XXI.

REMARQUES SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES D'UNE CERTAINE SORTE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

1.

Si ψx désigne la fonction elliptique la plus générale, c'est-à-dire si

$$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x, et R une fonction entière de la même variable, qui ne passe pas le quatrième degré, cette fonction a, comme on sait, la propriété très remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même forme, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique.

Il semble que dans la théorie des fonctions trancendantes les géomètres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques.

Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme *intégrales de différentielles algébriques quelconques*. Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que

les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique*). Nous démontrerons cette propriété dans l'un des cahiers suivans de ce journal. Pour le moment je vais considérer un cas particulier, qui embrasse les fonctions elliptiques, savoir celui des fonctions contenues dans la formule

$$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{R}}, \tag{1}$$

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle.

2.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. *Soit φx une fonction entière de x, décomposée d'une manière quelconque en deux facteurs entiers $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$, de sorte que $\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x$. Soit fx une autre fonction entière quelconque, et*

$$\psi x = \int \frac{fx\,.\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}, \tag{2}$$

où α est une quantité constante quelconque. Désignons par $a_0, a_1, a_2 \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ des quantités quelconques, dont l'une au moins soit variable. Cela posé, si l'on fait

$$\tag{3} \left\{\begin{aligned} &(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)^2 \varphi_1 x - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)^2 \varphi_2 x \\ &\qquad = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_\mu), \end{aligned}\right.$$

où A ne dépend pas de x, je dis qu'on aura

$$\tag{4} \begin{aligned} &\varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \cdots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu \\ &= -\frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1\alpha} + (c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_m\alpha^m)\sqrt{\varphi_2\alpha}}{(a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n)\sqrt{\varphi_1\alpha} - (c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_m\alpha^m)\sqrt{\varphi_2\alpha}} + r + C, \end{aligned}$$

où C est une quantité constante, et r le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} \cdot \log \frac{(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\sqrt{\varphi_1 x} + (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\sqrt{\varphi_2 x}}{(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\sqrt{\varphi_1 x} - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m)\sqrt{\varphi_2 x}}$$

suivant les puissances descendantes de x. Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ sont

*) J'ai présenté un mémoire sur ces fonctions à l'académie royale des sciences de Paris vers la fin de l'année 1826.

égales à $+1$ *ou à* -1, *et leurs valeurs dépendent de celles des quantités* $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

Désignons le premier membre de l'équation (3) par Fx, et faisons pour abréger

$$(5)\qquad \begin{cases} \theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ \theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m, \end{cases}$$

nous aurons

$$(6)\qquad Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x.$$

Cela posé, soit x l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, on aura l'équation

$$(7)\qquad Fx = 0.$$

De là, en différentiant, on tire

$$(8)\qquad F'x . dx + \delta Fx = 0,$$

en désignant par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x, et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ Or, en remarquant que $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$ sont indépendans de ces dernières variables, l'équation (6) donnera

$$(9)\qquad \delta Fx = 2\theta x . \varphi_1 x . \delta\theta x - 2\theta_1 x . \varphi_2 x . \delta\theta_1 x,$$

donc en vertu de (8)

$$(10)\qquad F'x . dx = 2\theta_1 x . \varphi_2 x . \delta\theta_1 x - 2\theta x . \varphi_1 x . \delta\theta x.$$

Maintenant, ayant $Fx = 0 = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x$, on en tire

$$(11)\qquad \theta x \sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x},$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De là il vient

$$\theta x . \varphi_1 x = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi_1 x . \varphi_2 x} = \varepsilon \theta_1 x \sqrt{\varphi x},$$

$$\theta_1 x . \varphi_2 x = \varepsilon \theta x \sqrt{\varphi_2 x . \varphi_1 x} = \varepsilon \theta x \sqrt{\varphi x},$$

donc l'expression de $F'x . dx$ pourra être mise sous la forme

$$(12)\qquad F'x . dx = 2\varepsilon (\theta x . \delta\theta_1 x - \theta_1 x . \delta\theta x) \sqrt{\varphi x}.$$

Cela donne, en multipliant par $\varepsilon \frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} \frac{1}{F'x} \frac{1}{x - \alpha}$,

$$(13)\qquad \varepsilon \frac{fx . dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{2fx(\theta x . \delta\theta_1 x - \theta_1 x . \delta\theta x)}{(x-\alpha)F'x}.$$

En faisant pour abréger

$$(14')\qquad \lambda(x) = 2fx(\theta x . \delta\theta_1 x - \theta_1 x . \delta\theta x),$$

il viendra

$$(14)\qquad \varepsilon \frac{fx . dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x},$$

λx étant une fonction *entière* par rapport à x.

Désignons par ΣFx la quantité

$$Fx_1 + Fx_2 + Fx_3 + \cdots + Fx_\mu,$$

et remarquons que l'équation (14) subsiste encore, en mettant l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ au lieu de x; cette équation donnera

$$(15)\qquad \Sigma \varepsilon \frac{fx . dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} = \Sigma \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x} = \delta v.$$

Cela posé, on pourra chasser sans difficulté les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ du second membre.

En effet, quelle que soit la fonction entière λx, on peut supposer

$$(16)\qquad \lambda x = (x-\alpha)\lambda_1 x + \lambda\alpha,$$

$\lambda_1 x$ étant une fonction entière de x, savoir $\frac{\lambda x - \lambda\alpha}{x - \alpha}$. En substituant cette valeur dans (15), il viendra

$$(16')\qquad \delta v = \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} + \lambda\alpha \Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x}.$$

Maintenant on aura, d'après une formule connue,

$$(17)\qquad \Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x} = -\frac{1}{F\alpha},$$

en remarquant que l'on a

$$F\alpha = A(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\ldots(\alpha - x_\mu);$$

donc

$$(18)\qquad \delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}.$$

Il reste à trouver $\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}$. Or cela peut se faire à l'aide de la formule (17). En effet, en développant $\frac{1}{\alpha - x}$ selon les puissances descendantes de α, il viendra

$$(19)\qquad \frac{1}{F\alpha}=\frac{1}{\alpha}\Sigma\frac{1}{F'x}+\frac{1}{\alpha^2}\Sigma\frac{x}{F'x}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{k+1}}\Sigma\frac{x^k}{F'x}+\cdots,$$

d'où l'on voit que $\Sigma\frac{x^k}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{k+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{F\alpha}$, ou bien à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^k}{F\alpha}$. De là on voit aisément que $\Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}$, où $\lambda_1 x$ est une fonction quelconque entière de x, sera égal au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{\lambda_1 x}{Fx}$ selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Si pour abréger on désigne ce coefficient relatif à une fonction quelconque r, développable de cette manière, par Πr, on aura

$$(20)\qquad \Sigma\frac{\lambda_1 x}{F'x}=\Pi\frac{\lambda_1 x}{Fx}.$$

Or la formule (16), en divisant par $(x-\alpha)Fx$, donne

$$(21)\qquad \Pi\frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}=\Pi\frac{\lambda_1 x}{Fx},$$

en remarquant que $\Pi\frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}$ est toujours égal à zéro. Donc l'expression (16′) de δv deviendra

$$(22)\qquad \delta v=-\frac{\lambda\alpha}{F\alpha}+\Pi\frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}.$$

Maintenant on a (14′)

$$\lambda x=2fx.(\theta x.\delta\theta_1 x-\theta_1 x.\delta\theta x),$$

donc, en mettant α au lieu de x,

$$\lambda\alpha=2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha-\theta_1\alpha.\delta\theta\alpha).$$

En substituant ces expressions dans la valeur de δv, et mettant pour $F\alpha$ sa valeur $(\theta\alpha)^2\varphi_1\alpha-(\theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha$, on obtiendra

$$\delta v=-\frac{2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha-\theta_1\alpha.\delta\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha-(\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha}+\Pi\frac{2fx}{x-\alpha}.\frac{\theta x.\delta\theta_1 x-\theta_1 x.\delta\theta x}{(\theta x)^2.\varphi_1 x-(\theta_1 x)^2.\varphi_2 x}.$$

On trouvera aisément l'intégrale de cette expression; car, en remarquant que $f\alpha$, $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, fx, $x-\alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ sont des quantités constantes, on aura, en vertu de la formule

$$\int\frac{pdq-qdp}{p^2m-q^2n}=\frac{1}{2\sqrt{mn}}\log\frac{p\sqrt{m}+q\sqrt{n}}{p\sqrt{m}-q\sqrt{n}}:$$

$$(23)\qquad v=C-\frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}}\log\frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha}+\theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha}-\theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \\ +\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}\log\frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x}+\theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x}-\theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}.$$

Or l'équation (15) donne

$$\Sigma\varepsilon\int\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}=v,$$

donc en faisant

$$(24)\qquad \psi(x)=\int\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$$

et désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ des quantités de la forme ± 1, on aura la formule

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1\psi x_1+\varepsilon_2\psi x_2+\varepsilon_3\psi x_3+\cdots+\varepsilon_\mu\psi x_\mu \\ &\qquad =C-\frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}}\log\frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha}+\theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha}-\theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \\ &\qquad +\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}\log\frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x}+\theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x}-\theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}, \end{aligned}\right.$$

qui s'accorde parfaitement avec la formule (4).

Les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ ne sont pas arbitraires; elles dépendent de la grandeur de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\theta x\sqrt{\varphi_1 x}=\varepsilon\theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x},$$

équivalente aux équations

$$(26)\qquad \theta x_1\sqrt{\varphi_1 x_1}=\varepsilon_1\theta_1 x_1\sqrt{\varphi_2 x_1};\ \theta x_2\sqrt{\varphi_1 x_2}=\varepsilon_2\theta_1 x_2\sqrt{\varphi_2 x_2};\ \ldots \\ \theta x_\mu\sqrt{\varphi_1 x_\mu}=\varepsilon_\mu\theta_1 x_\mu\sqrt{\varphi_2 x_\mu}.$$

D'ailleurs les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ conserveront les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, comprises entre certaines limites. Il en sera de même de la constante C.

3.

La démonstration précédente suppose toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ différentes entre elles, car dans le cas contraire $F'x$ serait égal à zéro pour un certain nombre de valeurs de x, et alors le second membre de la formule (14) se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins il est évident que la formule (25) subsistera encore dans le cas où plusieurs des quantités x_1, x_2, ... x_μ sont égales entre elles.

En faisant $x_2 = x_1$, on aura (26)

$$\theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} = \varepsilon_2 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1},$$

et cela donne, en supposant que $\theta_1 x . \varphi_2 x$ et $\theta x . \varphi_1 x$ n'aient pas de diviseur commun,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

En vertu de cette remarque on aura le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'on fait*

$$(\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = A(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_\mu)^{m_\mu}, \tag{27}$$

les fonctions entières $\theta x . \varphi_1 x$ *et* $\theta_1 x . \varphi_2 x$ *n'ayant pas de diviseur commun, on aura*

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 m_3 \psi x_3 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &\qquad = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \\ &\qquad + \Pi \frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} \log \frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}. \end{aligned} \right.$$

4.

Si l'on suppose fx divisible par $x - \alpha$, on aura $f\alpha = 0$, donc en mettant $(x-\alpha)fx$ au lieu de fx, il viendra:

Théorème III. *Les choses étant supposées les mêmes que dans le Théorème* II, *si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{\sqrt{\varphi x}},$$

fx *étant une fonction entière quelconque, on aura*

$$\begin{aligned} (29)\quad &\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &\qquad = C + \Pi \frac{fx}{\sqrt{\varphi x}} \log \frac{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x\sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x\sqrt{\varphi_2 x}}. \end{aligned}$$

5.

Si dans la formule (28) on suppose le degré de la fonction entière $f(x)$ moindre que la moitié de celui de φx, il est clair que la partie du second membre affectée du signe Π, s'évanouira. Donc on aura ce théorème:

Théorème IV. *Si le degré de la fonction entière* $(fx)^2$ *est moindre que celui de* φx, *et si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}:$$

on aura

$$\begin{aligned} (30)\quad &\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &\qquad = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}. \end{aligned}$$

6.

En faisant $f\alpha = 1$ dans le théorème précédent et différentiant $k-1$ fois de suite, on aura le théorème suivant:

Théorème V. *Si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{\varphi x}},$$

on aura

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &\qquad = C - \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi\alpha}} \cdot \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} \right). \end{aligned}$$

7.

Si dans le théorème III on suppose le degré de $(fx)^2$ moindre que celui de φx diminué de deux unités, le second membre se réduit à une constante. Cela donne aisément le théorème qui suit:

Théorème VI. *Si l'on désigne par* ψx *la fonction*

$$\int \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \cdots + \delta_{\nu'} x^{\nu'})dx}{\sqrt{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_\nu x^\nu}},$$

où $\nu' = \frac{\nu - 1}{2} - 1$ *si* ν *est impair, et* $\nu' = \frac{\nu}{2} - 2$ *si* ν *est pair, on aura toujours*

(31) $$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = constante.$$

On voit que ν' a la même valeur pour $\nu = 2m - 1$ et pour $\nu = 2m$, savoir $\nu' = m - 2$.

8.

Soit maintenant
$$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}},$$
r étant une fonction rationnelle quelconque de x. Quelle que soit la forme de r, on pourra toujours faire

(32) $$r = fx + \frac{f_1 x}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{f_2 x}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{f_\omega x}{(x-\alpha_\omega)^{k_\omega}},$$

$fx, f_1 x, f_2 x, \ldots f_\omega x$ étant des fonctions entières. Cela posé, il est clair qu'en vertu des théorèmes III et V, on aura le suivant:

Théorème VII. *Quelle que soit la fonction rationnelle r exprimée par la formule* (32), *en faisant*

(33) $$\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}} \quad \text{et} \quad \frac{\theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}} = \chi x,$$

on aura toujours

(34) $$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \frac{r}{\sqrt{\varphi x}} \log \chi x \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma k_1} \frac{d^{k_1-1}}{d\alpha_1^{k_1-1}} \left(\frac{f_1 \alpha_1}{\sqrt{\varphi \alpha_1}} \log \chi \alpha_1\right) - \frac{1}{\Gamma k_2} \frac{d^{k_2-1}}{d\alpha_2^{k_2-1}} \left(\frac{f_2 \alpha_2}{\sqrt{\varphi \alpha_2}} \log \chi \alpha_2\right) - \cdots \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma k_\omega} \frac{d^{k_\omega-1}}{d\alpha_\omega^{k_\omega-1}} \left(\frac{f_\omega \alpha_\omega}{\sqrt{\varphi \alpha_\omega}} \log \chi \alpha_\omega\right), \end{aligned}\right.$$

en représentant par Γk le produit $1 . 2 . 3 \ldots (k-1)$.

9.

Nous avons considéré précédemment les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ comme des fonctions de $a_0, a_1, a_2, \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ Supposons maintenant qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ soient données et regardées comme des variables indépendantes; et soient $x_1, x_2, \ldots x_{\mu'}$ ces quantités. Alors il faut déterminer $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ de manière que le premier membre de l'équation (3) soit divisible par

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{\mu'}).$$

Cela ce fera à l'aide des équations (26). Les μ' premières équations,

(35) $$\left\{\begin{aligned} &\theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 . \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1}, \\ &\theta x_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} = \varepsilon_2 . \theta_1 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\theta x_{\mu'} \sqrt{\varphi_1 x_{\mu'}} = \varepsilon_{\mu'} . \theta_1 x_{\mu'} \sqrt{\varphi_2 x_{\mu'}} \end{aligned}\right.$$

donneront μ' des quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ exprimées en fonction rationnelle des autres et de $x_1, x_2, \ldots x_{\mu'}, \sqrt{\varphi x_1}, \sqrt{\varphi x_2}, \ldots \sqrt{\varphi x_{\mu'}}$.

Le nombre des indéterminées $a_0, a_1, \ldots a_n, c_0, c_1, \ldots c_m$ est égal à $m + n + 2$; donc, comme il est aisé de le voir par la forme des équations (35), on pourra faire $\mu' = m + n + 1$. Cela posé, en substituant les valeurs de $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ dans les fonctions $\theta x, \theta_1 x, \ldots$, la fonction entière $(\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x$ deviendra divisible par
$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{\mu'}).$$
En désignant le quotient par R, on aura

(36) $$R = A(x - x_{\mu'+1})(x - x_{\mu'+2}) \ldots (x - x_\mu).$$

Donc les $\mu - \mu'$ quantités $x_{\mu'+1}, x_{\mu'+2}, \ldots x_\mu$, seront les racines d'une équation, $R = 0$, du degré $\mu - \mu'$, dont tous les coefficiens sont exprimés rationnellement par les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{\mu'}, \sqrt{\varphi x_1}, \sqrt{\varphi x_2}, \ldots \sqrt{\varphi x_{\mu'}}$.

Faisons
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_{\mu_1} = 1,$$
$$\varepsilon_{\mu_1+1} = \varepsilon_{\mu_1+2} = \cdots = \varepsilon_{\mu'} = -1,$$
$$x_{\mu_1+1} = x_1', \quad x_{\mu_1+2} = x_2', \ldots x_{\mu'} = x'_{\mu_1},$$
$$x_{\mu'+1} = y_1, \quad x_{\mu'+2} = y_2, \ldots x_\mu = y_{\nu'},$$
on aura, en désignant par $\psi(x)$ la fonction $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$,

(37) $$\left\{\begin{aligned} &\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_{\mu_1} - \psi x_1' - \psi x_2' - \cdots - \psi x_{\mu_1}' \\ &\qquad = v - \varepsilon_{\mu'+1} \psi y_1 - \varepsilon_{\mu'+2} \psi y_2 - \varepsilon_{\mu'+3} \psi y_3 - \cdots - \varepsilon_\mu \psi y_{\nu'}, \end{aligned}\right.$$

où v est une expression algébrique et logarithmique. Les quantités $x_1, x_2,$

$\ldots x_{\mu_1}$; x_1', x_2', $\ldots x_{\mu_2}'$ sont des quantités variables quelconques, et $y_1, y_2, \ldots y_{\nu'}$ seront déterminables à l'aide d'une équation du degré ν'.

Maintenant nous verrons qu'on pourra toujours rendre ν' indépendant du nombre $\mu_1+\mu_2$ des fonctions données. En effet, cherchons la plus petite valeur de ν'. En supposant indéterminées toutes les quantités a_0, $a_1, \ldots c_0$, $c_1, \ldots$, il est clair que μ sera égal à l'un des deux nombres $2n+\nu_1$ et $2m+\nu_2$, ν_1 et ν_2 représentant les degrés des fonctions $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$. Soit par exemple

$$\mu = 2n+\nu_1,$$

on doit avoir en même temps

$$\mu = \text{ou} > 2m+\nu_2,$$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\mu = \text{ou} > m+n+\frac{\nu_1+\nu_2}{2};$$

or

$$\nu' = \mu-\mu' = \mu-m-n-1,$$

donc

$$\nu' = \text{ou} > \frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1,$$

ou bien, en désignant le degré de φx par ν,

$$(38) \qquad \nu' = \text{ou} > \frac{\nu}{2}-1.$$

On voit par là que la plus petite valeur de ν' est $\frac{\nu-1}{2}$ ou $\frac{\nu}{2}-1$, selon que ν est impair ou pair. Donc cette valeur est indépendante du nombre $\mu_1+\mu_2$ des fonctions données; elle est précisément la même que le nombre total des coefficiens δ_0, δ_1, $\delta_2, \ldots$ dans le sixième théorème. On aura maintenant ce théorème:

Théorème VIII. *Soit* $\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$, *où* r *est une fonction rationnelle quelconque de* x, *et* φx *une fonction entière du degré* $2\nu-1$ *ou* 2ν, *et soient* x_1, $x_2, \ldots x_{\mu_1}$, x_1', x_2', $\ldots x_{\mu_1}'$ *des variables données. Cela posé, quel que soit le nombre* $\mu_1+\mu_2$ *des variables, on pourra toujours trouver, au moyen d'une équation algébrique,* $\nu-1$ *quantités* y_1, $y_2, \ldots y_{\nu-1}$ *telles que*

$$(39) \quad \begin{cases} \psi x_1+\psi x_2+\cdots+\psi x_{\mu_1}-\psi x_1'-\psi x_2'-\cdots-\psi x_{\mu_2}' \\ \qquad = v+\varepsilon_1\psi y_1+\varepsilon_2\psi y_2+\cdots+\varepsilon_{\nu-1}\psi y_{\nu-1}, \end{cases}$$

v *étant algébrique et logarithmique, et* ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$ *égaux à* $+1$ *ou à* -1.

On peut ajouter que les fonctions y_1, $y_2, \ldots y_{\nu-1}$ restent les mêmes, quelle que soit la forme de la fonction rationnelle r, et que la fonction v ne change pas de valeur en ajoutant à r une fonction entière quelconque du degré $\nu-2$.

10.

