,.\,da^2}, \quad \delta' = \frac{d^3 fa}{2\,.\,3\,.\,da^3}, \quad \varepsilon' = \frac{d^4 fa}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,da^4}.$$

Cela posé, on aura en général

$$\text{(k)} \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(m-p) &= \Sigma \frac{(-1)^n}{(fa)^{n+3}} \frac{\left(m - \frac{k+1}{2}\right)\left(m - \frac{k'+k}{2}\right) \cdots \left(m - \frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m - \frac{k^{(n)}+p}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k') \ldots (m-k^{(n)})(m-p)} \\ &\quad \times \frac{d^{k-1} fa}{1\,.\,2 \ldots (k-1)\, da^{k-1}} \cdot \frac{d^{k'-k} fa}{1\,.\,2 \ldots (k'-k)\, da^{k'-k}} \cdots \frac{d^{p-k^{(n)}} fa}{1\,.\,2 \ldots (p-k^{(n)})\, da^{p-k^{(n)}}}, \end{aligned} \right.$$

le signe Σ ayant la même signification que dans l'équation (d).

Ayant ainsi trouvé $\psi(m-p)$, on aura $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ par les équations (g), et $\chi(1)$ par l'équation

$$\text{(l)} \quad \chi(1) = -\tfrac{1}{2} f'a\, \psi(1) - \frac{f''a}{1\,.\,2} \psi(2) - \tfrac{3}{2} \frac{f'''a}{1\,.\,2\,.\,3} \psi(3) - 2 \frac{f''''a}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \psi(4).$$

14. Prenons comme exemple $\int \frac{dx}{(x-a)^2 \sqrt{R}}$. On a $m = 2$, donc

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 \sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - \sqrt{R}\, \frac{\psi(1)}{x-a},$$

$$\psi(1) = \frac{1}{fa} = \frac{1}{\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4},$$

$$\chi(1) = -\tfrac{1}{2} f'a\,.\,\psi(1) = -\tfrac{1}{2} \frac{f'a}{fa} = -\tfrac{1}{2} \frac{\beta + 2\gamma a + 3\delta a^2 + 4\varepsilon a^3}{\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4},$$

$$\varphi(0) = -(\tfrac{1}{2} a\delta + \varepsilon a^2) \frac{1}{fa},$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2} \delta \frac{1}{fa},$$

$$\varphi(2) = \frac{\varepsilon}{fa}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2 \sqrt{fx}} = -\frac{(\varepsilon a^2 + \frac{1}{2}\delta a)}{fa} \int \frac{dx}{\sqrt{fx}} + \frac{\delta}{2fa} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{fx}} + \frac{\varepsilon}{fa} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{fx}} - \tfrac{1}{2} \frac{f'a}{fa} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \frac{\sqrt{fx}}{(x-a)\, fa}.$$

Si $a = 0$ on a

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{R}} = \frac{\delta}{2\alpha} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \frac{\varepsilon}{\alpha} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \tfrac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{x\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{R}}{\alpha x}.$$

15. Par la forme qu'on a trouvée pour les quantités $\psi(1)$, $\psi(2)$ etc., il est évident que l'équation (i) peut toujours être employée si $\alpha' \gtrless 0$; mais dans ce cas elle devient illusoire à cause des coefficiens infinis. Il faut donc considérer ce cas séparément. Or α' étant égal à zéro, on a $\chi(m) = 0$, donc l'équation (h) prend la forme suivante:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$
$$+ \chi(1)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2)\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} + \cdots + \chi(m)\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$
$$= \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m}\right),$$

où l'on a mis $m+1$ à la place de m. Dans cette équation on peut faire $m=1$. Donc il est dans ce cas toujours possible d'exprimer l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ par les trois intégrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Pour achever la réduction, faisons $\chi(m) = -1$, $\chi(1) = \chi(2) = \cdots = 0$. Par là on obtiendra

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}} &= \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} \\ &\quad - \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m}\right). \end{aligned}\right.$$

En faisant maintenant dans l'équation (f) $p = 1, 2, 3 \ldots m$, on obtiendra les équations suivantes:

$$0 = \tfrac{1}{2}\beta'\psi(1) + \gamma'\psi(2) + \tfrac{3}{2}\delta'\psi(3) + 2\varepsilon'\psi(4),$$
$$0 = \tfrac{3}{2}\beta'\psi(2) + 2\gamma'\psi(3) + \tfrac{5}{2}\delta'\psi(4) + 3\varepsilon'\psi(5),$$
$$0 = \tfrac{5}{2}\beta'\psi(3) + 3\gamma'\psi(4) + \tfrac{7}{2}\delta'\psi(5) + 4\varepsilon'\psi(6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = (m-\tfrac{7}{2})\beta'\psi(m-3) + (m-3)\gamma'\psi(m-2) + (m-\tfrac{5}{2})\delta'\psi(m-1) + (m-2)\varepsilon'\psi(m),$$
$$0 = (m-\tfrac{5}{2})\beta'\psi(m-2) + (m-2)\gamma'\psi(m-1) + (m-\tfrac{3}{2})\delta'\psi(m),$$
$$0 = (m-\tfrac{3}{2})\beta'\psi(m-1) + (m-1)\gamma'\psi(m),$$
$$1 = (m-\tfrac{1}{2})\beta'\psi(m).$$

De ces équations on tirera en éliminant:

$$\psi(m) = \frac{1}{(m-\frac{1}{2})\beta'},$$
$$\psi(m-1) = -\frac{(m-1)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})}\cdot\frac{\gamma'}{\beta'^2},$$
$$\psi(m-2) = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}\cdot\frac{\gamma'^2}{\beta'^3} - \frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{5}{2})}\cdot\frac{\delta'}{\beta'^2},$$

etc.

Le coefficient général peut s'exprimer de la manière suivante:

$$(\mathrm{m})\quad \left\{\begin{aligned} \psi(m-p) &= \Sigma\frac{(-1)^n}{(f'a)^{n+3}}\cdot\frac{\left(m-\frac{k}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k-1}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}-1}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p}{2}\right)}{(m-\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2}-k)(m+\frac{1}{2}-k')\ldots(m+\frac{1}{2}-k^{(n)})(m-p-\frac{1}{2})} \\ &\times\frac{d^k fa}{1.2\ldots k.da^k}\cdot\frac{d^{k'-k+1}fa}{1.2\ldots(k'-k+1)\,da^{k'-k+1}}\cdots\frac{d^{p-k^{(n)}+1}fa}{1.2\ldots(p-k^{(n)}+1)\,da^{p-k^{(n)}+1}}. \end{aligned}\right.$$

16. L'équation (1') a lieu si $\alpha' = 0$, c'est-à-dire si $\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 = 0$. Il suit de là que $x - a$ est facteur de R. Donc:

"Toutes les fois que $x - a$ est facteur de R, on peut exprimer l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ par les trois intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$. Dans tout autre cas cela est impossible, car l'équation (h) suppose $m > 1$."

Proposons-nous de réduire l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, $x-a$ étant facteur de R. Comme $m = 1$, on a

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = \varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} - \sqrt{R}\,\frac{\psi(1)}{x-a}.$$

L'équation (m) donne $\psi(1) = \frac{1}{\frac{1}{2}f'a} = \frac{2}{f'a}$, et les équations (g) donnent

$$\varphi(0) = -(\varepsilon a^2 + \tfrac{1}{2}\delta a)\,\psi(1) = -\frac{(2\varepsilon a^2 + \delta a)}{f'a},$$
$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}\,\delta\,\psi(1) = \frac{\delta}{f'a},$$
$$\varphi(2) = \varepsilon\,\psi(1) = \frac{2\varepsilon}{f'a}.$$

En substituant ces valeurs on obtiendra

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = -\frac{(2\varepsilon a^2 + a\delta)}{f'a}\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{\delta}{f'a}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \frac{2\varepsilon}{f'a}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{f'a}\,\frac{\sqrt{R}}{x-a}.$$

Soit

$$R = (x-a)(x-a')(x-a'')(x-a''') = fx,$$

on aura

$$\delta = -(a+a'+a''+a'''),\ \varepsilon = 1,\ f'x = (x-a')(x-a'')(x-a''') + \cdots$$

$$f'a = (a-a')(a-a'')(a-a''').$$

En faisant ces substitutions, on aura

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = -\frac{a^2-a(a'+a''+a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{a+a'+a''+a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$+\frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\,\frac{\sqrt{R}}{x-a}.$$

17. Cherchons maintenant à trouver une relation entre des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-b)\sqrt{R}}\cdot$ Pour cela faisons

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-b)\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{dx}{(x-b')\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{dx}{(x-b'')\sqrt{R}} + \cdots = Q\sqrt{R}.$$

En différentiant, on voit aisément que la forme la plus générale qu'on puisse donner à Q est la suivante

$$Q = \frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \frac{A'''}{x-a'''},$$

$x-a$, $x-a'$, $x-a''$, $x-a'''$ étant les quatre facteurs de R. On a donc

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} + \varphi(3)\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \frac{A'''}{x-a'''}\right),$$

ou bien, en substituant les valeurs de $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ etc. trouvées plus haut,

$$-\left(\varphi(0)\frac{2\varepsilon a^2+a\delta}{f'a} + \varphi(1)\frac{2\varepsilon a'^2+a'\delta}{f'a'} + \varphi(2)\frac{2\varepsilon a''^2+a''\delta}{f'a''} + \varphi(3)\frac{2\varepsilon a'''^2+a'''\delta}{f'a'''}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$+\left(\frac{\delta\varphi(0)}{f'a} + \frac{\delta\varphi(1)}{f'a'} + \frac{\delta\varphi(2)}{f'a''} + \frac{\delta\varphi(3)}{f'a'''}\right)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$+\left(\frac{2\varepsilon\varphi(0)}{f'a} + \frac{2\varepsilon\varphi(1)}{f'a'} + \frac{2\varepsilon\varphi(2)}{f'a''} + \frac{2\varepsilon\varphi(3)}{f'a'''}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$= \sqrt{R}\left\{\frac{A+\frac{2\varphi(0)}{f'a}}{x-a} + \frac{A'+\frac{2\varphi(1)}{f'a'}}{x-a'} + \frac{A''+\frac{2\varphi(2)}{f'a''}}{x-a''} + \frac{A'''+\frac{2\varphi(3)}{f'a'''}}{x-a'''}\right\}.$$

On a donc

$$A = -\frac{2\varphi(0)}{f'a},\ A' = -\frac{2\varphi(1)}{f'a'},\ A'' = -\frac{2\varphi(2)}{f'a''},\ A''' = -\frac{2\varphi(3)}{f'a'''},$$

$$A(2\varepsilon a^2+a\delta) + A'(2\varepsilon a'^2+a'\delta) + A''(2\varepsilon a''^2+a''\delta) + A'''(2\varepsilon a'''^2+a'''\delta) = 0,$$

$$A + A' + A'' + A''' = 0.$$

On voit par là qu'on peut faire l'une quelconque des quantités A, A' etc. égale à zéro. Soit par exemple $A'''=0$, on aura

$$A'' = -A - A',$$

$$A[2\varepsilon(a^2-a''^2) + \delta(a-a'')] + A'[2\varepsilon(a'^2-a''^2) + \delta(a'-a'')] = 0;$$

donc

$$A' = -\frac{2\varepsilon(a^2-a''^2)+\delta(a-a'')}{2\varepsilon(a'^2-a''^2)+\delta(a'-a'')}\,A = 2\varepsilon(a^2-a''^2)+\delta(a-a'') = (a-a'')(a+a''-a'-a'''),$$

en faisant

$$A = 2\varepsilon(a''^2-a'^2) + \delta(a''-a') = (a''-a')(a''+a'-a-a'''),$$

et par suite

$$A'' = 2\varepsilon(a'^2-a^2) + \delta(a'-a) = (a'-a)(a'+a-a''-a''').$$

On en déduit

$$\varphi(0) = \tfrac{1}{2}(a-a')(a-a'')(a-a''')(a'-a'')(a'+a''-a-a'''),$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')(a''-a)(a+a''-a'-a'''),$$

$$\varphi(2) = \tfrac{1}{2}(a''-a)(a''-a')(a''-a''')(a-a')(a+a'-a''-a'''),$$

$$(n)\quad \varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} = \sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''}\right).$$

Cette équation contient, comme on le voit, une relation entre trois quelconques des quatre intégrales

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}},$$

d'où il suit qu'on peut en déterminer deux par les deux autres.

18. Proposons-nous maintenant de trouver les relations qui doivent exister entre les quantités $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ pour que l'expression

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$

soit réductible à des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}\cdot$

On voit aisément par ce qui précède que $x-a$ doit être facteur de R. On peut donc à cause de l'équation (n) faire:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$=A\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\sqrt{R}\left(\frac{B}{x-a}+\frac{B'}{x-a'}\right).$$

En substituant les valeurs de $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ données par l'équation du n$^{\underline{o}}$ 16, on obtiendra:

$$\left(\varphi(0)+A\,\frac{2\varepsilon a^2+a\delta}{f'a}+A'\,\frac{2\varepsilon a'^2+a'\delta}{f'a'}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\left(\varphi(1)-A\,\frac{\delta}{f'a}-A'\,\frac{\delta}{f'a'}\right)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$+\left(\varphi(2)-A\,\frac{2\varepsilon}{f'a}-A'\,\frac{2\varepsilon}{f'a'}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}-\sqrt{R}\left\{\frac{B+\frac{2A}{f'a}}{x-a}+\frac{B'+\frac{2A'}{f'a'}}{x-a'}\right\}=0.$$

On a donc

$$A=-\tfrac{1}{2}B.f'a,\quad A'=-\tfrac{1}{2}B'.f'a',$$

$$\varphi(0)-\tfrac{1}{2}B(2\varepsilon a^2+a\delta)-\tfrac{1}{2}B'(2\varepsilon a'^2+a'\delta)=0,$$

$$\varphi(1)+\tfrac{1}{2}\delta(B+B')=0,$$

$$\varphi(2)+\varepsilon(B+B')=0.$$

En éliminant $B+B'$ entre les deux dernières équations, on aura

$$2\varepsilon\,\varphi(1)-\delta\,\varphi(2)=0,\quad \text{d'où}\quad \varphi(2)=\frac{2\varepsilon}{\delta}\varphi(1).$$

Voilà donc la relation qui doit avoir lieu entre $\varphi(2)$ et $\varphi(1)$. En faisant $\varphi(1)=0$ et $\varphi(0)=1$, on aura

$$\varphi(2)=0,\quad B'=-B,\quad 1=\tfrac{1}{2}B[2\varepsilon(a^2-a'^2)+\delta(a-a')],$$

$$B=\frac{2}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}=-B',$$

donc en substituant,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$

$$+\frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')}.$$

Si l'on fait $\varphi(0)=0$ et $\varphi(2)=1$, on aura

$$\varphi(1)=\frac{\delta}{2\varepsilon},\quad B'=-B-\frac{1}{\varepsilon},$$

$$B[2\varepsilon(a^2-a'^2)+\delta(a-a')]-\left(2a'^2+a'\frac{\delta}{\varepsilon}\right)=0,$$

d'où l'on tire

$$B=\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{(a+a'-a''-a''')(a-a')},$$

$$B'=\frac{a(a-a'-a''-a''')}{(a+a'-a''-a''')(a'-a)}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}+\frac{\delta}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}=\frac{a'(a'-a-a''-a''').f'a}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{a(a-a'-a''-a''').f'a'}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}\left(\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a}-\frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'}\right).$$

19. Par ce qui précède on voit qu'on peut exprimer $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ par les intégrales $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$; mais cela n'a pas lieu pour les intégrales $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$ et $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$. C'est seulement l'expression $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}+\frac{\delta}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$ qu'on peut exprimer de cette manière. Dans le cas où $a+a'=a''+a'''$, les deux équations du numéro précédent deviennent illusoires. Dans ce même cas on peut trouver une relation entre deux des intégrales $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ etc. En effet, en multipliant une des équations du numéro précédent par $a+a'-a''-a'''$, on obtiendra

$$(a-a'')(a-a''')\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+(a'-a'')(a'-a''')\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}=-\frac{2\sqrt{R}}{(x-a)(x-a')};$$

ou bien, puisque $a-a'''=a''-a'$ et $a'-a'''=a''-a$,

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}=\frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}.$$

$$R=(x-a)(x-a')(x-a'')(x-a-a'+a'').$$

20. Nous avons maintenant épuisé le sujet de ce chapitre, savoir de réduire l'intégrale $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ autant que possible par des fonctions algébriques, et nous avons donné des équations par lesquelles on peut, avec toute la

facilité possible, réduire une intégrale proposée quelconque de la forme précédente.

Reprenons les résultats généraux:

1. Lorsque P est une fonction entière de x, $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ est toujours réductible aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$.
2. Lorsque P est une fonction fractionnaire de x, l'intégrale $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ est réductible aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et à des intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.
3. Lorsque $x-a$ est un facteur de R, l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ est réductible aux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$, mais dans tout autre cas cela est impossible.
4. Il est impossible de trouver une relation entre plusieurs intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, à moins que $x-a$ ne soit facteur de R, mais alors on peut trouver une relation entre trois intégrales de cette forme; si de plus $a+a'=a''+a'''$, on peut trouver une relation entre deux d'entre elles.
5. L'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ peut s'exprimer par deux intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, $x-a$ étant facteur de R, si $a+a'$ diffère de $a''+a'''$. Les intégrales $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ au contraire ne peuvent pas être exprimées de cette manière.

CHAPITRE II.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions logarithmiques.

21. Dans le chapitre précédent nous avons réduit l'intégrale $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions algébriques, et nous avons trouvé que son intégration exige les

quatre fonctions suivantes $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, qui en général sont irréductibles par des fonctions algébriques. Dans ce chapitre nous chercherons les relations qu'on peut obtenir entre ces quatre intégrales par des fonctions logarithmiques. Pour cela il faut trouver la fonction logarithmique la plus générale dont la différentielle soit décomposable en termes de la forme

$$\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}}, \quad \frac{Adx}{(x-a)^m\sqrt{R}};$$

car en intégrant la différentielle ainsi décomposée et faisant usage des réductions du chapitre précédent, on obtiendra la relation la plus générale qu'on puisse trouver par des fonctions logarithmiques entre les quatre intégrales proposées.

22. On peut se convaincre aisément que la fonction logarithmique cherchée doit avoir la forme suivante:

$$T' = A\log(P+Q\sqrt{R}) + A'\log(P'+Q'\sqrt{R})$$
$$+ A''\log(P''+Q''\sqrt{R}) + \cdots + A^{(n)}\log(P^{(n)}+Q^{(n)}\sqrt{R}),$$

P, Q, P', Q' etc. étant des fonctions entières de x, et A, A' etc. des coefficiens constants.

Considérons un terme quelconque $T = A\log(P+Q\sqrt{R})$. En différentiant on aura

$$dT = A\,\frac{dP + dQ\cdot\sqrt{R} + \frac{1}{2}\frac{QdR}{\sqrt{R}}}{P+Q\sqrt{R}},$$

ou bien, en multipliant en haut et en bas par $P-Q\sqrt{R}$,

$$dT = A\,\frac{PdP - Q(RdQ + \frac{1}{2}QdR)}{P^2 - Q^2R} + A\,\frac{\frac{1}{2}PQdR + (PdQ - QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}},$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{A}{2}\log(P^2 - Q^2R) + A\int \frac{\frac{1}{2}PQdR + (PdQ - QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}}.$$

Il est aisé de voir qu'on peut faire abstraction du premier terme de dT qui est rationnel, et qui donne, dans la valeur de T, le terme $\frac{A}{2}\log(P^2-Q^2R)$; en retranchant donc ce terme de T, il restera

$$A\log(P+Q\sqrt{R}) - \frac{A}{2}\log(P^2-Q^2R) = \frac{A}{2}\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

On peut donc faire

$$T' = A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} + A' \log \frac{P' + Q'\sqrt{R}}{P' - Q'\sqrt{R}} + \cdots.$$

La différentielle de cette expression ne contient aucune partie rationnelle; on aura en différentiant

$$dT' = A \frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} + A' \frac{P'Q'dR + 2(P'dQ' - Q'dP')R}{(P'^2 - Q'^2R)\sqrt{R}} + \cdots$$
$$= S' \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Pour trouver S', considérons le terme

$$A \frac{PQ\,dR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} = \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

De là on tire

$$\frac{M}{N} = A \frac{PQ\frac{dR}{dx} + 2\left(P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}\right)R}{P^2 - Q^2R}.$$

En différentiant $N = P^2 - Q^2R$ on aura

$$dN = 2PdP - 2Q\,dQ\,.R - Q^2\,dR,$$

d'où

$$PdN = 2P^2dP - 2PQ\,dQ\,.R - Q^2P\,dR,$$

et en substituant pour P^2 sa valeur $N + Q^2R$,

$$PdN = 2NdP + 2Q^2R\,dP - 2PQR\,dQ - Q^2P\,dR;$$

c'est-à-dire

$$\frac{2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}}{Q} = \frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{dx};$$

donc

$$M = A\frac{2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}}{Q}, \quad N = P^2 - Q^2R.$$

23. Par la valeur qu'on vient de trouver pour M, on voit que si $(x-a)^m$ est un diviseur de N, $(x-a)^{m-1}$ doit être diviseur de M; donc $\frac{M}{N}$ ne peut contenir aucun terme de la forme $\frac{B}{(x-a)^m}$, m étant plus grand que l'unité. Les termes fractionnaires contenus dans la fonction $\frac{M}{N}$ sont donc tous de la forme $\frac{B}{x-a}$. Si de plus $x-a$ était facteur de R, il le serait aussi de P, donc dans ce cas M et N auraient $x-a$ pour facteur commun. Donc

$\frac{M}{N}$ ne peut contenir aucun terme de la forme $\frac{B}{x-a}$, $x-a$ étant facteur de R.

Pour trouver la forme de la partie entière de $\frac{M}{N}$, supposons que P soit un polynome du degré m, et Q du degré n.

Il faut distinguer trois cas:

1) si $m > n+2$, 2) si $m < n+2$, 3) si $m = n+2$.

1) Si $m > n+2$, N est du degré $2m$, et M du degré $m+n+3$, donc $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 0, donc la seule partie entière qui puisse y être contenue, est une quantité constante.

2) Si $m < n+2$, N est du degré $2n+4$, et M du degré $n+m+3$, donc $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 0, et par conséquent sa partie entière est une constante.

3) Si $m = n+2$, N peut être d'un degré quelconque moindre que $2m$. Soit donc N du degré μ, on voit que M est du degré $\mu + m - 1 - n = \mu + 1$, si μ n'est pas égal à $2n+4$; car alors M est du degré μ et $\frac{M}{N}$ du degré 0. Donc dans ce cas $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 1, et sa partie entière est de la forme $Bx + B'$.

De ce qui précède il suit que $\frac{M}{N}$ est toujours de la forme

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} + \cdots,$$

$x-a$, $x-a'$, $x-a''$, ... n'étant point des facteurs de R.

De là il suit que l'intégrale $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$ est irréductible dans tous les cas; elle constitue donc une fonction transcendante particulière.

D'après la valeur de $\frac{M}{N}$ il est aisé de conclure que $\frac{dT'}{dx}$ a la forme

$$\frac{dT'}{dx} = \left(k + k'x + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \frac{L''}{x-a''} + \cdots + \frac{L^{(\nu)}}{x-a^{(\nu)}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

d'où

$$T' = k\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + k'\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \cdots + L^{(\nu)}\int\frac{dx}{(x-a^{(\nu)})\sqrt{R}}.$$

Voilà donc la relation la plus générale qu'on puisse trouver entre les intégrales proposées.

24. Pour appliquer l'équation précédente, je vais résoudre les cinq problèmes suivants :

1. Exprimer les deux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{(x+c)\,dx}{\sqrt{R}}$ par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

2. Réduire l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ au plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, P étant une fonction fractionnaire de x, et l'intégrale décomposable en termes de la forme $\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{R}}$.