Les équations (35) qui déterminent les quantités a_0, $a_1, \ldots c_0$, $c_1, \ldots$ deviendront

$$(40) \quad \begin{cases} \theta x_1\sqrt{\varphi_1 x_1} = \theta_1 x_1\sqrt{\varphi_2 x_1}, \quad \theta x_1'\sqrt{\varphi_1 x_1'} = -\theta_1 x_1'\sqrt{\varphi_2 x_1'}, \\ \theta x_2\sqrt{\varphi_1 x_2} = \theta_1 x_2\sqrt{\varphi_2 x_2}, \quad \theta x_2'\sqrt{\varphi_1 x_2'} = -\theta_1 x_2'\sqrt{\varphi_2 x_2'}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta x_{\mu_1}\sqrt{\varphi_1 x_{\mu_1}} = \theta_1 x_{\mu_1}\sqrt{\varphi_2 x_{\mu_1}}, \quad \theta x_{\mu_2}'\sqrt{\varphi_1 x_{\mu_2}'} = -\theta_1 x_{\mu_2}'\sqrt{\varphi_2 x_{\mu_2}'}. \end{cases}$$

Pour déterminer ε_1, $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$, on aura les équations:

$$(41) \quad \begin{cases} \theta y_1\sqrt{\varphi_1 y_1} = -\varepsilon_1\theta_1 y_1\sqrt{\varphi_2 y_1}, \\ \theta y_2\sqrt{\varphi_1 y_2} = -\varepsilon_2\theta_1 y_2\sqrt{\varphi_2 y_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta y_{\nu-1}\sqrt{\varphi_1 y_{\nu-1}} = -\varepsilon_{\nu-1}\theta_1 y_{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 y_{\nu-1}}. \end{cases}$$

Les fonctions y_1, $y_2, \ldots y_{\nu-1}$ sont les racines de l'équation

$$(42) \quad \frac{(\theta y)^2\cdot\varphi_1 y-(\theta_1 y)^2\cdot\varphi_2 y}{(y-x_1)(y-x_2)\ldots(y-x_{\mu_1})(y-x_1')(y-x_2')\ldots(y-x_{\mu_2}')} = 0.$$

Le degré de la fonction θy est $n = \frac{\mu_1+\mu_2+\nu-1-\nu_1}{2}$, et celui de $\theta_1 y$ est $m = n+\nu_1-\nu$.

11.

La formule (39) a lieu si plusieurs des quantités x_1, $x_2, \ldots x_1'$, $x_2', \ldots$ sont égales entre elles, mais dans ce cas les équations (40) ne suffisent plus pour déterminer les quantités a_0, $a_1, \ldots c_0$, $c_1, \ldots$; car si par exemple $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$, les k premières des équations (40) deviendront identiques. Pour avoir les équations nécessaires dans ce cas, posons pour abréger

$$\theta x . \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x . \sqrt{\varphi_2 x} = \lambda x.$$

L'expression $\frac{\lambda x}{(x-x_1)^k}$ doit avoir une valeur finie en faisant $x = x_1$. On en déduit, d'après les principes du calcul différentiel, les k équations

$$(43) \qquad \lambda x_1 = 0,\ \lambda' x_1 = 0,\ \lambda'' x_1 = 0,\ \ldots\ \lambda^{(k-1)} x_1 = 0,$$

et ce sont elles qu'il faut substituer à la place des équations

$$\lambda x_1 = 0,\ \lambda x_2 = 0,\ \ldots\ \lambda x_k = 0,$$

dans le cas où $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$.

XXII.

SUR LE NOMBRE DES TRANSFORMATIONS DIFFÉRENTES QU'ON PEUT FAIRE SUBIR A UNE FONCTION ELLIPTIQUE PAR LA SUBSTITUTION D'UNE FONCTION RATIONNELLE DONT LE DEGRÉ EST UN NOMBRE PREMIER DONNÉ.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

Soit pour abréger

$$(1) \qquad \Delta^2 = (1-x^2)(1-c^2x^2), \quad \Delta'^2 = (1-y^2)(1-c'^2y^2)$$

et supposons qu'on satisfasse à l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dy}{\Delta'} = a\frac{dx}{\Delta},$$

en y substituant pour y une fonction rationnelle de x de la forme

$$(3) \qquad y = \frac{A_0 + A_1 x + \cdots + A_{2n+1} x^{2n+1}}{B_0 + B_1 x + \cdots + B_{2n+1} x^{2n+1}},$$

où $2n+1$ est un nombre premier, et où l'un au moins des coefficiens A_{2n+1} et B_{2n+1} est différent de zéro. En supposant, ce qui est permis, la fraction précédente réduite à sa plus simple expression, nous dirons que $\frac{dy}{\Delta'}$ se transforme en $a\frac{dx}{\Delta}$ par la substitution d'une fonction du degré $2n+1$.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs différentes de y qui répondent à la même valeur de $2n+1$. Si l'on fait

$$(4) \qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta} \quad \text{et} \quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\Delta}$$

et qu'on désigne par $\lambda\theta$ une fonction de θ, telle que

$$d\theta = \frac{dx}{\Delta} \text{ pour } x = \lambda\theta,$$

et en outre

$$\lambda(0) = 0,$$

il suit immédiatement de ce que j'ai dit sur le problème général de la transformation des fonctions elliptiques dans le n° 138 du journal d'astronomie de M. *Schumacher**), qu'on satisfera de la manière la plus générale à l'équation $\frac{dy}{\Delta'} = a\frac{dx}{\Delta}$ dans le cas où $B_{2n+1} = 0$, en prenant

$$(5)\quad \begin{cases} y = a\dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)[1-c^2\lambda^2(2\alpha).x^2]\dots[1-c^2\lambda^2(n\alpha).x^2]}, \\ c' = c^{2n+1}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\dots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4, \\ a = \dfrac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}[\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\dots\lambda(n\alpha)]^2, \end{cases}$$

où α est une quantité de la forme

$$(6)\quad \alpha = \frac{m\omega + m'\omega'}{2n+1},$$

m et m' étant deux entiers. Maintenant, ayant trouvé cette solution, il suit encore de la formule (51) du mémoire cité que toutes les autres valeurs de y seront de la forme $\frac{f'+fy}{g'+gy}$, y étant donné par (5), f', f, g, g' étant des quantités constantes qui doivent satisfaire à l'équation

$$(7)\quad \left(1+\frac{g+f}{g'+f'}x\right)\left(1+\frac{g-f}{g'-f'}x\right)\left(1+\frac{g+c'f}{g'+c'f'}x\right)\left(1+\frac{g-c'f}{g'-c'f'}x\right) = (1-x^2)(1-c'^2x^2).$$

Cette équation donne vingt-quatre systèmes de valeurs différentes. On trouve ainsi qu'à chaque valeur de α répondent 24 valeurs de y et douze valeurs du module c'. Mais comme les valeurs de y sont deux à deux égales, mais de signes contraires, nous n'en compterons que douze. Par la même raison nous réduirons le nombre des valeurs de c' à six. Cela posé, si l'on fait pour abréger:

*) Mémoire XIX de cette édition.

$$(8)\quad \begin{cases} p = x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2(n\alpha)}\right); \quad v = (1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)\dots[1-c^2\lambda^2(n\alpha)x^2]; \\ \varepsilon = c^{n+\frac{1}{2}}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\dots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2; \quad \delta = c^{n+\frac{1}{2}}[\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\dots\lambda(n\alpha)]^2, \end{cases}$$

on trouvera aisément ces valeurs correspondantes des trois quantités c', a, y:

(9)

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} & \text{VI.} \\ c' = & \varepsilon^2, & \dfrac{1}{\varepsilon^2}, & \left(\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2, & \left(\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2, & \left(\dfrac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\right)^2, & \left(\dfrac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\right)^2, \\ a = & \pm\dfrac{\delta}{\varepsilon}, & \mp\delta\varepsilon, & \pm\dfrac{\delta}{2\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 i, & \mp\dfrac{\delta}{2\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 i, & \pm\dfrac{\delta}{2\varepsilon}(1+\varepsilon i)^2 i, & \mp\dfrac{\delta}{2\varepsilon}(1-\varepsilon i)^2 i, \end{array}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\varepsilon}\dfrac{p}{v}, \quad \dfrac{\varepsilon}{\delta}\dfrac{v}{p} \\ \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\dfrac{v}{p}, \quad \delta\varepsilon\dfrac{p}{v} \end{cases}, \quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{v\pm\delta p}{v\mp\delta p}, \quad \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{v\pm\delta p}{v\mp\delta p}, \quad \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\cdot\frac{v\pm\delta pi}{v\mp\delta pi}, \quad \frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\cdot\frac{v\pm\delta pi}{v\mp\delta pi},$$

$$(\text{où } i = \sqrt{-1}).$$

On voit qu'à chaque valeur de c' correspondent deux valeurs différentes de la fonction y. Maintenant si l'on attribue aux nombres m et m' des valeurs entières quelconques, on aura toutes les solutions possibles de notre problème. Or parmi ces solutions il n'y aura qu'un nombre fini qui soient différentes entre elles. Cherchons d'abord les solutions différentes qui répondent au premier cas, savoir $c' = \varepsilon^2$ et $y = \frac{\delta}{\varepsilon}\cdot\frac{p}{v}$. Pour les trouver, soit α' une valeur de α et désignons les valeurs correspondantes de y, p, v, δ, ε par y', p', v', δ', ε'. Cela posé, il est évident que si y' doit être égal à $\pm y$, on doit avoir

$$p' = p, \quad v' = v, \quad \frac{\delta'}{\varepsilon'} = \pm\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Or en vertu de l'équation (8) on ne pourra avoir $p' = p$, à moins que les quantités $\lambda^2\alpha$, $\lambda^2(2\alpha)$, ... $\lambda^2(n\alpha)$ ne soient, quoique dans un ordre différent, égales à celles-ci:

$$\lambda^2\alpha', \lambda^2(2\alpha'), \dots \lambda^2(n\alpha').$$

Soit donc

$$\lambda^2\alpha' = \lambda^2(\mu\alpha),$$

où μ est moindre que n. On en tire $\lambda\alpha' = \pm\lambda(\mu\alpha)$, d'où, en vertu du théorème II du n° 138 du journal d'astronomie,

$$\alpha' = k\omega + k'\omega' \pm \mu\alpha,$$

où k et k' désignent des nombres entiers quelconques. Cela donne

$$\lambda^2(\mu'\alpha') = \lambda^2(\mu'\mu\alpha),$$

et puisque $\lambda[\theta + (2n+1)\alpha] = \lambda\theta$, et que $2n+1$ est un nombre premier, il s'ensuit que

$$p' = p,\ v' = v,\ \delta' = \delta,\ \varepsilon' = \varepsilon.$$

Donc les solutions qui répondent à α et α' sont précisément égales entre elles.

Soit d'abord $m' = 0$ en sorte que $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$. Si l'on fait $k' = 0$, et qu'on détermine les nombres k et μ de manière à satisfaire à l'équation

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

on aura

$$\alpha' = \frac{\omega}{2n+1}.$$

On voit par là que la solution qui répond à $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$ est la même que celle qui répond à $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, quel que soit m.

Supposons maintenant m' différent de zéro, on aura

$$\alpha' = k\omega + k'\omega' \pm \frac{m\mu\omega + m'\mu\omega'}{2n+1}.$$

Si l'on détermine les deux nombres entiers μ et k' par l'équation

$$k' \pm \frac{m'\mu}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

et k par celle-ci:

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{\nu}{2n+1},$$

où ν est positif et moindre que $2n+1$, on aura

$$\alpha' = \frac{\omega' + \nu\omega}{2n+1}.$$

On voit par là, que pour obtenir toutes les valeurs différentes de v et p, il suffit de donner à α les valeurs:

$$(10)\qquad \frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\omega'}{2n+1},\ \frac{\omega'+\omega}{2n+1},\ \frac{\omega'+2\omega}{2n+1},\ \dots\ \frac{\omega'+2n\omega}{2n+1}.$$

Or toutes les solutions ainsi obtenues seront effectivement différentes entre elles; car si l'on attribue à α et à α' deux valeurs différentes de la série (10), il est clair qu'on ne pourra satisfaire à l'équation

$$\alpha' = k\omega + k'\omega' \pm \mu\alpha,$$

qui exprime une condition nécessaire de l'identité des deux solutions qui répondent à α et à α'.

Donc le nombre des solutions différentes qui répondent à $y = \frac{\delta}{\varepsilon}\cdot\frac{p}{v}$ est $2n+2$. Maintenant si l'on attribue à α toutes les valeurs (10), les formules (9) donneront $12(2n+2)$ solutions, et il est évident que toutes les $12(2n+2)$ valeurs correspondantes de y seront nécessairement différentes entre elles. Cependant il ne répond à ces $24(n+1)$ solutions que $12(n+1)$ valeurs du module. Il faut observer que la conclusion précédente n'a pas lieu pour le cas particulier où $n=0$. En effet, dans ce cas y n'aura que douze valeurs différentes, car les deux valeurs $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega'$, auxquelles dans ce cas se réduisent les quantités (10), donneront pour y une même valeur, savoir $y = x$. Il faut remarquer également que le module c ne doit pas avoir les valeurs zéro ou un. Dans ces cas la fonction $\int\frac{dx}{\varDelta}$ n'est plus une fonction elliptique, mais circulaire ou logarithmique.

On pourra mettre les huit dernières valeurs de y (9) sous une autre forme qui est à quelques égards plus élégante. En effet on pourra démontrer qu'on a

$$(11)\ \begin{cases} v - \delta p = (1 - x.\sqrt{c})(1 - 2k_1 x\sqrt{c} + c.x^2)(1 - 2k_2 x\sqrt{c} + cx^2)\dots \\ \qquad\qquad \dots(1 - 2k_n x\sqrt{c} + cx^2), \\ v - \delta p\sqrt{-1} = (1 - x\sqrt{-c})(1 - 2k_1' x\sqrt{-c} - cx^2)(1 - 2k_2' x\sqrt{-c} - cx^2)\dots \\ \qquad\qquad \dots(1 - 2k_n' x\sqrt{-c} - cx^2). \end{cases}$$

En changeant le signe de x, on aura des expressions semblables pour $v + \delta p$ et $v + \delta p\sqrt{-1}$. Les quantités $k_1, k_2, k_3, \dots k_n$ sont données par la formule

$$k_\mu = \frac{\varDelta(\mu\alpha)}{1 - c.\lambda^2(\mu\alpha)}.$$

On a pareillement

$$k_\mu' = \frac{\varDelta(\mu\alpha)}{1 + c.\lambda^2(\mu\alpha)},$$

$\varDelta(\theta)$ désignant la quantité

$$\frac{d\lambda\theta}{d\theta}=\pm\sqrt{(1-\lambda^2\theta)(1-e^2\lambda^2\theta)}.$$

Donc le numérateur et le dénominateur de la fraction (3), qui exprime la valeur de y, se trouvent décomposés en facteurs dans tous les cas.

Dans le cas où le module c est moindre que l'unité, les équations (9), nous font voir que généralement les modules des transformées sont imaginaires, excepté ceux qui répondent à

$$\alpha=\frac{\omega}{2n+1} \text{ et à } \alpha=\frac{\omega'-\omega}{2n+1},$$

et en même temps à l'une des solutions I, II, III, IV. Il n'y a donc que huit modules réels. Si l'on ne désire que ceux qui sont moindres que l'unité, on n'en aura que quatre. Cependant il pourra arriver, c ayant des valeurs particulières, qu'un plus grand nombre des modules transformés soient réels. Je ferai voir dans une autre occasion, comment on pourra trouver toutes ces valeurs particulières. Pour le moment je ferai connaître une manière d'exprimer toutes les valeurs du module c' à l'aide de produits infinis.

Si c est moindre que l'unité, ω sera une quantité réelle, ω' au contraire sera imaginaire; car on a

$$\omega'=2\,.\int_0^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\varDelta}=\omega+2\sqrt{-1}\,.\int_1^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}},$$

c'est-à-dire que, si l'on fait

$$\frac{\varpi}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}},$$

où

$$b=\sqrt{1-c^2},$$

on aura

$$\omega'=\omega+\varpi\sqrt{-1},$$

ϖ étant une quantité réelle comme ω. Cela posé, les $2n+2$ valeurs de α deviendront:

$$\frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i+\omega}{2n+1},\ \ldots\ \frac{\varpi i+(2n+1)\omega}{2n+1}.$$

A la place de ces valeurs on pourra aussi mettre celles-ci:

$$\frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i}{2n+1},\ \frac{\varpi i+2\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i+4\omega}{2n+1},\ \ldots\ \frac{\varpi i+4n\omega}{2n+1},$$

où $i=\sqrt{-1}$.

En faisant $c=1$, $e=\frac{c}{b}$ (formule 189 t. II, p. 177*), et mettant ensuite $b\omega$ et $b\varpi$ au lieu de ω et ϖ, et enfin $\alpha=b\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)$, on trouvera $\lambda\theta=f\alpha$, et la formule donnera après quelques réductions faciles,

$$\lambda\theta=\frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\,.\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right).\frac{\left[1-2q^2\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^4\right]\left[1-2q^4\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^8\right]\ldots}{\left[1-2q\,.\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^2\right]\left[1-2q^3\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^6\right]\ldots}, \tag{12}$$

où $q=e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$.

Pour calculer la valeur de ε d'après l'équation (8), il suffit de chercher les valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)$, $\ldots\ \lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)$ au moyen de la formule précédente, et de les multiplier ensuite entre elles. Si l'on fait d'abord $\alpha=\frac{\omega}{2n+1}$ on trouvera aisément

$$\varepsilon=2\,.\sqrt[4]{q^{2n+1}}\,.\left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1+q^{2n+1}}\cdot\frac{1+q^{4(2n+1)}}{1+q^{3(2n+1)}}\cdots\right)^2. \tag{13}$$

De même si l'on fait

$$\alpha=\frac{\varpi i+2\mu\omega}{2n+1},$$

et si l'on pose pour abréger

$$\delta_1=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

on parviendra à cette formule:

$$\varepsilon=2\,.\sqrt[4]{\delta_1^\mu\,.\,q^{\frac{1}{2n+1}}}\,.\left\{\frac{1+\left(\delta_1^\mu\,.\,q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^2}{1+\delta_1^\mu\,.\,q^{\frac{1}{2n+1}}}\cdot\frac{1+\left(\delta_1^\mu\,.\,q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^4}{1+\left(\delta_1^\mu\,.\,q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^3}\cdots\right\}^2. \tag{14}$$

Donc on voit que pour avoir toutes les valeurs de ε, il suffit de substituer dans l'expression

$$2\,.\sqrt[4]{q}\,.\left(\frac{1+q^2}{1+q}\cdot\frac{1+q^4}{1+q^3}\cdots\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\cdots\right)^2, \tag{15}$$

au lieu de q, les $2n+2$ valeurs q^{2n+1}, $q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1\,q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1^2\,q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\ldots\ \delta_1^{2n}\,q^{\frac{1}{2n+1}}$, $1, \delta_1, \delta_1^2, \ldots$ étant les racines de l'équation $\delta^{2n+1}=1$. Deux seulement

*) Voyez p. 347 de cette édition.

des valeurs de ε sont réelles, savoir celles qui répondent à la substitution de q^{2n+1} et $q^{\frac{1}{2n+1}}$, c'est-à-dire à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\varpi i}{2n+1}.$$

Il suit encore des formules précédentes que toutes les $2n+2$ valeurs de ε sont nécessairement différentes entre elles, excepté peut-être pour certaines valeurs particulières du module c. Ayant trouvé les valeurs de ε, on aura celles du module c' à l'aide des équations (9). Il est à remarquer que l'expression (15) est précisément la valeur de $\sqrt{c}$, comme on peut le voir en faisant $\theta = \frac{\omega}{2}$. Dans le cas où l'on suppose y de la forme $\frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$, le module c' sera égal à ε^2 d'après les formules (9), donc $\sqrt{c'} = \varepsilon$. Par conséquent dans ce cas le module c se changera successivement dans toutes les valeurs du module c', si l'on remplace dans la formule

$$(16) \qquad \sqrt{c} = 2 \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots\right)^2,$$

q par q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1 \sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2 \sqrt[2n+1]{q}$, $\ldots\ \delta_1^{2n} \sqrt[2n+1]{q}$.