3. Quel est le nombre le plus petit d'intégrales elliptiques entre lesquelles on peut trouver une relation.

4. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui sont intégrables par des logarithmes.

5. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par les intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$ au moyen des logarithmes.

Problème I.

Exprimer l'intégrale $\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

---

25. Soient $P, Q, P', Q', P'', Q'', \ldots P^{(r)}, Q^{(r)}$, respectivement des degrés $m, n, m', n', m'', n'', \ldots m^{(r)}, n^{(r)}$, ces quantités contiennent $m+n+m'+n'+\cdots+m^{(r)}+n^{(r)}+r+1$ coefficiens indéterminés. De plus les coefficiens $A, A', \ldots A^{(r)}$ sont au nombre de $r+1$. On a donc en tout $m+n+m'+n'+\cdots+m^{(r)}+n^{(r)}+2r+2=\alpha'$ coefficiens indéterminés.

Supposons qu'on ait

$$m=n+2,\ m'=n'+2,\ \ldots\ m^{(p-1)}=n^{(p-1)}+2,$$
$$m^{(p)}>n^{(p)}+2,\ m^{(p+1)}>n^{(p+1)}+2,\ \ldots\ m^{(p+p'-1)}>n^{(p+p'-1)}+2,$$
$$m^{(p+p')}<n^{(p+p')}+2,\ \ldots\ m^{(r)}<n^{(r)}+2.$$

Il suit de là que

N est du degré $2m$,
N' . . . . $2m'$,
N'' . . . . $2m''$,
. . . .
$N^{(p-1)}$ . . . . . . $2m^{(p-1)}$,
$N^{(p)}$ . . . . $2m^{(p)}$,
. . . .
$N^{(p+p'-1)}$ est du degré $2m^{(p+p'-1)}$,
$N^{(p+p')}$ . . . . $2n^{(p+p')}+4$,
$N^{(p+p'+1)}$ . . . . $2n^{(p+p'+1)}+4$,
. . . .
$N^{(r)}$. . . . . $2n^{(r)}+4$.

Par là on voit que

$$A\frac{M}{N}+A'\frac{M'}{N'}+A''\frac{M''}{N''}+\cdots+A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}$$
$$=k+k'x+\frac{C+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{\nu'}x^{\nu'}}{D+D_1x+D_2x^2+\cdots+D_\nu x^\nu}=S,$$

où

$$\nu=2m+2m'+2m''+\cdots+2m^{(p+p'-1)}+2n^{(p+p')}+2n^{(p+p'+1)}+\cdots+2n^{(r)}$$
$$+4(r-p-p'+1),\ \text{ et }\ \nu'<\nu.$$

Puisqu'on a α' coefficiens indéterminés, on peut faire en sorte que S devienne de la forme :

$$S=k+k'x+\frac{C+C_1x+\cdots+C_{\nu-\alpha'+1}\cdot x^{\nu-\alpha'+1}}{D+D_1x+\cdots+D_{\nu-\alpha'+2}\cdot x^{\nu-\alpha'+2}},$$

k et k' étant quelconques.

On peut donc exprimer $\int \frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}}$ par $\nu-\alpha'+2$ intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Il faut maintenant déterminer m, n, m', n' etc. et r de manière que la quantité $\nu - \alpha' + 2$ devienne aussi petite que possible.

On a

$$\alpha' = 2m + 2m' + 2m'' + \cdots + 2m^{(p-1)} - 2p$$
$$+ m^{(p)} + n^{(p)} + m^{(p+1)} + n^{(p+1)} + \cdots + n^{(r)} + 2r + 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \nu - \alpha' + 2 = {} & m^{(p)} + m^{(p+1)} + m^{(p+2)} + \cdots + m^{(p+p'-1)} \\ & - n^{(p)} - n^{(p+1)} - n^{(p+2)} - \cdots - n^{(p+p'-1)} \\ & - m^{(p+p')} - m^{(p+p'+1)} - \cdots - m^{(r)} \\ & + n^{(p+p')} + n^{(p+p'+1)} + \cdots + n^{(r)} \\ & + 4(r - p - p' + 1) - 2r + 2p. \end{aligned}$$

On voit sans peine que cette expression devient minimum, en faisant $p' = 0$ et $r = p - 1$. On obtiendra donc $\nu - \alpha' + 2 = 2$, r restant arbitraire. Il s'ensuit qu'on peut faire

$$\begin{aligned} A\frac{M}{N} + A'\frac{M'}{N'} + \cdots + A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}} &= k + k'x + \frac{C + C_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2} \\ &= k + k'x + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'}. \end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et intégrant, on aura

$$\int \frac{(k + k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = T' - L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

26. Comme r est arbitraire, il est le plus simple de faire $r = 0$, ce qui donne

$$T' = A.\log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

De plus, comme n est arbitraire, soit $n = 0$, d'où $m = n + 2 = 2$. Faisons donc

$$P = f + f'x + f''x^2, \text{ et } Q = 1;$$

on aura

$$N = P^2 - Q^2 R = (f + f'x + f''x^2)^2 - R,$$

$$M = A.\left(2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}\right) = A\left(P\frac{dR}{dx} - 2R\frac{dP}{dx}\right).$$

Soit

$$N = D + D_1 x + D_2 x^2,$$

on aura

$$\begin{aligned} D &= f^2 - \alpha, \\ D_1 &= 2ff' - \beta, \\ D_2 &= f'^2 + 2ff'' - \gamma, \\ 0 &= 2f'f'' - \delta, \\ 0 &= f''^2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

De ces équations on tire $f'' = \sqrt{\varepsilon}$, $f' = \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}$. On a de plus

$$\begin{aligned} M &= A[2(D + D_1 x + D_2 x^2)(f' + 2f''x) - (D_1 + 2D_2 x)(f + f'x + f''x^2)] \\ &= C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned} C &= 2ADf' - AD_1 f, \\ C_1 &= 4ADf'' + AD_1 f' - 2AD_2 f, \\ C_2 &= 3AD_1 f'' = 3AD_1\sqrt{\varepsilon}, \\ C_3 &= 2AD_2 f'' = 2AD_2\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{C_3}{D_2}x + \frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2^2} + \frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\frac{C_1 D_2 - C_3 D}{D_2} - \frac{D_1(C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2^2} = C'_1,$$

$$\text{et} \quad C - \frac{D(C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2^2} = C'.$$

Soit

$$\frac{C_3}{D_2} = k', \quad \frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2^2} = k.$$

On aura, en substituant les valeurs de C_3, C_2, D_2 et D_1,

$$\frac{2AD_2\sqrt{\varepsilon}}{D_2} = 2A\sqrt{\varepsilon} = k', \text{ donc } A = \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$k = \frac{AD_1\sqrt{\varepsilon}}{D_2} = \frac{k'}{2}\frac{D_1}{D_2} = \frac{k'}{2}\cdot\frac{2ff' - \beta}{f'^2 + 2ff'' - \gamma}.$$

En substituant les valeurs de f' et de f'', on en tirera

$$f = \frac{k(\delta^2 - 4\varepsilon\gamma) + 2k'\varepsilon\beta}{2(\delta k' - 4\varepsilon k)\sqrt{\varepsilon}}.$$

Connaissant f, on aura

$$D = f^2 - \alpha,$$

$$D_1 = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} f - \beta,$$

$$D_2 = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + 2f\sqrt{\varepsilon} - \gamma,$$

$$C'_1 = k\beta - k'\alpha - \frac{k'\delta\beta}{4\varepsilon} - \frac{k\delta - k'\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} f - k'f^2,$$

$$C' = \alpha k - \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon} k' + \frac{k'\beta}{2\sqrt{\varepsilon}} f - kf^2.$$

Soit maintenant

$$\frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{L}{x - a} + \frac{L'}{x - a'},$$

on obtiendra

$$\int \frac{(k + k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = -L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left\{ \frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 - \sqrt{R}} \right\},$$

ce qui est la réduction demandée.

27. Appliquons cette équation au cas où $k = 0$ et $k' = 1$. Dans ce cas on aura

$$f = \frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon},$$

$$D = \frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{\delta^2},$$

$$D_1 = 0,$$

$$D_2 = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta} - \gamma,$$

$$C' = \frac{\beta^2}{2\delta} - \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon},$$

$$C'_1 = -\alpha - \frac{\beta\delta}{4\varepsilon} - \frac{\beta^2\varepsilon}{\delta^2} + \frac{\beta\gamma}{\delta};$$

donc

$$\frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{\frac{C'_1}{D_2}x + \frac{C'}{D_2}}{x^2 + \frac{D}{D_2}} = \frac{L}{x - \sqrt{-\frac{D}{D_2}}} + \frac{L'}{x + \sqrt{-\frac{D}{D_2}}},$$

où l'on trouvera

$$L = \tfrac{1}{2}\frac{C'_1}{D_2} + \tfrac{1}{2}C'\sqrt{-\frac{1}{DD_2}},$$

$$L' = \tfrac{1}{2}\frac{C'_1}{D_2} - \tfrac{1}{2}C'\sqrt{-\frac{1}{DD_2}}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}} = (G + H\sqrt{K})\int \frac{dx}{(x - \sqrt{K})\sqrt{R}} + (G - H\sqrt{K})\int \frac{dx}{(x + \sqrt{K})\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.\log \frac{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 - \sqrt{R}},$$

où

$$G = -\frac{4\alpha\delta^2\varepsilon + \beta\delta^3 + 4\beta^2\varepsilon^2 - 4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4 + 8\beta\delta\varepsilon^2 - 4\gamma\delta^2\varepsilon)},$$

$$H = -\frac{\delta}{4\varepsilon},$$

$$K = \frac{4\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon - 8\beta\varepsilon^2 - \delta^3}.$$

28. Il faut considérer séparément les cas dans lesquels quelques-uns des coefficiens K, G, H deviennent infinis. Si $D_2 = 0$, on aura

$$\frac{M}{N} = \frac{C + C_1 x + C_2 x^2}{D + D_1 x} = \frac{C_2}{D_1}x + \frac{C_1 D_1 - DC_2}{D_1^2} + \frac{C - D\frac{C_1 D_1 - C_2 D}{D_1^2}}{D + D_1 x},$$

$$C = 2ADf' - AD_1 f = A\left(\frac{D\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - D_1 f\right),$$

$$C_1 = 4ADf'' + AD_1 f' = A\left(4D\sqrt{\varepsilon} + \frac{D_1\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

$$\frac{\delta^2}{4\varepsilon} + 2f\sqrt{\varepsilon} - \gamma = 0, \text{ donc } f = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta^2}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\frac{C_2}{D_1} = k', \quad \frac{C_1 D_1 - C_2 D}{D_1^2} = k, \text{ donc } k' = 3A\sqrt{\varepsilon},\ A = \frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}.$$

On trouvera $k = \frac{k'}{6}\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{k'}{3}\frac{D}{D_1}$. Soit $\frac{D}{D_1} = \mu$, on aura

$$\mu = \frac{6k\varepsilon - k'\delta}{2k'\varepsilon},$$

$$\frac{M}{N} = k'x + k + \frac{C - Dk}{D + D_1 x} = k'x + k + \frac{\frac{C}{D_1} - \frac{D}{D_1}k}{\frac{D}{D_1} + x};$$

or $\dfrac{C}{D_1} = -Af + \dfrac{A\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\ \dfrac{D}{D_1} = -\dfrac{k'f}{3\sqrt{\varepsilon}} + \dfrac{k'\delta}{3\varepsilon}\cdot\mu$, donc

$$\frac{M}{N} = k'x + k + \frac{\left(\frac{k'\delta}{3\varepsilon} - k\right)\mu - \frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}f}{x+\mu};$$

on trouvera de plus

$$\mu = \frac{f^2-\alpha}{f\delta - \beta\sqrt{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varepsilon}.$$

De la valeur de $\dfrac{M}{N}$ il suit qu'on a

$$\int\frac{(k+k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = \left[\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}f - \left(\frac{k'\delta}{3\varepsilon} - k\right)\mu\right]\int\frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left\{\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 - \sqrt{R}}\right\},$$

où l'on a

$$f = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta^2}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\mu = \frac{6k\varepsilon - k'\delta}{2k'\varepsilon} = \frac{(f^2-\alpha)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta - \beta\sqrt{\varepsilon}}.$$

Si l'on fait $k=0$, $k'=1$, on aura

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{3\varepsilon}(\mu' - \mu\delta)\int\frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left\{\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}\,x^2 - \sqrt{R}}\right\},$$

où

$$\mu' = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta^2}{8\varepsilon},\quad \mu = -\frac{\delta}{2\varepsilon} = \frac{\mu'^2 - \alpha\varepsilon}{\mu'\delta - \beta\varepsilon}.$$

On a donc la relation suivante entre les coefficiens α, β, γ, δ, ε:

$$(4\varepsilon\gamma - \delta^2)^2 + 4\delta^2(4\varepsilon\gamma - \delta^2) - 32\beta\delta\varepsilon^2 - 64\alpha\varepsilon^3 = 0.$$

29. Dans ce qui précède nous avons réduit $\dfrac{M}{N}$ à la forme $\dfrac{C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3}{D + D_1x + D_2x^2}$, en faisant $P^2 - Q^2R = D + D_1x + D_2x^2$. On peut aussi le faire de la manière suivante. Soit

$$R = (p + qx + rx^2)(p' + q'x + x^2)$$
$$P = f(p' + q'x + x^2),\quad Q = 1,$$

on aura

$$N = P^2 - Q^2R = f^2(p' + q'x + x^2)^2 - (p' + q'x + x^2)(p + qx + rx^2),$$

ou bien

$$N = (p' + q'x + x^2)[f^2(p' + q'x + x^2) - (p + qx + rx^2)].$$

Soit

$$N = (p' + q'x + x^2)(D + D_1x + D_2x^2),$$

on aura

$$D = f^2p' - p,$$
$$D_1 = f^2q' - q,$$
$$D_2 = f^2 - r.$$

Or $M = A\left(P\dfrac{dR}{dx} - 2R\dfrac{dP}{dx}\right)$; donc

$$M = A(p' + q'x + x^2)\left(f\frac{dR}{dx} - 2(p + qx + rx^2)\frac{dP}{dx}\right),$$

c'est-à-dire

$$M = A(p' + q'x + x^2)[f\beta + 2f\gamma x + 3f\delta x^2 + 4f\varepsilon x^3 - 2(p + qx + rx^2)(fq' + 2fx)].$$

Soit

$$M = (p' + q'x + x^2)(C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3),$$

on en tirera

$$C = A(f\beta - 2fpq'),$$
$$C_1 = A(2f\gamma - 4fp - 2fqq'),$$
$$C_2 = A(3f\delta - 4fq - 2frq'),$$
$$C_3 = A(4f\varepsilon - 4fr) = 0,\ \text{à cause de}\ r = \varepsilon.$$

Puisque $C_3 = 0$, on voit qu'il est impossible de réduire l'intégrale $\int\dfrac{(k+x)\,dx}{\sqrt{R}}$ de cette manière, mais comme f par là devient arbitraire, on peut le déterminer de manière que $\int\dfrac{dx}{\sqrt{R}}$ soit réductible à une seule intégrale de la forme $\int\dfrac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Pour cela faisons

$$D + D_1x + D_2x^2 = D_2(x-a)^2,$$

d'où il suit que

$$D_1^2 = 4DD_2.$$

En substituant les valeurs de D, D_1, D_2, on obtiendra

$$(f^2q' - q)^2 = 4(f^2p' - p)(f^2 - r),$$

c'est-à-dire

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

Cette équation servira à déterminer f. Connaissant f, on aura aussi D, D_1, D_2 et a.

Comme M doit être divisible par $x-a$, soit

$$C+C_1x+C_2x^2=(x-a)(k+k'x);$$

de là on tire

$$C=-ak,\quad C_1=k-ak',\quad C_2=k',$$

et en éliminant les quantités k et k',

$$C_1=-\frac{C}{a}-aC_2,\quad \text{ou}\quad C_2a^2+C_1a+C=0,$$

d'où l'on tire la valeur de a, savoir

$$a=-\frac{C_1}{2C_2}\pm\sqrt{\frac{C_1^2}{4C_2^2}-\frac{C}{C_2}}.$$

On a

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{(k+k'x)(x-a)}{D_2(x-a)^2};$$

donc

$$\frac{M}{N}=\frac{k+k'x}{D_2(x-a)}=\frac{k'}{D_2}+\frac{k+ak'}{D_2(x-a)}.$$

Soit $\frac{k'}{D_2}=1$, on aura $k'=D_2$, donc $D_2=C_2$; ou bien, en substituant les valeurs de ces quantités,

$$f^2-r=A(3f\delta-4fq-2frq'),$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{f^2-r}{f(3\delta-4q-2rq')};$$

or $\delta=rq'+q$, donc

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)}.$$

Nous avons trouvé $k=-\frac{C}{a}$, donc en substituant,

$$k=-\frac{Af}{a}(\beta-2pq'),$$

or $\beta=pq'+p'q$, donc

$$k=\frac{Af}{a}(pq'-qp')=\frac{(f^2-r)(pq'-qp')}{a(rq'-q)},$$

$$D_2=f^2-r,$$

donc

$$\frac{k}{D_2}=\frac{pq'-qp'}{a(rq'-q)},$$

et

$$\left(\frac{k}{D_2}+a\frac{k'}{D_2}\right)=a+\frac{pq'-qp'}{a(rq'-q)}=\frac{pq'-qp'+(rq'-q)a^2}{(rq'-q)a}=L.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{M}{N}$, on obtiendra

$$\frac{M}{N}=1+L\frac{1}{x-a},$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A.\log\frac{f(p'+q'x+x^2)+\sqrt{R}}{f(p'+q'x+x^2)-\sqrt{R}},$$

où

$$R=(p+qx+rx^2)(p'+q'x+x^2),$$

$$L=\frac{pq'-qp'+(rq'-q)a^2}{(rq'-q)a},$$

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)},\quad a=\frac{q-q'f^2}{2(f^2-r)},$$

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

30. Appliquons cette formule au cas où $r=1$, $q'=-q$ et $p'=p$. On aura

$$R=(p+qx+x^2)(p-qx+x^2),$$

$$f^4(q^2-4p)+f^2(2q^2+8p)+q^2-4p=0.$$

On tire de là

$$f=\frac{q\pm2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}.$$

On a

$$a=\frac{q-q'f^2}{2(f^2-r)}=-\frac{1+f^2}{1-f^2}\cdot\frac{q}{2}.$$

En substituant ici la valeur de f, et réduisant, on trouvera

$$a=\pm\sqrt{p}.$$

On aura de même

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)}=\frac{1-f^2}{2fq}=-\frac{1}{\sqrt{4p-q^2}}.$$

La valeur de L donne

$$L=\frac{p}{a}+a=\pm2\sqrt{p}.$$

En substituant les valeurs trouvées, on obtiendra

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}}=-2\sqrt{p}\int\frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4p-q^2}}\cdot\log\frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}+\sqrt{p+qx+x^2}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}-\sqrt{p+qx+x^2}}.$$

32. On peut par la supposition de $P=f+f'x+f''x^2$ réduire l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ de plusieurs autres manières, savoir en faisant les suppositions suivantes :

$$R=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4,$$
$$P=f+f'x+f''x^2.$$

1. $N=P^2-R=k(x-a)^4.$
2. $N=P^2-R=k(x+p)(x-a)^3$, $x+p$ étant facteur de R.
3. $N=P^2-R=k(x^2+px+q)(x-a)^2$, x^2+px+q étant facteur de R.

Le troisième cas est celui que nous avons traité; considérons encore le premier. On a

$$(f+f'x+f''x^2)^2-(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)=k(x-a)^4,$$

donc

$$f^2-\alpha=ka^4,$$
$$2ff'-\beta=-4ka^3,$$
$$f'^2+2ff''-\gamma=6ka^2,$$
$$2f'f''-\delta=-4ka,$$
$$f''^2-\varepsilon=k.$$

Par ces équations on peut déterminer les cinq quantités k, a, f, f', f''; mais on peut les trouver plus facilement de la manière suivante. Soit

$$R=\varepsilon(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

En substituant dans l'équation

$$f+f'x+f''x^2=\sqrt{k(x-a)^4+R}$$

pour x les valeurs p, p', p'', p''', on obtiendra

$$f+pf'+p^2f''=(p-a)^2\sqrt{k},$$
$$f+p'f'+p'^2f''=i(p'-a)^2\sqrt{k},$$
$$f+p''f'+p''^2f''=i'(p''-a)^2\sqrt{k},$$
$$f+p'''f'+p'''^2f''=i''(p'''-a)^2\sqrt{k},$$

i, i' et i'' désignant le double signe $\pm$. De là on tire

$$(p-p')f'+(p^2-p'^2)f''=[(p-a)^2-i(p'-a)^2]\sqrt{k}.$$

En divisant par $p-p'$, on aura

$$f'+(p+p')f''=\frac{(p-a)^2-i(p'-a)^2}{p-p'}\sqrt{k}.$$

De la même manière

$$f'+(p+p'')f''=\frac{(p-a)^2-i'(p''-a)^2}{p-p''}\sqrt{k}.$$

$$f'+(p+p''')f''=\frac{(p-a)^2-i''(p'''-a)^2}{p-p'''}\sqrt{k}.$$

De ces équations on tire de même

$$(p'-p'')f''=(p-a)^2\left(\frac{1}{p-p'}-\frac{1}{p-p''}\right)\sqrt{k}-\left(\frac{i(p'-a)^2}{p-p'}-\frac{i'(p''-a)^2}{p-p''}\right)\sqrt{k},$$

d'où

$$f''=\left(\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p'')}-\frac{i(p'-a)^2}{(p-p')(p'-p'')}+\frac{i'(p''-a)^2}{(p-p'')(p'-p'')}\right)\sqrt{k}.$$

De la même manière

$$f''=\left(\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p''')}-\frac{i(p'-a)^2}{(p-p')(p'-p''')}+\frac{i''(p'''-a)^2}{(p-p''')(p'-p''')}\right)\sqrt{k}.$$

Donc enfin

$$\left.\begin{aligned}&(p-a)^2\left(\frac{1}{(p-p')(p-p'')}-\frac{1}{(p-p')(p-p''')}\right)\\&-i(p'-a)^2\left(\frac{1}{(p-p')(p'-p'')}-\frac{1}{(p-p')(p'-p''')}\right)\\&+\frac{i'(p''-a)^2}{(p-p'')(p'-p'')}-\frac{i''(p'''-a)^2}{(p-p''')(p'-p''')}\end{aligned}\right\}=0,$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{i.(p'-a)^2}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\&+\frac{i'.(p''-a)^2}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{i''.(p'''-a)^2}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{aligned}\right\}=0.$$

Donc

$$C-2C_1a+C_2a^2=0,$$

où

$$C=\frac{p^2}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{ip'^2}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\cdots,$$

$$C_1=\frac{p}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{ip'}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\cdots,$$

$$C_2=\frac{1}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{i}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\cdots.$$

Quant à la valeur de i, de i' et de i'', on ne peut faire que $i=1$, $i'=-1$, $i''=-1$, car dans tout autre cas on aura $f''=\sqrt{k}$, ce qui donne $\varepsilon=0$. Soit donc $i=1$, $i'=-1$ et $i''=-1$, on trouvera sans peine

$$C=-2\frac{pp'.(p''+p''')-p''p'''.(p+p')}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')},$$

$$C_1=-2\frac{pp'-p''p'''}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')},$$

$$C_2=-2\frac{p+p'-p''-p'''}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')},$$

donc

$$(p+p'-p''-p''')a^2-2(pp'-p''p''')a+pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')=0.$$

Connaissant a, on aura

$$f''=\frac{p+p'+p''+p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}\sqrt{k};$$

donc l'équation $f''^2-\varepsilon=k$ devient, en faisant $\varepsilon=1$,

$$\left[\left(\frac{p+p'+p''+p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}\right)^2-1\right]k=\varepsilon=1,$$

donc

$$k=\frac{(p+p'-p''-p''')^2}{[2(p''+p''')-4a][2(p+p')-4a]},$$

$$f''=\sqrt{1+k}=\frac{p+p'+p''+p'''-4a}{\sqrt{[2(p+p')-4a][2(p''+p''')-4a]}},$$

$$f=\sqrt{pp'p''p'''+ka^4},$$

$$f'=-\frac{p+p'+p''+p'''+4ka}{2\sqrt{1+k}}.$$

Il reste maintenant à déterminer A et L. On a

$$M=A\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right),$$

donc

$$M=-Ak(x-a)^3[2af'+4f+(2f'+4af'')x],$$

et par suite

$$\frac{M}{N}=-\frac{A(2af'+4f)+A(2f'+4af'')x}{x-a}$$

$$=-A(2f'+4af'')-\frac{A(2af'+4f)+Aa(2f'+4af'')}{x-a}$$

$$=1-\frac{L}{x-a};$$

donc

$$A=-\frac{1}{2(f'+2af'')},$$

$$L=-\frac{2(f+af'+a^2f'')}{f'+2af''},$$

ou bien

$$A=\frac{1}{2\sqrt{(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)}},$$

$$L=2\sqrt{\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')][2a-(p''+p''')]}}.$$

Connaissant ces valeurs, on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}=L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}$$

$$+A.\log\frac{f+f'x+f''x^2+\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}{f+f'x+f''x^2-\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}.$$

32. Appliquons cette équation aux cas suivans:

1. $p'=-p$, $p'''=-p''$.
2. $p''=-p$, $p'''=-p'$.