Ce théorème s'accorde parfaitement avec le théorème énoncé par M. *Jacobi* dans le tome III. p. 193 de ce journal. Seulement à l'endroit cité la fonction de q, qui exprime la valeur de $\sqrt{c}$, est présentée sous une autre forme. Donc on trouverait immédiatement le théorème de ce géomètre, si l'on pouvait parvenir à démontrer l'identité des deux fonctions

$$(17) \qquad \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots\right)^2 = \frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}.$$

On pourra encore démontrer qu'on aura les $2n+2$ valeurs de c', en mettant dans la formule

$$(18) \qquad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \cdot \frac{1-r^3}{1+r^3} \cdot \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdots$$

les quantités r^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta_1 \sqrt[2n+1]{r}$, $\delta_1^2 \sqrt[2n+1]{r}$, $\ldots\ \delta_1^{2n} \sqrt[2n+1]{r}$, au lieu de r, la lettre r désignant la quantité $e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$. Cette quantité est liée à q par l'équation

$$\log\left(\frac{1}{r}\right) . \log\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2.$$

Pour avoir la valeur du coefficient α il faut connaitre celle de δ (8). Or on pourra la déduire aisément de la formule (12), en y faisant $\theta = \alpha$, $2\alpha, \ldots n\alpha$. On trouve de cette manière que les valeurs de δ qui répondent respectivement à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1}, \ \frac{\varpi i}{2n+1}, \ \frac{\varpi i + 2\omega}{2n+1}, \ \ldots \ \frac{\varpi i + 4n\omega}{2n+1},$$

sont égales à celles que prend l'expression

$$(19) \qquad \delta = 2\,\frac{\pi}{\omega} \sqrt[4]{q} \left(\frac{1-q^2}{1-q} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^3} \cdots\right)^2,$$

en y substituant au lieu de q les valeurs q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1 \sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2 \sqrt[2n+1]{q}$, $\ldots\ \delta_1^{2n} \sqrt[2n+1]{q}$.

XXIII.

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE LA SECONDE ET DE LA TROISIÈME ESPÈCE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

Si une intégrale algébrique $f(y, x) = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

on aura toujours

$$\int \frac{A+Bx^2}{1-\frac{x^2}{n^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int \frac{A'+B'y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} + k \log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation que y et x, savoir $f(m, n) = 0$. Dans le cas où n est infini, le premier membre deviendra seulement une fonction de la seconde espèce, et dans ce cas on pourra démontrer que

$$(a) \qquad \int (A+Bx^2) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int (A'+B'y^2) \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} + v,$$

où v est une fonction algébrique des variables x et y.

Au reste il est aisé de démontrer la formule (a). Il n'y a qu'à différentier l'équation

$$a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}$$

par rapport au module c. Je me réserve de donner dans un autre mémoire des développemens plus étendus sur le théorème ci-dessus.

XXIV.

NOTE SUR QUELQUES FORMULES ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Dans le second tome de ce journal j'ai donné plusieurs formules pour le développement des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, dans le cas où les modules e et c sont réels. Il sera facile d'en déduire des formules analogues pour le cas où e^2 est une quantité négative, comme nous allons voir.

Soit pour plus de simplicité $c = 1$. Cela posé, si l'on fait

$$(1) \qquad \lambda\alpha = f\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right), \quad \text{où } b = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}},$$

on trouvera aisément, par la définition de la fonction f, qu'on a

$$(2) \qquad \alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

en faisant

$$x = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad c = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}.$$

Donc le module c est plus petit que l'unité, et comme on a $b = \sqrt{1-c^2}$, b sera son complément.

On trouvera aussi

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\omega}{2} &= b\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}, \\ \frac{\varpi}{2} &= b\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\theta}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait

$$(4)\qquad \lambda'\alpha=\sqrt{1-\lambda^2\alpha},\ \lambda''\alpha=\sqrt{1-c^2\lambda^2\alpha},$$

on aura encore

$$(5)\qquad \lambda'\alpha=\varphi\left(\frac{\omega}{2}-b\alpha\right),\ \lambda''\alpha=bF\left(\frac{\omega}{2}-b\alpha\right),$$

et en faisant

$$(6)\qquad \frac{\omega'}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},\ \frac{\varpi'}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\theta}},$$

on a, en vertu de (3)

$$(7)\qquad \frac{\omega'}{\varpi'}=\frac{\omega}{\varpi},\ \omega=b\omega',\ \varpi=b\varpi'.$$

Considérons maintenant d'abord la formule (185) p. 176*), qui donne la valeur de $f\alpha$. Pour en déduire celle de la fonction $\lambda\alpha$, il suffit de mettre $\frac{\omega}{2}-b\alpha$ à la place de α. Faisons donc $\alpha=\frac{\omega}{2}-b\theta$, et posons pour abréger,

$$(8)\qquad \varrho=e^{-\frac{\theta\pi}{\varpi'}},\ r=e^{-\frac{\omega'}{\varpi'}\pi}:$$

alors la formule (185) donne sur le champ

$$\lambda\theta=A\,.\prod_0^{\infty}{}_m\frac{(1-r^{2m+1})^2-(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2}{(1+r^{2m+1})^2+(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2},$$

où

$$(8')\qquad A^{\frac{1}{2}}=\frac{(1+r)(1+r^3)\dots}{(1-r)(1-r^3)\dots}.$$

Or on a

$$(1-r^{2m+1})^2-(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2=(1-\varrho^2r^{2m})(1-\varrho^{-2}r^{2m+2})$$

et

$$(1+r^{2m+1})^2+(\varrho r^m-\varrho^{-1}r^{m+1})^2=(1+\varrho^2r^{2m})(1+\varrho^{-2}r^{2m+2}),$$

par conséquent l'expression de $\lambda\theta$ deviendra, en développant;

$$(9)\qquad \lambda\theta=A\,.\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}\cdot\frac{1-\varrho^2r^2}{1+\varrho^2r^2}\cdot\frac{1-\varrho^{-2}r^2}{1+\varrho^{-2}r^2}\cdot\frac{1-\varrho^2r^4}{1+\varrho^2r^4}\cdot\frac{1-\varrho^{-2}r^4}{1+\varrho^{-2}r^4}\cdots$$

Avec la même facilité on tirera des deux formules (184) et (186), en y faisant $\alpha=\frac{\omega}{2}-b\theta$,

*) P. 346 de cette édition.

$$(10)\qquad \lambda'\theta=A'\,.\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}\,.\frac{(1-\varrho^2r)(1-\varrho^{-2}r)(1-\varrho^2r^3)(1-\varrho^{-2}r^3)\dots}{(1+\varrho^2r^2)(1+\varrho^{-2}r^2)(1+\varrho^2r^4)(1+\varrho^{-2}r^4)\dots},$$

$$(11)\qquad \lambda''\theta=A''\,.\frac{2\varrho}{1+\varrho^2}\,.\frac{(1+\varrho^2r)(1+\varrho^{-2}r)(1+\varrho^2r^3)(1+\varrho^{-2}r^3)\dots}{(1+\varrho^2r^2)(1+\varrho^{-2}r^2)(1+\varrho^2r^4)(1+\varrho^{-2}r^4)\dots},$$

où A', A'' sont donnés par les formules

$$(12)\qquad \sqrt{A'}=\frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots},$$

$$(13)\qquad \sqrt{A''}=\frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots}.$$

On pourra trouver pour A, A', A'' d'autres expressions beaucoup plus simples et qui donneront des formules très remarquables.

Si l'on fait, dans la formule (9), $\theta=\frac{\omega'}{2}+\frac{\varpi'}{2}i$, on aura

$$\lambda\theta=f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{\sqrt{1+e^2}}{e}=\frac{1}{c},\ \text{et}\ \varrho^2=e^{-\pi i-\frac{\omega'}{\varpi'}\pi}=-r,$$

donc en substituant,

$$\frac{1}{c}=A\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1+r^3}{1-r^3}\cdot\frac{1+r^5}{1-r^5}\cdots\right)^2,$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (8'),

$$\frac{1}{c}=A^2,$$

d'où

$$A=\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

En faisant, dans l'expression de $\lambda'\theta$, $\theta=\frac{\omega'}{2}+\frac{\varpi'}{2}i$, on a

$$\lambda'\theta=-\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right)=-\frac{i}{e}=-i\frac{\sqrt{1-c^2}}{c},\ \text{et}\ \varrho^2=-r,$$

donc

$$i\,.\frac{b}{c}=4A'i\sqrt{r}\left(\frac{1+r^2}{1-r}\cdot\frac{1+r^4}{1-r^3}\cdots\right)^2,$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (12),

$$A'=\frac{1}{2\sqrt[4]{r}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Enfin si l'on fait dans la formule (11) $\theta = \frac{\omega'}{2}$, on trouvera

$$\lambda''\theta = \sqrt{1-c^2} = b, \quad \varrho^2 = r,$$

donc

$$b = 4A''\sqrt{r}\left(\frac{1+r^2}{1+r}\cdot\frac{1+r^4}{1+r^3}\cdots\right)^2 = 4A''\sqrt{r}\,.\,A'',$$

et par suite

$$A'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{r}}.$$

En comparant ces valeurs de A, A', A'' à celles données plus haut, on en déduira ces formules:

$$(14)\qquad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1-r^3}{1+r^3}\cdot\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots,$$

$$(15)\qquad \sqrt[4]{\frac{b}{c}} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{r}\,.\,\frac{1+r^2}{1-r}\cdot\frac{1+r^4}{1-r^3}\cdot\frac{1+r^6}{1-r^5}\cdots$$

$$(16)\qquad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{r}\,.\,\frac{1+r^2}{1+r}\cdot\frac{1+r^4}{1+r^3}\cdot\frac{1+r^6}{1+r^5}\cdots,$$

dont l'une est une suite des deux autres.

Si dans l'expression de $\lambda\theta$ on fait $\theta = 0$, après avoir divisé les deux membres par

$$1-\varrho^2 = 2\frac{\theta\pi}{\varpi'}+\cdots,$$

et qu'on remarque que $\frac{\lambda\theta}{\theta} = 1$, pour $\theta = 0$, on obtiendra

$$(17)\qquad \sqrt[4]{c}\,.\,\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = \frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots}.$$

De là on tire, en substituant la valeur de $\sqrt[4]{c}$:

$$(18)\qquad \begin{aligned}\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} &= \frac{(1+r)(1-r^2)(1+r^3)(1-r^4)\ldots}{(1-r)(1+r^2)(1-r^3)(1+r^4)\ldots}\\ &= (1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\ldots\times(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots\\ &= [(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots]^2\,.\,(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots\\ &\qquad\times(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots\end{aligned}$$

A l'aide des formules (16, 14, 18) il est facile de trouver l'expression des produits infinis

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots,\quad (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots.$$

En effet, si l'on fait pour abréger

$$(19)\qquad \begin{cases} P = (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots,\\ P' = (1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots,\end{cases}$$

et qu'on ait égard à la formule

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots} = (1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots = P.P',$$

les formules (14, 16) donneront sur le champ

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1}{P^2.P'},\quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt[8]{r}\,.\,\frac{P'}{P},$$

d'où l'on tire

$$(20)\qquad P = \sqrt[6]{2}\,.\,\sqrt[24]{\frac{r}{b^2c^2}},\quad P' = \frac{\sqrt[6]{b}\,.\,\sqrt[24]{r}}{\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[12]{c}}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{r}}.$$

On connait donc les produits P et P'. En les multipliant entre eux, il viendra

$$(21)\qquad (1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)\cdots = \frac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[6]{2c}\,.\,\sqrt[24]{r}}.$$

De même la formule (18) donne, en substituant les valeurs de P, P',

$$\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = P^3.P'.(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots,$$

et de là:

$$(22)\qquad (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots = \frac{\sqrt[12]{b}\,.\,\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{2}\,.\,\sqrt[24]{r}}\,.\,\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}},$$

formule due à M. *Jacobi* (Tome III. p. 193, où ce géomètre en présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes).

Des formules démontrées précédemment on peut aisément en tirer un grand nombre d'autres. En voici quelques unes des plus remarquables.

Si l'on fait pour abréger

$$(23)\qquad q = e^{-\frac{\varpi'}{\omega'}\pi},$$

on aura

$$(24)\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\,.\sin x\,.\,\frac{1-2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\ \cos 2x+q^2}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdots$$

$$(25)\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[4]{q}\,.\cos x\,.\,\frac{1+2q^2\cos 2x+q^4}{1-2q\ \cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2x+q^8}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdots$$

$$(26)\quad \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\sqrt{b}\,.\,\frac{1+2q\cos 2x+q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^3\cos 2x+q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}\cdots$$

Ces formules ont été déduites respectivement des formules (11, 10, 9), en changeant c en b, et en faisant ensuite

$$\theta=\frac{\varpi'}{2}+\frac{\omega'}{2}\sqrt{-1}+\frac{\omega'}{\pi}x\sqrt{-1}.$$

En comparant ces valeurs à celles que M. *Jacobi* a données pour les mêmes fonctions à l'endroit cité, on parviendra à des résultats remarquables. Ainsi, en faisant dans la formule (3) de M. *Jacobi*, $k=c$, on aura

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\cdots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\cdots} \\[2ex] =\dfrac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\cdots} \end{cases}$$

formule qui doit avoir lieu pour des valeurs quelconques réelles de x et q, en supposant q moindre que l'unité.

En prenant les logarithmes des valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$ etc., on trouvera après quelques réductions faciles:

$$(28)\quad \log\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\log 2-\tfrac{1}{2}\log c-\tfrac{1}{4}\frac{\varpi'}{\omega'}\pi+\log\sin x$$
$$+2\left(\cos 2x\,.\,\frac{q}{1+q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x\,.\,\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\,.\,\frac{q^3}{1+q^3}+\cdots\right),$$

$$(29)\quad \log\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\log 2+\tfrac{1}{2}\log b-\tfrac{1}{2}\log c-\tfrac{1}{4}\frac{\varpi'}{\omega'}\pi+\log\cos x$$
$$+2\left(\cos 2x\,.\,\frac{q}{1-q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x\,.\,\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\,.\,\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots\right),$$

$$(30)\quad \log\lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\tfrac{1}{2}\log b+4\left(\cos 2x\,.\,\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x\,.\,\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots\right).$$

En faisant $x=0$, on trouvera:

$$(31)\quad \log\left(\frac{1}{b}\right)=8\,.\left(\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1-q^6}+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{q^5}{1-q^{10}}+\cdots\right),$$

$$(32)\quad \log\left(\frac{1}{c}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varpi'}{\omega'}\pi-2\log 2+4\left(\frac{q}{1+q}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1+q^3}-\cdots\right)$$
$$=8\,.\left(\frac{r}{1-r^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{1-r^6}+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{r^5}{1-r^{10}}+\cdots\right).$$

En posant dans les formules (206) et (207) t. II, p. 180*): $\alpha=1-\frac{2x}{\pi}$, on trouvera les expressions suivantes:

$$(33)\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{4\pi}{c\omega'}\cdot\sqrt{q}\cdot\left(\sin x\,.\,\frac{1}{1-q}+\sin 3x\,.\,\frac{q}{1-q^3}+\sin 5x\,.\,\frac{q^2}{1-q^5}+\cdots\right),$$

$$(34)\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{4\pi}{c\omega'}\cdot\sqrt{q}\cdot\left(\cos x\,.\,\frac{1}{1+q}+\cos 3x\,.\,\frac{q}{1+q^3}+\cos 5x\,.\,\frac{q^2}{1+q^5}+\cdots\right).$$

Ces formules sont peut-être les plus simples qu'on puisse trouver pour exprimer les fonctions elliptiques en quantités connues.

Voici encore deux autres formules qu'on déduira des équations (204) et (205) t. II, p. 179*), en y faisant $\alpha=\frac{\omega}{2}-\omega x$:

$$(35)\quad \lambda'(\omega' x)=\frac{2\pi}{c\varpi'}\cdot\left(\frac{r^x-r^{1-x}}{1+r}-\frac{r^{3x}-r^{3-3x}}{1+r^3}+\frac{r^{5x}-r^{5-5x}}{1+r^5}-\cdots\right),$$

$$(36)\quad \lambda''(\omega' x)=\frac{2\pi}{\varpi'}\cdot\left(\frac{r^x+r^{1-x}}{1-r}-\frac{r^{3x}+r^{3-3x}}{1-r^3}+\frac{r^{5x}+r^{5-5x}}{1-r^5}-\cdots\right),$$

r désignant la même chose que précédemment.

Il est à remarquer que les quantités r et q sont liées entre elles par l'équation:

$$(37)\quad \log r\,.\,\log q=\pi^2.$$

A l'aide des expressions des modules c et b données plus haut, on pourra trouver une relation générale entre les modules de deux fonctions elliptiques qui sont réductibles l'une à l'autre. En effet on pourra démontrer, comme je l'ai fait dans un des derniers numéros des „Astronomische Nachrichten"**), que si deux fonctions elliptiques *réelles*

$$(38)\quad F(c,\theta)=\int_0\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},\quad F(c',\theta')=\int_0\frac{d\theta'}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta'}},$$

*) P. 350 de cette édition.

**) Mémoire XX de cette édition.

dont les modules c et c' sont moindres que l'unité, sont réductibles l'une à l'autre à l'aide d'une relation algébrique entre $\sin\theta$ et $\sin\theta'$, on peut trouver deux nombres entiers m et n, tels que l'équation

$$(39)\qquad n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b'^2\sin^2\theta}}$$

$$= m.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-b^2\sin^2\theta}} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta}}$$

soit satisfaite; b' est le complément de c', savoir $b'=\sqrt{1-c'^2}$.

Si cette condition est remplie, on pourra toujours déterminer $\sin\theta'$ *algébriquement* en $\sin\theta$ de sorte que

$$(40)\qquad F(c',\theta')=a.F(c,\theta),$$

où a est un coefficient constant.

Cela posé, désignons par ω'', ϖ'', r', q' les valeurs de ω', ϖ', r, q qui répondent au module c', on aura en vertu de la formule (14)

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{(1-r')(1-r'^3)(1-r'^5)\dots}{(1+r')(1+r'^3)(1+r'^5)\dots},$$

r' étant égal à $e^{-\frac{\omega''}{\varpi''}\pi}$. Mais l'équation (39) donne

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'},$$

donc

$$r' = e^{-\frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'}.\pi},$$

c'est-à-dire que

$$r' = r^{\frac{n}{m}}.$$

Donc on a ce théorème:

Une fonction elliptique réelle étant proposée, si son module c est donné par la formule:

$$(41)\qquad \sqrt[4]{c} = \frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots}$$

on aura le module de toute autre fonction elliptique réelle, réductible à la première, en mettant au lieu de r la puissance $r^{\frac{n}{m}}$, où n et m sont deux nombres entiers et positifs quelconques; autrement dit, on aura, en désignant par c' le module de la nouvelle fonction,

$$(42)\qquad \sqrt[4]{c'} = \frac{\left(1-r^{\frac{n}{m}}\right)\left(1-r^{3\frac{n}{m}}\right)\left(1-r^{5\frac{n}{m}}\right)\dots}{\left(1+r^{\frac{n}{m}}\right)\left(1+r^{3\frac{n}{m}}\right)\left(1+r^{5\frac{n}{m}}\right)\dots}.$$

En faisant

$$(43)\qquad \sqrt[4]{c} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}.\frac{1+q^6}{1+q^5}\dots,$$

on aura encore la formule suivante:

$$(44)\qquad \sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}.\left(\sqrt[8]{q}\right)^{\frac{m}{n}}.\frac{1+q^{2\frac{m}{n}}}{1+q^{\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{4\frac{m}{n}}}{1+q^{3\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{6\frac{m}{n}}}{1+q^{5\frac{m}{n}}}\dots.$$

Dans le cas particulier où le module c est $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a $\varpi'=\omega'$, donc

$$r = e^{-\pi} = q.$$

De là il suit que le module c de toute fonction elliptique réelle, qui est réductible à la fonction $\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}.\sin^2\theta}}$, est donné par la formule:

$$(45)\qquad \sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\mu\pi}}{1+e^{-\mu\pi}}.\frac{1-e^{-3\mu\pi}}{1+e^{-3\mu\pi}}.\frac{1-e^{-5\mu\pi}}{1+e^{-5\mu\pi}}\dots$$

$$= \sqrt{2}.e^{-\frac{\pi}{8\mu}}\frac{1+e^{-\frac{2\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\mu}}}.\frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\mu}}}.\frac{1+e^{-\frac{6\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\mu}}}\dots,$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

D'ailleurs, dans ce cas c pourra toujours être exprimé en termes finis à l'aide de radicaux.

Si l'on suppose $b'=c$, on a $c'=b$, $\omega''=\varpi'$, $\varpi''=\omega'$; mais

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\varpi'}{\omega'},$$

donc

$$\frac{\omega'}{\varpi'} = \sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\mu}.$$

De là nous concluons:

Si deux fonctions elliptiques réelles dont les modules sont complémens l'un de l'autre, sont reductibles entre elles, le module sera donné par la formule:

$$(46)\qquad \sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-\pi\sqrt{\mu}}}.\frac{1-e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}.\frac{1-e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}\dots,$$

et son complément b par celle-ci:

$$\sqrt[4]{b} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdots \tag{47}$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Nous ajouterons qu'on a en même temps

$$F(b, \theta') = k\sqrt{\mu} \, . \, F(c, \theta), \tag{48}$$

où k est un autre nombre rationnel. Cela donne immédiatement le théorème suivant:

Si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{A - By^2 + Cy^4}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{A + Bx^2 + Cx^4}} \tag{49}$$

est intégrable algébriquement, il faut nécessairement que le coefficient a soit égal *à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif*, en supposant que les quantités A, B, C, a soient réelles; et si a est de cette forme, on pourra trouver une infinité de valeurs convenables pour A, B, C.