Dans le premier cas on aura

$$A=-\frac{1}{4a},\quad L=\frac{\sqrt{(a^2-p^2)(a^2-p''^2)}}{a},$$

$$f''=-1,\ f'=0,\ f=pp'',\ a=0.$$

Donc A et L sont infinis. Dans le second cas, on aura

$$a=\sqrt{pp'},$$

$$A=\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4a^2-(p+p')^2}}=-\frac{1}{2(p-p')\sqrt{-1}},\quad L=-2\sqrt{pp'},$$

$$f''=\frac{2\sqrt{pp'}}{(p-p')\sqrt{-1}},\ f'=-\frac{(p+p')^2}{(p-p')\sqrt{-1}},\ f=\frac{2pp'\sqrt{pp'}}{(p-p')\sqrt{-1}}.$$

Donc

$$P=\frac{1}{(p-p')\sqrt{-1}}[2pp'\sqrt{pp'}-(p+p')^2x+2\sqrt{pp'}x^2].$$

Donc

$$A.\log\frac{P+\sqrt{R}}{P-\sqrt{R}}=\frac{1}{p-p'}.\text{arc tang}\frac{\sqrt{R}}{P\sqrt{-1}},$$

et enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-p^2)(x^2-p'^2)}} = -2\sqrt{pp'}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{pp'})\sqrt{(x^2-p^2)(x^2-p'^2)}}$$
$$-\frac{1}{p-p'}\,.\,\text{arc tang}\,\frac{(p-p')\sqrt{(x^2-p^2)(x^2-p'^2)}}{2pp'\sqrt{pp'}-(p+p')^2x+2\sqrt{pp'}\,.\,x^2}.$$

On a

$$(x^2-p^2)(x^2-p'^2) = (x-p)(x-p')(x+p)(x+p')$$
$$= [x^2-(p+p')x+pp'][x^2+(p+p')x+pp'].$$

Soit $p+p'=q$, et $pp'=r$, on aura

$$p^2-qp+r=0,$$
$$p=\tfrac{1}{2}q+\tfrac{1}{2}\sqrt{q^2-4r},\ \ p'=\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}\sqrt{q^2-4r}$$
$$p-p'=\sqrt{q^2-4r},\ \ \sqrt{pp'}=\sqrt{r}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} = -2\sqrt{r}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{r})\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{q^2-4r}}\,.\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{q^2-4r}\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}\ x^2},$$

la même formule qu'on a trouvée plus haut, mais sous une autre forme.

33. Il est à remarquer qu'on peut toujours supposer que P n'ait aucun facteur commun avec R; car soit $R=R'r$ et $P=P'r$, on aura

$$\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} = \log\frac{P'r+Q\sqrt{R'r}}{P'r-Q\sqrt{R'r}}$$
$$=\log\frac{P'\sqrt{r}+Q\sqrt{R'}}{P'\sqrt{r}-Q\sqrt{R'}} = \tfrac{1}{2}\log\frac{(P'\sqrt{r}+Q\sqrt{R'})^2}{(P'\sqrt{r}-Q\sqrt{R'})^2}$$
$$=\tfrac{1}{2}\log\frac{P'^2r+Q^2R'+2P'Q\sqrt{rR'}}{P'^2r+Q^2R'-2P'Q\sqrt{rR'}} = \tfrac{1}{2}\log\frac{P''+Q'\sqrt{R}}{P''-Q'\sqrt{R}},$$

expression dans laquelle $P''=P'^2r+Q^2R'$ et $Q'=2P'Q$; et il est évident que P'' n'a point de facteurs communs avec R; donc etc.

Voilà la raison par laquelle nous avons trouvé la même formule de réduction pour l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, soit en supposant P facteur de R, soit non. Néanmoins il est utile de supposer P facteur de R, car les calculs deviennent par là plus simples.

Problème II.

Trouver les conditions nécessaires pour que

$$\int \frac{x^m+k^{(m-1)}x^{m-1}+\cdots+k'x+k}{x^m+l^{(m-1)}x^{m-1}+\cdots+l'x+l}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = A\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

---

34. On peut se convaincre aisément par un raisonnement analogue à celui qu'on a employé dans le problème précédent, qu'on doit faire

$$Q = e+e'x+e''x^2+\cdots+e^{(n-1)}x^{n-1}+x^n,$$
$$P = f+f'x+f''x^2+\cdots+f^{(n+1)}x^{n+1}+f^{(n+2)}x^{n+2},$$

n étant un nombre entier quelconque qui satisfait à la condition:

$$2n+4 \geqq m.$$

Soit

$$x^m+l^{(m-1)}x^{m-1}+\cdots+l'x+l = (x-a)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(m-1)}).$$

Pour que $\frac{M}{N}$ soit réductible à la forme:

$$\frac{x^m+k^{(m-1)}x^{m-1}+\cdots+k}{x^m+l^{(m-1)}x^{m-1}+\cdots+l} = \frac{M'}{(x-a)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(m-1)})},$$

il est clair, selon ce qu'on a vu précédemment, qu'on doit faire

$$(1)\qquad N = P^2-Q^2R = C(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'}\ldots(x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = CS,$$
$$\text{où}\quad 2n+4 = \mu+\mu'+\mu''+\cdots+\mu^{(m-1)}.$$

Il s'agit maintenant de satisfaire à cette équation.

35. *Première méthode.* Supposons que

$$(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'}\ldots(x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = g+g'x+g''x^2+\cdots+g^{(2n+3)}x^{2n+3}+x^{2n+4},$$

on aura

$$P^2 - Q^2 R = C(g + g'x + g''x^2 + \cdots + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + x^{2n+4})$$
$$= (f + f'x + f''x^2 + \cdots + f^{(n+2)}x^{n+2})^2$$
$$-(e + e'x + \cdots + e^{(n-1)}x^{n-1} + x^n)^2(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4).$$

En développant et comparant les coefficiens, on trouvera l'équation générale:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} ff^{(p)} + f'f^{(p-1)} + f''f^{(p-2)} + f'''f^{(p-3)} + \cdots \\ -\alpha(ee^{(p)} + e'e^{(p-1)} + e''e^{(p-2)} + e'''e^{(p-3)} + \cdots) \\ -\beta(ee^{(p-1)} + e'e^{(p-2)} + e''e^{(p-3)} + e'''e^{(p-4)} + \cdots) \\ -\gamma(ee^{(p-2)} + e'e^{(p-3)} + e''e^{(p-4)} + e'''e^{(p-5)} + \cdots) \\ -\delta(ee^{(p-3)} + e'e^{(p-4)} + e''e^{(p-5)} + e'''e^{(p-6)} + \cdots) \\ -\varepsilon(ee^{(p-4)} + e'e^{(p-5)} + e''e^{(p-6)} + e'''e^{(p-7)} + \cdots) \end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}Cg^{(p)}.$$

En faisant dans cette équation successivement $p = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots 2n+3, 2n+4$, on obtiendra $2n+5$ équations, et ces $2n+5$ équations contiennent les conditions qui résultent de l'équation (1).

On peut par ces équations déterminer les coefficiens e, e' etc. f, f', f'', etc. en fonction de C, a, a', a'', etc.

Déterminons maintenant la valeur de $g^{(p)}$. En prenant le logarithme on a

$$\log(g + g'x + g''x^2 + \cdots + x^{2n+4}) = \mu\log(x-a) + \mu'\log(x-a') + \cdots,$$

donc en différentiant

$$\frac{g' + 2g''x + \cdots + (2n+4)x^{2n+3}}{g + g'x + g''x^2 + \cdots + x^{2n+4}} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \cdots;$$

donc

$$\begin{aligned} g' + 2g''x + \cdots + (2n+4)x^{2n+3} &= \mu\,\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + \cdots + g'x + g}{x-a} \\ &+ \mu'\,\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + \cdots + g'x + g}{x-a'} \\ &+ \mu''\,\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}x^{2n+3} + \cdots + g'x + g}{x-a''} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Le coefficient de x^p dans $\frac{S}{x-a}$ est $-\left(\frac{g^{(p)}}{a} + \frac{g^{(p-1)}}{a^2} + \cdots + \frac{g}{a^{p+1}}\right)$. Donc il est aisé de voir qu'on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} g^{(p)}\left(\frac{\mu}{a} + \frac{\mu'}{a'} + \frac{\mu''}{a''} + \cdots\right) \\ + g^{(p-1)}\left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{\mu'}{a'^2} + \frac{\mu''}{a''^2} + \cdots\right) \\ + g^{(p-2)}\left(\frac{\mu}{a^3} + \frac{\mu'}{a'^3} + \frac{\mu''}{a''^3} + \cdots\right) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \quad g'\left(\frac{\mu}{a^p} + \frac{\mu'}{a'^p} + \frac{\mu''}{a''^p} + \cdots\right) \\ + g\left(\frac{\mu}{a^{p+1}} + \frac{\mu'}{a'^{p+1}} + \frac{\mu''}{a''^{p+1}} + \cdots\right) \end{array}\right\} = -(p+1)g^{(p+1)}.$$

En faisant $p = 0, 1, 2, 3$ etc., on déterminera aisément les quantités g', g'', etc. en fonction de g, et celle-ci est égale à $a^{\mu}a'^{\mu'}a''^{\mu''}\ldots(a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}}$.

36. *Seconde méthode.* Soit $P = Fx$, $Q = fx$, $R = \varphi x$, on aura d'abord, en faisant $x = a$, a', a'' etc., les m équations suivantes:

$$\begin{aligned} &(Fa)^2 - (fa)^2\,\varphi a = 0, \\ &(Fa')^2 - (fa')^2\,\varphi a' = 0, \\ &(Fa'')^2 - (fa'')^2\,\varphi a'' = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(Fa^{(m-1)})^2 - (fa^{(m-1)})^2\,\varphi a^{(m-1)} = 0. \end{aligned}$$

De ces équations on tire

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} Fa = \pm fa\,\sqrt{\varphi a} = i\,fa\,\sqrt{\varphi a}, \\ Fa' = \pm fa'\,\sqrt{\varphi a'} = i'\,fa'\,\sqrt{\varphi a'}, \\ Fa'' = \pm fa''\,\sqrt{\varphi a''} = i''\,fa''\,\sqrt{\varphi a''}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Fa^{(m-1)} = \pm fa^{(m-1)}.\sqrt{\varphi a^{(m-1)}} = i^{(m-1)}.fa^{(m-1)}.\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}. \end{array}\right.$$

En différentiant la première $\mu - 1$ fois, la seconde $\mu' - 1$ fois etc. par rapport à a, on obtiendra des équations qui deviennent toutes de la forme:

$$(5)\quad d^pFa = \pm\left(d^pfa\sqrt{\varphi a} + p\,d^{p-1}fa\,.\,d\sqrt{\varphi a} + \frac{p(p-1)}{2}d^{p-2}fa\,.\,d^2\sqrt{\varphi a} + \cdots + fa\,.\,d^p\sqrt{\varphi a}\right).$$

On aura des équations semblables par rapport à a', a'' etc., et en faisant dans ces équations

$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \mu - 1,$$
$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \mu' - 1,$$
$$p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots \mu'' - 1,$$
etc.

on obtiendra les équations nécessaires pour déterminer e, e', e'', etc. f, f', f'', etc.

Ces équations ont l'avantage d'être linéaires par rapport à $e, e', e'', \ldots f, f', f'' \ldots$, ce qui facilite beaucoup la détermination de ces quantités.

37. Il reste maintenant à trouver les coefficiens $k, k', k'', \ldots$ et A. On a

$$M = A\frac{\left(2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}\right)}{Q}$$

et

$$\frac{M}{N} = A\frac{\left(2\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{N\,dx}\right)}{Q};$$

or $\frac{dN}{N\,dx} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \cdots$, donc

$$\frac{dN}{N\,dx} = \frac{h + h'x + h''x^2 + \cdots + h^{(m-1)}x^{m-1}}{l + l'x + l''x^2 + \cdots + l^{(m-1)}x^{m-1} + x^m} = \frac{t}{S'},$$

et

$$\frac{M}{N} = A\frac{\left(2\frac{dP}{Q\,dx}S' - \frac{Pt}{Q}\right)}{S'} = \frac{k + k'x + k''x^2 + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m}{S'};$$

donc

(6) $$k + k'x + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m = A\,\frac{2\frac{dP}{dx}S' - Pt}{Q}.$$

En développant le second membre, on aura aisément les valeurs des coefficiens k, k', k'', etc. et A.

Ces coefficiens peuvent aussi être déterminés comme il suit. Soit $x = a$, on aura $S' = 0$ et $t = \mu(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots$, donc

$$k + k'a + k''a^2 + \cdots + a^m = -\mu A\frac{Fa}{fa}(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots,$$

or $\frac{Fa}{fa} = \pm\sqrt{\varphi a} = i\sqrt{\varphi a}$; donc

$$k + k'a + k''a^2 + \cdots + a^m = -i\mu A\sqrt{\varphi a}.(a-a')(a-a'')\ldots,$$

ou bien, en faisant $t = \psi x$,

$$k + k'a + k''a^2 + k'''a^3 + \cdots + a^m = -iA\sqrt{\varphi a}.\psi a.$$

En mettant au lieu de a successivement a, a', a'' etc., on aura les équations suivantes:

(7) $$\begin{cases} k + k'a + k''a^2 + \cdots + k^{(m-1)}a^{m-1} + a^m = -iA\sqrt{\varphi a}.\psi a, \\ k + k'a' + k''a'^2 + \cdots + k^{(m-1)}a'^{(m-1)} + a'^m = -i'A\sqrt{\varphi a'}.\psi a', \\ k + k'a'' + k''a''^2 + \cdots + k^{(m-1)}a''^{(m-1)} + a''^m = -i''A\sqrt{\varphi a''}.\psi a'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k + k'a^{(m-1)} + k''a^{(m-1)^2} + \cdots + k^{(m-1)}a^{(m-1)^{(m-1)}} + a^{(m-1)^m} = -i^{(m-1)}A\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}.\psi a^{(m-1)}. \end{cases}$$

Au moyen de ces équations il est aisé de déterminer k, k', k'', k''', etc. en fonction de A, a, a', a'', etc. On trouvera

$$A = \frac{1}{f^{(n+2)}[(2n+4)l^{(m-1)} - h^{(m-2)}] + f^{(n+1)}(2n+2-h^{(m-1)})};$$

or

$$h^{(m-1)} = \mu + \mu' + \mu'' + \cdots = 2n+4,$$

$$\left.\begin{aligned} h^{(m-2)} = &-\mu(a'+a''+a'''+\cdots) \\ &-\mu'(a+a''+a'''+\cdots) \\ &-\mu''(a+a'+a'''+\cdots) \\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\mu(l^{(m-1)}+a) \\ &+\mu'(l^{(m-1)}+a') \\ &+\mu''(l^{(m-1)}+a'') \\ &+\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

donc

$$h^{(m-2)} = (2n+4)l^{(m-1)} + \mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \cdots;$$

on tire de là

(8) $$A = -\frac{1}{(\mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \cdots)f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}}.$$

38. Appliquons ce qui précède au cas où $\mu = \mu' = \mu'' = \cdots = 1$. Dans ce cas on a $m = 2n+4$. Les seules équations qui sont nécessaires dans ce cas, sont les équations (4) et (7). Considérons d'abord les équations (4)

$$f + f'a + f''a^2 + \cdots + f^{(n+2)}a^{n+2} = ifa\sqrt{\varphi a},$$
$$f + f'a' + f''a'^2 + \cdots + f^{(n+2)}a'^{n+2} = i'fa'\sqrt{\varphi a'},$$
$$f + f'a'' + f''a''^2 + \cdots + f^{(n+2)}a''^{n+2} = i''fa''\sqrt{\varphi a''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f + f'a^{(m-1)} + f''a^{(m-1)^2} + \cdots + f^{(n+2)}a^{(m-1)^{(n+2)}} = i^{(m-1)}fa^{(m-1)}\sqrt{\varphi a^{(m-1)}}.$$

On peut aisément éliminer les quantités f, f', f'' etc. de la manière suivante:

On a, comme on sait,

$$\frac{a^{m-p-2}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots}+\frac{a'^{m-p-2}}{(a'-a)(a'-a'')\ldots}+\frac{a''^{m-p-2}}{(a''-a)(a''-a')\ldots}+\cdots=0,$$

p étant un nombre entier positif; ou bien

$$\frac{a^p}{\psi a}+\frac{a'^p}{\psi a'}+\frac{a''^p}{\psi a''}+\cdots+\frac{a^{(m-1)p}}{\psi a^{(m-1)}}=0,$$

lorsque $p<m-1$, c'est-à-dire $p<2n+3$. Donc si l'on multiplie la première des équations précédentes par $\frac{a^p}{\psi a}$, la seconde par $\frac{a'^p}{\psi a'}$ etc., et qu'on les ajoute ensuite, il est aisé de voir que la somme des premiers membres devient égale à zéro si $p<n+1$. On a donc

(9) $$i\frac{a^p\sqrt{\varphi a}}{\psi a}fa+i'\frac{a'^p\sqrt{\varphi a'}}{\psi a'}fa'+\cdots=0.$$

En faisant dans cette équation successivement $p=0, 1, 2, 3, \ldots n$, on obtiendra $n+1$ équations par lesquelles on déterminera les n quantités $e, e', e'', \ldots e^{(n-1)}$, et on trouvera de plus la relation qui doit avoir lieu entre les quantités a, a', a'', a''' etc.

39. Supposons que $n=0$. Dans ce cas on aûra

$$fa=fa'=fa''=\cdots=1;$$

donc l'équation précédente devient

$$\frac{i\sqrt{\varphi a}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}$$
$$+\frac{i''\sqrt{\varphi a''}}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')}+\frac{i'''\sqrt{\varphi a'''}}{(a'''-a)(a'''-a')(a'''-a'')}=0.$$

C'est la relation qui existe entre les quatre quantités a, a', a'', a'''.

Les équations (4) deviennent

$$\begin{aligned}
f+f'a+f''a^2&=i\sqrt{\varphi a},\\
f+f'a'+f''a'^2&=i'\sqrt{\varphi a'},\\
f+f'a''+f''a''^2&=i''\sqrt{\varphi a''},\\
f+f'a'''+f''a'''^2&=i'''\sqrt{\varphi a'''}.
\end{aligned}$$

En multipliant la première par $\frac{1}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}$ etc., et en ajoutant ensuite, on aura

$$f.\left(\frac{1}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{1}{a'(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}+\cdots\right)$$
$$=\frac{i\sqrt{\varphi a}}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{a'(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}+\cdots,$$

d'où

$$-f=i\frac{a'a''a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\sqrt{\varphi a}+i'\frac{aa''a'''}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}\sqrt{\varphi a'}$$
$$+i''\frac{aa'a'''}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')}\sqrt{\varphi a''}+i'''\frac{aa'a''}{(a'''-a)(a'''-a')(a'''-a'')}\sqrt{\varphi a'''}.$$

De la même manière

$$f''=\frac{i\sqrt{\varphi a}}{(a-a')(a-a'')}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{(a'-a)(a'-a'')}+\frac{i''\sqrt{\varphi a''}}{(a''-a)(a''-a')},$$

et ensuite

$$f'=\frac{i\sqrt{\varphi a}}{a-a'}+\frac{i'\sqrt{\varphi a'}}{a'-a}-(a+a')f''.$$

Connaissant f, f', f'', on aura aisément la valeur de A par l'équation (8), qui devient dans ce cas

$$A=-\frac{1}{(a+a'+a''+a''')f''+2f'};$$

k, k', k'' et k''' se déterminent par les équations (7).

On peut aussi déterminer les coefficiens de la manière suivante. Soit

$$R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''');$$

si dans les équations

$$P=\sqrt{R+C.S},\quad S=l+l'x+l''x^2+l'''x^3+x^4=\theta x,$$

on fait $x=p, p', p'', p'''$, on obtiendra

$$\begin{aligned}
f+pf'+p^2f''&=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p},\\
f+p'f'+p'^2f''&=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p'},\\
f+p''f'+p''^2f''&=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p''},\\
f+p'''f'+p'''^2f''&=\sqrt{C}.\sqrt{\theta p'''}.
\end{aligned}$$

En éliminant f, f' et f'', il restera l'équation:

$$0=\frac{\sqrt{(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{\sqrt{(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}$$
$$+\frac{\sqrt{(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''-a''')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')},$$

qui exprime la relation entre a, a', a'', a''', et qui est plus simple que celle trouvée plus haut.

40. Supposons maintenant que $m=2$. Dans ce cas on peut faire les suppositions suivantes:

$$1)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)(x-a')^{2n+3},$$
$$2)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)^2(x-a')^{2n+2},$$
$$3)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)^3(x-a')^{2n+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n+2)\quad P^2-Q^2R=C(x-a)^{n+2}.(x-a')^{n+2}.$$

Dans tous ces cas les équations (7) deviennent

$$k+k'a+a^2=-A\mu(a-a').\sqrt{\varphi a},$$
$$k+k'a'+a'^2=-A\mu'(a'-a).\sqrt{\varphi a'},$$

d'où l'on tire

$$k'=-(a+a')-A(\mu\sqrt{\varphi a}+\mu'\sqrt{\varphi a'}),$$
$$k=aa'+A(a'\mu\sqrt{\varphi a}+a\mu'\sqrt{\varphi a'}).$$

Les autres coefficiens se déterminent par l'équation (5). Je vais les évaluer dans les cas où $n=0$ et $n=1$.