Nous terminerons ces remarques par la démonstration d'une formule curieuse, qu'on tire de la première des équations (20), savoir de la formule

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \sqrt[6]{2} \, . \, \frac{\sqrt[24]{r}}{\sqrt[12]{bc}} \, .$$

En y changeant c en b, b se changera en c, et r en q, donc:

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = \sqrt[6]{2} \, . \, \frac{\sqrt[24]{q}}{\sqrt[12]{bc}} \, .$$

En comparant ces formules, on voit que l'équation

$$\frac{1}{\sqrt[24]{r}} \cdot (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}} (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots, \tag{50}$$

a lieu toutes les fois que les quantités r et q sont moindres que l'unité et liées entre elles par l'équation

$$\log r \, . \, \log q = \pi^2.$$

Il existe un grand nombre de relations semblables entre q et r, par exemple la suivante:

$$\sqrt[4]{\log \frac{1}{r}} \cdot \left(\tfrac{1}{2} + r + r^4 + r^9 + \ldots\right) = \sqrt[4]{\log \frac{1}{q}} \cdot \left(\tfrac{1}{2} + q + q^4 + q^9 + \ldots\right),$$

qui est due à M. *Cauchy* (Exercices de mathématiques). On pourra la déduire de la formule

$$\sqrt{\frac{\omega'}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots,$$

donnée par M. *Jacobi*, en y changeant c en b.

XXV.

MÉMOIRE SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUEMENT.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Quoique la résolution algébrique des équations ne soit pas possible en général, il y a néanmoins des équations particulières de tous les degrés qui admettent une telle résolution. Telles sont par exemple les équations de la forme $x^n - 1 = 0$. La résolution de ces équations est fondée sur certaines relations qui existent entre les racines. J'ai cherché à généraliser cette méthode en supposant que deux racines d'une équation donnée soient tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationnellement l'une par l'autre, et je suis parvenu à ce resultat, qu'une telle équation peut toujours être résolue à l'aide d'un certain nombre d'équations *moins élevées*. Il y a même des cas où l'on peut résoudre *algébriquement* l'équation donnée elle-même. Cela arrive par exemple toutes les fois que, l'équation donnée étant irréductible, son degré est un nombre premier. La même chose a encore lieu si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x, \quad \text{où} \quad \theta^n x = x,$$

θx étant une fonction rationnelle de x, et $\theta^2 x$, $\theta^3 x$, ... des fonctions de la même forme que θx, prise deux fois, trois fois, etc.

L'équation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, où n est un nombre premier, est dans ce cas; car en désignant par α une racine primitive pour le module n, on peut, comme on sait, exprimer les $n - 1$ racines par

$$x,\ x^{\alpha},\ x^{\alpha^2},\ x^{\alpha^3},\ \ldots\ x^{\alpha^{n-2}}, \quad \text{où} \quad x^{\alpha^{n-1}} = x,$$

c'est-à-dire, en faisant $x^{\alpha} = \theta x$, par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \ldots\ \theta^{n-2} x, \quad \text{où} \quad \theta^{n-1} x = x.$$

La même propriété appartient à une certaine classe d'équations à laquelle je suis parvenu par la théorie des fonctions elliptiques.

En général j'ai démontré le théorème suivant:

„Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre elles de telle sorte, que *toutes* ces racines puissent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons par x; si de plus, en désignant par θx, $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, on a

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x,$$

l'équation dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même, si l'on suppose l'équation irréductible, et son degré exprimé par

$$\alpha_1^{\nu_1} \cdot \alpha_2^{\nu_2} \ldots \alpha_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\omega$ sont des nombres premiers différens, on pourra ramener la résolution de cette équation à celle de ν_1 équations du degré α_1, de ν_2 équations du degré α_2, de ν_3 équations du degré α_3 etc.“

Après avoir exposé cette théorie en général, je l'appliquerai aux fonctions circulaires et elliptiques.

§ 1.

Nous allons d'abord considérer le cas où l'on suppose que deux racines d'une équation irréductible*) soient liées tellement entre elles, que l'une puisse être exprimée rationnellement par l'autre.

Soit

$$\varphi x = 0 \tag{1}$$

une équation du degré μ, et x' et x_1 les deux racines qui sont liées entre-elles par l'équation

*) Une équation $\varphi x = 0$, dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues $a, b, c, \ldots$ s'appelle *irréductible*, lorsqu'il est impossible d'exprimer aucune de ses racines par une équation moins élevée, dont les coefficiens soient également des fonctions rationnelles de $a, b, c \ldots$

(2) $$x' = \theta x_1,$$

où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues. La quantité x' étant racine de l'équation, on aura $\varphi(x') = 0$, et en vertu de l'équation (2)

(3) $$\varphi(\theta x_1) = 0.$$

Je dis maintenant que cette équation aura encore lieu, si au lieu de x_1 on met une autre racine quelconque de l'équation proposée. On a effectivement le théorème suivant*).

Théorème I. „Si une des racines d'une équation irréductible $\varphi x = 0$ satisfait à une autre équation $fx = 0$, où fx désigne une fonction rationnelle de x et des quantités connues qu'on suppose contenues dans φx; cette dernière équation sera encore satisfaite en mettant au lieu de x une racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$."

Or le premier membre de l'équation (3) est une fonction rationnelle de x_1 donc on aura

(4) $$\varphi(\theta x) = 0, \text{ si } \varphi x = 0,$$

c'est-à-dire que si x est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, la quantité θx le sera également.

Maintenant, d'après ce qui précède, θx_1 est racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc $\theta\theta x_1$ le sera aussi; $\theta\theta\theta x_1$, etc. le seront également, en répétant l'opération désignée par θ un nombre quelconque de fois.

---

*) Ce théorème se démontre aisément comme il suit:
Quelle que soit la fonction rationnelle fx, on peut toujours faire $fx = \frac{M}{N}$, où M et N sont des fonctions entières de x, qui n'ont pas de facteur commun; mais une fonction entière de x peut toujours être mise sous la forme $P + Q \cdot \varphi x$, où P et Q sont des fonctions entières, telles que le degré de P soit moindre que celui de la fonction φx. En faisant donc $M = P + Q \cdot \varphi x$, on aura $fx = \frac{P + Q \cdot \varphi x}{N}$. Cela posé, soit x_1 la racine de $\varphi x = 0$ qui satisfait en même temps à $fx = 0$; x_1 sera également une racine de l'équation $P = 0$. Or si P n'est pas zéro pour une valeur quelconque de x, cette équation donnera x_1 comme racine d'une équation d'un degré moindre que celui de $\varphi x = 0$, ce qui est contre l'hypothèse; donc $P = 0$ et par suite $fx = \varphi x \frac{Q}{N}$, d'où l'on voit que fx sera égal à zéro en même temps que φx c. q. f. d.

Soit pour abréger

$$\theta\theta x_1 = \theta^2 x_1; \ \theta\theta^2 x_1 = \theta^3 x_1; \ \theta\theta^3 x_1 = \theta^4 x_1 \text{ etc.},$$

on aura une série de quantités,

(5) $$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \theta^3 x_1, \ \theta^4 x_1, \ \ldots,$$

qui toutes seront des racines de l'équation $\varphi x = 0$. La série (5) aura une infinité de termes; mais l'équation $\varphi x = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines différentes, il faut que plusieurs quantités de la série (5) soient égales entre elles.

Supposons donc

$$\theta^m x_1 = \theta^{m+n} x_1,$$

ou bien

(6) $$\theta^n(\theta^m x_1) - \theta^m x_1 = 0,$$

en remarquant que $\theta^{m+n} x_1 = \theta^n \theta^m x_1$.

Le premier membre de l'équation (6) est une fonction rationnelle de $\theta^m x_1$; or cette quantité est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc en vertu du théorème énoncé plus haut, on pourra mettre x_1 au lieu de $\theta^m x_1$. Cela donne

(7) $$\theta^n x_1 = x_1,$$

où l'on peut supposer que n ait la plus petite valeur possible, de sorte que toutes les quantités

(8) $$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \ \ldots \ \theta^{n-1} x_1$$

soient différentes entre elles.

L'équation (7) donnera

$$\theta^k \theta^n x_1 = \theta^k x_1, \text{ ou } \theta^{n+k} x_1 = \theta^k x_1.$$

Cette formule fait voir qu'à partir du terme $\theta^{n-1} x_1$, les termes de la suite (8) se reproduiront dans le même ordre. Les n quantités (8) seront donc les seules de la série (5) qui soient différentes entre elles.

Cela posé, si $\mu > n$, soit x_2 une autre racine de l'équation proposée, qui n'est pas contenue dans la suite (8), il suit du théorème I que toutes les quantités

(9) $$x_2, \ \theta x_2, \ \theta^2 x_2, \ \ldots \ \theta^{n-1} x_2, \ \ldots$$

seront également des racines de l'équation proposée. Or je dis que cette suite ne contiendra que n quantités différentes entre elles et des quantités (8). En effet, ayant $\theta^n x_1 - x_1 = 0$, on aura en vertu du théorème 1, $\theta^n x_2 = x_2$, et par suite

$$\theta^{n+k} x_2 = \theta^k x_2.$$

Donc les seules quantités de la série (9) qui *puissent* être différentes entre elles, seront les n premières

$$x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_2. \tag{10}$$

Or celles-ci seront nécessairement différentes entre elles et des quantités (8). En effet, si l'on avait

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_2,$$

où m et ν sont moindres que n, il en résulterait $\theta^m x_1 = \theta^\nu x_1$, ce qui est impossible, car toutes les quantités (8) sont différentes entre elles. Si au contraire on avait

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_1,$$

il en résulterait

$$\theta^{n-m} \theta^\nu x_1 = \theta^{n-m} \theta^m x_2 = \theta^{n-m+m} x_2 = \theta^n x_2 = x_2,$$

donc

$$x_2 = \theta^{n-m+\nu} x_1,$$

c'est-à-dire que la racine x_2 serait contenue dans la série (8), ce qui est contre l'hypothèse.

Le nombre des racines contenues dans (8) et (10) est $2n$, donc μ sera ou égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre.

Soit dans le dernier cas x_3 une racine différente des racines (8) et (10), on aura une nouvelle série de racines

$$x_3,\ \theta x_3,\ \theta^2 x_3,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_3,\ \ldots,$$

et l'on démontrera, précisément de la même manière, que les n premières de ces racines sont différentes entre elles et des racines (8) et (10).

En continuant ce procédé jusqu'à ce que toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$ soient épuisées, on verra que les μ racines de cette équation seront partagées en plusieurs groupes, composés de n termes; donc μ sera divisible par n, et en nommant m le nombre des groupes, on aura

$$\mu = m . n. \tag{11}$$

Les racines elles-mêmes seront

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_1, \\ x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_2, \\ x_3,\ \theta x_3,\ \theta^2 x_3,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m,\ \theta x_m,\ \theta^2 x_m,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_m. \end{array} \right. \tag{12}$$

Si $m = 1$, on aura $n = \mu$, et les μ racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront exprimées par

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x_1. \tag{13}$$

Dans ce cas l'équation $\varphi x = 0$ est résoluble algébriquement, comme on le verra dans la suite. Mais la même chose n'aura pas toujours lieu lorsque m est plus grand que l'unité. On pourra seulement réduire la résolution de l'équation $\varphi x = 0$ à celle d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficiens dépendront d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré; c'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

§ 2.

Considérons un quelconque des groupes (12), par exemple le premier, et faisons

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)(x - \theta x_1)(x - \theta^2 x_1) \ldots (x - \theta^{n-1} x_1) \\ \qquad = x^n + A_1' x^{n-1} + A_1'' x^{n-2} + \cdots + A_1^{(n-1)} x + A_1^{(n)} = 0; \end{array} \right. \tag{14}$$

les racines de cette équation seront

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_1,$$

et les coefficiens A_1', A_1'', $\ldots$ $A_1^{(n)}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de ces quantités. Nous allons voir qu'on peut faire dépendre la détermination de ces coefficiens de la résolution d'une seule équation du degré m.

Pour le montrer, considérons en général une fonction quelconque rationnelle et symétrique de x_1, θx_1, $\theta^2 x_1$, $\ldots$ $\theta^{n-1} x_1$, et soit

$$y_1 = f(x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{n-1} x_1) \tag{15}$$

cette fonction.

En mettant au lieu de x_1 successivement x_2, x_3, $\ldots$ x_m, la fonction y_1

prendra m valeurs différentes, que nous désignerons par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$. Cela posé, si l'on forme une équation du degré m:

$$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m = 0, \tag{16}$$

dont les racines soient $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$, je dis que les coefficiens de cette équation pourront être exprimés rationnellement par les quantités connues, qu'on suppose contenues dans l'équation proposée.

Les quantités $\theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ étant des fonctions rationnelles de x_1, la fonction y_1 le sera également. Soit

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = F x_1, \\ \text{nous aurons aussi} \\ y_2 = F x_2,\ y_3 = F x_3,\ \ldots y_m = F x_m. \end{array}\right. \tag{17}$$

En mettant dans l'équation (15) successivement $\theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ au lieu de x_1, et en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$, $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$, $\theta^{n+2} x_1 = \theta^2 x_1$ etc., il est clair que la fonction y_1 ne change pas de valeur; on aura donc

$$y_1 = F x_1 = F(\theta x_1) = F(\theta^2 x_1) = \cdots = F(\theta^{n-1} x_1).$$

De même

$$y_2 = F x_2 = F(\theta x_2) = F(\theta^2 x_2) = \cdots = F(\theta^{n-1} x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m = F x_m = F(\theta x_m) = F(\theta^2 x_m) = \cdots = F(\theta^{n-1} x_m).$$

En élevant chaque membre de ces équations à la $\nu^{ième}$ puissance, on en tire

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^\nu = \frac{1}{n} \cdot [(F x_1)^\nu + (F\theta x_1)^\nu + \cdots + (F\theta^{n-1} x_1)^\nu], \\ y_2^\nu = \frac{1}{n} \cdot [(F x_2)^\nu + (F\theta x_2)^\nu + \cdots + (F\theta^{n-1} x_2)^\nu], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m^\nu = \frac{1}{n} \cdot [(F x_m)^\nu + (F\theta x_m)^\nu + \cdots + (F\theta^{n-1} x_m)^\nu]. \end{array}\right. \tag{18}$$

En ajoutant ces dernières équations, on aura la valeur de

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu$$

exprimée en fonction *rationnelle* et *symétrique* de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, savoir:

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu = \frac{1}{n} \Sigma (F x)^\nu. \tag{19}$$

Le second membre de cette équation peut être exprimé rationnellement par les coefficiens de φx et θx, c'est-à-dire par des quantités connues. Donc en faisant

$$r_\nu = y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \cdots + y_m^\nu, \tag{20}$$

on aura la valeur de r_ν, pour une valeur quelconque entière de ν. Or, connaissant $r_1, r_2, \ldots r_m$, on en pourra tirer rationnellement la valeur de toute fonction symétrique des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$. On pourra donc trouver de cette manière tous les coefficiens de l'équation (16), et par conséquent déterminer toute fonction rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ à l'aide d'une équation du $m^{ième}$ degré. Donc on aura de cette manière les coefficiens de l'équation (14), dont la résolution donnera ensuite la valeur de x_1 etc.

On voit par là qu'on peut ramener la résolution de l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $\mu = m.n$, à celle d'un certain nombre d'équations du degré m et n. Il suffit même, comme nous allons voir, de résoudre une seule équation du degré m, et m équations du degré n.

Soit ψx_1 l'un quelconque des coefficiens $A_1', A_1'', \ldots A_1^{(n)}$; faisons

$$t_\nu = y_1^\nu . \psi x_1 + y_2^\nu . \psi x_2 + y_3^\nu . \psi x_3 + \cdots + y_m^\nu . \psi x_m. \tag{21}$$

Puisque $y_1^\nu \psi x_1$ est une fonction symétrique des quantités $x_1, \theta x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$, on aura, en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$, $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$ etc.

$$y_1^\nu \psi x_1 = (F x_1)^\nu . \psi x_1 = (F\theta x_1)^\nu . \psi\theta x_1 = \cdots = (F\theta^{n-1} x_1)^\nu . \psi\theta^{n-1} x_1,$$

donc:

$$y_1^\nu \psi x_1 = \frac{1}{n} \cdot [(F x_1)^\nu \psi x_1 + (F\theta x_1)^\nu \psi\theta x_1 + \cdots + (F\theta^{n-1} x_1)^\nu \psi\theta^{n-1} x_1].$$

On aura de semblables expressions pour $y_2^\nu \psi x_2, y_3^\nu \psi x_3, \ldots y_m^\nu \psi x_m$, en mettant $x_2, x_3, \ldots x_m$ à la place de x_1. En substituant ces valeurs, on voit que t_ν deviendra une fonction *rationnelle* et *symétrique* de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$. En effet, on aura

$$t_\nu = \frac{1}{n} \Sigma (F x)^\nu \psi x. \tag{22}$$

Donc on peut exprimer t_ν rationnellement par des quantités connues.

Cela posé, en faisant $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots m-1$, la formule (21) donnera

$$\begin{aligned}
\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_m &= t_0, \\
y_1 \psi x_1 + y_2 \psi x_2 + \cdots + y_m \psi x_m &= t_1, \\
y_1^2 \psi x_1 + y_2^2 \psi x_2 + \cdots + y_m^2 \psi x_m &= t_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{m-1} \psi x_1 + y_2^{m-1} \psi x_2 + \cdots + y_m^{m-1} \psi x_m &= t_{m-1}.
\end{aligned}$$

On tirera aisément de ces équations, linéaires par rapport à $\psi x_1, \psi x_2, \ldots \psi x_m$, les valeurs de ces quantités en fonction rationnelle de $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$. En effet, en faisant

$$(23) \quad \begin{aligned}&(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_m) \\ &\qquad = y^{m-1} + R_{m-2} y^{m-2} + R_{m-3} y^{m-3} + \cdots + R_1 y + R_0,\end{aligned}$$

on aura

$$(24) \qquad \psi x_1 = \frac{t_0 R_0 + t_1 R_1 + t_2 R_2 + \cdots + t_{m-2} R_{m-2} + t_{m-1}}{R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \cdots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}}.$$

Les quantités $R_0, R_1, \ldots R_{m-2}$ sont des fonctions rationnelles de $y_2, y_3, y_4, \ldots y_m$, mais on peut les exprimer par y_1 seul. En effet, en multipliant l'équation (23) par $y - y_1$, on aura

$$\begin{aligned}(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_m) &= y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m \\ &= y^m + (R_{m-2} - y_1) y^{m-1} + (R_{m-3} - y_1 R_{m-2}) y^{m-2} + \cdots,\end{aligned}$$

d'où l'on tirera, en comparant les puissances égales de y:

$$(25) \quad \begin{cases} R_{m-2} = y_1 + p_1, \\ R_{m-3} = y_1 R_{m-2} + p_2 = y_1^2 + p_1 y_1 + p_2, \\ R_{m-4} = y_1 R_{m-3} + p_3 = y_1^3 + p_1 y_1^2 + p_2 y_1 + p_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_0 = y_1^{m-1} + p_1 y_1^{m-2} + p_2 y_1^{m-3} + \cdots + p_{m-1}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs, l'expression de ψx_1 deviendra une fonction rationnelle de y_1 et de quantités connues, et l'on voit qu'il est toujours possible de trouver ψx_1 de cette manière, à condition que le dénominateur

$$R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \cdots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}$$

ne sera pas zéro. Or on peut donner à la fonction y_1 une infinité de formes qui rendront impossible cette équation. Par exemple en faisant

$$(26) \qquad y_1 = (\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1)(\alpha - \theta^2 x_1) \cdots (\alpha - \theta^{n-1} x_1),$$

où α est une indéterminée, le dénominateur dont il s'agit ne peut pas s'évanouir. En effet ce dénominateur étant la même chose que

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots (y_1 - y_m),$$

on aurait, dans le cas où il etait nul,

$$y_1 = y_k,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1) \ldots (\alpha - \theta^{n-1} x_1) = (\alpha - x_k)(\alpha - \theta x_k) \ldots (\alpha - \theta^{n-1} x_k),$$

ce qui est impossible, car toutes les racines $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ sont différentes de celles-ci: $x_k, \theta x_k, \theta^2 x_k, \ldots \theta^{n-1} x_k$.

Les coefficiens $A_1', A_1'', \ldots A_1^{(n)}$ peuvent donc s'exprimer rationnellement par une même fonction y_1, dont la détermination dépend d'une équation du degré m.