1. Lorsque $n=0$, on peut faire

$$\text{a)}\quad P^2-R=C(x-a)(x-a')^3,$$
$$\text{b)}\quad P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2.$$

a) Si $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$. Dans ce cas l'équation (5) donne

$$Fa=\sqrt{\varphi a},$$
$$Fa'=\sqrt{\varphi a'},$$
$$d(Fa')=\tfrac{1}{2}\frac{d\varphi a'}{\sqrt{\varphi a'}},$$
$$d^2(Fa')=\tfrac{1}{2}\frac{d^2\varphi a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\tfrac{1}{4}\frac{(d\varphi a')^2}{\sqrt{(\varphi a')^3}},$$

ou bien

$$f+f'a+f''a^2=\sqrt{\varphi a},$$
$$f+f'a'+f''a'^2=\sqrt{\varphi a'},$$
$$f'+2f''a'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}},$$
$$2f''=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi'' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(\varphi' a')^2}{\sqrt{(\varphi a')^3}};$$

donc

$$f''=\tfrac{1}{8}\cdot\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}},$$
$$f'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\frac{a'}{4}\cdot\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}},$$
$$f=\sqrt{\varphi a}-\frac{a'}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}+\frac{a'^2}{8}\cdot\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}},$$

et la relation entre a et a' devient

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\tfrac{1}{2}(a-a')\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\tfrac{1}{8}(a-a')^2\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}}=0,$$

ou

$$\sqrt{\varphi a}.\sqrt{\varphi a'}=\varphi a'+\tfrac{1}{2}(a-a')\varphi' a'+\tfrac{1}{8}(a-a')^2\,\frac{2\varphi a'.\varphi'' a'-(\varphi' a')^2}{\varphi a'}.$$

On aura ensuite A par l'équation

$$A=-\frac{1}{(a+3a')f''+2f'}.$$

41. On peut aussi trouver ces équations de la manière suivante. On a

$$P=\sqrt{R+C(x-a)(x-a')^3}.$$

Soit

$$R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''');$$

si nous faisons $x=p, p', p'', p'''$, nous aurons

$$f+f'p+f''p^2=\sqrt{C}.\sqrt{(p-a)(p-a')}.(p-a'),$$
$$f+f'p'+f''p'^2=\sqrt{C}.\sqrt{(p'-a)(p'-a')}.(p'-a'),$$
$$f+f'p''+f''p''^2=\sqrt{C}.\sqrt{(p''-a)(p''-a')}.(p''-a'),$$
$$f+f'p'''+f''p'''^2=\sqrt{C}.\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')}.(p'''-a').$$

En éliminant f, f' et f'', on aura entre a et a' la relation suivante:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(p-a')\sqrt{(p-a)(p-a')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\dfrac{(p'-a')\sqrt{(p'-a)(p'-a')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\ +\dfrac{(p''-a')\sqrt{(p''-a)(p''-a')}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\dfrac{(p'''-a')\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{array}\right\}=0.$$

b) Si $P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$. Dans ce cas l'équation (5) donne

$$f+f'a+f''a^2=\sqrt{\varphi a},$$

$$f+f'a'+f''a'^2=\sqrt{\varphi a'},$$

$$f'+2f''a=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}},$$

$$f'+2f''a'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}.$$

Des deux dernières équations on tire

$$f''=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\varphi' a}{(a-a')\sqrt{\varphi a}}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\varphi' a'}{(a'-a)\sqrt{\varphi a'}},$$

$$f'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a'.\varphi' a}{(a'-a)\sqrt{\varphi a}}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a\varphi'.a'}{(a-a')\sqrt{\varphi a'}}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux premières équations, on en tirera

$$f=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{aa'}{a-a'}\cdot\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{aa'}{a'-a}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}-\frac{a'\sqrt{\varphi a}-a\sqrt{\varphi a'}}{a-a'},$$

et

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\tfrac{1}{4}(a-a')\left(\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}\right)=0.$$

On a ensuite

$$A=-\frac{1}{2(a+a')f''+2f'}=-\frac{2}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de k et k', on obtiendra:

$$k=aa'-4\,\frac{a'\sqrt{\varphi a}+a\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}=aa'+2b,$$

$$k'=-(a+a')+4\,\frac{\sqrt{\varphi a}+\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}=-(a+a')+2b'.$$

Par ces valeurs on a

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')}=\frac{aa'-(a+a')x+x^2+2b+2b'x}{(x-a)(x-a')}$$

$$=1+\frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')}.$$

Donc on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}=-\int\frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}+A.\log\frac{P+\sqrt{\varphi x}}{P-\sqrt{\varphi x}}.$$

La relation entre a et a' peut aussi s'exprimer de la manière suivante:

$$\frac{(p-a)(p-a')}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{(p'-a)(p'-a')}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}-\frac{(p''-a)(p''-a')}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}-\frac{(p'''-a)(p'''-a')}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0,$$

ou

$$(p+p'-p''-p''')aa'-(pp'-p''p''')(a+a')+pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')=0,$$

d'où l'on tire

$$a'=\frac{(pp'-p''p''')a+(p+p')p''p'''-(p''+p''')pp'}{(p+p'-p''-p''')a-pp'+p''p'''}.$$

42. Supposons maintenant que

$$P^2-R=C(x-p)(x-a)(x-a')^2,$$

$x-p$ étant facteur de R. On a donc

$$P=(x-p)(f+f'x),$$

donc

$$(f+f'x)^2=\frac{(x-p')(x-p'')(x-p''')}{x-p}+C.\frac{(x-a)(x-a')^2}{x-p}.$$

Faisons $x=p'\ p'',\ p'''$, on aura

$$f+f'p'=\frac{(p'-a')}{\sqrt{p'-p}}\sqrt{C}.\sqrt{p'-a},$$

$$f+f'p''=\frac{p''-a'}{\sqrt{p''-p}}\sqrt{C}.\sqrt{p''-a},$$

$$f+f'p'''=\frac{p'''-a'}{\sqrt{p'''-p}}\sqrt{C}.\sqrt{p'''-a}.$$

En éliminant f et f', on aura

$$\frac{(p'-a')\sqrt{p'-a}}{(p'-p'')(p'-p''')\sqrt{p'-p}}+\frac{(p''-a')\sqrt{p''-a}}{(p''-p')(p''-p''')\sqrt{p''-p}}+\frac{(p'''-a')\sqrt{p'''-a}}{(p'''-p')(p'''-p'')\sqrt{p'''-p}}=0,$$

d'où l'on tirera

$$a'=\frac{Bp'\sqrt{p'-a}+B'p''\sqrt{p''-a}+B''p'''\sqrt{p'''-a}}{B\sqrt{p'-a}+B'\sqrt{p''-a}+B''\sqrt{p'''-a}},$$

en faisant pour abréger

$$B=\frac{1}{(p'-p'')(p'-p''').\sqrt{p'-p}},\quad B'=\frac{1}{(p''-p')(p''-p''').\sqrt{p''-p}},$$

$$B''=\frac{1}{(p'''-p')(p'''-p'')\sqrt{p'''-p}}.$$

43. Dans les trois numéros précédens nous avons considéré le cas où $m=2$. Supposons maintenant $m=1$. Dans ce cas on a

$$P^2-Q^2R=C(x-a)^{2n+4},$$

$$\int\frac{x+k}{x-a}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

k se détermine immédiatement par l'équation (7), qui donne

$$k=-a-\mu A.\sqrt{\varphi a}.$$

Les quantités A, a, f, f', etc. e, e' e'', etc. se déterminent par l'équation (5), qui donne les suivantes:

$$Fa=fa.\sqrt{\varphi a},$$

$$dFa=dfa.\sqrt{\varphi a}+fa.d\sqrt{\varphi a},$$

$$d^2Fa=d^2fa.\sqrt{\varphi a}+2dfa.d\sqrt{\varphi a}+fa.d^2\sqrt{\varphi a},$$

. . . .

$$d^{2n+3}Fa=d^{2n+3}fa.\sqrt{\varphi a}+(2n+3)d^{2n+2}fa.d\sqrt{\varphi a}$$
$$+\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}.d^{2n+1}fa.d^2\sqrt{\varphi a}+\cdots.$$

Par ces équations, qui sont toutes linéaires par rapport à f, f', f'', etc. e, e', e'' etc., on peut déterminer ces quantités et a, mais par des calculs assez longs. Je donnerai dans la suite une méthode sûre et directe de déterminer ces quantités dans tous les cas. Pour le moment je vais résoudre le problème en supposant

$$Q=1,\ \text{et}\ P^2-R=C(x-p)(x-a)^3,$$

$x-p$ étant facteur de R, et $R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$. Soit

$$P=(x-p)(f+f'x),$$

d'où

$$(f+f'x)^2=\frac{(x-p')(x-p'')(x-p''')}{x-p}+C\frac{(x-a)^3}{x-p}.$$

En faisant successivement $x=p',\ p'',\ p'''$, il viendra

$$f+f'p'=\sqrt{C}.(p'-a)\sqrt{\frac{p'-a}{p'-p}},$$

$$f+f'p''=\sqrt{C}.(p''-a)\sqrt{\frac{p''-a}{p''-p}},$$

$$f+f'p'''=\sqrt{C}.(p'''-a)\sqrt{\frac{p'''-a}{p'''-p}}.$$

On a de plus, en faisant $x=0$,

$$f^2=\frac{p'p''p'''}{p}+\frac{C.a^3}{p}.$$

En éliminant f et f' entre les trois premières équations il viendra

$$\frac{(p'-a)\sqrt{\frac{p'-a}{p'-p}}}{(p'-p'')(p'-p''')}+\frac{(p''-a)\sqrt{\frac{p''-a}{p''-p}}}{(p''-p')(p''-p''')}+\frac{(p'''-a)\sqrt{\frac{p'''-a}{p'''-p}}}{(p'''-p')(p'''-p'')}=0.$$

De cette équation on peut tirer la valeur de a, et celle-ci étant connue, on aura aisément les valeurs de f, f' et C, que je me dispenserai d'écrire.

44. De l'équation $\int\frac{x+k}{x-a}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$ on tire, en substituant la valeur de $k=-a-\mu A\sqrt{\varphi a}$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}-\mu A\sqrt{\varphi a}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}=A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}};$$

donc

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}=\frac{1}{\mu A\sqrt{\varphi a}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{R}}-\frac{1}{\mu\sqrt{\varphi a}}.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

De cette manière on trouvera donc toutes les intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ qui peuvent se réduire à l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ à l'aide d'une fonction logarithmique de la forme $A.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$. Je donnerai dans la suite la résolution de ce problème dans toute sa généralité. Elle dépend, comme nous venons de le voir, de la résolution de l'équation

$$P^2-Q^2R=C(x-a)^{2n+4}.$$

Pour le moment je remarque qu'on peut lui donner la forme

$$P'^2-Q'^2.R'=C.$$

En effet, soit

$$P = f_1 + f_1'(x-a) + f_1''(x-a)^2 + \cdots,$$
$$Q = e_1 + e_1'(x-a) + e_1''(x-a)^2 + \cdots,$$
$$R = \alpha' + \beta'(x-a) + \gamma'(x-a)^2 + \delta'(x-a)^3 + \varepsilon'(x-a)^4,$$

et faisons $y = \frac{1}{x-a}$, on aura, $x - a = \frac{1}{y}$; donc

$$P = f_1 + f_1' \frac{1}{y} + f_1'' \frac{1}{y^2} + \cdots = \frac{P'}{y^{n+2}},$$
$$Q = e_1 + e_1' \frac{1}{y} + e_1'' \frac{1}{y^2} + \cdots = \frac{Q'}{y^n},$$
$$R = \alpha' + \frac{\beta'}{y} + \frac{\gamma'}{y^2} + \frac{\delta'}{y^3} + \frac{\varepsilon'}{y^4} = \frac{R'}{y^4},$$

et en substituant et multipliant par y^{2n+4},

$$P'^2 - Q'^2 R' = C.$$

Donc si l'on peut résoudre cette équation, on peut aussi résoudre la proposée.

La résolution de l'équation précédente sera donnée dans le cours du problème suivant, qui consiste à déterminer k et R de la manière que l'intégrale $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}$ devienne intégrable par la fonction logarithmique $A . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$.

45. Nous avons vu, dans ce qui précède, que si l'on a

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + k'x + k}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = A . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

il en résulte nécessairement $m+1$ conditions entre les $2m$ quantités a, a', a'', $\ldots a^{(m-1)}$, k, $k' \ldots k^{(m-1)}$; on peut donc prendre $m-1$, mais non pas un plus grand nombre de ces quantités, à volonté, et puis déterminer les autres. Il suit de là qu'on peut faire

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots + k'x + k}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})} = \frac{x^n + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + k_1'x + k_1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})}$$
$$+ \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \cdots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}} + \frac{L^{(n)}}{x-c^{(n)}},$$

$k_1^{(n-1)}$, $k_1^{(n-2)}$, $\ldots k_1'$, k_1, a, a', a'', $\ldots a^{(m-1)}$ étant quelconques, d'où il résulte qu'on peut exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^n + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + k_1'x + k_1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

par $n+1$ intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{R}}$.

On voit de même qu'on peut exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ par n intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, dont $n-1$ sont arbitraires par rapport à a.

Problème III.

Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(k+x)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent être exprimées par la fonction $A . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$.

---

46. Puisque $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}} = A . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$, on aura en différentiant

$$x + k = \frac{M}{N}, \quad M = A \frac{\left(2N \frac{dP}{dx} - P \frac{dN}{dx}\right)}{Q},$$
$$N = P^2 - Q^2 R.$$

Pour que l'équation $\frac{M}{N} = x + k$ puisse avoir lieu, il faut que $N = \text{const.} = c$; on a donc les deux équations:

$$c(x+k) = 2Ac \frac{dP}{Q . dx},$$
$$c = P^2 - Q^2 R;$$

ou bien en supposant $c = 1$,

$$x + k = 2A \frac{dP}{Q . dx},$$
$$1 = P^2 - Q^2 R.$$

La première équation n'a aucune difficulté. Elle donne aisément les valeurs de A et k, quand P et Q sont connus. En effet, soit

$$P = f + f'x + \cdots + f^{(n+2)} x^{n+2},$$
$$Q = e + e'x + \cdots + e^{(n)} x^n,$$

on a en substituant

$$x+k=2A\,\frac{(n+2)f^{(n+2)}x^{n+1}+(n+1)f^{(n+1)}x^{n}+\cdots}{e^{(n)}x^{n}+e^{(n-1)}x^{n-1}+\cdots},$$

d'où l'on tire

$$1=\frac{2A\,(n+2)f^{(n+2)}}{e^{(n)}},$$

$$k=\frac{2Af'}{e};$$

donc

$$(1)\qquad \begin{cases} A=\dfrac{e^{(n)}}{(2n+4)f^{(n+2)}}, \\[2mm] k=\dfrac{f'e^{(n)}}{(n+2)e\,f^{(n+2)}}. \end{cases}$$

Considérons maintenant l'équation

$$P^2-Q^2R=1,$$

et cherchons à trouver les valeurs de P et Q.

Première méthode.

47. La méthode la plus simple qui s'offre est celle des coefficiens indéterminés. Substituant les valeurs de P et Q on obtiendra

$$(f+f'x+f''x^2+\cdots+f^{(n+2)}x^{n+2})^2$$
$$-(e+e'x+\cdots+e^{(n)}x^n)^2(\alpha+\beta x+\cdots+\varepsilon x^4)=1.$$

En développant et comparant les coefficiens, on aura les équations suivantes au nombre de $2n+5$:

$$f^2-\alpha e^2=1,$$

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} \quad ff^{(p)}+f'f^{(p-1)}+f''f^{(p-2)}+f'''f^{(p-3)}+\cdots \\ -\alpha(ee^{(p)}\;+e'e^{(p-1)}+e''e^{(p-2)}+\cdots) \\ -\beta(ee^{(p-1)}+e'e^{(p-2)}+e''e^{(p-3)}+\cdots) \\ -\gamma(ee^{(p-2)}+e'e^{(p-3)}+e''e^{(p-4)}+\cdots) \\ -\delta(ee^{(p-3)}+e'e^{(p-4)}+e''e^{(p-5)}+\cdots) \\ -\varepsilon(ee^{(p-4)}+e'e^{(p-5)}+e''e^{(p-6)}+\cdots) \end{array}\right\}=0.$$

En faisant dans cette équation successivement $p=1, 2, 3$, etc. jusqu'à $2n+4$, on aura les équations nécessaires pour satisfaire à l'équation $P^2-Q^2R=1$. Ayant $2n+5$ équations mais seulement $2n+4$ coefficiens indéterminés, il est clair qu'on obtiendra une relation entre les cinq quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

En faisant dans l'équation (2) $p=2n+4$, on obtiendra

$$f^{(n+2)2}-\varepsilon e^{(n)2}=0,$$

donc

$$f^{(n+2)}=e^{(n)}\sqrt{\varepsilon}.$$

En substituant cette valeur dans les expressions de A et de k, elles deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} A=\dfrac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \\[2mm] k=\dfrac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}}\,\dfrac{f'}{e}. \end{cases}$$

48. Avant d'aller plus loin je vais appliquer la méthode précédente en supposant $n=0$. On a dans ce cas $Q=e$, $P=f+f'x+f''x^2$. Les équations (2) deviennent donc

$$f^2-\alpha e^2=1,$$
$$2ff'-\beta e^2=0,$$
$$f'^2+2ff''-\gamma e^2=0,$$
$$2f'f''-\delta e^2=0,$$
$$f''^2-\varepsilon e^2=0.$$

On tire de ces équations

$$f''=e\sqrt{\varepsilon}=\frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta^2\varepsilon-\alpha\delta^2}},$$

$$f'=\frac{\delta e}{2\sqrt{\varepsilon}}=\frac{\delta^2}{2\sqrt{\beta^2\varepsilon^2-\alpha\varepsilon\delta^2}},$$

$$f=\frac{\beta e}{\delta}\sqrt{\varepsilon}=\frac{\beta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta^2\varepsilon-\alpha\delta^2}},$$

$$e=\frac{\delta}{\sqrt{\beta^2\varepsilon-\alpha\delta^2}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $f'^2+2ff''-\gamma e^2=0$, il viendra

$$\frac{\delta^2}{4\varepsilon}+\frac{2\beta\varepsilon}{\delta}-\gamma=0,\quad \gamma=\frac{\delta^2}{4\varepsilon}+\frac{2\beta\varepsilon}{\delta}.$$

Celle-ci est donc la relation qui doit avoir lieu entre les quantités β, γ, δ et ε. Il est remarquable que α ne s'y trouve point.

Par les équations (3) on a ensuite

$$A=\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}},\quad k=\frac{\delta}{4\varepsilon}.$$

On a donc

$$\int\frac{\left(x+\frac{\delta}{4\varepsilon}\right)dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\left(\frac{\delta^2}{4\varepsilon}+2\frac{\beta\varepsilon}{\delta}\right)x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Au reste cette intégrale est facile à trouver; car en faisant $x+\frac{\delta}{4\varepsilon}=y$, on aura

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{\alpha^1+\gamma^1 y^2+\varepsilon y^4}},$$

intégrale facile à trouver par les méthodes connues.

49. Les équations (2) ont l'inconvénient de ne pas être linéaires. On peut trouver un système d'équations linéaires qui les remplacent de la manière suivante. En mettant $\frac{1}{y}$ au lieu de x dans l'équation

$$P^2-Q^2R=1,$$

on obtiendra une équation de la forme

$$(Fy)^2-(fy)^2\varphi y=y^{2n+4},$$

dans laquelle

$$Fy=fy^{n+2}+f'y^{n+1}+\cdots+f^{(n+2)},$$
$$fy=ey^n+e'y^{n-1}+\cdots+e^{(n)},$$
$$\varphi y=\alpha y^4+\beta y^3+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon.$$

Il est clair que l'équation

$$Fy=fy.\sqrt{\varphi y}$$

aura lieu dans la supposition de $y=0$, en la différentiant $2n+3$ fois de suite. On a donc les équations suivantes:

$$Fy=fy.\sqrt{\varphi y},$$
$$dFy=dfy.\sqrt{\varphi y}+fy.d\sqrt{\varphi y},$$
$$d^2Fy=d^2fy.\sqrt{\varphi y}+2dfy.d\sqrt{\varphi y}+fy.d^2\sqrt{\varphi y},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^{2n+3}Fy=d^{2n+3}fy.\sqrt{\varphi y}+(2n+3)d^{2n+2}fy.d\sqrt{\varphi y}$$
$$+\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}d^{2n+1}fy.d^2\sqrt{\varphi y}+\cdots.$$

En faisant dans ces équations $y=0$, on aura

$$Fy=f^{(n+2)},$$
$$\frac{dFy}{dy}=f^{(n+1)},$$
$$\frac{d^2Fy}{dy^2}=1.2.f^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^pFy}{dy^p}=1.2.3\ldots p.f^{(n+2-p)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^{n+2}Fy}{dy^{n+2}}=1.2.3\ldots(n+2).f,$$
$$\frac{d^{n+2+p}Fy}{dy^{n+p+2}}=0.$$

De même

$$fy=e^{(n)},$$
$$\frac{dfy}{dy}=e^{(n-1)},$$
$$\frac{d^2fy}{dy^2}=1.2.e^{(n-2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^nfy}{dy^n}=1.2.3\ldots n.e,$$
$$\frac{d^{n+p}fy}{dy^{n+p}}=0,$$
$$\sqrt{\varphi y}=\sqrt{\varepsilon},$$
$$\frac{d\sqrt{\varphi y}}{dy}=\frac{d\varphi y}{2dy.\sqrt{\varphi y}}=\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}},$$
$$\frac{d^2\sqrt{\varphi y}}{dy^2}=\frac{d^2\varphi y}{2dy^2.\sqrt{\varphi y}}-\frac{(d\varphi y)^2}{4dy^2\varphi y\sqrt{\varphi y}}=\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{\delta^2}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$
$$\frac{d^3\sqrt{\varphi y}}{dy^3}=\frac{1}{dy^3}\left(\frac{d^3\varphi y}{2\sqrt{\varphi y}}-\frac{3d\varphi y.d^2\varphi y}{4\varphi y\sqrt{\varphi y}}+\frac{3(d\varphi y)^3}{8(\varphi y)^2\sqrt{\varphi y}}\right),$$
$$\frac{d^3\sqrt{\varphi y}}{dy^3}=\frac{3\beta}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{3\gamma\delta}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}+\frac{3\delta^3}{8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}.$$

De la même manière on trouvera $\frac{d^4\sqrt{\varphi y}}{dy^4}$ etc. en supposant $y=0$. Pour plus de simplicité, je désigne par $e^{(p)}$ la valeur de $\frac{d^p\sqrt{\varphi y}}{dy^p}$ en y faisant $y=0$.

En substituant les valeurs trouvées, on obtiendra les équations suivantes:

$$f^{(n+2)} = ce^{(n)},$$
$$f^{(n+1)} = ce^{(n-1)} + c'e^{(n)},$$
$$f^{(n)} = ce^{(n-2)} + c'e^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}c''e^{(n)},$$
$$f^{(n-1)} = ce^{(n-3)} + c'e^{(n-2)} + \tfrac{1}{2}c''e^{(n-1)} + \frac{1}{2.3}c'''e^{(n)},$$
. . . .
$$f^{(n-p+2)} = ce^{(n-p)} + c'e^{(n-p+1)} + \frac{c''}{2}e^{(n-p+2)} + \frac{c'''}{2.3}e^{(n-p+3)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{c^{(k)}}{.2.3\ldots k}.e^{(n-p+k)} + \cdots + \frac{c^{(p)}}{.2.3\ldots p}e^{(n)},$$
. . . .
$$f'' = ce + c'e' + \frac{c''}{2}e'' + \frac{c'''}{2.3}e''' + \cdots + \frac{c^{(n)}}{2.3\ldots n}e^{(n)},$$
$$f' = c'e + \frac{c''}{2}e' + \frac{c'''}{2.3}e'' + \cdots + \frac{c^{(n+1)}}{2.3\ldots(n+1)}.e^{(n)},$$
$$f = \frac{c''}{2}e + \frac{c'''}{2.3}e' + \frac{c''''}{2.3.4}e'' + \cdots + \frac{c^{(n+2)}}{2.3\ldots(n+2)}e^{(n)},$$
$$0 = \frac{c'''}{2.3}e + \frac{c''''}{2.3.4}e' + \frac{c'''''}{2.3.4.5}e'' + \cdots + \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}e^{(n)},$$
$$0 = \frac{c''''}{2.3.4}e + \frac{c'''''}{2.3.4.5}e' + \cdots + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\ldots(n+4)}e^{(n)},$$
. . . .
$$0 = \frac{c^{(p)}}{2.3\ldots p}e + \frac{c^{(p+1)}}{2.3\ldots(p+1)}e' + \cdots + \frac{c^{(n+p)}}{2.3\ldots(n+p)}e^{(n)},$$
. . . .
$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\ldots(n+4)}e' + \cdots + \frac{c^{(2n+3)}}{2.3\ldots(2n+3)}e^{(n)}.$$

50. Ces équations sont, comme on le voit, très commodes pour déterminer les coefficiens e, e', e'' etc. et f, f', f'' etc. Les $n+1$ dernières donnent les coefficiens e', e'', $\ldots e^{(n)}$ en e, et de plus une relation entre les quantités c''', c'''' etc. Les $n+2$ premières donnent ensuite immédiatement les coefficiens f, f', f'' etc. en e. Celui-ci est arbitraire et disparaît du résultat, comme il est aisé de le voir. Si l'on fait $k=0$, on aura $f'=0$, d'où il résultera une seconde relation entre les quantités c', c'' etc. Au reste cette supposition ne diminue pas la généralité du problème; car en faisant dans le résultat $x=y+k$, on aura la même intégrale que si l'on n'avait pas supposé $k=0$. Soit donc $f'=0$, on voit que

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes, toutes les fois qu'on a entre les quantités α, β, γ, δ, ε les deux relations qui résultent de l'élimination des quantités e, e', e'' etc. des $n+2$ équations

$$0 = c'e + \frac{c''}{2}e' + \cdots + \frac{c^{(n+1)}}{1.2\ldots(n+1)}e^{(n)},$$
$$0 = \frac{c'''}{2.3}e + \frac{c''''}{2.3.4}e' + \cdots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2\ldots(n+3)}e^{(n)},$$
. . . .
$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}e + \cdots + \frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3\ldots(2n+3)}e^{(n)}.$$

51. Appliquons ce qui précède aux cas où $n=0$ et $n=1$. Dans le premier cas on aura

$$f''=ce,\ f'=c'e,\ f=\frac{c''}{2}e,\ 0=c'''.$$

La dernière équation donne

$$0 = \frac{3\beta}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3\gamma\delta}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} + \frac{3\delta^3}{8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}},$$

d'où $\gamma = \frac{2\varepsilon\beta}{\delta} + \frac{\delta^2}{4\varepsilon}$, comme nous avons trouvé plus haut.

Soit maintenant $n=1$. Dans ce cas on a

$$0 = c'e + \frac{c''}{2}e', \text{ d'où } 0 = 2c' + c''\frac{e'}{e},$$
$$0 = \frac{c'''}{2.3}e + \frac{c''''}{2.3.4}e', \qquad 0 = 4c''' + c''''\frac{e'}{e},$$
$$0 = \frac{c''''}{2.3.4}e + \frac{c'''''}{2.3.4.5}e', \qquad 0 = 5c'''' + c'''''\frac{e'}{e}.$$

En éliminant $\frac{e'}{e}$ il viendra:

$$c'c'''' - 2c''c''' = 0,$$
$$2c'c''''' - 5c''c'''' = 0.$$

De ces deux équations on tirera, en faisant $\varepsilon=1$ et $\beta=-\alpha$, ce qui est permis:

$$\delta=2 \text{ et } \gamma=-3.$$

On a donc

$$R = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - \alpha x + \alpha.$$

On trouvera de même

$$c=1,\ c'=1,\ c''=-4,\ c'''=-3\alpha+12,$$

donc $e'=-\frac{2c'}{c''}e=\frac{1}{2}e=1$, en faisant $e=2$,

$$f'''=e'=1,\ f''=e+e'=3,\ f'=e-2e'=0,$$

$$f=\tfrac{1}{2}c''.e+\frac{1}{2.3}c'''.e'=-\frac{\alpha}{2}-2,\ k=0,\ A=\tfrac{1}{6};$$

donc

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}=\tfrac{1}{6}\log\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}.$$

52. De l'équation $P^2-1=Q^2R$ on tire

$$(P+1)(P-1)=Q^2R=P'^2Q'^2R'R'',$$

en faisant $Q=P'Q'$ et $R=R'R''$. On aura donc

$$P+1=P'^2R',$$
$$P-1=Q'^2R'',$$

d'où l'on tire

$$P=\tfrac{1}{2}(P'^2R'+Q'^2R''),\ 2=P'^2R'-Q'^2R''.$$

Cette équation est plus simple que l'équation $P^2-Q^2R=1$.

En multipliant par R' on aura

$$(P'R')^2-Q'^2R=2R'.$$

On peut donc mettre $P'R'$ et Q' à la place de P et Q dans l'expression $\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$; mais il faut observer que A change de valeur.

Pour montrer l'usage de l'équation

$$2=P'^2R'-Q'^2R'',$$

soit

$$R'=x^2+2qx+p,\ R''=x^2+2q'x+p',$$

et P' et Q' deux constantes. On aura

$$2=pP'^2-p'Q'^2+2(qP'^2-q'Q'^2)x+(P'^2-Q'^2)x^2,$$

$$P'^2=Q'^2,\ q=q',\ 2=pP'^2-p'Q'^2,$$

$$P'=Q'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p-p'}},$$

$$P=P'^2R'-1=\frac{2}{p-p'}(x^2+2qx+p)-1=\frac{2x^2+4qx+p+p'}{p-p'},$$

$$Q=P'Q'=P'^2=\frac{2}{p-p'},\ k=\tfrac{1}{2}\frac{f'}{e}=\tfrac{1}{2}\frac{\frac{4q}{p-p'}}{\frac{2}{p-p'}}=q,\ A=\tfrac{1}{4};$$

donc

$$\int\frac{(x+q)dx}{\sqrt{(x^2+2qx+p)(x^2+2qx+p')}}=\tfrac{1}{4}\log\frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}},$$

ce qu'on peut aisément vérifier en faisant $x+q=y$.

Soit maintenant

$$P'=\frac{x+m}{c},\ Q'=\frac{x+m'}{c}.$$

On aura

$$2c^2=(x^2+2mx+m^2)(x^2+2qx+p)-(x^2+2m'x+m'^2)(x^2+2q'x+p'),$$

d'où l'on tire

$$2c^2=m^2p-m'^2p',$$
$$0=m^2q-m'^2q'+mp-m'p',$$
$$0=p-p'+4mq-4m'q'+m^2-m'^2,$$
$$0=q-q'+m-m'.$$

Soit $q+q'=r$, on aura

$$2q=r+m'-m,$$
$$2q'=r+m-m',$$
$$p=\tfrac{1}{2}r(3m'-m)+\tfrac{1}{2}m^2-\tfrac{1}{2}m'^2-mm',$$
$$p'=\tfrac{1}{2}r(3m-m')+\tfrac{1}{2}m'^2-\tfrac{1}{2}m^2-mm',$$
$$2c^2=\tfrac{1}{2}r(m'-m)^3+\tfrac{1}{2}(m-m')(m^3-m^2m'-m'^2m+m'^3).$$

Par là on obtiendra

$$P=P'^2R'-1=\frac{(x^2+2mx+m^2)(x^2+2qx+p)-c^2}{c^2},$$

$$Q=P'Q'=\frac{x^2+(m+m')x+mm'}{c^2},$$

donc

$$e=\frac{mm'}{c^2},\ f'=\frac{2mp+2m^2q}{c^2},\ n=2,$$

d'où

$$k=\frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{f'}{e}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{2mp+2m^2q}{mm'};$$

or

$$2mp = r(3mm' - m^2) + m^3 - m'^2 m - 2m^2 m',$$

$$2m^2 q = rm^2 + m'm^2 - m^3,$$

donc

$$2mp + 2m^2 q = 3rmm' - m'^2 m - m^2 m',$$

$$k = \tfrac{1}{4}(3r - m' - m).$$

L'intégrale cherchée a donc la forme

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}.$$

Soit $k=0$, on aura $r = \dfrac{m+m'}{3}$, donc

$$2q = \tfrac{4}{3}m' - \tfrac{2}{3}m, \quad 2q' = \tfrac{4}{3}m - \tfrac{2}{3}m',$$

d'où

$$m = 2q' + q, \quad m' = 2q + q',$$

$$3m' - m = 5q + q', \quad 3m - m' = 5q' + q,$$

$$\tfrac{1}{2}m^2 = 2q'^2 + 2qq' + \tfrac{1}{2}q^2, \quad \tfrac{1}{2}m'^2 = 2q^2 + 2qq' + \tfrac{1}{2}q'^2,$$

$$mm' = 5qq' + 2q^2 + 2q'^2, \quad r = q + q';$$

donc

$$p = \frac{q+q'}{2}(5q + q') - \tfrac{1}{2}q'^2 - \tfrac{7}{2}q^2 - 5qq',$$

c'est-à-dire

$$p = -q^2 - 2qq';$$

de même

$$p' = -q'^2 - 2qq'.$$

On a donc en substituant

$$R = (x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq'),$$

$$\int \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq')}} = \tfrac{1}{4}\log\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

où $P = (x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x + q + 2q')$,

$Q = x + q' + 2q$;

ou bien

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq')}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\log\frac{(x+q+2q')\sqrt{x^2 + 2qx - q^2 - 2qq'} + (x + q' + 2q)\sqrt{x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq'}}{(x+q+2q')\sqrt{x^2 + 2qx - q^2 - 2qq'} - (x + q' + 2q)\sqrt{x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq'}}.$$

53. *Seconde méthode.*

Dans ce qui précède nous avons réduit la résolution de l'équation

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

à la résolution d'un système d'équations linéaires; mais comme l'élimination des inconnues entre ces équations est assez laborieuse, et qu'on a de la peine à en déduire un résultat général, je vais donner une autre méthode pour la résolution de cette équation, qui n'ait pas les inconvéniens de la précédente, et qui donne une relation générale qui doit avoir lieu entre les quantités constantes dans R, pour que l'équation proposée soit résoluble.

Soit r^2 le plus grand carré parfait contenu dans R, on peut faire

$$R = r^2 + s,$$

où r est du second degré et s du premier. En substituant cette valeur de R dans l'équation proposée, elle deviendra

$$P^2 - Q^2 r^2 - Q^2 s = 1.$$

Il est clair que le premier coefficient de P doit être le même que le premier coefficient de Qr; on peut donc faire

$$P = Qr + Q_1,$$

le degré de Q_1 étant moindre qui celui de P. En substituant cette valeur de P on aura

$$Q_1^2 + 2QQ_1 r - Q^2 s = 1.$$

Soit Q du degré n, il est clair que Q_1 est du degré $n-1$. Soit maintenant v la plus grande fonction entière contenue dans $\frac{r}{s}$, il est clair qu'on a

$$r = sv + u,$$

v étant du premier degré et u une constante. En mettant cette valeur au lieu de r dans l'équation ci-dessus, on obtiendra

$$Q_1^2 + 2QQ_1 u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1.$$

On voit sans peine qu'en faisant

$$Q = 2vQ_1 + Q_2,$$

le degré de Q_2 devient moindre que celui de Q.

En substituant on aura

$$(1 + 4uv)Q_1^2 + 2Q_1 Q_2(u - sv) - sQ_2^2 = 1,$$

ou bien

$$s_1 Q_1^2 - 2r_1 Q_1 Q_2 - s Q_2^2 = 1,$$

en faisant

$$s_1 = 1 + 4uv, \quad r_1 = r - 2u.$$

Puisque le degré de Q_2 est moindre que n, il est aisé de voir que Q_2 est du degré $n-2$.

Cela posé, soit

$$r_1 = s_1 v_1 + u_1,$$

u_1 étant une constante, on aura

$$s_1 Q_1 (Q_1 - 2v_1 Q_2) - 2Q_1 Q_2 u_1 - s Q_2^2 = 1;$$

donc en faisant

$$Q_1 = 2v_1 Q_2 + Q_3,$$

Q_3 sera d'un degré moindre que celui de Q_1. En substituant on aura

$$s_1 Q_3^2 + 2r_2 Q_2 Q_3 - s_2 Q_2^2 = 1,$$

en faisant $s_2 = s + 4u_1 v_1$, $r_2 = r_1 - 2u_1$, Q_3 étant du degré $n-3$.

Cette équation est semblable à la précédente, d'où il suit qu'on peut la réduire de la même manière à l'équation

$$s_3 Q_3^2 - 2r_3 Q_3 Q_4 - s_2 Q_4^2 = 1,$$

dans laquelle on a

$$r_2 = v_2 s_2 + u_2, \quad u_2 \text{ étant constant},$$

$$Q_2 = 2v_2 Q_3 + Q_4, \quad Q_4 \text{ étant du degré } n-4,$$

$$s_3 = s_1 + 4u_2 v_2,$$

$$r_3 = r_2 - 2u_2.$$

En réduisant cette équation de la même manière, et ainsi de suite, on parviendra enfin à une équation qui, dans le cas où n est un nombre pair 2α, sera de la forme:

$$s_{2\alpha-1} Q_{2\alpha+1}^2 + 2r_{2\alpha} Q_{2\alpha} Q_{2\alpha+1} - s_{2\alpha} Q_{2\alpha}^2 = 1;$$

si n est un nombre impair $2\alpha' + 1$, elle sera de la forme:

$$s_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+1}^2 - 2r_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+2} - s_{2\alpha'} Q_{2\alpha'+2}^2 = 1.$$

$Q_{2\alpha+1}$ est d'un degré moindre que celui de $Q_{2\alpha}$, et $Q_{2\alpha'+2}$ est d'un degré moindre que celui de $Q_{2\alpha'+1}$. Maintenant $Q_{2\alpha}$ est du degré $n - 2\alpha = 0$, donc $Q_{2\alpha}$ est une quantité constante; donc $Q_{2\alpha+1} = 0$; on a donc

$$-s_{2\alpha} Q_{2\alpha}^2 = 1.$$

Si $n = 2\alpha' + 1$, on aura de même

$$s_{2\alpha'+1} Q_{2\alpha'+1}^2 = 1;$$

donc en général

$$s_n Q_n^2 = (-1)^{n+1},$$

Q_n étant une quantité constante. De là il suit aussi que s_n est une quantité constante. Donc

"Toutes les fois que l'équation

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

est résoluble en fonctions entières, il faut que l'une des quantités

$$s, \ s_1, \ s_2, \ s_3, \ s_4, \ \text{etc.}$$

soit constante, et réciproquement. De plus, si s_n est la première des quantités s, s_1, s_2, etc. qui est constante, P est du degré $n+2$ et Q du degré n".

Il suit de là que pour trouver toutes les valeurs que R peut avoir, il faut faire successivement s, s_1, s_2, s_3, etc. égal à une quantité constante.

54. Il s'agit maintenant de déterminer les quantités s_1, s_2, s_3 etc. r_1, r_2, r_3, etc. v_1, v_2, v_3, etc. u_1, u_2, u_3, etc. Les équations desquelles on doit les déduire, ont, comme on le voit par ce qui précède, les formes suivantes:

(1) $$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1} v_{m-1},$$

(2) $$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1},$$

(3) $$r_m = s_m v_m + u_m.$$

On peut de ces équations en déduire une autre qui est de la plus grande utilité dans cette recherche.

En multipliant la première des équations précédentes par s_{m-1}, on aura

$$s_{m-1} s_m = s_{m-2} s_{m-1} + 4u_{m-1} v_{m-1} s_{m-1}.$$

De la seconde équation on tire

$$2u_{m-1} = r_{m-1} - r_m;$$

donc en substituant

$$s_{m-1} s_m = s_{m-2} s_{m-1} + (r_{m-1} - r_m) 2v_{m-1} s_{m-1}.$$

De l'équation (3) on tire en mettant $m-1$ au lieu de m, et en multipliant par 2,

$$2r_{m-1} = 2s_{m-1} v_{m-1} + 2u_{m-1}.$$

En ajoutant cette équation à l'équation (2), on aura

$$2v_{m-1} s_{m-1} = r_{m-1} + r_m.$$

On aura donc

$$s_{m-1}s_m = s_{m-1}s_{m-2} + (r_{m-1} + r_m)(r_{m-1} - r_m);$$

c'est-à-dire

$$s_{m-1}s_m + r_m^2 = s_{m-1}s_{m-2} + r_{m-1}^2.$$

Il suit de là que la quantité

$$s_{m-1}s_m + r_m^2$$

est indépendante de m; donc on aura

$$s_{m-1}s_m + r_m^2 = ss_1 + r_1^2;$$

mais $s_1 = 1 + 4uv$, et $r_1 = r - 2u$; donc

$$ss_1 + r_1^2 = s + r^2 + 4u(vs - r + u);$$

mais $vs = r - u$, donc

$$ss_1 + r_1^2 = r^2 + s = R.$$

Donc on aura quel que soit m

$$(4) \qquad s_{m-1}s_m + r_m^2 = r^2 + s = R,$$

ce qui est bien remarquable.

55. Faisons dans l'équation précédente $m = n$, on aura

$$\mu \, . \, s_{n-1} + r_n^2 = r^2 + s,$$

en supposant $s_n = \text{const.} = \mu$. De cette équation on tire

$$r_n = r, \quad s_{n-1} = \frac{s}{\mu}\,.$$

On a de même

$$s_{n-1} \, . \, s_{n-2} + r_{n-1}^2 = r_1^2 + ss_1 = r^2 + s;$$

donc

$$\frac{s}{\mu}(s_{n-2} - \mu s_1) = r_1^2 - r_{n-1}^2;$$

donc

$$s_{n-2} = \mu s_1, \quad \text{si} \quad r_{n-1} = r_1.$$

Cela a effectivement lieu, car on a

$$r_n = s_n v_n + u_n = \mu v_n + u_n,$$

d'où

$$v_n = \frac{r_n}{\mu}, \quad \text{et} \quad u_n = 0.$$

Maintenant

$$r_{n-1} = s_{n-1}v_{n-1} + u_{n-1} = \frac{s}{\mu}\, v_{n-1} + u_{n-1},$$

or $r_{n-1} = r_n + 2u_{n-1} = r + 2u_{n-1}$, donc

$$r = \frac{s}{\mu}\, v_{n-1} - u_{n-1};$$

mais $r = sv + u$, donc

$$v_{n-1} = \mu v, \quad u_{n-1} = -u,$$

donc

$$r_{n-1} = sv - u = r - 2u = r_1,$$

et par conséquent

$$s_{n-2} = \mu s_1.$$

On démontre de la même manière que

$$r_{n-k} = r_k,$$
$$s_{n-k} = s_{k-1}\mu^{\pm 1},$$
$$v_{n-k} = v_{k-1}\mu^{\mp 1},$$
$$u_{n-k} = -u_{k-1}.$$

Le signe supérieur a lieu si k est pair, et l'inférieur si k est impair.

Soit n un nombre impair $2\alpha + 1$, on aura, en faisant $k = \alpha + 1$,

$$r_\alpha = r_{\alpha+1},$$
$$s_\alpha = s_\alpha \mu^{\pm 1},$$
$$v_\alpha = v_\alpha \mu^{\mp 1},$$
$$u_\alpha = -u_\alpha,$$

donc $\mu = 1$. Donc, si n est un nombre impair, on a

$$s_{n-k} = s_{k-1},$$
$$v_{n-k} = v_{k-1}.$$

On a aussi $u_\alpha = 0$. Donc:

> "Toutes les fois que l'équation $P^2 - Q^2R = 1$ est résoluble en supposant Q une fonction d'un degré impair $2\alpha + 1$, on a $u_\alpha = 0$".

L'inverse a aussi lieu, ce qu'il est aisé de voir.

Lorsque n est un nombre pair 2α, on a

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$$

pour condition de la résolubilité de l'équation $P^2 - Q^2R = 1$. On voit aisément que ces conditions sont bien plus simples que la condition mentionnée plus haut que s_n doit être une quantité constante.

56. Connaissant la valeur de Q_n par l'équation

$$s_n Q_n^2 = (-1)^{n+1},$$

on aura les valeurs de P et Q par les équations suivantes:

$$
\begin{aligned}
Q_{n-1} &= 2v_{n-1}\,Q_n,\\
Q_{n-2} &= 2v_{n-2}\,Q_{n-1} + Q_n,\\
Q_{n-3} &= 2v_{n-3}\,Q_{n-2} + Q_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_1 &= 2v_1\,Q_2 + Q_3,\\
Q &= 2v\,Q_1 + Q_2,\\
P &= rQ + Q_1.
\end{aligned}
$$

La forme de ces équations conduit à exprimer la quantité $\frac{P}{Q}$ par une fraction continue.

En effet il est aisé de voir qu'on a

$$\frac{P}{Q} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cfrac{1}{2v_3 + \cdots + \cfrac{1}{2v_{n-2} + \cfrac{1}{2v_{n-1}}}}}}}.$$

On a donc P et Q en transformant cette fraction en fraction ordinaire.

De cette expression on peut aussi déduire la valeur de $\sqrt{R}$ en fraction continue. En effet, en posant n infini, on a $\frac{P}{Q} = \sqrt{R}$, donc

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cfrac{1}{2v_3 + \cdots}}}}$$

Dans le cas où l'équation $P^2 - Q^2R = 1$ est résoluble, cette fraction prend une forme remarquable, car elle devient dans ce cas périodique; ce dont il est aisé de se convaincre par ce qu'on a vu précédemment.

On voit aussi que si Q est du degré n, les quantités v, v_1, v_2, v_3 etc. sont du premier degré, excepté

$$v_n,\ v_{2n+1},\ v_{3n+2},\ \ldots\ v_{kn-k+1} \text{ etc.},$$

qui sont toutes du second degré. En effet

$$
\begin{aligned}
v_n &= v_{3n+2} = \cdots = v_{(2k+1)n+2k} = \frac{r}{\mu},\\
v_{2n+1} &= v_{4n+3} = \cdots = v_{2kn+2k-1} = r.
\end{aligned}
$$

57. Je vais maintenant déterminer les quantités v_m, u_m, s_m et r_m pour toute valeur de m. Soit pour cela

$$
\begin{aligned}
r_m &= x^2 + ax + b_m,\\
s_m &= c_m + p_m x,\\
v_m &= (g_m + x)\,\frac{1}{p_m}\cdot
\end{aligned}
$$

a est le même pour toute valeur de m, ce qu'il est aisé de voir. En substituant ces valeurs de r_m, s_m, et v_m dans les équations (1), (2) et (3), on aura

$$
\begin{aligned}
c_m + p_m x &= c_{m-2} + p_{m-2}x + 4u_{m-1}(x + g_{m-1})\,\frac{1}{p_{m-1}},\\
x^2 + ax + b_m &= x^2 + ax + b_{m-1} - 2u_{m-1},\\
x^2 + ax + b_m &= (c_m + p_m x)(g_m + x)\,\frac{1}{p_m} + u_m.
\end{aligned}
$$

De ces équations on tire sans peine

$$
\begin{aligned}
c_m &= c_{m-2} + 4\,\frac{u_{m-1}g_{m-1}}{p_{m-1}},\\
p_m &= p_{m-2} + 4\,\frac{u_{m-1}}{p_{m-1}},\\
b_m &= b_{m-1} - 2u_{m-1},\\
g_m &= a - \frac{c_m}{p_m},\\
u_m &= b_m - \frac{c_m g_m}{p_m},\\
b_m &= -b_{m-1} + 2\,\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)\cdot
\end{aligned}
$$

Au moyen de ces équations on peut successivement déterminer toutes les quantités

$$c_m,\ u_m,\ g_m,\ p_m \text{ et } b_m;$$

mais en les combinant avec l'équation (4) on les déterminera de la plus simple manière. Cette équation donne

$$(c_{m-1} + p_{m-1}x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax + b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px,$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
c_{m-1}\cdot c_m &= c + b^2 - b_m^2,\\
p_{m-1}\cdot p_m &= 2(b - b_m),\\
c_{m-1}\cdot p_m + c_m\cdot p_{m-1} &= p + 2a(b - b_m);
\end{aligned}
$$

en multipliant la dernière équation par $c_{m-1}p_{m-1}$, on aura

$$c_{m-1}^2 p_m p_{m-1} + p_{m-1}^2 c_m c_{m-1} = [p + 2a(b - b_m)]\, c_{m-1} p_{m-1};$$

en substituant dans cette équation la valeur de $p_m p_{m-1}$ et de $c_m c_{m-1}$, il vient

$$2c_{m-1}^2 (b - b_m) + p_{m-1}^2 (c + b^2 - b_m^2) = [p + 2a(b - b_m)]\, c_{m-1}\, p_{m-1},$$

et en divisant par p_{m-1}^2,

$$2\frac{c_{m-1}^2}{p_{m-1}^2}(b - b_m) + c + b^2 - b_m^2 = [p + 2a(b - b_m)]\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}},$$

c'est-à-dire

$$2\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)(b - b_m) = c + b^2 - b_m^2 - p\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}};$$

mais on a

$$2\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right) = b_m + b_{m-1};$$

donc

$$(b_m + b_{m-1})(b - b_m) = c + b^2 - b_m^2 - p\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}},$$

ou bien

$$p\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = c + b^2 - b\,b_{m-1} - b\,b_m + b_m b_{m-1};$$

d'où

$$p\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = c + (b - b_{m-1})(b - b_m).$$

En substituant cette valeur dans l'équation

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2p\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(ap - p\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right),$$

on obtiendra

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2[c + (b - b_{m-1})(b - b_m)]\,[ap - c - (b - b_{m-1})(b - b_m)].$$

Cette équation donne une relation entre b_m et b_{m-1} et des quantités constantes. On peut donc déterminer b_m par b_{m-1}, et ainsi trouver la valeur de b_m par des substitutions successives; mais comme b_m dans cette équation monte au second degré, il est plus facile de se servir de la methode suivante.