Les racines de l'équation (14) sont

$$x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1 \ldots \theta^{n-1} x_1.$$

En remplaçant dans les coefficiens A_1', A_1'' etc. y_1 par $y_2, y_3, \ldots y_m$, on obtiendra $m-1$ autres équations, dont les racines seront respectivement:

$$\begin{aligned} &x_2, \theta x_2, \ldots \theta^{n-1} x_2, \\ &x_3, \theta x_3, \ldots \theta^{n-1} x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_m, \theta x_m, \ldots \theta^{n-1} x_m. \end{aligned}$$

Théorème II. L'équation proposée $\varphi x = 0$ peut donc être décomposée en m équations du degré n, dont les coefficiens sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une seule équation du degré m.

Cette dernière équation n'est pas généralement résoluble algébriquement quand elle passe le quatrième degré, mais l'équation (14) et les autres semblables le sont toujours, en supposant connus les coefficiens A_1', A_1'' etc., comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

§ 3.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas où m est plus grand que l'unité. Maintenant nous allons nous occuper du cas où $m=1$. Dans ce cas on aura $\mu=n$, et les racines de l'équation $\varphi x=0$ seront

$$(27) \qquad x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots\ \theta^{\mu-1}x_1.$$

Je dis que toute équation dont les racines peuvent être exprimées de cette manière est résoluble algébriquement.

Soit α une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu-1=0$, et faisons

$$(28) \qquad \psi x=(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\alpha^3\theta^3 x+\cdots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

ψx sera une fonction rationnelle de x. Or cette fonction peut s'exprimer rationnellement par les coefficiens de φx et θx. En mettant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura

$$\psi\theta^m x=(\theta^m x+\alpha\theta^{m+1}x+\cdots+\alpha^{\mu-m}\theta^\mu x+\alpha^{\mu-m+1}\theta^{\mu+1}x+\cdots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu+m-1}x)^\mu;$$

maintenant on a

$$\theta^\mu x=x,\ \theta^{\mu+1}x=\theta x,\ \ldots\ \theta^{\mu+m-1}x=\theta^{m-1}x,$$

donc

$$\psi\theta^m x=$$
$$(\alpha^{\mu-m}x+\alpha^{\mu-m+1}\theta x+\cdots+\alpha^{\mu-1}\theta^{m-1}x+\theta^m x+\alpha\theta^{m+1}x+\cdots+\alpha^{\mu-m-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu.$$

Or $\alpha^\mu=1$, donc

$$\begin{aligned}\psi\theta^m x&=[\alpha^{\mu-m}(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\cdots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)]^\mu\\&=\alpha^{\mu(\mu-m)}(x+\alpha\theta x+\cdots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,\end{aligned}$$

donc, puisque $\alpha^{\mu(\mu-m)}=1$, on voit que

$$\psi\theta^m x=\psi x.$$

En faisant $m=0, 1, 2, 3, \ldots \mu-1$, et en ajoutant ensuite, on trouvera

$$(29) \qquad \psi x=\frac{1}{\mu}(\psi x+\psi\theta x+\psi\theta^2 x+\cdots+\psi\theta^{\mu-1}x).$$

ψx sera donc une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x=0$, et par conséquent on pourra l'exprimer rationnellement par des quantités connues.

Soit $\psi x=v$, on tire de l'équation (28)

$$(30) \qquad \sqrt[\mu]{v}=x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\cdots+\alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x.$$

Cela posé, désignons les μ racines de l'équation

$$\alpha^\mu-1=0$$

par

$$(31) \qquad 1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{\mu-1},$$

et les valeurs correspondantes de v par

$$(32) \qquad v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_{\mu-1},$$

l'équation (30) donnera, en mettant à la place de α successivement $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{\mu-1}$:

$$(33) \qquad \begin{cases}\sqrt[\mu]{v_0}=x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{\mu-1}x,\\ \sqrt[\mu]{v_1}=x+\alpha_1\theta x+\alpha_1^2\theta^2 x+\cdots+\alpha_1^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x,\\ \sqrt[\mu]{v_2}=x+\alpha_2\theta x+\alpha_2^2\theta^2 x+\cdots+\alpha_2^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}=x+\alpha_{\mu-1}\theta x+\alpha_{\mu-1}^2\theta^2 x+\cdots+\alpha_{\mu-1}^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x.\end{cases}$$

En ajoutant ces équations on aura

$$(34) \qquad x=\frac{1}{\mu}\left[-A+\sqrt[\mu]{v_1}+\sqrt[\mu]{v_2}+\sqrt[\mu]{v_3}+\cdots+\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right],$$

où l'on a remplacé $\sqrt[\mu]{v_0}$, qui est une quantité constante, par $-A$.

On connaît par là la racine x. Généralement on trouve la racine $\theta^m x$ en multipliant la première des équations (33) par 1, la seconde par α_1^{-m}, la troisième par α_2^{-m} etc., et en ajoutant; il viendra alors

$$(35) \qquad \theta^m x=\frac{1}{\mu}\left[-A+\alpha_1^{-m}.\sqrt[\mu]{v_1}+\alpha_2^{-m}.\sqrt[\mu]{v_2}+\cdots+\alpha_{\mu-1}^{-m}.\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}\right].$$

En donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots \mu-1$, on aura la valeur de toutes les racines de l'équation.

L'expression précédente des racines contient généralement $\mu-1$ radicaux différens de la forme $\sqrt[\mu]{v}$. Elle aura donc $\mu^{\mu-1}$ valeurs, tandis que la racine de l'équation $\varphi x = 0$ n'en a que μ. Mais on peut donner à l'expression des racines une autre forme, qui n'est pas sujette à cette difficulté. En effet, lorsque la valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ est fixée, celle des autres radicaux le sera également, comme nous allons le voir.

Quel que soit le nombre μ, premier ou non, on peut toujours trouver une racine α de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, telle que les racines

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots\ \alpha_{\mu-1}$$

puissent être représentées par

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \dots\ \alpha^{\mu-1}. \tag{36}$$

Cela posé, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[\mu]{v_k} &= x + \alpha^k.\theta x + \alpha^{2k}\theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)k}.\theta^{\mu-1}x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} &= x + \alpha.\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu-1}x, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = {} & (x + \alpha^k\theta x + \alpha^{2k}\theta^2 x + \cdots + \alpha^{(\mu-1)k}\theta^{\mu-1}x) \\ & \times (x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \cdots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^{\mu-k}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle de x, qui ne changera pas de valeur en mettant au lieu de x une autre racine quelconque $\theta^m x$, comme on le verra aisément, en faisant cette substitution et en ayant égard à l'équation $\theta^{\mu+\nu}x = \theta^\nu x$. En désignant donc la fonction dont il s'agit par ψx, on aura

$$\sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \psi x = \psi\theta x = \psi\theta^2 x = \cdots = \psi\theta^{\mu-1}x,$$

d'où

$$\sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \frac{1}{\mu}(\psi x + \psi\theta x + \psi\theta^2 x + \cdots + \psi\theta^{\mu-1}x). \tag{39}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines, donc on peut l'exprimer en quantités connues. En le désignant par a_k, on aura

$$\sqrt[\mu]{v_k}(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = a_k, \tag{40}$$

d'où

$$\sqrt[\mu]{v_k} = \frac{a_k}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^k. \tag{41}$$

A l'aide de cette formule l'expression de la racine x deviendra

$$x = \frac{1}{\mu}\left(-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^2 + \frac{a_3}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^3 + \cdots + \frac{a_{\mu-1}}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-1}\right). \tag{42}$$

Cette expression de x n'a que μ valeurs différentes, qu'on obtiendra en mettant au lieu de $\sqrt[\mu]{v_1}$ les μ valeurs:

$$\sqrt[\mu]{v_1},\ \alpha\sqrt[\mu]{v_1},\ \alpha^2\sqrt[\mu]{v_1},\ \dots\ \alpha^{\mu-1}\sqrt[\mu]{v_1}.$$

La méthode que nous avons suivie précédemment pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$ est au fond la même que celle dont s'est servi M. *Gauss* dans ses „Disquisitiones arithmeticae" art. 359 et suiv. pour résoudre une certaine classe d'équations, auxquelles il était parvenu dans ses recherches sur l'équation $x^n - 1 = 0$. Ces équations ont la même propriété que notre équation $\varphi x = 0$; savoir que toutes ses racines peuvent être représentées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{\mu-1}x,$$

θx étant une fonction rationnelle.

En vertu de ce qui précède nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème III. Si les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{\mu-1}x,$$

où $\theta^\mu x = x$, et où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues, cette équation sera toujours résoluble algébriquement.

On en tire le suivant, comme corollaire:

Théorème IV. Si deux racines d'une équation *irréductible*, dont le degré est un nombre *premier*, sont tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer l'une *rationnellement* par l'autre, cette équation sera résoluble algébriquement.

En effet cela suit immédiatement de l'équation (11)

$$\mu = m.n;$$

car on doit avoir $m = 1$, si μ est un nombre premier; et par conséquent les racines s'expriment par $x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{\mu-1}x$.

Dans le cas où toutes les quantités connues de φx et θx sont *réelles*, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ jouiront d'une propriété remarquable, que nous allons démontrer.

Par ce qui précède on voit que $a_{\mu-1}$ peut être exprimée rationnellement par les coefficiens de φx et θx, et par α. Donc si ces coefficiens sont réels, $a_{\mu-1}$ doit avoir la forme.

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1},$$

où $\sqrt{-1}$ n'entre qu'à cause de la quantité α, qui en général est imaginaire, et qui généralement peut avoir la valeur

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{2\pi}{\mu}.$$

En changeant donc dans α le signe de $\sqrt{-1}$ et désignant par $a'_{\mu-1}$ la valeur correspondante de $a_{\mu-1}$, on aura

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Or d'après la formule (40), il est évident que $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$; donc $b = 0$ et

$$a_{\mu-1} = a. \tag{43}$$

Donc $a_{\mu-1}$ a toujours une valeur réelle. On démontrera de la même manière que

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

où c et d sont réels.

Donc

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c,$$
$$v_1 v_{\mu-1} = a^{\mu}.$$

De là on tire

$$v_1 = c + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a^{\mu} - c^2}, \tag{44}$$

et par suite $\sqrt{a^{\mu} - c^2} = d$; d'où l'on voit que $\sqrt{a^{\mu} - c^2}$ a toujours une valeur réelle.

Cela posé, on peut faire

$$c = (\sqrt{\varrho})^{\mu}\cos\delta, \quad \sqrt{a^{\mu} - c^2} = (\sqrt{\varrho})^{\mu}\sin\delta, \tag{45}$$

où ϱ est une quantité positive.

On en tire

$$c^2 + (\sqrt{a^{\mu} - c^2})^2 = (\sqrt{\varrho})^{2\mu},$$

c'est-à-dire:

$$a^{\mu} = \varrho^{\mu}; \tag{46}$$

par conséquent ϱ sera égal à la valeur numérique de a. On voit en outre que a est toujours positif, si μ est un nombre impair.

Connaissant ϱ et δ, on aura

$$v_1 = (\sqrt{\varrho})^{\mu}\,.\,(\cos\delta + \sqrt{-1}\,.\,\sin\delta)$$

et par suite

$$\sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt{\varrho}\,.\left[\cos\left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right) + \sqrt{-1}\,.\,\sin\left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu}\right)\right].$$

En substituant cette valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ dans l'expression de x (42), elle prendra la forme:

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{\mu}\Big[& -A + \sqrt{\varrho}\,.\left(\cos\frac{\delta+2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{\delta+2m\pi}{\mu}\right) \\ & + (f + g\sqrt{-1})\left(\cos\frac{2(\delta+2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{2(\delta+2m\pi)}{\mu}\right) \\ & + (F + G\sqrt{-1})\sqrt{\varrho}\,.\left(\cos\frac{3(\delta+2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{3(\delta+2m\pi)}{\mu}\right) \\ & + (f_1 + g_1\sqrt{-1})\left(\cos\frac{4(\delta+2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\,\sin\frac{4(\delta+2m\pi)}{\mu}\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \Big], \end{aligned} \tag{47}$$

où ϱ, A, f, g, F, G etc., sont des fonctions rationnelles de $\cos\frac{2\pi}{\mu}$, $\sin\frac{2\pi}{\mu}$ et des coefficiens de φx et θx. On aura toutes les racines, en donnant à m les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$.

L'expression précédente de x fournit ce résultat:

Théorème V. Pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, il suffit:

1) de diviser la circonférence entière du cercle en μ parties égales,
2) de diviser un angle δ, qu'on peut construire ensuite, en μ parties égales,
3) d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

Ce théorème n'est que l'extension d'un théorème semblable, que M. *Gauss* donne sans démonstration dans l'ouvrage cité plus haut, art. 360.

Il est encore à remarquer que les racines de l'équation $\varphi x = 0$ sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires. En effet si une racine x est réelle, les autres le sont également, comme le font voir les expressions

$$\theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x,$$

qui ne contiennent que des quantités réelles. Si au contraire x est imaginaire, les autres racines le sont aussi, car si par exemple $\theta^m x$ était réelle, $\theta^{\mu-m}(\theta^m x) = \theta^\mu x = x$, le serait également, contre l'hypothèse. Dans le premier cas a sera positif et dans le second négatif. Si μ est un nombre impair, toutes les racines seront réelles.

La méthode que nous avons donnée dans ce paragraphe, pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, est applicable dans tous les cas, le nombre μ étant premier ou non; mais si μ est un nombre composé, il existe encore une autre méthode qui donne lieu à quelques simplifications et que nous allons exposer en peu de mots.

Soit $\mu = m.n$, les racines

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x$$

pourront être groupées de la manière suivante:

$$\begin{array}{llll}
x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \ldots\ \theta^{(n-1)m} x, \\
\theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \ldots\ \theta^{(n-1)m+1} x, \\
\theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \ldots\ \theta^{(n-1)m+2} x, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \ldots\ \theta^{mn-1} x.
\end{array}$$

En faisant pour abréger:

$$\theta^m x = \theta_1 x, \tag{48}$$

$$x = x_1,\ \theta x = x_2,\ \theta^2 x = x_3,\ \ldots\ \theta^{m-1} x = x_m, \tag{49}$$

on peut écrire les racines comme il suit:

$$\left\{\begin{array}{ll}
1') & x_1,\ \theta_1 x_1,\ \theta_1^2 x_1,\ \ldots\ \theta_1^{n-1} x_1, \\
2') & x_2,\ \theta_1 x_2,\ \theta_1^2 x_2,\ \ldots\ \theta_1^{n-1} x_2, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m') & x_m,\ \theta_1 x_m,\ \theta_1^2 x_m,\ \ldots\ \theta_1^{n-1} x_m,
\end{array}\right. \tag{50}$$

Donc en vertu de ce qu'on a vu (§ 2) on peut décomposer l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $m.n$, en m équations du degré n, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré m. Les racines de ces m équations seront respectivement les racines $1', 2', \ldots m'$.

Si n est un nombre composé $m_1 n_1$, on peut décomposer de la même manière chacune des équations du degré n en m_1 équations du degré n_1, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré m_1. Si n_1 est encore un nombre composé, on peut continuer la décomposition de la même manière.

Théorème VI. En général, si l'on suppose

$$\mu = m_1 . m_2 . m_3 \ldots m_n, \tag{51}$$

la résolution de l'équation proposée $\varphi x = 0$ sera ramenée à celle de n équations des degrés

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ m_n.$$

Il suffit même de connaître une seule racine de chacune de ces équations, car si l'on connaît une racine de l'équation proposée, on aura toutes les autres racines, exprimées en fonctions rationnelles de celle-ci.

La méthode précédente est au fond la même que celle donnée par M. *Gauss* pour la réduction de l'équation à deux termes, $x^\mu - 1 = 0$.

Pour faire voir plus clairement la décomposition précédente de l'équation $\varphi x = 0$ en d'autres de degrés moins élevés, supposons par exemple $\mu = 30 = 5.3.2$.

Dans ce cas les racines seront

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{29} x.$$

Nous formerons d'abord une équation du $6^{\text{ième}}$ degré, dont les racines seront

$$x,\ \theta^5 x,\ \theta^{10} x,\ \theta^{15} x,\ \theta^{20} x,\ \theta^{25} x.$$

Soit $R = 0$ cette équation, on peut déterminer ses coefficiens, rationnellement, par une même quantité y, qui sera racine d'une équation du cinquième degré: $P = 0$.

Le degré de l'équation $R = 0$ étant lui-même un nombre composé, nous formerons une équation du $3^{\text{ième}}$ degré: $R_1 = 0$, dont les racines seront

$$x,\ \theta^{10} x,\ \theta^{20} x,$$

et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de y, et d'une même quantité z, qui est racine d'une équation du second degré $P_1 = 0$, dans laquelle les coefficiens sont exprimés rationnellement par y.

Voici le tableau des opérations:

$$x^3+f(y,z).x^2+f_1(y,z).x+f_2(y,z)=0,$$
$$z^2+fy.z+f_1y=0,$$
$$y^5+A_1.y^4+A_2.y^3+A_3.y^2+A_4.y+A_5=0.$$

On peut aussi commencer par une équation du $2^{\text{ième}}$ degré en x, ou bien par une équation du $5^{\text{ième}}$ degré.

Reprenons l'équation générale $\varphi x=0$. En supposant $\mu=m.n$, on peut faire

$$x^n+fy.x^{n-1}+f_1y.x^{n-2}+\cdots=0, \tag{52}$$

où y est déterminé par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré:

$$y^m+A.y^{m-1}+\cdots=0, \tag{53}$$

dont tous les coefficiens sont exprimés rationnellement en quantités connues.

Cela posé, soient

$$\left\{\begin{array}{l} \mu=m_1.m_2.m_3\ldots m_\omega \\ \text{et} \\ \mu=m_1n_1,\ \mu=m_2n_2;\ \ldots\ \mu=m_\omega n_\omega, \end{array}\right. \tag{54}$$

plusieurs manières de décomposer le nombre μ en deux facteurs, on pourra décomposer l'équation proposée $\varphi x=0$ en deux autres des ω manières suivantes:

(1) $F_1(x,y_1)=0$, dont les racines seront $x,\ \theta^{m_1}x,\ \theta^{2m_1}x,\ \ldots\ \theta^{(n_1-1)m_1}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une quantité y_1, racine d'une équation $f_1y_1=0$, du degré m_1.

(2) $F_2(x,y_2)=0$, dont les racines seront $x,\ \theta^{m_2}x,\ \theta^{2m_2}x,\ \ldots\ \theta^{(n_2-1)m_2}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité y_2, racine d'une équation $f_2y_2=0$, du degré m_2.

. . . .

(ω) $F_\omega(x,y_\omega)=0$, dont les racines seront $x,\ \theta^{m_\omega}x,\ \theta^{2m_\omega}x,\ \ldots\ \theta^{(n_\omega-1)m_\omega}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité y_ω, racine d'une équation $f_\omega y_\omega=0$, du degré m_ω.

Supposons maintenant que $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\omega$ pris deux à deux, soient premiers entre eux, je dis qu'on pourra exprimer la valeur de x rationnellement par les quantités $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_\omega$. En effet, si $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\omega$ sont premiers entre eux, il est clair qu'il n'y a qu'une seule racine qui satisfasse à la fois à toutes les équations

$$F_1(x,y_1)=0,\ F_2(x,y_2)=0,\ \ldots\ F_\omega(x,y_\omega)=0; \tag{55}$$

savoir la racine x. Donc, suivant un théorème connu, on peut exprimer x rationnellement par les coefficiens de ces équations et conséquemment par les quantités $y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\omega$.

La résolution de l'équation proposée est donc ramenée à celle de ω équations: $f_1y_1=0$; $f_2y_2=0$; $\ldots$ $f_\omega y_\omega=0$, qui sont respectivement des degrés: $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\omega$, et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des coefficiens de φx et θx.

Si l'on veut que les équations

$$f_1y_1=0,\ f_2y_2=0,\ \ldots\ f_\omega y_\omega=0 \tag{56}$$

soient les moins élevées possibles, il faut choisir $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\omega$ tels, que ces nombres soient des puissances de nombres premiers. Par exemple si l'équation proposée $\varphi x=0$ est du degré

$$\mu=\varepsilon_1^{\nu_1}.\varepsilon_2^{\nu_2}\ldots\varepsilon_\omega^{\nu_\omega}, \tag{57}$$

où $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots\ \varepsilon_\omega$ sont des nombres premiers différens, on aura

$$m_1=\varepsilon_1^{\nu_1},\ m_2=\varepsilon_2^{\nu_2},\ \ldots\ m_\omega=\varepsilon_\omega^{\nu_\omega}. \tag{58}$$

L'équation proposée étant résoluble algébriquement, les équations (56) le seront aussi; car les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de x. On peut aisément les résoudre de la manière suivante.