En mettant $m-1$ au lieu de m, on aura

$$p^2(b_{m-1} + b_{m-2}) = 2[c + (b - b_{m-2})(b - b_{m-1})]\,[ap - c - (b - b_{m-2})(b - b_{m-1})],$$

ou en développant

$$p^2(b_{m-1}+b_{m-2}) = 2(ap-2c)(b-b_{m-2})(b-b_{m-1}) + 2c(ap-c) - 2(b-b_{m-2})^2(b-b_{m-1})^2;$$

en retranchant cette équation de celle-ci

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2(ap - 2c)(b - b_m)(b - b_{m-1}) + 2c(ap - c) - 2(b - b_m)^2(b - b_{m-1})^2,$$

on obtiendra

$$p^2(b_m - b_{m-2}) = 2(ap-2c)(b-b_{m-1})(b_{m-2}-b_m) - 2(b-b_{m-1})^2(b_m-b_{m-2})(b_m+b_{m-2}-2b),$$

et en divisant par $b_m - b_{m-2}$,

$$p^2 = -2(ap - 2c)(b - b_{m-1}) - 2(b - b_{m-1})^2(b_m + b_{m-2} - 2b),$$

d'où l'on tire

$$b_m = 2b - b_{m-2} - \frac{(ap - 2c)}{b - b_{m-1}} - \frac{\frac{1}{2}p^2}{(b - b_{m-1})^2}.$$

Voilà l'équation qui détermine b_m.

Si l'on fait $b - b_m = q_m$, on aura

$$q_m = -q_{m-2} + \frac{ap - 2c}{q_{m-1}} + \frac{\frac{1}{2}p^2}{q_{m-1}^2},$$

ou bien

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c)\,q_{m-1} - q_{m-2}\,q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}.$$

58. Avant de donner l'expression explicite de q_m, je vais montrer comment on peut exprimer les quantités u_m, p_m, c_m, et g_m par q_m, q_{m-1} etc.

On a d'abord

$$u_m = \frac{b_m - b_{m+1}}{2} = \tfrac{1}{2}(q_{m+1} - q_m);$$

on a de même

$$\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = \frac{c + q_{m-1}q_m}{p},$$

donc

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m+1}}{p},$$

mais $g_m = a - \dfrac{c_m}{p_m}$, donc

$$g_m = a - \frac{c + q_m q_{m+1}}{p}.$$

On a de plus $p_m p_{m-1} = 2(b - b_m) = 2q_m$, d'où l'on tire

$$p_m = \frac{2q_m}{p_{m-1}} = \frac{2q_m}{2q_{m-1}}\,p_{m-2},$$

donc

$$p_{2\alpha} = \frac{q_{2\alpha}}{q_{2\alpha-1}} \cdot \frac{q_{2\alpha-2}}{q_{2\alpha-3}} \cdot \frac{q_{2\alpha-4}}{q_{2\alpha-5}} \cdots \frac{q_2}{q_1} \cdot p,$$

$$p_{2\alpha+1} = 2\,\frac{q_{2\alpha+1}}{q_{2\alpha}} \cdot \frac{q_{2\alpha-1}}{q_{2\alpha-2}} \cdot \frac{q_{2\alpha-3}}{q_{2\alpha-4}} \cdots \frac{q_3}{q_2} \cdot \frac{q_1}{p}.$$

Ayant p_m on a aussi c_m, car

$$c_m = (c + q_m q_{m-1}) \frac{p_m}{p}.$$

Reprenons maintenant l'équation

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 + (ap - 2c) q_{m-1} - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}.$$

On peut par cette équation déterminer q_m, si l'on connaît q et q_1. Cherchons donc d'abord ces quantités. On a $q_m = b - b_m$, donc $q = b - b = 0$, et $q_1 = b - b_1$. Maintenant on a

$$b_m = -b_{m-1} + 2 \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} \left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right),$$

donc en faisant $m = 1$,

$$b_1 = -b + 2 \frac{c}{p} \left(a - \frac{c}{p}\right);$$

donc

$$q_1 = 2\left[b - a\frac{c}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2\right] = 2\,\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}.$$

Déterminons maintenant q_m. On voit que q_m est une fonction rationnelle fractionnaire de a, b, c et p. Soit donc

$$q_m = \frac{y_m}{z_m},$$

y_m et z_m étant deux fonctions entières des quantités a, b, c et p. En substituant cette valeur on aura

$$\frac{y_m}{z_m} = \frac{\frac{1}{2} p^2 z_{m-2} z_{m-1}^2 + (ap - 2c) y_{m-1} z_{m-2} z_{m-1} - y_{m-2} y_{m-1}^2}{y_{m-1}^2 z_{m-2}}.$$

Donc on aura

$$z_m = z_{m-2} y_{m-1}^2$$
$$y_m = \tfrac{1}{2} p^2 z_{m-2} z_{m-1}^2 + (ap - 2c) y_{m-1} z_{m-1} z_{m-2} - y_{m-2} y_{m-1}^2.$$

Au moyen de ces équations on déterminera sans peine z_m et y_m par des substitutions successives. De la première équation on tire

$$z_m^2 = y_{m-1}^2\, y_{m-3}^2\, y_{m-5}^2 \cdots y_{m-2k+1}^2\, z_{m-2k},$$

donc

$$z_{2a} = y_{2a-1}^2 y_{2a-3}^2 y_{2a-5}^2 \cdots y_3^2 \cdot y_1^2,$$
$$z_{2a+1} = y_{2a}^2\, y_{2a-2}^2\, y_{2a-4}^2 \cdots y_2^2 \cdot z_1,$$

deux équations qui donnent z_m en fonction de $y_2, y_3, \ldots y_{m-1}$.

Développons les valeurs de quelques-unes des quantités z, z_1, z_2, etc. y, y_1, y_2 etc. En faisant $m = 2$, 3 etc., on aura

$$z_2 = y_1^2,$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2} p^2 z_1^2 + (ap - 2c) y_1 z_1,$$
$$z_2 = 4(bp^2 - acp + c^2)^2,$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2} p^6 + 2(ap - 2c) p^2 (bp^2 - acp + c^2),$$
$$z_3 = z_1 y_2^2 = p^2 y_2^2,$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2} p^2 z_1 z_2^2 + (ap - 2c) y_2 z_1 z_2 - y_1 y_2^2,$$

etc.

Lorsque $c = 0$ ces valeurs se simplifient beaucoup, et on aura alors

$$b_1 = -b,$$
$$q_1 = 2b = \frac{y_1}{z_1},$$
$$z_2 = y_1^2 = 4b^2,$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2} p^2 + 2abp = \tfrac{1}{2} p (p + 4ab),$$
$$z_3 = y_2^2 = \tfrac{1}{4} p^2 (p + 4ab)^2,$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2} p^2 z_2^2 + apy_2 z_2 - 2by_2^2,$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2} bp^2 [16b^3 - p(p + 4ab)],$$
$$z_4 = z_2 y_3^2 = b^4 p^4 [16b^3 - p(p + 4ab)]^2,$$
$$y_4 = \tfrac{1}{2} p^2 z_2 z_3^2 + apy_3 z_3 z_2 - y_2 y_3^2,$$
$$y_4 = 4b^5 p^5 (p + 4ab)[(p + 2ab)(p + 4ab) - 8b^3],$$

etc.

Au lieu de faire $c = 0$, supposons maintenant $ap - 2c = 0$, on aura

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}.$$

Si l'on fait $m = 2$, 3, 4 etc. on aura

$$q_2 = \frac{\frac{1}{2} p^2}{q_1^2},$$
$$q_3 = \frac{\frac{1}{2} p^2 - q_1 q_2^2}{q_2^2} = \frac{\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4} \frac{p^4}{q_1^4} q_1}{\frac{\frac{1}{4} p^4}{q_1^4}},$$
$$q_3 = \frac{2q_1^4 - q_1 p^2}{p^2} = q_1 \frac{2q_1^3 - p^2}{p^2},$$
$$q_4 = \frac{\frac{1}{2} p^2 - q_2 q_3^2}{q_3^2} = \frac{p^2 [p^4 - (2q_1^3 - p^2)^2]}{2q_1^2 (2q_1^3 - p^2)^2},$$

$$q_4 = \frac{2p^2 q_1 (p^2 - q_1^2)}{(2q_1^2 - p^2)^2},$$

$$q_5 = \frac{(2q_1^2 - p^2)(4q_1^4 - 2q_1^2 p^2 - p^4)}{8q_1^2 (p^2 - q_1^2)^2}.$$

59. Appliquons maintenant ce qui précède à l'intégrale

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}}.$$

Pour rendre les résultats plus simples, je fais $c=0$, ce qui est permis, comme on le voit aisément. On a

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{2n+4} \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

ou bien, puisque $P^2 - Q^2 R = 1$,

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R}).$$

Pour que cette équation soit possible, il faut avant tout que

$$P^2 - Q^2 R = 1,$$

donc on aura pour condition de l'intégrabilité:

$$s_n = \text{const.}$$

Or on a $s_n = c_n + p_n x_n$. Il faut donc que

$$p_n = 0.$$

Si cette condition est remplie, on peut toujours déterminer k de manière que $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}}$ devienne égale à $\frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$.

Cherchons cette valeur de k. On a vu qu'en faisant

$$P = f + f'x + \cdots,$$

$$Q = e + e'x + \cdots,$$

k est égal à $\frac{1}{n+2} \cdot \frac{f'}{e}$ (n°. 47). Il s'agit donc de trouver $\frac{f'}{e}$. On a

$$P = rQ + Q_1,$$

$$Q = \frac{2}{p}(x+g)\,Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = \frac{2}{p_1}(x+g_1)\,Q_2 + Q_3,$$

. . . .

$$Q_2 = \frac{2}{p_2}(x+g_2)\,Q_3 + Q_4,$$

. . . .

$$Q_{n-1} = \frac{2}{p_{n-1}}(x+g_{n-1})\,Q_n,$$

$$Q_n = \text{const.},$$

d'où l'on tire sans peine

$$e^{(n)} = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3} \cdots \frac{2}{p_{n-1}}\, Q_n,$$

$$e^{(n-1)} = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3} \cdots \frac{2}{p_{n-1}}\,(g+g_1+g_2+\cdots+g_{n-1})\,Q_n;$$

donc

$$\frac{e^{(n-1)}}{e^{(n)}} = g+g_1+g_2+g_3+\cdots+g_{n-1}.$$

Maintenant on a

$$x+k = 2A\,\frac{(n+2)f^{(n+2)}x^{n+1} + (n+1)f^{(n+1)}x^n + \cdots}{e^{(n)}x^n + e^{(n-1)}x^{n-1} + \cdots};$$

donc

$$(x+k)(e^{(n)}x^n + \cdots) = 2A(n+2)f^{(n+2)}x^{n+1} + 2A(n+1)f^{(n+1)}x^n + \cdots,$$

donc

$$e^{(n)}k + e^{(n-1)} = 2A(n+1)f^{(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}f^{(n+1)};$$

or $f^{(n+1)} = e^{(n-1)} + a\,e^{(n)}$ (n° 49), donc

$$e^{(n)}k + e^{(n-1)} = \frac{n+1}{n+2}\,e^{(n-1)} + \frac{n+1}{n+2}\,a\,e^{(n)},$$

donc

$$k = \frac{n+1}{n+2}\,a - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{e^{(n-1)}}{e^{(n)}},$$

et par suite

$$k = \frac{n+1}{n+2}\,a - \frac{1}{n+2}(g+g_1+g_2+\cdots+g_{n-1}).$$

On peut aussi exprimer k d'une autre manière. On a $g_m = a - \frac{c_m}{p_m}$; donc en substituant et remarquant que $c_{n-1} = c = 0$,

$$k = \frac{1}{n+2}\,a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \frac{c_3}{p_3} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{p_{n-2}}\right).$$

60. On a vu que l'équation

$$p_n = 0$$

exprime la condition pour que

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}} = 2A \log (P + Q\sqrt{R}).$$

Cette condition équivaut à celle-ci:

$$q_n = 0,$$

car on a $p_n p_{n-1} = 2q_n$ (n° 57). On a aussi dans le même cas

$$q_{n-k} = q_k.$$

En combinant cela avec ce qu'on a vu précédemment, on en déduira la règle suivante pour trouver toutes les intégrales de la forme

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}}$$

qui puissent s'exprimer par la fonction logarithmique

$$2A \log \left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}\right],$$

savoir:

"On calcule toutes les quantités q_2, q_3, q_4, etc. d'après la formule

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap-2c)\,q_{m-1} - q_{m-2}\,q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2},$$

en supposant $q=0$ et $q_1 = 2\,\dfrac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$. Puis on fait successivement

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0,\ \ldots\ q_n = 0 \text{ etc.},$$

où en général

$$q_{n-k} = q_k,$$

en donnant à n toutes les valeurs possibles. Cela posé, on aura toutes les valeurs que R peut avoir en éliminant une des quantités a, p, b et c par une de ces équations. Ayant trouvé R on a

$$k = \frac{1}{n+2}\,a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c}{p} + \frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}\right),$$

où l'on a

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m+1}}{p}.$$

Faisant ensuite

$$p_{2\alpha} = \frac{q_{2\alpha}}{q_{2\alpha-1}} \cdot \frac{q_{2\alpha-2}}{q_{2\alpha-3}} \cdots \frac{q_2}{q_1} \cdot p,$$

$$p_{2\alpha+1} = 2\,\frac{q_{2\alpha+1}}{q_{2\alpha}} \cdot \frac{q_{2\alpha-1}}{q_{2\alpha-2}} \cdots \frac{q_3}{q_2} \cdot \frac{q_1}{p},$$

$$g_m = a - \frac{c + q_m q_{m+1}}{p},$$

on aura les valeurs de P et de Q en transformant la fraction continue

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + b + \cfrac{1}{2\,\frac{x+g}{p} + \cfrac{1}{2\,\frac{x+g_1}{p_1} + \cdots + \cfrac{1}{2\,\frac{x+g_{n-2}}{p_{n-2}} + \cfrac{1}{2\,\frac{x+g_{n-1}}{p_{n-1}}}}}}$$

en fraction ordinaire, savoir en supposant $q_{n-k} = q_k$. Ces valeurs trouvées, on a enfin

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}} = \frac{1}{n+2} \log \left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}\right]."$$

La résolution du problème dépend donc du calcul des quantités q_1, q_2, q_3, q_4, etc. Les valeurs de z_1, y_1, z_2, y_2, z_3, y_3, etc. trouvées dans le numéro 58, donnent immédiatement, dans la supposition de $c=0$, quelques-unes de ces quantités. Les voici

$$q = 0,$$

$$q_1 = 2b,$$

$$q_2 = \frac{p(p+4ab)}{8b^2},$$

$$q_3 = \frac{2b(16b^3 - p(p+4ab))}{(p+4ab)^2},$$

$$q_4 = \frac{4bp(p+4ab)(p^2+6abp+8a^2b^2-8b^3)}{(16b^3 - p(p+4ab))^2}.$$

61. Prenons maintenant quelques exemples.

1. Soit $n=1$. Dans ce cas on a $q_1=0$; c'est-à-dire $b=0$; donc

$$k = \tfrac{1}{3}a,\ g = a.$$

On a par là

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + \cfrac{1}{2\,\frac{x+a}{p}} = \frac{(x+a)^2x + \frac{1}{2}p}{x+a};$$

$$P = (x+a)^2 x + \tfrac{1}{2}p,\quad Q = x + a;$$

donc enfin

$$\int \frac{(x+\frac{1}{3}a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax)^2+px}} = \tfrac{1}{3}\log\left[(x+a)^2x + \tfrac{1}{2}p + (x+a)\sqrt{(x^2+ax)^2+px}\right].$$

2. Soit $n=2$. On a $q_2=0$; donc $p=-4ab$, $k=\frac{1}{4}a$; on aura donc

$$\int\frac{(x+\frac{1}{4}a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}=\tfrac{1}{4}\log(P+Q\sqrt{R}).$$

3. Soit $n=3$. On a $q_3=0$, donc $p^2+4abp=16b^3$, d'où l'on tire

$$p=-2b(a\pm\sqrt{a^2+4b}),$$

$$k=\tfrac{1}{5}a+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{c_1}{p_1},$$

$$\frac{c_1}{p_1}=\frac{q_1q_2}{p}=\frac{q_1^2}{p}=\frac{4b^2}{p}=\tfrac{1}{2}(a\mp\sqrt{a^2+4b});$$

donc

$$k=\tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2}a\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}).$$

On aura donc

$$\int\frac{[x+\frac{1}{10}(3a-\sqrt{a^2+4b})]\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-2b(a+\sqrt{a^2+4a})x}}=\tfrac{1}{5}\log(P+Q\sqrt{R}).$$

Nous avons supposé dans ces exemples $c=0$, mais il est clair qu'on obtiendra les intégrales les plus générales en mettant $x+\alpha$ au lieu de x, α étant une quantité indéterminée.

Problème IV.

Trouver toutes les intégrales de la forme $\int\frac{x+k}{x+l}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$ *qui peuvent s'exprimer par la fonction logarithmique* $A\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

---

62. Ce problème est dans le fond un cas particulier du problème II, mais comme sa résolution est très importante dans la théorie des fonctions elliptiques, je veux en donner une autre au moyen du problème précédent. Soit

$$\int\frac{(y+k')\,dy}{\sqrt{R'}}=A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}$$

l'intégrale la plus générale de cette forme qu'on puisse exprimer par l'expression

$$A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}.$$

En substituant $\frac{1}{x+l}$ au lieu de y, on aura

$$y+k'=k'+\frac{1}{x+l}=\frac{k'x+k'l+1}{x+l}=\frac{k'\left(x+l+\frac{1}{k'}\right)}{x+l}=\frac{k'(x+k)}{x+l},$$

en faisant $k=l+\frac{1}{k'}$. On a de même $dy=-\frac{dx}{(x+l)^2}$. Soit

$$R'=(y^2+ay+b)^2+c+py,$$

on aura

$$R'=\left(\frac{1}{(x+l)^2}+\frac{a}{x+l}+b\right)^2+c+\frac{p}{x+l},$$

$$R'=\frac{[1+a(x+l)+b(x+l)^2]^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4}{(x+l)^4};$$

donc

$$\sqrt{R'}=\frac{\sqrt{[1+a(x+l)+b(x+l)^2]^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4}}{(x+l)^2}=\frac{\sqrt{R}}{(x+l)^2}.$$

Désignons par $\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$ ce que deviendra $\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}$ en substituant $\frac{1}{x+l}$ au lieu de y, on aura

$$-k'\int\frac{(x+k)\,dx}{(x+l)\sqrt{R}}=A'.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

ou, en faisant $-\frac{A'}{k'}=A$,

$$\int\frac{x+k}{x+l}:\frac{dx}{\sqrt{R}}=A\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}.$$

Cette intégrale est maintenant l'intégrale cherchée la plus générale, ce qu'il est aisé de voir.

Il faut maintenant déterminer l. On a

$$R=[1+(x+l)a+(x+l)^2b]^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4,$$

c'est-à-dire

$$R=1+2a(x+l)+(a^2+2b)(x+l)^2+(2ab+p)(x+l)^3+(b^2+c)(x+l)^4,$$

ou

$$R=(b^2+c)(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha),$$

où

$$\delta = [4(b^2+c)l + 2ab + p] : (b^2+c),$$
$$\gamma = [6(b^2+c)l^2 + 3(2ab+p)l + a^2 + 2b] : (b^2+c),$$
$$\beta = [4(b^2+c)l^3 + 3(2ab+p)l^2 + 2(a^2+2b)l + 2a] : (b^2+c),$$
$$\alpha = [(b^2+c)l^4 + (2ab+p)l^3 + (a^2+2b)l^2 + 2al + 1] : (b^2+c).$$

De ces équations on tire

$$2ab + p = (b^2+c)(\delta - 4l),$$
$$a^2 + 2b = (b^2+c)(\gamma - 3\delta l + 6l^2),$$
$$2a = (b^2+c)(\beta - 2\gamma l + 3\delta l^2 - 4l^3),$$
$$1 = (b^2+c)(\alpha - \beta l + \gamma l^2 - \delta l^3 + l^4);$$

d'où, en faisant

$$\alpha' = \alpha - \beta l + \gamma l^2 - \delta l^3 + l^4,$$
$$\beta' = \beta - 2\gamma l + 3\delta l^2 - 4l^3,$$
$$\gamma' = \gamma - 3\delta l + 6l^2,$$
$$\delta' = \delta - 4l,$$

on tire

$$a = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'},$$
$$b = -\tfrac{1}{8} \cdot \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\gamma'}{\alpha'},$$
$$c = \frac{1}{\alpha'} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \tfrac{1}{4}\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)^2,$$
$$p = \frac{\delta'}{\alpha'} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \tfrac{1}{4}\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right).$$

En substituant maintenant ces valeurs de a, b, c et p dans l'équation qui exprime la relation qui a lieu entre ces quantités, on aura une équation entre l, α, β, γ et δ, d'où l'on tirera la valeur de l. On aura donc enfin

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{(x+l)\sqrt{x^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha}} = A\sqrt{b^2+c} \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

De cette équation on tire ensuite

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + (k-l)\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A\sqrt{b^2+c} \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = \frac{1}{l-k}\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{A\sqrt{b^2+c}}{l-k} \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

et de cette manière on obtiendra toutes les intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}}$$

qui peuvent être exprimées par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et la fonction logarithmique $A \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$.

En mettant $-l$ au lieu de l, on aura

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{l+k} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{A\sqrt{b^2+c^2}}{l+k} \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

ou bien (n° 44),

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{l+k} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\alpha + \beta l + \gamma l^2 + \delta l^3 + l^4}} \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

Si l'on suppose $k + l = \frac{1}{k'} = \infty$, ou $k' = 0$, on aura

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{(2n+4)\sqrt{\alpha + \beta l + \gamma l^2 + \delta l^3 + l^4}} \,.\, \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

Prenons un exemple. On a (n° 51)

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - \alpha'(x-1)}} = \tfrac{1}{6} \,.\, \log \frac{P' + Q'\sqrt{R'}}{P' - Q'\sqrt{R'}}.$$

Soit $x = \frac{1}{y-l}$, on aura

$$x\,dx = -\frac{dy}{(y-l)^3},$$
$$R = \frac{1 + 2(y-l) - 3(y-l)^2 - \alpha'(y-l)^3 + \alpha'(y-l)^4}{(y-l)^4},$$

donc

$$R = \frac{(y^4 + \delta y^3 + \gamma y^2 + \beta y + \alpha)}{(y-l)^4} \,.\, \alpha',$$

d'où l'on tire

$$\delta = -1 - 4l,$$
$$\gamma = (-3 + 3\alpha' l + 6\alpha' l^2) : \alpha',$$
$$\beta = (2 + 6l - 3\alpha' l^2 - 4\alpha' l^3) : \alpha',$$
$$\alpha = (1 - 2l - 3l^2 + \alpha' l^3 + \alpha' l^4) : \alpha';$$

donc

$$l = -\frac{1+\delta}{4}, \quad \alpha' = \frac{3}{6l^2 + 3l - \gamma}, \quad \text{etc.}$$

En faisant $l = 0$, on aura

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 2x - 3x^2 - \alpha'(x^3 - x^4)}} = -\tfrac{1}{6} . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}},$$

or

$$P' = x^3 + 3x^2 - 2 - \frac{\alpha}{2}, \quad Q' = x + 2;$$

donc

$$P = 1 + 3x - \left(2 + \frac{\alpha}{2}\right)x^3, \quad Q = 1 + 2x.$$

Dans le troisième problème j'ai donné une méthode pour trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent être exprimées par la fonction logarithmique $A . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$. Dans la suite de la théorie des transcendantes elliptiques je montrerai comment on peut trouver une infinité d'autres intégrales de la même forme, intégrables par d'autres fonctions logarithmiques, qui sont toutes composées de termes de la forme $A . \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$, comme nous l'avons vu à la tête de ce chapitre.

CHAPITRE III.

Sur une relation remarquable qui existe entre plusieurs intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

---

63. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est en général impossible d'exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ par les intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$; néanmoins si l'on prend cette intégrale entre des limites convenables

il est toujours possible d'exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ par les trois intégrales ci-dessus. Ces limites sont, comme on le verra, les valeurs de x qui rendent $R = 0$. Soit

$$p = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

En différentiant p par rapport à a, on aura

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}.$$

Maintenant on a vu dans le premier chapitre que $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ est toujours réductible à l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. En effet on a (n° 14)

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} = \frac{1}{fa} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}}(A + Bx + Cx^2) - \tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$- \frac{\sqrt{R}}{(x-a)fa} + \text{const.},$$

où

$$A = -\varepsilon a^2 - \tfrac{1}{2}\delta a, \quad B = \tfrac{1}{2}\delta, \quad C = \varepsilon, \quad R = fx.$$

Donc en substituant pour $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ leurs valeurs, p et $\frac{dp}{da}$, et prenant les intégrales de manière qu'elles s'évanouissent lorsque $x = r$, r étant une valeur de x qui rend $R = fx = 0$, on aura

$$\frac{dp}{da} + \tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa}p = \frac{\sqrt{fx}}{(a-x)fa} + \frac{1}{fa}\int \frac{dx}{\sqrt{fx}}(A + Bx + Cx^2).$$

Cette équation devient intégrable en la multipliant par $\sqrt{fa} . da$; car on a alors

$$\sqrt{fa} . dp + p . d\sqrt{fa} = \sqrt{fx}\,\frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}} + \frac{da}{\sqrt{fa}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{fx}}(A + Bx + Cx^2).$$

En intégrant on aura

$$p\sqrt{fa} - \sqrt{fx}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}} = \int \frac{da}{\sqrt{fa}}\int \frac{dx}{\sqrt{fx}}(A + Bx + Cx^2) + \text{const.}$$

Si l'on prend l'intégrale de $a = r$, on a: const. $= 0$, en remarquant que

$$A + Bx + Cx^2 = \tfrac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2 - (\tfrac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2).$$

Maintenant on a

$$\int\frac{da}{\sqrt{fa}}\int\frac{dx}{\sqrt{fx}}\left(\tfrac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2-\tfrac{1}{2}\,\delta a-\varepsilon a^2\right)$$

$$=\int\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}-\int\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.$$

Donc en substituant cette valeur et remettant la valeur de p, on aura l'équation suivante:

$$(\alpha)\qquad\left\{\begin{aligned}&\sqrt{fa}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}-\sqrt{fx}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}\\&=\int\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{fx}}-\int\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation donne la différence entre les deux intégrales $\sqrt{fa}\,.\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ et $\sqrt{fx}\,.\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ exprimée par des intégrales de la forme $\int\frac{dy}{\sqrt{fy}}$ et $\int\frac{(\frac{1}{2}\,\delta y+\varepsilon y^2)\,dy}{\sqrt{fy}}$, ce qui est très remarquable.

Supposons maintenant qu'on prenne l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ de $x=r$ à $x=r'$, r' étant une autre valeur qui rend $fx=0$. On a dans ce cas

$$(\beta)\qquad\sqrt{fa}\int_r^{r'}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}=\int_r\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{fa}}.$$

Cette équation montre qu'on peut exprimer l'intégrale définie $\int_r^{r'}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ par des intégrales de la forme $\int\frac{dy}{\sqrt{fy}}$ et $\int\frac{(\frac{1}{2}\delta y+\varepsilon y^2)dy}{\sqrt{fy}}$, ce qui est très important dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Soit r'' une troisième valeur qui rend $fx=0$, et supposons $a=r''$, on aura $fa=0$, et

$$(\gamma)\qquad\int_r^{r''}\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}=\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r^{r''}\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}},$$

équation qui exprime une relation entre quatre intégrales définies.

Supposons, dans l'équation (α), que x ait une valeur telle que l'intégrale $\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ puisse être exprimée par des intégrales de la forme $\int\frac{da}{\sqrt{fa}}$ et $\int\frac{a\,da}{\sqrt{fa}}$, et soit

$$\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}=\int\frac{(A+Ba)\,da}{\sqrt{fa}}+w,$$

w étant une fonction logarithmique.

En substituant cette valeur, on aura

$$\sqrt{fa}\int_r^{\omega}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}=\sqrt{f\omega}\int_r\frac{(A+Ba)\,.\,da}{\sqrt{fa}}+\sqrt{f\omega}\,.\,w$$

$$+\int_r\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^{\omega}\frac{(\frac{1}{2}\,\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r\frac{(\frac{1}{2}\,\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}.$$

Les intégrales sont prises depuis $x=r$ jusqu'à $x=\omega$, ω étant une valeur telle que

$$\int\frac{da}{(a-\omega)\sqrt{fa}}=\int\frac{(A+Ba)\,da}{\sqrt{fa}}+w.$$

Supposons de plus qu'on assigne à a une valeur $a=\omega'$ qui donne

$$\int\frac{dx}{(x-\omega')\sqrt{fx}}=\int\frac{(A'+B'x)\,dx}{\sqrt{fx}}+w',$$

w' étant une fonction logarithmique, on aura

$$w'\sqrt{f\omega'}-w\sqrt{f\omega}=\sqrt{f\omega}\int_r^{\omega'}\frac{(A+Ba)\,da}{\sqrt{fa}}-\sqrt{f\omega'}\int_r^{\omega}\frac{(A'+B'x)\,dx}{\sqrt{fx}}$$

$$+\int_r^{\omega'}\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^{\omega}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r^{\omega'}\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{fa}}.$$

64. On peut trouver une relation encore plus générale entre plusieurs intégrales définies de la manière suivante.

Soit s une fonction logarithmique quelconque de la forme

$$A\,.\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}+A'.\log\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}+\cdots.$$

En prenant la différentielle de cette expression on a, suivant ce qu'on a vu précédemment, un résultat de la forme:

$$ds=\frac{dx}{\sqrt{R}}\left(B+Cx+\frac{L}{x-a}+\frac{L'}{x-a'}+\frac{L''}{x-a''}+\cdots\right),$$

donc en intégrant

$$s=\int\frac{B+Cx}{\sqrt{R}}\,dx+L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+L'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\cdots.$$

Prenant ensuite l'intégrale depuis $x=r$ jusqu'à $x=r'$, on a

$$\begin{aligned} s'-s=&\int_r^{r'}\frac{(B+Cx)\,dx}{\sqrt{fx}} \\ &+\frac{L}{\sqrt{fa}}\left(\int_r\frac{da}{\sqrt{fa}}\cdot\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}\right) \\ &+\frac{L'}{\sqrt{fa'}}\left(\int_r\frac{da'}{\sqrt{fa'}}\cdot\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\cdot\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a'+\varepsilon a'^2)\,da'}{\sqrt{fa'}}\right) \\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} s'-s=&\int_r^{r'}\frac{(B+Cx)\,dx}{\sqrt{fx}} \\ &-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{fx}}\left(\frac{L}{\sqrt{fa}}\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)\,da}{\sqrt{fa}}+\frac{L'}{\sqrt{fa'}}\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a'+\varepsilon a'^2)\,da'}{\sqrt{fa'}}+\dots\right) \\ &+\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}\left(\frac{L}{\sqrt{fa}}\int_r\frac{da}{\sqrt{fa}}+\frac{L'}{\sqrt{fa'}}\int_r\frac{da'}{\sqrt{fa'}}+\dots\right). \end{aligned}$$

Toutes les intégrales qui se trouvent dans cette formule, sont, comme on le voit, de la forme

$$\int\frac{dy}{\sqrt{fy}},\quad\int\frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}\quad\text{et}\quad\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{fy}},$$

et l'équation exprime par conséquent une relation très générale entre un système d'intégrales de cette forme.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ *à la forme*

$$\int\frac{f(\sin^2\varphi)\,.\,d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{f(\sin^2\varphi)\,.\,d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$

aux intégrales $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$, $\int d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}$ *et* $\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$.

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Comparaison des transcendantes elliptiques.

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Évaluation des transcendantes elliptiques par approximation.

Voyez *Legendre* Exercices de calc. int.

Réduction des transcendantes elliptiques de troisième espèce par rapport au paramètre.

Considérons l'expression

$$\text{arc tang}\,\frac{P\sqrt{R}}{Q}=s;$$

en la différentiant, on aura

$$ds=\frac{d\left(\frac{P\sqrt{R}}{Q}\right)}{1+\frac{P^2R}{Q^2}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{P}{Q}\cdot\frac{dR}{\sqrt{R}}+\frac{R(Q\,dP-P\,dQ)}{Q^2\sqrt{R}}}{1+\frac{P^2R}{Q^2}},$$

ou bien

$$ds=\frac{\frac{1}{2}PQ\frac{dR}{dx}+R\left(Q\frac{dP}{dx}-P\frac{dQ}{dx}\right)}{Q^2+P^2R}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{M}{N}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Soit

$$N=Q^2+P^2R=k(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2,$$
$$P=1,\ \text{et}\ Q=x(a+bx^2).$$

En substituant on aura

$$x^2(a+bx^2)^2+(1-x^2)(1-c^2x^2)=k(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2.$$

En faisant $x=1$ et $x=\frac{1}{c}$, on aura

$$(a+b)^2=k(1+n)(1+n_1)^2,$$

$$\frac{1}{c^2}\left(a+\frac{b}{c^2}\right)^2=k\left(1+\frac{n}{c^2}\right)\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$a+b=(1+n_1)\sqrt{1+n}.\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{c}\left(a+\frac{b}{c^2}\right)=\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}}.\sqrt{k};$$

donc

$$b\left(1-\frac{1}{c^2}\right)=\left[(1+n_1)\sqrt{1+n}-c\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}}\right]\sqrt{k},$$

$$a\left(1-\frac{1}{c^2}\right)=\left[c\left(1+\frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}}-\frac{1}{c^2}(1+n_1)\sqrt{1+n}\right]\sqrt{k}.$$

On a de même

$$b^2=knn_1^2,$$

$$b=n_1\sqrt{n}\sqrt{k}.$$

En substituant cette valeur, on a

$$-n_1\sqrt{n}\left(\frac{1-c^2}{c^2}\right)=(1+n_1)\sqrt{1+n}-\frac{1}{c^2}(c^2+n_1)\sqrt{c^2+n},$$

ou

$$n_1\left(-(1-c^2)\sqrt{n}-c^2\sqrt{1+n}+\sqrt{c^2+n}\right)=c^2\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{c^2+n}\right);$$

donc

$$n_1=\frac{c^2(\sqrt{1+n}-\sqrt{c^2+n})}{-(1-c^2)\sqrt{n}-c^2\sqrt{1+n}+\sqrt{c^2+n}},$$

ou bien, en multipliant en haut et en bas par $\sqrt{1+n}+\sqrt{c^2+n}$, et en réduisant,

$$n_1=\frac{c^2}{n-\sqrt{n}.\sqrt{n+1}+\sqrt{(1+n)(c^2+n)}-\sqrt{n(c^2+n)}},$$

c'est-à-dire

$$n_1=\frac{c^2}{(\sqrt{n}-\sqrt{1+n})(\sqrt{n}-\sqrt{c^2+n})};$$

et en multipliant en haut et en bas par $(\sqrt{n}+\sqrt{1+n})(\sqrt{n}+\sqrt{c^2+n})$,

on aura

$$n_1=(\sqrt{1+n}+\sqrt{n})(\sqrt{c^2+n}+\sqrt{n}),$$

ou enfin

$$n_1=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{c^2}{n}}+1\right).$$

On a

$$k=1,\ b=n_1\sqrt{n},\ a=(1+n_1)\sqrt{1+n}-n_1\sqrt{n}.$$

On trouvera de même

$$a=\frac{1}{c^2}\left((c^2+n_1)\sqrt{c^2+n}-n_1\sqrt{n}\right).$$

Cherchons maintenant la valeur de M.

On a

$$Q^2+R=(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2;$$

donc en différentiant

$$2Q\,dQ+dR=2(1+n_1x^2)[(1+nx^2)2n_1x+(1+n_1x^2)nx]dx,$$

d'où

$$2Q\frac{dQ}{dx}+\frac{dR}{dx}=2(1+n_1x^2)(2n_1+n+3nn_1x^2)x.$$

En multipliant par Q et substituant pour Q^2 sa valeur $(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2-R$, on obtiendra

$$2(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2\frac{dQ}{dx}-2R\frac{dQ}{dx}+Q\frac{dR}{dx}=2Q(1+n_1x^2)(2n_1+n+3nn_1x^2)x.$$

Maintenant on a

$$M=\tfrac{1}{2}Q\frac{dR}{dx}-R\frac{dQ}{dx};$$

donc

$$M=(1+n_1x^2)\left((2n_1+n+3nn_1x^2)xQ-(1+nx^2)(1+n_1x^2)\frac{dQ}{dx}\right).$$

Or $Q=ax+bx^3$, donc $\frac{dQ}{dx}=a+3bx^2$. On tire de là

$$M=(1+n_1x^2)[(2nn_1a-(n_1+2n)b)x^4+(n_1a-3b)x^2-a].$$

Donc

$$\frac{M}{N}=\frac{[2nn_1a-(n_1+2n)b]x^4+(n_1a-3b)x^2-a}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)},$$

$$=A+\frac{L}{1+nx^2}+\frac{L'}{1+n_1x^2},$$

où

$$A = 2a - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right) b,$$

$$L = \frac{b}{n} - a = \frac{n_1}{\sqrt{n}} - a,$$

$$L' = \frac{2b}{n_1} - 2a = 2\sqrt{n} - 2a.$$

On aura par conséquent

$$\text{arc tg.}\,\frac{\sqrt{R}}{Q} = \left[2a - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right) b\right] F + \left(\frac{n_1}{\sqrt{n}} - a\right) \Pi(n) + (2\sqrt{n} - 2a)\,\Pi(n_1);$$

donc

$$\Pi(n) = \frac{\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\text{arc tg.}\,\frac{\sqrt{R}}{Q} - \frac{2a - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right) b}{\frac{n_1}{\sqrt{n}} - a} F + \frac{(2a - 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\Pi(n_1).$$

On trouvera

$$\frac{2a - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n}\right) b}{\frac{n_1}{\sqrt{n}} - a} = \frac{2a\sqrt{n} - (2n + n_1)}{n_1 - a\sqrt{n}} = -\frac{(\sqrt{c^2+n} - \sqrt{n})(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})}{\sqrt{1+n}\cdot\sqrt{c^2+n}}.$$

Donc on aura

$$\Pi(n) = \frac{\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\text{arc tg.}\,\frac{\sqrt{R}}{ax+bx^3} + \frac{2a\sqrt{n} - (2n+n_1)}{n_1 - a\sqrt{n}} F + \frac{(2a - 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}}\,\Pi(n_1) + C,$$

où

$$n_1 = \pm(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} \pm \sqrt{n}) = f(n),$$

$$b = \pm n_1\sqrt{n} = f(n)\sqrt{n},$$

$$a = (n_1 + 1)\sqrt{n+1} \mp n_1\sqrt{n} = \chi(n).$$

Ou bien, en faisant pour abréger

$$\frac{\pm\sqrt{n}}{n_1 \mp a\sqrt{n}} = \alpha = \varphi(n),$$

$$-\frac{\pm 2a\sqrt{n} - 2n - n_1}{n_1 \mp a\sqrt{n}} = \beta = \theta(n),$$

$$\frac{\pm(2a \mp 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 \mp a\sqrt{n}} = \gamma = \psi(n) \quad \text{et} \quad C = -\frac{\alpha\pi}{2},$$

on obtiendra

$$\Pi(n) = \beta F + \gamma \Pi(n_1) + \alpha.\,\text{arc tang}\,\frac{ax + bx^3}{\sqrt{R}}.$$

Soit maintenant

$$n_2 = f(n_1),\quad b_1 = \sqrt{n_1}.f(n_1),\quad a_1 = \chi(n_1),$$
$$\alpha_1 = \varphi(n_1),\quad \beta_1 = \theta(n_1),\qquad \gamma_1 = \psi(n_1),$$

on aura de la même manière

$$\Pi(n_1) = \beta_1 F + \gamma_1 \Pi(n_2) + \alpha_1\,\text{arc tang}\,\frac{a_1 x + b_1 x^3}{\sqrt{R}}.$$

En dérivant les quantités n_3 α_2, β_2, γ_2, a_2, b_2 de la même manière, on aura

$$\Pi(n_2) = \beta_2 F + \gamma_2 \Pi(n_3) + \alpha_2\,\text{arc tang}\,\frac{a_2 x + b_2 x^3}{\sqrt{R}},$$

et ainsi de suite.

En faisant des substitutions successives, on aura donc

$$\begin{aligned}\Pi(n) = {} & (\beta + \beta_1\gamma + \beta_2\gamma\gamma_1 + \beta_3\gamma\gamma_1\gamma_2 + \cdots + \beta_{m-1}\gamma\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{m-2}) F \\ & + \gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_{m-1}.\,\Pi(n_m) + \alpha.\,\text{arc tang}\,\frac{(a+bx^2)x}{\sqrt{R}} \\ & + \alpha_1\gamma.\,\text{arc tang}\,\frac{(a_1+b_1x^2)x}{\sqrt{R}} \\ & + \alpha_2\gamma\gamma_1.\,\text{arc tang}\,\frac{(a_2+b_2x^2)x}{\sqrt{R}} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \alpha_{m-1}\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots\gamma_{m-2}.\,\text{arc tang}\,\frac{(a_{m-1}+b_{m-1}x^2)x}{\sqrt{R}}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la loi que suivent les quantités n, n_1, n_2 etc.; n_1 a les quatre valeurs suivantes:

1) $n_1 = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} + \sqrt{n})$,
2) $n_1 = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} - \sqrt{n})$,
3) $n_1 = -(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} - \sqrt{n})$,
4) $n_1 = -(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} + \sqrt{n})$.

Soit d'abord

$$n_1 = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} + \sqrt{n});$$

on voit aisément que $n_1 > 4n$, car comme $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+c^2} > \sqrt{n}$, on a

$$n_1 > (\sqrt{n} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n}),$$

c'est-à-dire

$$n_1 > 4n;$$

de même

$$n_2 > 4n_1 > 4^2 n,$$
$$n_3 > 4n_2 > 4^3 n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_m > 4n_{m-1} > 4^m n.$$

On peut donc faire en sorte que n_m devienne aussi grand qu'on le voudra. D'où il suit qu'on peut exprimer la fonction $\Pi(n)$ par la fonction $\Pi(n_m)$ dans laquelle n_m est plus grand qu'un nombre donné quelconque.

Considérons maintenant les quantités a, b, α, β etc. On a $b = n_1\sqrt{n}$; b est donc positif et très grand, si n est grand. La valeur de a est

$$a = (n_1 + 1)\sqrt{n+1} - n_1\sqrt{n},$$

d'où l'on voit sans difficulté que a croît en même temps que n, et que par suite les quantités a, a_1, a_2, etc. vont en croissant.

On a de même

$$\alpha_{m-1} = \frac{\sqrt{n_{m-1}}}{n_m - a_{m-1}\sqrt{n_{m-1}}}.$$

En substituant les valeurs de n_m et de a_{m-1} en n_{m-1}, on verra que α_{m-1} est une très petite quantité de l'ordre $\dfrac{1}{\sqrt{n_{m-1}}}$.

On a

$$\beta_{m-1} = \frac{(\sqrt{c^2 + n_{m-1}} - \sqrt{n_{m-1}})(\sqrt{1 + n_{m-1}} - \sqrt{n_{m-1}})}{\sqrt{c^2 + n_{m-1}}\sqrt{1 + n_{m-1}}},$$

d'où l'on voit sans peine que β est toujours contenu entre les limites 1 et 0, et que la série des valeurs de β tend continuellement vers la dernière limite, lorsque n est positif.

Enfin on a

$$\gamma = \frac{(2a - 2\sqrt{n})\sqrt{n}}{n_1 - a\sqrt{n}} = 2\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{1+n} + \sqrt{c^2+n}}{\sqrt{1+n}\,.\sqrt{c^2+n}}.$$

On conclut de là que la suite des valeurs de γ tend continuellement vers la limite 4 en croissant.

Considérons maintenant la seconde formule

$$n_1 = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+c^2} - \sqrt{n}).$$

Supposons d'abord que n soit très grand; alors on a

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \sqrt{n+c^2} = \sqrt{n} + \frac{c^2}{2\sqrt{n}};$$

donc

$$n_1 = \frac{c^2}{4n}.$$

Donc à mesure que n devient plus grand, n_1 devient plus petit, si n est plus grand que l'unité. La même chose a lieu si n est moindre que l'unité, ce dont on peut se convaincre aisément, en différentiant la valeur de n_1, car on trouve

$$dn_1 = -n_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+c^2}}\right)\frac{dn}{2};$$

donc, la différentielle étant négative, il est clair que n_1 croît si n diminue, et réciproquement.

Cherchons maintenant si la série des quantités n, n_1, n_2, ... a une limite. Si elle en a une, cette limite est la valeur que reçoit n en faisant $n_1 = n$. Soit k cette valeur, on aura

$$k = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+c^2} - \sqrt{k}).$$

Faisons $n = k + \alpha$, on aura

$$n_1 = k\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+k}} + \frac{1}{\sqrt{k^2+c^2k}}\right)\alpha\right] + \cdots,$$

donc

$$n_1 = k - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+c^2}}\right)\alpha + \cdots,$$

maintenant $\frac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} + \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+c^2}}\right) < 1$, donc

$$k - n_1 < \alpha.$$

Donc n_1 diffère moins de k que n; donc k est la limite des quantités n, n_1, n_2, etc.

On peut donc réduire $\Pi(n)$ à la fonction $\Pi(n_m)$, où n_m diffère de k d'une quantité aussi petite qu'on le voudra. La fonction $\Pi(k)$ peut s'exprimer par la fonction F et des logarithmes, car on a

$$(1-\gamma)\,\Pi(k) = \beta F + \alpha\,.\,\text{arc tang}\,\frac{(a + bx^2)x}{\sqrt{R}},$$

$$b = -n_1\sqrt{n} = -k^{\frac{3}{2}}, \quad a = (k+1)^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}},$$

$$\beta = \frac{2a + 3\sqrt{k}}{a + \sqrt{k}}, \quad \gamma = -2,$$

$$1 - \gamma = 3, \qquad \alpha = -\frac{1}{a + \sqrt{k}};$$

donc

$$\Pi(k) = \frac{2a + 3\sqrt{k}}{3(a + \sqrt{k})} F - \frac{1}{3(a + \sqrt{k})} . \text{arc tang} \frac{ax - k^{\frac{3}{2}} x^3}{\sqrt{R}};$$

k est déterminé par l'équation

$$k = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k + c^2} - \sqrt{k}).$$

Considérons maintenant la troisième formule:

$$n_1 = -(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n + c^2} - \sqrt{n});$$

n_1 est donc toujours négatif. En différentiant on aura

$$dn_1 = -\tfrac{1}{2} n_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + c^2 n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) dn;$$

l'accroissement de n_1 est donc positif.