La quantité y est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (52), c'est-à-dire de

$$x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m}x,\ \ldots\ \theta^{(n-1)m}x. \tag{59}$$

Soit

$$y=Fx=f(x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m}x,\ \ldots\ \theta^{(n-1)m}x), \tag{60}$$

les racines de l'équation (53) seront

$$Fx;\ F(\theta x);\ F(\theta^2 x);\ \ldots\ F(\theta^{m-1}x); \tag{61}$$

or je dis que l'on peut exprimer ces racines de la manière suivante:

$$y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \ldots\ \lambda^{m-1}y, \tag{62}$$

où λy est une fonction rationnelle de y et de quantités connues.

On aura

$$F(\theta x) = f[\theta x,\ \theta(\theta^{m} x),\ \theta(\theta^{2m} x),\ \ldots\ \theta(\theta^{(n-1)m} x)], \tag{63}$$

donc $F(\theta x)$ sera, ainsi que Fx, une fonction rationnelle et symétrique des racines $x, \theta^{m} x, \ldots \theta^{(n-1)m} x$, donc on peut, par le procédé trouvé (24) exprimer $F(\theta x)$ rationnellement par Fx. Soit donc

$$F\theta x = \lambda Fx = \lambda y,$$

on aura, en remplaçant (en vertu du théorème I) x par $\theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{m-1} x$,

$$\begin{aligned} F\theta^2 x &= \lambda F\theta x = \lambda^2 y, \\ F\theta^3 x &= \lambda F\theta^2 x = \lambda^3 y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F\theta^{m-1} x &= \lambda F\theta^{m-2} x = \lambda^{m-1} y, \end{aligned}$$

c. q. f. d.

Maintenant les racines de l'équation (53) pouvant être représentées par

$$y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \ldots\ \lambda^{m-1} y,$$

on peut résoudre algébriquement cette équation de la même manière que l'équation $\varphi x = 0$. (Voyez le théorème III).

Si m est une puissance d'un nombre premier, $m = \varepsilon^{\nu}$, on peut encore déterminer y à l'aide de ν équations du degré ε. (Voyez le théorème VI).

Si dans le théorème VI on suppose que μ soit une puissance de 2, on aura, comme corollaire, le théorème suivant:

Théorème VII. Si les racines d'une équation du degré 2^{ω} peuvent être représentées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{2^{\omega}-1} x, \text{ où } \theta^{2^{\omega}} x = x,$$

cette équation pourra être résolue à l'aide de l'extraction de ω racines carrées.

Ce théorème, appliqué à l'équation $\frac{x^{1+2^{\omega}}-1}{x-1} = 0$, où $1 + 2^{\omega}$ est un nombre premier, donne le théorème de M. *Gauss* pour le cercle.

§ 4.

Des équations dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles.

Nous avons vu précédemment (théorème III) qu'une équation d'un degré quelconque, dont les racines peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x$$

est toujours résoluble algébriquement. Dans ce cas toutes les racines sont exprimées rationnellement par l'une d'entre elles; mais une équation dont les racines ont cette propriété, n'est pas toujours résoluble algébriquement; néanmoins, hors le cas considéré précédemment, il y a encore un autre, dans lequel cela a lieu. On aura le théorème suivant:

Théorème VIII. Soit $\chi x = 0$ une équation algébrique quelconque dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles, que nous désignerons par x. Soient θx et $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, l'équation proposée séra résoluble algébriquement, si l'on a $\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x$.

La démonstration de ce théorème peut être réduite sur le champ à la théorie exposée § 2, comme nous allons le voir.

Si l'on connaît la racine x, on en aura en même temps toutes les autres; il suffit donc de chercher la valeur de x.

Si l'équation

$$\chi x = 0 \tag{64}$$

n'est pas irréductible, soit

$$\varphi x = 0 \tag{65}$$

l'équation la moins élevée à laquelle puisse satisfaire la racine x, les coefficiens de cette équation ne contenant que des quantités connues. Alors les racines de l'équation $\varphi x = 0$ se trouveront parmi celles de l'équation $\chi x = 0$ (voyez le premier théorème), et par conséquent elles pourront s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles.

Cela posé, soit θx une racine différente de x; en vertu de ce qu'on a vu dans le premier paragraphe, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ pourront être exprimées comme il suit:

$$\begin{array}{llll} x, & \theta x, & \theta^2 x, & \ldots \theta^{n-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \ldots \theta^{n-1} x_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1}, & \theta x_{m-1}, & \theta^2 x_{m-1}, & \ldots \theta^{n-1} x_{m-1}, \end{array}$$

et en formant l'équation

$$(66) \qquad x^n + A' x^{n-1} + A'' x^{n-2} + A''' x^{n-3} + \cdots + A^{(n-1)} x + A^{(n)} = 0,$$

dont les racines sont x, θx, $\theta^2 x$, $\ldots \theta^{n-1} x$, les coefficiens A', A'', $\ldots A^{(n)}$ pourront être exprimés rationnellement par une même quantité y, qui sera racine d'une équation irréductible*):

$$(67) \qquad y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les coefficiens sont des quantités connues (voyez § 2).

La détermination de x peut s'effectuer à l'aide des deux équations (66) et (67). La première de ces équations est résoluble algébriquement, en supposant connus les coefficiens, c'est-à-dire la quantité y (voyez le théorème III). Quant à l'équation en y, nous allons démontrer que ses racines ont la même propriété que celles de l'équation proposée $\varphi x = 0$, savoir d'être exprimables rationnellement par l'une d'entre elles.

La quantité y est (voy. 15) une certaine fonction rationnelle et symétrique des racines x, θx, $\theta^2 x$, $\ldots \theta^{n-1} x$. En faisant

$$(68) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = f(x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots \theta^{n-1} x), \\ \text{les autres racines de l'équation (67) seront} \\ y_1 = f(x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \ldots \theta^{n-1} x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} = f(x_{m-1},\ \theta x_{m-1},\ \theta^2 x_{m-1},\ \ldots \theta^{n-1} x_{m-1}). \end{array} \right.$$

*) On démontrera aisément que cette équation ne pourra être réductible. Soit $R = 0$ l'équation irréductible en y, et ν son degré. En éliminant y, on aura une équation en x du degré $n\nu$; donc $n\nu \gtrless \mu$. Mais on a

$$\mu = m \cdot n,$$

donc

$$\nu \gtrless m,$$

ce qui est impossible, car ν est moindre que m.

Maintenant, dans le cas que nous considérons, $x_1, \ldots x_{m-1}$ sont des fonctions rationnelles de la racine x. Faisons par conséquent

$$x_1 = \theta_1 x,\ x_2 = \theta_2 x,\ \ldots x_{m-1} = \theta_{m-1} x,$$

les racines de l'équation (67) auront la forme:

$$y_1 = f(\theta_1 x,\ \theta\theta_1 x,\ \theta^2\theta_1 x,\ \ldots \theta^{n-1}\theta_1 x).$$

D'après l'hypothèse les fonctions θ et θ_1 ont la propriété que

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x,$$

équation qui, en vertu du théorème I, aura lieu en substituant à la place de x une autre racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$. On en tire successivement

$$\begin{array}{l} \theta^2\theta_1 x = \theta\theta_1\theta x = \theta_1\theta^2 x, \\ \theta^3\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^2 x = \theta_1\theta^3 x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta^{n-1}\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^{n-2} x = \theta_1\theta^{n-1} x. \end{array}$$

L'expression de y_1 deviendra par là

$$y_1 = f(\theta_1 x,\ \theta_1\theta x,\ \theta_1\theta^2 x,\ \ldots \theta_1\theta^{n-1} x),$$

et l'on voit que y_1, comme y, est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots \theta^{n-1} x.$$

Donc (§ 2) on peut exprimer y_1 rationnellement par y et des quantités connues. Le même raisonnement s'applique à toute autre racine de l'équation (67).

Soient maintenant λy, $\lambda_1 y$ deux racines quelconques, je dis qu'on aura

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

En effet, ayant par exemple

$$\lambda y = f(\theta_1 x,\ \theta\theta_1 x,\ \ldots \theta^{n-1}\theta_1 x),$$

si

$$y = f(x,\ \theta x,\ \ldots \theta^{n-1} x),$$

on aura, en mettant $\theta_2 x$ au lieu de x,

$$\lambda y_2 = f(\theta_1\theta_2 x,\ \theta\theta_1\theta_2 x,\ \ldots \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x),$$

où

$$y_2 = f(\theta_2 x,\ \theta\theta_2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_2 x) = \lambda_1 y;$$

donc

$$\lambda\lambda_1 y = f(\theta_1\theta_2 x,\ \theta\theta_1\theta_2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x)$$

et également

$$\lambda_1\lambda y = f(\theta_2\theta_1 x,\ \theta\theta_2\theta_1 x,\ \ldots\ \theta^{n-1}\theta_2\theta_1 x),$$

donc, puisque $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x$,

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1\lambda y.$$

Les racines de l'équation (67) auront donc précisément la même propriété que celles de l'équation $\varphi x = 0$.

Cela posé, on peut appliquer à l'équation (67) le même procédé qu'à l'équation $\varphi x = 0$; c'est-à-dire que la détermination de y peut s'effectuer à l'aide de deux équations, dont l'une sera résoluble algébriquement et l'autre aura la propriété de l'équation $\varphi x = 0$. Donc le même procédé peut encore être appliqué à cette dernière équation. En continuant, il est clair que la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide d'un certain nombre d'équations, qui seront toutes résolubles algébriquement. Donc enfin l'équation $\varphi x = 0$ sera résoluble à l'aide d'opérations algébriques, en supposant connues les quantités qui avec x composent les fonctions

$$\varphi x,\ \theta x,\ \theta_1 x,\ \theta_2 x,\ \ldots\ \theta_{m-1} x.$$

Il est clair que le degré de chacune des équations auxquelles se réduit la détermination de x, sera un facteur du nombre μ qui marque le degré de l'équation $\varphi x = 0$; et:

Théorème IX. Si l'on désigne les degrés de ces équations respectivement par

$$n,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_\omega,$$

on aura

$$\mu = n \cdot n_1 \cdot n_2,\ \ldots\ n_\omega.$$

En rapprochant ce qui précède de ce qui a été exposé (§ 3), on aura le théorème suivant:

Théorème X. En supposant le degré μ de l'équation $\varphi x = 0$ décomposé comme il suit:

(69) $$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \varepsilon_3^{\nu_3}\ \ldots\ \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha},$$

où $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots\ \varepsilon_\alpha$ sont des nombres premiers, la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide de la résolution de ν_1 équations du degré ε_1, de ν_2 équations du degré ε_2, etc., et toutes ces équations seront résolubles algébriquement.

Dans le cas où $\mu = 2^\nu$, on peut trouver la valeur de x à l'aide de l'extraction de ν racines carrées.

§ 5.

Application aux fonctions circulaires.

En désignant par a la quantité $\frac{2\pi}{\mu}$, on sait qu'on peut trouver une équation algébrique du degré μ dont les racines seront les μ quantités

$$\cos a,\ \cos 2a,\ \cos 3a,\ \ldots\ \cos \mu a,$$

et dont les coefficiens seront des nombres rationnels. Cette équation sera

(70) $$x^\mu - \tfrac{1}{4}\mu x^{\mu-2} + \tfrac{1}{16}\frac{\mu(\mu-3)}{1.2} \cdot x^{\mu-4} - \cdots = 0.$$

Nous allons voir que cette équation a la même propriété que l'équation $\chi x = 0$, considérée dans le paragraphe précédent.

Soit $\cos a = x$, on aura d'après une formule connue, quel que soit a,

(71) $$\cos ma = \theta(\cos a),$$

où θ désigne une fonction entière. Donc $\cos ma$, qui exprime une racine quelconque de l'équation (70), sera une fonction rationnelle de la racine x. Soit $\theta_1 x$ une autre racine, je dis qu'on aura

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x.$$

En effet, soit $\theta_1 x = \cos m'a$, la formule (71) donnera, en mettant $m'a$ au lieu de a,

$$\cos(mm'a) = \theta(\cos m'a) = \theta\theta_1 x.$$

De la même manière on aura

$$\cos(m'ma) = \theta_1(\cos ma) = \theta_1\theta x,$$

donc

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x.$$

Donc, suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent,

$$x \text{ ou } \cos a = \cos\frac{2\pi}{\mu}$$

pourra être déterminé algébriquement. Cela est connu.

Supposons maintenant que μ soit un nombre premier $2n+1$, les racines de l'équation (70) seront

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \dots \cos\frac{4n\pi}{2n+1},\ \cos 2\pi.$$

La dernière racine $\cos 2\pi$ est égale à l'unité; donc l'équation (70) est divisible par $x-1$. Les autres racines seront toujous égales entre elles par couples, car on a $\cos\frac{2m\pi}{2n+1}=\cos\frac{(2n+1-m)2\pi}{2n+1}$, donc on peut trouver une équation dont les racines seront,

$$(72)\qquad \cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \cos\frac{4\pi}{2n+1},\ \dots \cos\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Cette équation sera

$$(73)\qquad x^n+\tfrac{1}{2}x^{n-1}-\tfrac{1}{4}(n-1)x^{n-2}-\tfrac{1}{8}(n-2)x^{n-3}$$
$$+\tfrac{1}{16}\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4}+\tfrac{1}{32}\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5}-\dots=0.$$

Cela posé, soit

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}=x=\cos a,$$

on aura d'après ce qui précède

$$\cos\frac{2m\pi}{2n+1}=\theta x=\cos ma.$$

L'équation (73) sera donc satisfaite par les racines

$$(74)\qquad x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \dots$$

On a, quelle que soit la valeur de a,

$$\theta(\cos a)=\cos ma.$$

De là on tire successivement:

$$\theta^2(\cos a)=\ \theta(\cos ma)\ =\cos m^2 a,$$
$$\theta^3(\cos a)=\ \theta(\cos m^2 a)\ =\cos m^3 a,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\theta^\mu(\cos a)=\theta(\cos m^{\mu-1}a)=\cos m^\mu a.$$

Les racines (74) deviendront donc

$$(75)\qquad \cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a,\ \cos m^3 a,\ \dots \cos m^\mu a,\ \dots$$

Cela posé, si m est une racine primitive pour le module $2n+1$ (voyez *Gauss* Disquis. arithm. art. 57), je dis que toutes les racines

$$(76)\qquad \cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a,\ \dots \cos m^{n-1}a$$

seront différentes entre elles. En effet si l'on avait

$$\cos m^\mu a=\cos m^\nu a,$$

où μ et ν sont moindres que n, on en tirerait

$$m^\mu a=\pm m^\nu a+2k\pi,$$

où k est entier. Cela donne, en remettant pour a sa valeur $\frac{2\pi}{2n+1}$,

$$m^\mu=\pm m^\nu+k(2n+1),$$

donc

$$m^\mu\mp m^\nu=m^\nu(m^{\mu-\nu}\mp 1)=k(2n+1)$$

et par conséquent $m^{2(\mu-\nu)}-1$ serait divisible par $2n+1$, ce qui est impossible, car $2(\mu-\nu)$ est moindre que $2n$, et nous avons supposé que m est une racine primitive.

On aura encore

$$\cos m^n a=\cos a,$$

car $m^{2n}-1$ ou $(m^n-1)(m^n+1)$ est divisible par $2n+1$, donc

$$m^n=-1+k(2n+1),$$

et par suite

$$\cos m^n a=\cos(-a+k.2\pi)=\cos a.$$

Par là on voit que les n racines de l'équation (73) pourront s'exprimer par (76); c'est-à-dire par:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x,\ \dots \theta^{n-1}x,\ \text{où}\ \theta^n x=x.$$

Donc, en vertu du théorème III, cette équation sera résoluble algébriquement.

En faisant $n=m_1.m_2\dots m_\omega$, on peut diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, à l'aide de ω équations des degrés m_1, m_2, m_3, ... m_ω. Si les nombres m_1, m_2, ... m_ω sont premiers entre eux, les coefficiens de ces équations seront des nombres rationnels.

En supposant $n=2^\omega$, on aura le théorème connu sur les polygones réguliers qui peuvent être construits géométriquement.

En vertu du théorème V on voit que pour diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, il suffit

1) de diviser la circonférence entière du cercle en $2n$ parties égales,
2) de diviser un arc, qu'on peut construire ensuite, en $2n$ parties égales,
3) et d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

M. *Gauss* a énoncé ce théorème dans ses Disquis., et il ajoute que la quantité dont il faut extraire la racine, sera égale à $2n+1$. C'est ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit.

On a vu (40, 38, 46) que ϱ est la valeur numérique de la quantité

$$(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\cdots+\alpha^{n-1}\theta^{n-1}x)(x+\alpha^{n-1}\theta x+\alpha^{n-2}\theta^2 x+\cdots+\alpha\theta^{n-1}x),$$

où $\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{n}$. En substituant pour x, θx, ... leurs valeurs $\cos a$, $\cos ma$, $\cos m^2 a$, ... on aura

$$\begin{aligned}\pm\varrho=&(\cos a+\alpha\cos ma+\alpha^2\cos m^2 a+\cdots+\alpha^{n-1}\cos m^{n-1}a)\\ &\times(\cos a+\alpha^{n-1}\cos ma+\alpha^{n-2}\cos m^2 a+\cdots+\alpha\cos m^{n-1}a).\end{aligned}$$

En développant et en mettant $\pm\varrho$ sous la forme

$$\pm\varrho=t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots+t_{n-1}\alpha^{n-1},$$

on trouvera facilement

$$\begin{aligned}t_\mu=&\cos a\,.\cos m^\mu a+\cos ma\,.\cos m^{\mu+1}a+\cdots+\cos m^{n-1-\mu}a\,.\cos m^{n-1}a\\ &+\cos m^{n-\mu}a\,.\cos a+\cos m^{n-\mu+1}a\,.\cos ma+\cdots+\cos m^{n-1}a\,.\cos m^{\mu-1}a.\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\cos m^\nu a\,.\cos m^{\mu+\nu}a=\tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a+m^\nu a)+\tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a-m^\nu a),$$

donc

$$\begin{aligned}t_\mu=&\tfrac{1}{2}[\cos(m^\mu+1)a+\cos(m^\mu+1)ma+\cdots+\cos(m^\mu+1)m^{n-1}a]\\ &+\tfrac{1}{2}[\cos(m^\mu-1)a+\cos(m^\mu-1)ma+\cdots+\cos(m^\mu-1)m^{n-1}a].\end{aligned}$$

Si l'on fait $(m^\mu+1)a=a'$, $(m^\mu-1)a=a''$, on aura

$$\begin{aligned}t_\mu=&\tfrac{1}{2}[\cos a'+\theta(\cos a')+\theta^2(\cos a')+\cdots+\theta^{n-1}(\cos a')]\\ &+\tfrac{1}{2}[\cos a''+\theta(\cos a'')+\theta^2(\cos a'')+\cdots+\theta^{n-1}(\cos a'')].\end{aligned}$$

Cela posé, il y a deux cas, savoir: μ est différent de zéro ou non.

Dans le premier cas il est clair que $\cos a'$ et $\cos a''$ sont des racines de l'équation (73), donc $\cos a'=\theta^\delta x$, $\cos a''=\theta^\varepsilon x$. En substituant, il viendra, en remarquant que $\theta^n x=x$:

$$\begin{aligned}t_\mu=&\tfrac{1}{2}(\theta^\delta x+\theta^{\delta+1}x+\cdots+\theta^{n-1}x+x+\theta x+\cdots+\theta^{\delta-1}x)\\ &+\tfrac{1}{2}(\theta^\varepsilon x+\theta^{\varepsilon+1}x+\cdots+\theta^{n-1}x+x+\theta x+\cdots+\theta^{\varepsilon-1}x),\end{aligned}$$

donc

$$t_\mu=x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{n-1}x,$$

c'est-à-dire que t_μ est égal à la somme des racines; par suite, en vertu de l'équation (73),

$$t_\mu=-\tfrac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\mu=0$, la valeur de t_μ deviendra:

$$t_0=\tfrac{1}{2}(\cos 2a+\cos 2ma+\cdots+\cos 2m^{n-1}a)+\tfrac{1}{2}n;$$

or $\cos 2a$ est une racine de l'équation (73), donc en faisant

$$\cos 2a=\theta^\delta x,$$

on aura

$$\begin{aligned}&\cos 2a+\cos 2ma+\cdots+\cos 2m^{n-1}a\\ &\qquad=\theta^\delta x+\theta^{\delta+1}x+\cdots+\theta^{n-1}x+x+\theta x+\cdots+\theta^{\delta-1}x=-\tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

par conséquent

$$t_0=\tfrac{1}{2}n-\tfrac{1}{4}.$$

En vertu de ces valeurs de t_0 et t_μ, la valeur de $\pm\varrho$ deviendra:

$$\pm\varrho=\tfrac{1}{2}n-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^{n-1}),$$

mais $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^{n-1}=-1$, donc

$$\pm\varrho=\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{4},$$

et puisque ϱ est essentiellement positif,

$$\varrho=\frac{2n+1}{4}.$$

Cette valeur de ϱ donne

$$\sqrt{\varrho}=\tfrac{1}{2}.\sqrt{2n+1},$$

donc la racine carrée qu'il faut extraire est celle du nombre $2n+1$, comme le dit M. *Gauss**).