Soit d'abord n très grand; on a alors

$$n_1 = -2\sqrt{n} \left(\tfrac{1}{2} \frac{c^2}{\sqrt{n}} \right) = -c^2.$$

Donc lorsque n est très grand, n_1 est très peu différent de $-c^2$, qui est aussi la plus petite valeur que puisse recevoir n_1. La plus grande est $-c$, qu'on obtient en faisant $n = 0$. Toutes les valeurs de n_1 sont donc renfermées entre $-c^2$ et $-c$.

On peut donc toujours supposer n négatif et compris entre ces deux limites très étroites.

La dernière formule est

$$n_1 = -(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n + c^2} + \sqrt{n}).$$

Si n est très grand, on a

$$n_1 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} . 2\sqrt{n} = -1.$$

Donc, lorsque n est très grand, n_1 est très peu différent de -1. C'est la plus grande valeur que puisse avoir n_1. On obtient sa plus petite valeur en faisant $n = 0$, et on aura alors $n_1 = -c$. Donc n_1 est contenu entre -1 et $-c$.

Dans ce qui précède nous avons supposé n positif. Considérons maintenant le cas où n est négatif. Soit $n = -\alpha$, α étant positif, et soit d'abord

$$n_1 = -\alpha_1 = (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\alpha + 1})(\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\alpha + c^2}),$$

donc

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right).$$

On voit par là que $\alpha_1 > \alpha$, et si α est extrêmement grand, on a

$$\alpha_1 = 4\alpha.$$

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right),$$

on a $\alpha_1 < \alpha$, et si α est très grand, α_1 est très petit.

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right),$$

on a, si α est très grand,

$$\alpha_1 = \alpha \frac{1}{2\alpha} . 2 = 1,$$

ou plus approché

$$\alpha_1 = \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{8\alpha^2} \right)\left(2 - \frac{c^2}{2\alpha}\right) = 1 + \frac{1 - c^2}{4} \cdot \frac{1}{\alpha};$$

donc la plus petite valeur de α_1 est égale à 1; α_1 reçoit sa plus grande valeur en faisant $\alpha = 1$; alors on a

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{1 - c^2}.$$

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{\alpha}}\right),$$

toutes les valeurs de α_1 sont renfermées entre les limites

$$1 - \sqrt{1 - c^2} \quad \text{et} \quad c^2.$$

Cherchons maintenant la valeur de n en n_1. En faisant le produit des quatre expressions suivantes:

$$n_1 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n + c^2}),$$
$$n_1 - (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n + c^2}),$$
$$n_1 - (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n + c^2}),$$
$$n_1 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n + c^2}),$$

on aura

$$n_1^4 - 4n n_1^3 - [2c^2 + 4(1+c^2)n] n_1^2 - 4c^2 n n_1 + c^4 = 0,$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{(n_1^2 - c^2)^2}{4n_1(n_1+1)(n_1+c^2)}.$$

Cette valeur est très remarquable parce qu'elle est rationnelle en n_1 et en c^2. Elle est aussi très commode pour le calcul logarithmique, car on a

$$\log n = -\log 4 + 2\log(n_1 - c) + 2\log(n_1 + c) - \log n_1 - \log(n_1+1) - \log(n_1 + c^2).$$

La formule trouvée dans ce qui précède, peut aussi servir à trouver une infinité de fonctions elliptiques de la troisième espèce qui sont indéfiniment réductibles à la première espèce. Il suffit de faire

$$n = n_m,$$

et on aura une intégrale $\Pi(n)$ déterminée par des logarithmes et par la fonction F.

Soit par exemple $n_1 = n$, on aura

$$n = \frac{(n^2 - c^2)^2}{4n(n+1)(n+c^2)},$$

ou

$$3n^4 + 4(1+c^2)n^3 + 6c^2n^2 - c^4 = 0,$$

d'où l'on tire quatre valeurs de n.

Lorsqu'on connaît une valeur de n telle que $\Pi(n)$ puisse s'exprimer par la fonction elliptique de la première espèce, on en peut trouver une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; ce qui est bien évident, car connaissant $\Pi(n)$ on connaît aussi

$$\Pi(n_1),\quad \Pi(n_2),\quad \Pi(n_3),\quad \text{etc.},$$

$$\Pi(n_{-1}),\ \Pi(n_{-2}),\ \Pi(n_{-3}),\ \text{etc.},$$

en continuant la suite $n, n_1, n_2 \ldots$ vers le côté opposé.

Ainsi l'on a par exemple

$$\Pi(c) = \tfrac{1}{2}F + \frac{\frac{1}{2}}{1+c}\ \text{arc tang}\ \frac{(1+c)x}{\sqrt{R}},$$

donc on connaît aussi $\Pi(n_1)$, où

$$1)\quad n_1 = (\sqrt{c+1} + \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} + \sqrt{c}),$$

$$2)\quad n_1 = (\sqrt{c+1} - \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} - \sqrt{c}),$$

$$3)\quad n_1 = -(\sqrt{c+1} - \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} + \sqrt{c})$$

$$4)\quad n_1 = -(\sqrt{c+1} + \sqrt{c})(\sqrt{c^2+c} - \sqrt{c}).$$

De ces valeurs on déduit ensuite de nouvelles.

On connaît aussi

$$\Pi(-1 + \sqrt{1-c^2}),\ \text{donc aussi}\ \Pi(n_1),\ \text{où}$$

$$n_1 = \frac{[(-1+\sqrt{1-c^2})^2 - c^2]^2}{4(-1+\sqrt{1-c^2}).\sqrt{1-c^2}.(c^2 - 1 + \sqrt{1-c^2})} = -1;$$

mais cette valeur rend la formule illusoire parce que $1 - x^2$ est facteur de R.

Méthode pour trouver une infinité de formules de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce.

Pour trouver une formule de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce, il s'agit de trouver une relation entre deux de ces fonctions qui ne diffèrent que par rapport au paramètre. Cette relation doit être déduite en différentiant une fonction logarithmique de la forme

$$A.\log\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} + A'.\log\frac{P' + Q'\sqrt{R}}{P' - Q'\sqrt{R}} + \cdots,$$

expression qui peut aussi être mise sous cette forme

$$A.\text{arc tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P} + A'.\text{arc tang}\frac{Q'\sqrt{R}}{P'} + \cdots.$$

Suivant ce qu'on a vu dans le chapitre second, il est aisé de voir que la relation entre les deux fonctions doit avoir la forme:

$$L\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{R}} + L'\int\frac{dx}{(1+n_1x^2)\sqrt{R}} = C\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \Sigma A.\text{arc tang}\frac{fx\sqrt{R}}{\varphi x}.$$

En mettant $-x$ au lieu de x, on aura

$$L\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{R}} + L'\int\frac{dx}{(1+n_1x^2)\sqrt{R}} = C\int\frac{dx}{\sqrt{R}} - \Sigma A.\text{arc tang}\frac{f(-x)\sqrt{R}}{\varphi(-x)}.$$

Il faut donc que $\frac{fx}{\varphi x}$ soit une fonction impaire, ou de la forme $xF(x^2)$.

Considérons seulement la fonction $A.\text{arc tang}\frac{Q\sqrt{R}}{P} = S$.

En différentiant on aura

$$dS = \frac{d\,\frac{Q\sqrt{R}}{P}}{1+\frac{Q^2R}{P^2}} = \frac{\frac{1}{2}PQ\frac{dR}{dx} + R\left(P\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dP}{dx}\right)}{P^2+Q^2R} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{M}{N} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Comme $\frac{M}{N}$ doit avoir la forme $C + \frac{L}{1+nx^2} + \frac{L'}{1+n_1x^2}$, il faut que

$$P^2 + Q^2R = (1+nx^2)^{\mu}(1+n_1x^2)^{\mu'} = N,$$

μ et μ' étant des nombres entiers et positifs quelconques.

En différentiant on aura

$$2P\,dP + 2QR\,dQ + Q^2dR = dN,$$

et en multipliant par P et remettant la valeur de P^2,

$$2(N - Q^2R)\,dP + 2PQR\,dQ + PQ^2dR = P\,dN,$$

c'est-à-dire :

$$M = \frac{\frac{1}{2}P\frac{dN}{dx} - N\frac{dP}{dx}}{Q};$$

en substituant la valeur de N, on aura

$$M = \frac{1}{Q}(1+nx^2)^{\mu-1}.(1+n_1x^2)^{\mu'-1}\Big(P[\mu nx(1+n_1x^2) +$$
$$\mu'n_1x(1+nx^2)] - (1+nx^2)(1+n_1x^2)\frac{dP}{dx}\Big);$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{1}{Q}\left([(\mu n + \mu'n_1)x + (\mu+\mu')nn_1x^3]P - [1+(n+n_1)x^2 + nn_1x^4]\frac{dP}{dx}\right)}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}.$$

Le numérateur de cette fraction doit être de la forme :

$$(k + k'x^2 + x^4)A.$$

Il y a deux cas à examiner selon que Q est une fonction paire ou impaire.

Si Q est une fonction paire, P est une fonction impaire. Dans ce cas, si $\mu+\mu' = 2\nu$, la fonction Q est du degré $2\nu-2$, et P du degré $2\nu-1$; si au contraire $\mu+\mu' = 2\nu+1$, la fonction Q est du dégre $2\nu-2$, et P du degré $2\nu+1$.

Si Q est une fonction impaire, P est une fonction paire. Dans ce cas, si $\mu+\mu' = 2\nu$, Q est du degré $2\nu-3$, et P du degré 2ν; si au contraire $\mu+\mu' = 2\nu+1$, Q est du degré $2\nu-1$, et P du degré 2ν.

Déterminons maintenant les quantités k et k'.

On a, en faisant $Q = fx$ et $P = \varphi x$,

$$M = \frac{1}{fx}[(\mu n + \mu'n_1)x + (\mu+\mu')nn_1x^3)\varphi x - (1+nx^2)(1+n_1x^2)\varphi'x]$$
$$= (k + k'x^2 + x^4)A.$$

En faisant $x^2 = -\frac{1}{n}$ et $x^2 = -\frac{1}{n_1}$, on aura

$$\left(k - \frac{1}{n}k' + \frac{1}{n^2}\right)A = -\mu\sqrt{-n}\left(1 - \frac{n_1}{n}\right)\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)},$$

$$\left(k - \frac{1}{n_1}k' + \frac{1}{n_1^2}\right)A = -\mu'\sqrt{-n_1}\left(1 - \frac{n}{n_1}\right)\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}.$$

Mais on a

$$(\varphi x)^2 + (fx)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (1+nx^2)^{\mu}(1+n_1x^2)^{\mu'};$$

donc en faisant $x^2 = -\frac{1}{n}$ et $x^2 = -\frac{1}{n_1}$,

$$\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n}}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)}\cdot\sqrt{-1},$$

$$\frac{\varphi\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)}{f\left(\sqrt{-\frac{1}{n_1}}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{c^2}{n_1}\right)}\cdot\sqrt{-1};$$

donc en substituant,

$$k - \frac{1}{n}k' + \frac{1}{n^2} = \frac{\mu}{A}\cdot\frac{n-n_1}{\sqrt{n}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)},$$

$$k - \frac{1}{n_1}k' + \frac{1}{n_1^2} = \frac{\mu'}{A}\cdot\frac{n_1-n}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n_1}\right)\left(1+\frac{c^2}{n_1}\right)},$$

ou bien

$$k - \frac{1}{n}k' + \frac{1}{n^2} = \frac{\mu}{A}\cdot\frac{n-n_1}{n\sqrt{n}}\sqrt{(1+n)(c^2+n)},$$

$$k - \frac{1}{n_1}k' + \frac{1}{n_1^2} = \frac{\mu'}{A}\cdot\frac{n_1-n}{n_1\sqrt{n_1}}\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}.$$

On tire de là

$$k = \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{A}\left(\frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu'\sqrt{1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}}\right),$$

$$k' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{A}\left(\frac{\mu n_1 \sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu' n \sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}}\right).$$

Soit pour abréger,

$$k = \frac{1}{nn_1} + \frac{l}{A},$$

$$k' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{l'}{A},$$

on aura en substituant ces valeurs

$$(k + k'x^2 + x^4)A = \left[\frac{1}{nn_1} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)x^2 + x^4\right]A + l + l'x^2,$$

c'est-à-dire

$$(k + k'x^2 + x^4)A = \frac{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}{nn_1}A + l + l'x^2.$$

Donc

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{nn_1} + \frac{l + l'x^2}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}.$$

Soit

$$\frac{l + l'x^2}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)} = \frac{L}{1+nx^2} + \frac{L'}{1+n_1x^2},$$

on aura

$$L = \frac{ln - l'}{n - n_1}, \quad L' = \frac{ln_1 - l'}{n_1 - n},$$

et, en substituant les valeurs de l et de l',

$$L = \frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad L' = \frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}},$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{nn_1} + \frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+nx^2} + \frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}} \cdot \frac{1}{1+n_1x^2}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et intégrant, on aura

$$\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P} = \frac{A}{nn_1}F + \frac{\mu\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}}\,\Pi(n) + \frac{\mu'\sqrt{(1+n_1)(c^2+n_1)}}{\sqrt{n_1}}\,\Pi(n_1);$$

ou bien, en désignant $\frac{\sqrt{(1+n)(c^2+n)}}{\sqrt{n}}$ par $\psi(n)$,

$$\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P} = \frac{A}{nn_1}F + \mu\psi(n)\,\Pi(n) + \mu'\psi(n_1)\,\Pi(n_1).$$

On tire de là

$$\Pi(n) = -\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\psi(n_1)}{\psi(n)}\,\Pi(n_1) - \frac{A}{\mu n n_1 \psi(n)}F + \frac{1}{\mu\psi(n)}\,\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P},$$

ce qui est la formule de réduction demandée; n_1 est une fonction de n; je la désigne par $\chi(n)$.

En mettant n_1 au lieu de n, il faut mettre $\chi(n_1) = n_2$ à la place de n_1, on a donc

$$\Pi(n_1) = -\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\psi(n_2)}{\psi(n_1)}\,\Pi(n_2) - \frac{A'}{\mu n_1 n_2 \psi(n_1)}F + \frac{1}{\mu\psi(n_1)}\,\text{arc tang}\,\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}.$$

En substituant cette valeur, il vient

$$\Pi(n) = \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \frac{\psi(n_2)}{\psi(n)}\,\Pi(n_2) - \frac{1}{\mu\psi(n)}\left\{\frac{A}{nn_1} - \frac{A'\frac{\mu'}{\mu}}{n_1n_2}\right\}F$$
$$+ \frac{1}{\mu\psi(n)}\left(\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P} - \frac{\mu'}{\mu}\,\text{arc tang}\,\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}\right).$$

En général on aura

$$\Pi(n) = \pm\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^m \frac{\psi(n_m)}{\psi(n)}\,\Pi(n_m)$$
$$-\frac{1}{\mu\psi(n)}\left\{\frac{A}{nn_1} - \frac{A'\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)}{n_1n_2} + \frac{A''\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{n_2n_3} - \frac{A'''\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{n_3n_4} \cdots \pm \frac{A^{(m-1)}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{m-1}}{n_{m-1}n_m}\right\}F$$
$$+\frac{1}{\mu\psi(n)}\left[\text{arc tang}\,\frac{Q\sqrt{R}}{P} - \frac{\mu'}{\mu}.\,\text{arc tang}\,\frac{Q'\sqrt{R}}{P'} + \right.$$
$$\left.\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 \text{arc tang}\,\frac{Q''\sqrt{R}}{P''} - \cdots \pm \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{m-1} \text{arc tang}\,\frac{Q^{(m-1)}\sqrt{R}}{P^{(m-1)}}\right].$$

Soit par exemple $P = 1 + bx^2$, $Q = ex$, on aura

$$(1+bx^2)^2 + e^2x^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (1+nx^2)(1+n_1x^2)^2,$$

d'où l'on tire

$$1 + b = (1+n_1)\sqrt{1+n},$$

$$c^2 + b = (c^2+n_1)\sqrt{1+\frac{n}{c^2}},$$

donc

$$1 - c^2 = \sqrt{1+n} - c\sqrt{c^2+n} + n_1\left(\sqrt{1+n} - \sqrt{1+\frac{n}{c^2}}\right),$$

ce qui donne

$$n_1 = \frac{1 - c^2 - \sqrt{1+n} + c\sqrt{c^2+n}}{\sqrt{1+n} - \sqrt{1+\frac{n}{c^2}}},$$

ou en réduisant,

$$n_1 = \frac{c\,(c - \sqrt{c^2+n})(1 - \sqrt{1+n})}{n}.$$

XIV.

NOTE SUR LA FONCTION $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$.

La fonction $\psi x = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$ jouit de plusieurs propriétés remarquables, que je vais établir dans cette note. On trouve quelques-unes de ces propriétés dans *Legendre* Exerc. de calc. int. t. I, p. 244 et suiv. Les autres, si je ne me trompe, sont nouvelles. Comme la série $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$ n'est convergente que lorsque x ne surpasse pas l'unité, il s'ensuit que la fonction ψx n'a de valeur que pour les x compris entre les limites -1 et $+1$. Pour toute autre valeur de x, la fonction n'existe pas, parce qu'elle est exprimée par une série divergente. Nous supposons donc toujours x compris entre les limites -1 et $+1$.

En différentiant on obtient

$$d\psi x = dx\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$d\psi x = -\frac{dx}{x}\log(1-x);$$

donc

$$\psi x = -\int \frac{dx}{x}\log(1-x), \tag{1}$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$.

De cette expression de ψx il est facile de déduire les propriétés de cette fonction. En mettant $1-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(1-x) = \int \frac{dx}{1-x} \log x,$$

et par suite

$$\psi x + \psi(1-x) = -\int \left(\frac{dx}{x} \log(1-x) - \frac{dx}{1-x} \log x \right);$$

donc

$$\psi x + \psi(1-x) = C - \log x \, . \log(1-x).$$

Si l'on fait ici $x=0$, $\log x \, . \log(1-x)$ disparaît, et l'on a $\psi(1) = C$; mais

(2) $$\psi(1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

On en conclut

(3) $$\psi x + \psi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \, . \log(1-x).$$

Cette formule donne la valeur de la fonction ψx pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction pour les x qui sont compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Lorsque $x = \frac{1}{2}$, cette formule donne

(4) $$\psi(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{12} - \tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

Si dans l'expression de ψx on met $-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(-x) = -x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} - \cdots,$$

donc

$$\psi(x) + \psi(-x) = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots \right);$$

c'est-à-dire, puisque $x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = \psi(x^2)$,

(5) $$\psi(x) + \psi(-x) = \tfrac{1}{2}\psi(x^2).$$

Cette formule donne la fonction ψx pour les valeurs négatives de x, lorsqu'on connaît la fonction pour les valeurs positives de la variable. Dans le cas particulier où l'on fait $x = 1$, on obtient

(6) $$\psi(-1) = -\tfrac{1}{2}\psi(1) = -\frac{\pi^2}{12},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

ce qui est connu.

Si dans l'équation (1) on met $\frac{x}{x+1}$ au lieu de x, il viendra

$$\psi\left(\frac{x}{x+1}\right) = \int \left(\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1} \right) \log(1+x) = \int \frac{dx}{x} \log(1+x) - \int \frac{dx}{x+1} \log(x+1).$$

Or on a évidemment

$$\int \frac{dx}{x} \log(1+x) = -\psi(-x),$$

$$\int \frac{dx}{1+x} \log(1+x) = \tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2;$$

donc, en remarquant que la constante arbitraire due à l'intégration est zéro,

(7) $$\psi\left(\frac{x}{1+x}\right) + \psi(-x) = -\tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2.$$

En éliminant la quantité $\psi(-x)$ des équations (5) et (7), on obtiendra la suivante:

(8) $$\psi x = \tfrac{1}{2}[\log(1+x)]^2 + \tfrac{1}{2}\psi(x^2) + \psi\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Par cette formule on peut exprimer une fonction donnée ψx par d'autres fonctions, dans lesquelles la variable est aussi petite qu'on voudra. Car lorsque x est positif et moindre que l'unité, on a $x^2 < x$ et $\frac{x}{x+1} < x$. Si l'on fait par exemple $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{3}$, la formule donne

$$\psi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\log \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{4}) + \psi(\tfrac{1}{3}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{2}(\log \tfrac{4}{3})^2 + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{9}) + \psi(\tfrac{1}{4}).$$

En combinant ces deux équations avec celle-ci

$$\frac{\pi^2}{12} = \tfrac{1}{2}(\log 2)^2 + \psi(\tfrac{1}{2}),$$

on trouvera

$$\psi(\tfrac{1}{3}) = \frac{\pi^2}{18} - \tfrac{1}{6}(\log 3)^2 + \tfrac{1}{6}\psi(\tfrac{1}{9}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{18} + 2\log 2 \, . \log 3 - 2(\log 2)^2 - \tfrac{2}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{1}{3}\psi(\tfrac{1}{9}).$$

De cette manière les fonctions $\psi(\frac{1}{3})$ et $\psi(\frac{1}{4})$ sont exprimées par des quantités connues et la fonction $\psi(\frac{1}{9})$. Si dans l'équation (8) on fait $x = \frac{1}{9}$, on obtient

$$\psi(\tfrac{1}{9}) = \tfrac{1}{2}(\log \tfrac{10}{9})^2 + \psi(\tfrac{1}{10}) + \tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{81}).$$

etc.

Toutes les formules démontrées ci-dessus se trouvent dans l'ouvrage cité de M. *Legendre*. Elles ne contiennent, comme on le voit, qu'une seule quantité arbitraire. Je vais maintenant en démontrer quelques autres, qui contiennent deux quantités indépendantes entre elles, et desquelles les formules précédentes doivent être considérées comme des cas particuliers.

Si dans l'équation

$$\psi x = -\int \frac{dx}{x} \log(1-x)$$

on met $\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}$ à la place de x, on aura, en considérant a comme constant,

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = -\int \left(\frac{dy}{y} + \frac{dy}{1-y}\right) \log \frac{1-a-y}{(1-a)(1-y)} \, ;$$

c'est-à-dire

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = -\int \frac{dy}{y} \log\left(1 - \frac{y}{1-a}\right) + \int \frac{dy}{y} \log(1-y)$$
$$-\int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right) + \int \frac{dy}{1-y} \log(1-a).$$

Toutes les intégrales du second membre de cette équation peuvent s'exprimer par la fonction ψ. En effet, on a

$$\int \frac{dy}{y} \log\left(1 - \frac{y}{1-a}\right) = -\psi\left(\frac{y}{1-a}\right),$$

$$\int \frac{dy}{y} \log(1-y) = -\psi(y);$$

donc

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-a}\right) - \psi y - \log(1-a)\log(1-y) - \int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right).$$

Soit $\frac{a}{1-y} = z$ ou, ce qui revient au même, $1-y = \frac{a}{z}$, $dy = \frac{adz}{z^2}$, on aura $\int \frac{dy}{1-y} \log\left(1 - \frac{a}{1-y}\right) = \int \frac{dz}{z} \log(1-z) = -\psi(z) = -\psi\left(\frac{a}{1-y}\right)$; donc l'équation ci-dessus donnera

$$\psi\left(\frac{a}{1-a} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-a}\right) + \psi\left(\frac{a}{1-y}\right) - \psi y - \log(1-a)\log(1-y) + C.$$

Pour déterminer la constante arbitraire, soit $y = 0$, on aura $C = -\psi(a)$. On aura par conséquent, en écrivant x au lieu de a,

$$(9) \quad \psi\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi y - \psi x - \log(1-y)\log(1-x).$$

Dans cette formule x et y doivent avoir de telles valeurs que les quantités $\frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y}$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x ne surpassent pas l'unité. C'est ce qui aura lieu lorsque x et y sont positifs, si $x + y < 1$. Si y est négatif et égal à $-m$ on doit avoir $x + m < 1$; et si x et y sont tous deux négatifs, il suffit qu'aucune de ces quantités ne surpasse l'unité.