Christiania, le 29 mars 1828.

---

*) Dans le cas où n est un nombre impair, on peut même se dispenser de l'extraction de cette racine carrée.

XXVI.

THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

La formule donnée par M. *Jacobi* dans le tome III p. 86 de ce journal peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le § III du mémoire n° 12 tome II de ce journal*)

$$\varphi(2n+1)\theta = R, \tag{1}$$

où R est une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2 - 1$. L'équation (1) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

$$x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \tag{2}$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$.

Soit pour abréger

$$\frac{2\omega}{2n+1} = \alpha, \quad \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta, \tag{3}$$

l'expression des racines sera

$$x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta). \tag{4}$$

*) Mémoire XVI de cette édition.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Soit $\psi\theta$ une fonction *entière* quelconque des quantités $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta + \alpha$ et en $\theta + \beta$. Soit ν le plus grand exposant de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours

$$\psi\theta = p + q . f(2n+1)\theta . F(2n+1)\theta, \tag{5}$$

p et q étant deux fonctions *entières* de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10) tome II p. 105*) on a

$$\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta . f(m\alpha + \mu\beta) . F(m\alpha + \mu\beta) + \varphi(m\alpha + \mu\beta) . f\theta . F\theta}{1 + e^2c^2 . \varphi^2(m\alpha + \mu\beta) . \varphi^2\theta},$$

d'où il suit qu'on pourra exprimer $\psi\theta$ rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta . F\theta$. Or le carré de $f\theta . F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, car

$$(f\theta . F\theta)^2 = (1 - c^2\varphi^2\theta)(1 + e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta . F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

$$\psi\theta = \psi_1(\varphi\theta) + \psi_2(\varphi\theta) . f\theta . F\theta, \tag{7}$$

où $\psi_1(\varphi\theta)$ et $\psi_2(\varphi\theta)$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega - \theta$ à la place de θ, on aura, en remarquant que $\varphi(\omega - \theta) = \varphi\theta$, $f(\omega - \theta) = -f\theta$, $F(\omega - \theta) = F\theta$:

$$\psi(\omega - \theta) = \psi_1(\varphi\theta) - \psi_2(\varphi\theta) . f\theta . F\theta. \tag{8}$$

Des équations (7) et (8) on tire

$$\psi_1(\varphi\theta) = \tfrac{1}{2} . [\psi\theta + \psi(\omega - \theta)], \tag{9}$$

$$\psi_2(\varphi\theta) . f\theta . F\theta = \tfrac{1}{2} . [\psi\theta - \psi(\omega - \theta)]. \tag{10}$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$. En y mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi_1[\varphi(\theta + \alpha)] = \tfrac{1}{2} . [\psi(\theta + \alpha) + \psi(\omega - \alpha - \theta)];$$

or on a $\psi(\theta + \alpha) = \psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega - \alpha - \theta$ au lieu de θ,

*) P. 268 de cette édition.

$$\psi(\omega-\theta)=\psi(\omega-\alpha-\theta);$$

donc

$$\psi_1[\varphi(\theta+\alpha)]=\tfrac{1}{2}[\psi\theta+\psi(\omega-\theta)],$$

c'est-à-dire

$$\psi_1[\varphi(\theta+\alpha)]=\psi_1(\varphi\theta).$$

On aura de la même manière

$$\psi_1[\varphi(\theta+\beta)]=\psi_1(\varphi\theta).$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, . . . au lieu de θ,

$$\psi_1[\varphi(\theta+m\alpha)]=\psi_1(\varphi\theta), \tag{11}$$

où m est un nombre entier quelconque. De même la seconde équation donne

$$\psi_1[\varphi(\theta+\mu\beta)]=\psi_1(\varphi\theta),$$

d'où, en mettant $\theta+m\alpha$ au lieu de θ, et en ayant égard à l'équation (11) on tire

$$\psi_1[\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)]=\psi_1(\varphi\theta). \tag{12}$$

Donc la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et en ajoutant, la formule (12) donne

$$\psi_1(\varphi\theta)=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu\,\psi_1[\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)]. \tag{13}$$

Le second membre de cette équation est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines de l'équation (1), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire par $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\psi_1(\varphi\theta)=p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta=y$ et $p=\frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y=\varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q'=0$: la quantité $p=\frac{1}{2}[\psi\theta+\psi(\omega-\theta)]$ sera infinie en faisant $\theta=\delta$, donc on aura $\psi\delta+\psi(\omega-\delta)=\frac{1}{0}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta)\quad\text{ou}\quad\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{1}{0}$, on aura en vertu de l'équation (30) tome II p. 113*)

$$\delta=(m'+\tfrac{1}{2})\omega+(n'+\tfrac{1}{2})\varpi i-m\alpha-\mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne

$$\varphi(2n+1)\delta=\varphi\left[[(2n+1)m'+n-2m]\omega+[(2n+1)n'+n-2\mu]\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right],$$

c'est-à-dire (26 p. 111*):

$$\varphi(2n+1)\delta=\tfrac{1}{0}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q'=0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)=\frac{1}{0}$ donne $\varphi(2n+1)\delta=\frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta$, on aura

$$\frac{\psi_2(\varphi\theta)\,.\,f\theta\,.\,F\theta}{f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu (45) tome II p. 117*), on aura $f(2n+1)\theta=f\theta\,.\,u$, $F(2n+1)\theta=F\theta\,.\,v$, u et v étant des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi(\varphi\theta)$, on aura

$$\chi(\varphi\theta)=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta\,.\,F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra

$$\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta,\quad\psi[\omega-(\theta+\alpha)]=\psi(\omega-\theta),$$

$$f(2n+1)(\theta+\alpha)=f[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i]=f(2n+1)\theta,$$

$$F(2n+1)(\theta+\alpha)=F[(2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i]=F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi[\varphi(\theta+\alpha)]=\chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi[\varphi(\theta+\beta)]=\chi(\varphi\theta).$$

On en déduit, comme plus haut pour la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

*) Les formules citées se trouvent p. 275—281 de cette édition.

$$\chi(\varphi\theta) = q,$$

on aura

$$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta = q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

et enfin

$$\psi\theta = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta, \tag{14}$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu.\chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini,

$$\psi\theta = A.(\varphi\theta)^\nu,$$

A étant une constante. De même on aura

$$\psi(\omega - \theta) = A'.(\varphi\theta)^\nu,$$

et par suite:

$$p = \tfrac{1}{2}(A + A').(\varphi\theta)^\nu:$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta = B.\varphi\theta$, B étant une constante. Il suit de là que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu - 2$, tout au plus.

Notre théorème est donc démontré.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $\nu = 1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q = 0$. Donc on a dans ce cas

$$\psi\theta = A + B.\varphi(2n+1)\theta, \tag{15}$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on déterminera facilement en faisant $\theta = 0$ et $\varphi\theta = \frac{1}{0}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1), et faisons

$$\psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$, en remarquant que

$$\pi[\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta] = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi[\theta + (2n+1)\beta + m\alpha] = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc

$$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B.\varphi(2n+1)\theta. \tag{16}$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$ si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B = 0$ si ce nombre est pair. Dans ce dernier cas la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ; par conséquent, en faisant $\theta = 0$, on a

$$\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta). \tag{17}$$

Si l'on fait par exemple

$$\pi\theta = \varphi\theta.\varphi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).\varphi[\theta + (m+k)\alpha + (\mu+k')\beta] \\ &= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta).\varphi[(m+k)\alpha + (\mu+k')\beta], \end{aligned}\right. \tag{18}$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k = 0$, $k' = 0$. Car alors $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons démontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivans:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\varphi\theta$, sera

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_0^{4n^2+4n}{}_m \sqrt[2n+1]{p_m+q_m\cdot f\theta\cdot F\theta},$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\varphi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p_m^2-q_m^2(f\theta)^2\cdot(F\theta)^2=(\varphi^2\theta-a_m^2)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania le 27 août 1828.

XXVII.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme

(1) $$0=p_0+p_1y+p_2y^2+\cdots+p_{n-1}y^{n-1}+y^n,$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit de même

(2) $$0=q_0+q_1y+q_2y^2+\cdots+q_{n-1}y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coefficiens des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficiens par $a, a', a'' \ldots$ En vertu des deux équations (1) et (2) x sera une fonction de $a, a', a'', \ldots$ et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par

(3) $$\varrho=0$$

le résultat de l'élimination, de sorte que ϱ ne contiendra que les variables $x, a, a', a'', \ldots$ Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

(4) $$x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de $a, a', a'', \ldots$ Cela posé, si l'on fait

$$(5) \qquad \psi x = \int f(x, y)\, dx,$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction *rationnelle* quelconque de x et de y, je dis que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante:

$$(6) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \cdots + k_n \log v_n,$$

$u, v_1, v_2, \ldots v_n$ étant des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \ldots$, et $k_1, k_2, \ldots k_n$ des constantes.

Démonstration. Pour établir ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de $a, a', a'', \ldots$; car il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on va voir. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de $x, a, a', a'', \ldots$ De même l'équation (3) $\varrho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha . da + \alpha' . da' + \alpha'' . da'' + \cdots,$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x, a, a', a'', \ldots$ De là il suit qu'on pourra mettre la différentielle $f(x, y)\, dx$ sous la forme

$$f(x, y)\, dx = \varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \varphi_2 x . da'' + \cdots,$$

où $\varphi x, \varphi_1 x, \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x, a, a', a'', \ldots$ En intégrant, il viendra

$$\psi x = \int (\varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \cdots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité,

$$(7) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu$$
$$= \int [(\varphi x_1 + \varphi x_2 + \cdots + \varphi x_\mu)\, da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \cdots + \varphi_1 x_\mu)\, da' + \cdots].$$

Dans cette équation les coefficiens des différentielles $da, da', \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \ldots$ et de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, mais en outre ils sont symétriques par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_\mu$; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par $a, a', a'', \ldots$ et par les coefficiens de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont eux-

mêmes des fonctions rationnelles des variables $a, a', a'', \ldots$, donc enfin les coefficiens de $da, da', da'', \ldots$ de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me réserve de développer dans une autre occasion les nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront du jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit.

Christiania le 6 janvier 1829.

XXVIII.

PRECIS D'UNE THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 4, Berlin 1829.

Introduction.

La théorie des fonctions elliptiques, créée par M. *Legendre*, forme une partie des plus intéressantes de l'analyse. Ayant cherché de mon côté à donner de nouveaux développemens à cette théorie, je suis, si je ne me trompe, parvenu à plusieurs résultats qui me paraissent mériter quelque attention. J'ai cherché surtout à donner de la généralité à mes recherches, en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai pas été assez heureux pour les résoudre complètement, au moins j'ai donné des moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur ce sujet formera un ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne m'ont pas encore permis de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultats généraux auxquelles elle m'a conduit. Ce mémoire sera divisé en deux parties.

Dans *la première* je considère les fonctions elliptiques comme intégrales indéfinies, sans rien y ajouter sur la nature des quantités réelles ou imaginaires qui les composent. Je me servirai des notations suivantes:

$$\Delta(x, c) = \pm\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

$$\varpi(x, c) = \int \frac{dx}{\Delta(x, c)},$$

$$\varpi_0(x, c) = \int \frac{x^2 dx}{\Delta(x, c)}.$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta(x, c)},$$

de sorte que

$$\varpi(x, c),\ \ \varpi_0(x, c),\ \ \Pi(x, c, a)$$

remplacent respectivement les fonctions de première, de seconde et de troisième espèce.

Cela posé, je me suis proposé ce problème général: „Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme:

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1\varpi(x_1, c_1) + \alpha_2\varpi(x_2, c_2) + \cdots + \alpha_n\varpi(x_n, c_n) \\ &+ \alpha_1'\varpi_0(x_1', c_1') + \alpha_2'\varpi_0(x_2', c_2') + \cdots + \alpha_m'\varpi_0(x_m', c_m') \\ &+ \alpha_1''\Pi(x_1'', c_1'', a_1) + \alpha_2''\Pi(x_2'', c_2'', a_2) + \cdots + \alpha_\mu''\Pi(x_\mu'', c_\mu'', a_\mu) \\ &\qquad = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu, \end{aligned}\right.$$

où

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n;\ \ \alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_m';$$

$$\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots \alpha_\mu'';\ \ A_1, A_2, \ldots A_\nu$$

sont des quantités constantes, $x_1, x_2, \ldots x_n$; $x_1', x_2', \ldots x_m'$; $x_1'', x_2'', \ldots x_\mu''$ des *variables* liées entre elles par des équations *algébriques*, et $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ des fonctions *algébriques* de ces variables."

J'établis d'abord les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, ou ce qui concerne leur sommation, en employant une méthode particulière, qui est applicable avec la même facilité à une infinité d'autres transcendantes plus compliquées. En m'appuyant sur ces propriétés fondamentales, je considère ensuite l'équation dans toute sa généralité, et je fais le premier pas en démontrant un théorème général sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions *algébriques*, *logarithmiques* et *elliptiques*, théorème qui est d'un grand usage dans tout le calcul intégral, à cause de sa grande généralité.

J'en déduis, comme corollaire, le théorème suivant:

„Si $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x, est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par des fonctions elliptiques $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$, on pourra toujours supposer

$$(b)\quad \int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)} = p\,\Delta(x, c) + \alpha\,\psi(y) + \alpha'\,\psi_1(y_1) + \alpha''\,\psi_2(y_2) + \cdots$$

$$\cdots + A_1 \log\frac{q_1 + q_1'\Delta(x, c)}{q_1 - q_1'\Delta(x, c)} + A_2 \log\frac{q_2 + q_2'\Delta(x, c)}{q_2 - q_2'\Delta(x, c)} + \cdots$$

où toutes les quantités $p, q_1, q_2, \ldots q_1', q_2', \ldots y, y_1, y_2, \ldots$ sont des *fonctions rationnelles* de x"*).

De ce théorème je tire ensuite celui-ci:

„Si une équation quelconque de la forme (a) a lieu, et qu'on désigne par c l'un quelconque des modules qui y entrent, parmi les autres modules il y en aura au moins un, c', tel qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

en mettant pour y une fonction *rationnelle* de x, et vice versa."

Ces théorèmes sont très importans dans la théorie des fonctions elliptiques. Ils ramènent la solution du problème général à la détermination de la solution la plus générale de l'équation

$$\frac{dy}{\varDelta(y,c')} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

ou à la transformation des fonctions de première espèce. Je donne la solution complète de ce problème, et j'en déduis ensuite la transformation générale des fonctions de première espèce. Je fais voir que les modules doivent nécessairement être liés entre eux par une équation algébrique. On peut se contenter de considérer le cas où le dégré de la fonction y est un nombre premier, y compris l'unité. Si ce degré est désigné par μ, c' pourra avoir $6(\mu+1)$ valeurs différentes, excepté pour $\mu=1$, où ce nombre se réduit à 6.

La seconde partie traite des fonctions à modules réels et moindres que l'unité. Au lieu des fonctions $\varpi(x,c)$, $\varpi_0(x,c)$, $\Pi(x,c,a)$ j'en introduis trois autres, savoir d'abord la fonction $\lambda(\theta)$, déterminée par l'équation

$$\theta = \int_0^{\lambda\theta} \frac{dx}{\varDelta(x,c)},$$

C'est la fonction inverse de la première espèce. En mettant $x=\lambda\theta$ dans les expressions de $\varpi_0(x,c)$, $\Pi(x,c,a)$, elles deviendront de la forme:

$$\varpi_0(x,c) = \int \lambda^2\theta \, . \, d\theta;$$

$$\Pi(x,c,a) = \int \frac{d\theta}{1-\frac{\lambda^2\theta}{a^2}}.$$

*) Ce théorème a également lieu, si $\varDelta(x,c)$ est la racine carrée d'une fonction entière d'un degré *quelconque*.

Sous cette forme, les fonctions elliptiques offrent des propriétés très remarquables, et sont beaucoup plus faciles à traiter. C'est surtout la fonction $\lambda\theta$ qui mérite une attention particulière. Cette fonction a été l'objet d'un mémoire qui est inséré dans les tomes II et III de ce journal*), où j'en ai démontré le premier quelques-unes des propriétés fondamentales. On en trouvera davantage dans ce mémoire. Je vais indiquer rapidement quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu:

1. La fonction $\lambda\theta$ jouit de la propriété remarquable d'être périodique de deux manières différentes, savoir non seulement pour des valeurs réelles de la variable, mais encore pour des valeurs imaginaires. En effet si l'on fait pour abréger

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\varDelta(x,c)}, \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\varDelta(x,b)},$$

où $b=\sqrt{1-c^2}$ et $\sqrt{-1}=i$, on aura

$$\lambda(\theta+2\varpi) = \lambda\theta; \quad \lambda(\theta+\omega i) = \lambda\theta.$$

2. La fonction $\lambda\theta$ devient égale à zéro et à l'infini, pour une infinité de valeurs réelles et imaginaires de θ

$$(c) \qquad \lambda(m\varpi+n\omega i)=0, \quad \lambda[m\varpi+(n+\tfrac{1}{2})\omega i]=\tfrac{1}{0},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. De même on a

$$\lambda\theta' = \lambda\theta,$$

si

$$\theta' = (-1)^m\theta + m\varpi + n\omega i;$$

cette relation est nécessaire.

3. La propriété fondamentale de $\lambda\theta$ est exprimée par l'équation

$$\lambda(\theta'+\theta)\,.\,\lambda(\theta'-\theta) = \frac{\lambda^2\theta'-\lambda^2\theta}{1-c^2\lambda^2\theta\,.\,\lambda^2\theta'},$$

où θ' et θ sont des variables quelconques, réelles ou imaginaires.

4. La fonction $\lambda\theta$ pourra se développer en facteurs et en fractions de beaucoup de manières; par exemple si l'on fait pour abréger

$$q = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}, \quad p = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi},$$

*) Mémoire XVI de cette édition.

on a

$$\lambda(\theta\varpi) = \frac{2}{\sqrt{c}} \sqrt[4]{q} \,.\, \sin(\pi\theta) \frac{[1-2q^2\cos(2\theta\pi)+q^4][1-2q^4\cos(2\theta\pi)+q^8]\ldots}{[1-2q\ \cos(2\theta\pi)+q^2][1-2q^3\cos(2\theta\pi)+q^6]\ldots}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c} \cdot \frac{\pi}{\varpi} \cdot \left(\frac{1}{1-q} \sin(\theta\pi) + \frac{q}{1-q^3} \sin(3\theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5} \sin(5\theta\pi) + \cdots \right),$$

$$\lambda\left(\frac{\varpi}{2} - \theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{(1-pe^{-2\pi\theta})(1-pe^{2\pi\theta})(1-p^3e^{-2\pi\theta})(1-p^3e^{2\pi\theta})\ldots}{(1+pe^{-2\pi\theta})(1+pe^{2\pi\theta})(1+p^3e^{-2\pi\theta})(1+p^3e^{2\pi\theta})\ldots}.$$

On pourra exprimer d'une manière analogue les fonctions de seconde et de troisième espèce. Les deux formules précédentes sont au fond les mêmes que les formules (c).

5. Une des propriétés les plus fécondes de la fonction $\lambda\theta$ est la suivante: [On a fait pour abréger: $\Delta\theta = \pm\sqrt{(1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta)}$].

„Si l'équation

$$(\lambda\theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\theta)^{2n-2} + \cdots + a_1(\lambda\theta)^2 + a_0 = [b_0\lambda\theta + b_1(\lambda\theta)^3 + \cdots + b_{n-2}(\lambda\theta)^{2n-3}]\Delta\theta$$

est satisfaite, en mettant pour θ $2n$ quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2n}$, telles que $\lambda^2\theta_1, \lambda^2\theta_2, \ldots \lambda^2\theta_{2n}$ soient différentes entre elles, on aura toujours

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n}) = 0,$$

$$-\lambda(\theta_{2n}) = +\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1}) = \frac{-a_0}{\lambda\theta_1 \,.\, \lambda\theta_2 \ldots \lambda\theta_{2n-1}};$$

les coefficiens $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ pourront être quelconques, et il est facile de voir qu'on pourra les déterminer de sorte que $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2n-1}$ soient donnés.“

Voici une autre propriété plus générale:

„Si l'on fait

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x-\lambda\theta_1)(x-\lambda\theta_2)\ldots(x-\lambda\theta_\mu),$$

où p et q sont des fonctions entières quelconques de *l'indéterminée* x, on pourra toujours prendre les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$ telles que l'expression

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_\mu)$$

soit égale à zéro ou à l'infini.“

Ainsi par exemple, si

$$(d) \qquad p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2\theta)^\mu,$$

l'une des fonctions p et q étant paire et l'autre impaire, on aura

1) si p est pair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est pair et}$$
$$\lambda(\mu\theta) = \tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est impair;}$$

2) si p est impair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est impair et}$$
$$\lambda(\mu\theta) = \tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est pair.}$$

De là il suit encore que, si l'équation (d) a lieu, on aura toujours

$$\lambda\theta = \lambda\left(\frac{m\varpi + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right),$$

où m et n sont entiers et moindres que μ.

6. Il existe entre les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ et les racines $(2\mu+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité des relations bien remarquables, savoir si l'on fait pour abréger

$$\delta = \cos\frac{2\pi}{2\mu+1} + \sqrt{-1} \,.\, \sin\frac{2\pi}{2\mu+1},$$

on aura, quels que soient les nombres entiers m et μ:

$$0 = \lambda\left(\frac{2m\varpi}{2\mu+1}\right) + \delta^k.\lambda\left(\frac{2m\varpi + \omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi + 2\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{3k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi + 3\omega i}{2\mu+1}\right)$$
$$+ \cdots + \delta^{2\mu k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi + 2\mu\omega i}{2\mu+1}\right),$$

$$0 = \lambda\left(\frac{m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{k'}.\lambda\left(\frac{2\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k'}.\lambda\left(\frac{4\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{3k'}.\lambda\left(\frac{6\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right)$$
$$+ \cdots + \delta^{2\mu k'}.\lambda\left(\frac{4\mu\varpi + m\omega i}{2\mu+1}\right).$$

D'ailleurs toutes les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ sont les racines d'une même équation du degré $(2\mu+1)^2$, dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de c^2.

7. Si la fonction

$$\int \frac{dx}{\Delta(x, c)},$$

dont le module c est réel et moindre que l'unité, peut être transformée dans une autre

$$\varepsilon \int \frac{dy}{\Delta(y, c')},$$

dont le module c' est réel ou imaginaire, en mettant pour y une fonction algébrique quelconque de x, il faut nécessairement que le module c' soit déterminé par l'une des deux équations

$$\sqrt[4]{c'}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q_1}\cdot\frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)(1+q_1^6)\cdots}{(1+q_1)(1+q_1^3)(1+q_1^5)\cdots},$$

$$\sqrt[4]{c'}=\frac{1-q_1}{1+q_1}\cdot\frac{1-q_1^3}{1+q_1^3}\cdot\frac{1-q_1^5}{1+q_1^5}\cdots,$$

où $q_1=q^\mu$, μ étant rationnel; ou, ce qui revient au même,

$$q_1=e^{\left(-\mu\frac{\omega}{\varpi}+\mu' i\right)\pi},$$

μ et μ' étant des nombres rationnels quelconques.

8. La théorie de la transformation devient très facile à l'aide des propriétés les plus simples de la fonction $\lambda\theta$. Pour en donner un exemple, soit proposé le problème: satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')}=\varepsilon\frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

en supposant c et c' moindres que l'unité et y fonction rationnelle, réelle ou imaginaire, de x.

Soit $x=\lambda\theta$, $y=\lambda'\theta'$, en désignant par λ' la fonction qui répond au module c'. L'équation différentielle se changera dans ce cas en $d\theta'=\varepsilon d\theta$, d'où

$$\theta'=\varepsilon\theta+a,$$

a étant une constante. Cela posé, soit

$$y=\frac{\varphi x}{f x},$$

on aura

$$\lambda'(\varepsilon\theta+a)=\frac{\varphi(\lambda\theta)}{f(\lambda\theta)}.$$

En mettant $\theta+2\varpi$, $\theta+\omega i$ au lieu de θ, $\lambda\theta$ ne change pas de valeur et par conséquent on doit avoir

$$\lambda'(\varepsilon\theta+2\varepsilon\varpi+a)=\lambda'(\varepsilon\theta+a),$$

$$\lambda'(\varepsilon\theta+\varepsilon\omega i+a)=\lambda'(\varepsilon\theta+a).$$

Donc, si l'on désigne par ϖ' et ω' les valeurs de ϖ et ω qui répondent au module c', on aura en vertu de l'équation (2):

$$2\varepsilon\varpi=2m\varpi'+n\omega' i,$$

$$\varepsilon\omega i=2m'\varpi'+n'\omega' i,$$

ce qui donne

$$\varepsilon=m.\frac{\varpi'}{\varpi}+\frac{n}{2}\cdot\frac{\omega'}{\varpi}i=n'\frac{\omega'}{\omega}-2m'\frac{\varpi'}{\omega}i;$$

donc

$$m\frac{\varpi'}{\varpi}=n'\frac{\omega'}{\omega},\quad \frac{n}{2}\cdot\frac{\omega'}{\varpi}=-2m'\frac{\varpi'}{\omega},$$

ou bien

$$\frac{\varpi'}{\omega'}=\frac{n'}{m}\cdot\frac{\varpi}{\omega}=-\frac{n}{4m'}\cdot\frac{\omega}{\varpi}.$$

Maintenant, si c est indéterminé, cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait ou $n=0$, $m'=0$, ou $n'=0$, $m=0$. Dans le premier cas ε est réel et égal à

$$m\frac{\varpi'}{\varpi}=n'\frac{\omega'}{\omega},$$

et dans le second cas ε est imaginaire et égal à

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{\omega'}{\varpi}i=-2m'\frac{\varpi'}{\omega}i.$$

Supposons ε réel. Alors on aura ce théorème:

„Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une dans l'autre, il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ, ω, ϖ', ω' cette relation:

$$\frac{\varpi'}{\omega'}=\frac{n'}{m}\cdot\frac{\varpi}{\omega},$$

où n' et m sont des nombres entiers.“

On pourra démontrer que si cette condition est remplie, on pourra effectivement satisfaire à l'équation

$$\int\frac{dy}{\Delta(y,c')}=m\frac{\varpi'}{\varpi}\int\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Rien n'est plus simple que de trouver l'expression de y. Il suffit pour cela de chercher les racines des deux équations $\varphi x=0$, $fx=0$.

Désignons par $\lambda\delta$ et $\lambda\delta'$ deux racines quelconques appartenant respectivement à ces deux équations, on aura, pour déterminer δ et δ', ces deux équations:

$$\lambda'(\varepsilon\delta+a)=0,\quad \lambda'(\varepsilon\delta'+a)=\tfrac{1}{0},$$

ce qui donne

$$\delta = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \frac{k'}{\varepsilon}\omega' i; \quad \delta' = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + (k'+\tfrac{1}{2})\frac{\omega'}{\varepsilon} i,$$

c'est-à-dire:

$$\delta = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varpi + \frac{k'}{n'}\omega i; \quad \delta' = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{k}{m}\varpi + (k'+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n'} i,$$

k et k' étant des nombres entiers. Pour déterminer a, il suffit de remarquer que $\lambda\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\varpi - \theta$ au lieu de θ. On aura donc

$$\lambda'(\varepsilon\varpi - \varepsilon\theta + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

ce qui donne

$$a = \tfrac{1}{2}[(2\mu + 1 - m)\varpi' + \mu'\omega' i).$$

Dans le cas où m est impair, on pourra toujours faire $a = 0$.

Connaissant les valeurs de δ et δ', on aura immédiatement les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$, et par suite l'expression des fonctions φx et fx en produits de facteurs. Les formules les plus simples répondent aux cas de $m = 1$ ou $n' = 1$, et elles sont les seules nécessaires, comme il est aisé de le voir par l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m}\cdot\frac{\varpi}{\omega}$. On pourra aussi se servir des expressions de la fonction $\lambda\theta$ en produits infinis rapportées plus haut. Je l'ai fait voir dans un mémoire qui a été envoyé à M. *Schumacher* pour être inséré dans son journal*).

9. Le cas où un module c peut être transformé en son complément $\sqrt{1-c^2} = b$, mérite une attention particulière. En vertu de l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n}{m}\cdot\frac{\varpi}{\omega}$, on aura alors

$$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{\Delta(y,b)} = \sqrt{mn}\,\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Le module c sera déterminé par une équation algébrique, qui paraît être résoluble par des radicaux; au moins cela aura lieu si $\frac{m}{n}$ est un carré parfait. Dans tous les cas il est facile d'exprimer c par des produits infinis. En effet, si $\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}}$, on a

*) Mémoire XX de cette édition.

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\cdot\frac{\left(1+e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-4\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\cdots}$$
$$= \frac{\left(1-e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1-e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots}.$$

Si deux modules c' et c peuvent être transformés l'un dans l'autre, ils auront entre eux une relation algébrique. Il ne paraît pas possible en général d'en tirer la valeur de c' en c à l'aide de radicaux*), mais il est remarquable, que cela est toujours possible si c peut être transformé en son complément, par exemple si $c^2 = \frac{1}{2}$.

Les équations modulaires jouissent d'ailleurs de la propriété remarquable, que toutes leurs racines peuvent être exprimées *rationnellement* par deux d'entre elles. De même on pourra exprimer toutes les racines par l'une d'elles à l'aide de radicaux.

10. On pourra développer la fonction $\lambda\theta$ de la manière suivante:

$$\lambda\theta = \frac{\theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \cdots}{1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \cdots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes. En faisant

$$\varphi\theta = \theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \cdots$$
$$f\theta = 1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \cdots$$

ces deux fonctions auront la propriété exprimée par les deux équations

*) Dans le cas par exemple où y est de la forme:

$$y = \sqrt{\frac{c^3}{c'}}\cdot\frac{x(a^2-x^2)(a_1^2-x^2)}{(1-c^2a^2x^2)(1-c^2a_1^2x^2)},$$

l'équation entre c' et c est du sixième degré. Or je suis parvenu à démontrer rigoureusement, que si une équation du sixième degré est résoluble à l'aide de *radicaux*, il doit arriver l'un de deux, ou cette équation sera décomposable en deux autres du troisième degré, dont les coefficiens dépendent d'une équation du second degré, ou elle sera décomposable en trois équations du second degré, dont les coefficiens sont déterminés par une équation du troisième degré. L'équation entre c' et c ne paraît guère être décomposable de cette manière.

$$\varphi(\theta'+\theta).\varphi(\theta'-\theta)=(\varphi\theta.f\theta')^2-(\varphi\theta'.f\theta)^2,$$

$$f(\theta'+\theta).f(\theta'-\theta)=(f\theta.f\theta')^2-c^2(\varphi\theta.\varphi\theta')^2,$$

où θ' et θ sont deux variables indépendantes. Ainsi par exemple si l'on fait $\theta'=\theta$, on a

$$f(2\theta)=(f\theta)^4-c^2(\varphi\theta)^4.$$

Ces fonctions jouissent de beaucoup de propriétés remarquables.

11. Les formules présentées dans ce qui précède ont lieu avec quelques restrictions, si le module c est quelconque, réel ou imaginaire.

PREMIÈRE PARTIE.

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE I.

Propriétés générales des fonctions elliptiques.

Les fonctions elliptiques jouissent comme on sait de cette propriété remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant une certaine expression *algébrique* et *logarithmique*. La découverte de cette propriété est due, si je ne me trompe, à M. *Legendre*. La démonstration que cet illustre géomètre en a donnée, est fondée sur l'intégration algébrique de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}.$$

L'objet de ce chapitre sera de démontrer cette propriété des fonctions elliptiques, mais en nous appuyant sur des considérations différentes de celles de M. *Legendre*.

§ 1.

Démonstration d'un théorème fondamental.

Nous allons commencer par établir un théorème général qui servira

fondement de tout ce qui va être exposé dans ce mémoire, et qui en même temps exprime une propriété très remarquable des fonctions elliptiques.

Théorème I. Soient fx et φx deux fonctions quelconques *entières* de x, l'une paire, l'autre impaire, et dont les coefficiens soient supposés variables. Cela posé, si l'on décompose la fonction entière paire

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2$$

en facteurs de la forme $x^2-x_1^2$, de sorte qu'on ait

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=A(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)\,.\,.\,.\,(x^2-x_\mu^2), \tag{1}$$

où A est indépendant de l'indéterminée x, je dis qu'on aura

$$\Pi x_1+\Pi x_2+\Pi x_3+\cdots+\Pi x_\mu=C-\frac{a}{2\Delta a}\log\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}, \tag{2}$$

a désignant le paramètre de la fonction Πx, de sorte que

$$\Pi x=\int\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x}. \tag{3}$$

La quantité C est la constante d'intégration.

Démonstration. Supposons d'abord que tous les coefficiens des diverses puissances de x dans les fonctions fx et φx soient les variables indépendantes. Alors toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ seront évidemment inégales et fonctions de ces variables. En désignant par x l'une quelconque d'entre elles, l'équation (1) donnera

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=0, \tag{4}$$

d'où

$$fx+\varphi x.\Delta x=0. \tag{5}$$

Cela posé, faisons pour abréger

$$\psi x=(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2,$$

et désignons par $\psi' x$ la dérivée de cette fonction par rapport à x seul. De même désignons par la caractéristique δ la différentiation qui se rapporte aux seules variables indépendantes. Alors on tire de l'équation (4) en différentiant

$$\psi' x.dx+2fx.\delta fx-2\varphi x.\delta\varphi x.(\Delta x)^2=0;$$

mais en vertu de l'équation (5) on a

$$fx = -\varphi x . \Delta x,$$
$$\varphi x (\Delta x)^2 = -fx . \Delta x,$$

donc, en substituant,

$$\psi' x . dx - 2\Delta x (\varphi x . \delta fx - fx . \delta \varphi x) = 0.$$

De là on tire, en divisant par $\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x$,

$$\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x} = \frac{2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\psi' x},$$

et en intégrant

$$\Pi x = \int \frac{2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta \varphi x)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\psi' x}.$$

En faisant maintenant $x = x_1, x_2, \ldots x_\mu$, en ajoutant les résultats et en faisant pour abréger

$$2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta \varphi x) = \theta x,$$

on obtiendra

$$(6) \qquad \Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_\mu$$
$$= \int \left(\frac{\theta x_1}{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)\psi' x_1} + \frac{\theta x_2}{\left(1-\frac{x_2^2}{a^2}\right)\psi' x_2} + \cdots + \frac{\theta x_\mu}{\left(1-\frac{x_\mu^2}{a^2}\right)\psi' x_\mu} \right).$$

Maintenant θx étant une fonction entière de x dont le degré est évidemment inférieur à celui de la fonction ψx, le second membre, d'après un théorème connu sur la décomposition des fonctions fractionnaires, se réduit à

$$\int \frac{a\theta a}{2\psi a},$$

ou, en substituant la valeur de θa et celle de ψa, à

$$a \int \frac{\varphi a . \delta fa - fa . \delta \varphi a}{(fa)^2 - (\varphi a)^2 (\Delta a)^2}.$$

Cette intégrale se trouvera facilement; en effet, Δa étant constant, on aura en intégrant d'après les règles connues,

$$C - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a},$$

C étant la constante d'intégration. Cette fonction mise à la place du second membre de l'équation (6), donne précisément la formule (2) qu'il s'agissait de démontrer.

La propriété de la fonction $\Pi(x)$, exprimée par la formule (2), est d'autant plus remarquable, qu'elle aura lieu en supposant la fonction Δx racine carrée d'une fonction quelconque entière et paire de x. En effet la démonstration précédente est fondée sur cette seule propriété de la fonction Δx. On a ainsi une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*).

La formule (2) étant démontrée pour le cas où les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ sont inégales, il est évident qu'elle aura encore lieu en établissant entre les variables indépendantes des relations quelconques qui pourront rendre égales plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

Il faut observer que les signes des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_\mu$ ne sont pas arbitraires. Ils doivent être pris tels qu'ils satisfassent aux équations

$$(7) \quad fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0,\ fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0, \ldots fx_\mu + \varphi x_\mu . \Delta x_\mu = 0,$$

qu'on tire de l'équation (5), en mettant pour x les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

La formule (2) exprime une propriété de la fonction de la troisième espèce $\Pi(x)$. Or rien n'est plus facile que d'en déduire des propriétés semblables des fonctions:

$$(8) \qquad \varpi x = \int \frac{dx}{\Delta x} \text{ et } \varpi_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x}.$$

D'abord si l'on fait a infini, on a $\Pi x = \varpi x$; mais il est clair que la partie logarithmique de la formule (2) s'évanouira dans ce cas; le second membre se réduira donc à une constante, et par conséquent on aura

$$(9) \qquad \varpi x_1 + \varpi x_2 + \cdots + \varpi x_\mu = C.$$

De même si l'on développe les deux membres de l'équation (2) suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, on aura, en comparant les coefficiens de $\frac{1}{a^2}$ dans les deux membres,

$$(10) \qquad \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \cdots + \varpi_0 x_\mu = C - p,$$

où p est une fonction *algébrique* des variables, savoir le coefficient de $\frac{1}{a^2}$ dans le développement de la fonction

*) Voyez sur ce sujet un mémoire inséré dans le tome III, p. 313, de ce journal. On trouve un théorème beaucoup plus général t. IV, p. 200.

$$\frac{a}{2\Delta a}\log\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}$$

suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$.

En vertu des formules (2, 9, 10) il est clair, qu'en désignant par ψx une fonction quelconque de la forme:

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&\psi x=\int\left\{A+Bx^2+\frac{\alpha}{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{\alpha_1}{1-\frac{x^2}{a_1^2}}+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}\right\}\frac{dx}{\Delta x},\\ &\text{on aura}\\ &\psi x_1+\psi x_2+\cdots+\psi x_\mu=C-B.p-\frac{\alpha a}{2\Delta a}\log\frac{fa+\varphi a\Delta a}{fa-\varphi a\Delta a}\\ &\qquad-\frac{\alpha_1 a_1}{2\Delta a_1}\log\frac{fa_1+\varphi a_1\Delta a_1}{fa_1-\varphi a_1\Delta a_1}-\cdots-\frac{\alpha_\nu a_\nu}{2\Delta a_\nu}\log\frac{fa_\nu+\varphi a_\nu\Delta a_\nu}{fa_\nu-\varphi a_\nu\Delta a_\nu}.\end{aligned}\right.$$

On voit que cette équation a lieu quelle que soit la constante A.

§ 2.

Propriété fondamentale des fonctions elliptiques, tirée des formules précédentes.

Dans ce qui précède les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sont regardées comme fonctions des coefficiens variables dans fx et φx. Supposons maintenant qu'on détermine ces coefficiens de manière qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ prennent des valeurs données mais variables. Soient

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m$$

des variables indépendantes. Alors les coefficiens dans fx, φx deviendront des fonctions de ces quantités. En les substituant dans l'équation

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=0,$$

le premier membre sera divisible par le produit

$$(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\cdots(x^2-x_m^2),$$

et le quotient, égalé à zéro, donnera une équation du degré $\mu-m$ par rapport à x^2, dont les racines seront les $\mu-m$ quantités

$$x_{m+1}^2,\ x_{m+2}^2,\ \ldots\ x_\mu^2,$$

qui par suite sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Le cas le plus simple et le plus important est celui où le nombre $\mu-m$ a la moindre valeur possible. Pour avoir ce minimum, il faut donner aux fonctions fx et φx la forme la plus générale pour laquelle le degré de l'équation $(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=0$ est égal à 2μ.

Il est facile de voir que le plus grand nombre de coefficiens qu'il soit possible à introduire dans fx et φx, est μ. Mais, puisqu'en vertu de la forme des équations (7) on peut supposer un de ces coefficiens égal à l'unité, sans diminuer la généralité, on n'aura réellement que $\mu-1$ indéterminées. On pourra donc faire $m=\mu-1$, en sorte que toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, excepté une seule, seront des variables indépendantes. Par là on aura immédiatement la propriété fondamentale des fonctions elliptiques dont il a été question au commencement du chapitre.

Il y a deux cas différens à considérer, savoir μ pair ou impair.

Premier cas, si μ est pair et égal à $2n$.

A. Si la fonction fx est paire et φx impaire, il est clair que fx doit être du degré $2n$, et φx du degré $2n-3$. Faisons donc

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&fx=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_{n-1}x^{2n-2}+x^{2n},\\ &\varphi x=(b_0+b_1x^2+b_2x^4+\cdots+b_{n-2}x^{2n-4})x\end{aligned}\right.$$

et

$$(13)\quad (fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x_{2n-1}^2)(x^2-y^2),$$

où nous avons mis y au lieu de x_{2n}, qui sera une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$. Les coefficiens $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-2}$ sont déterminés en fonction de $x_1, x_2, \ldots$ à l'aide des $\mu-1$ équations (7), savoir:

$$(13')\quad fx_1+\varphi x_1.\Delta x_1=0,\ fx_2+\varphi x_2.\Delta x_2=0,\ldots fx_{2n-1}+\varphi x_{2n-1}.\Delta x_{2n-1}=0.$$

Ces équations, étant linéaires par rapport aux inconnues, donneront celles-ci en fonction *rationnelle* des quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{2n-1},\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots\ \Delta x_{2n-1}.$$

Il est clair qu'on pourra donner aux radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n-1}$ des signes arbitraires.

Pour avoir la valeur de y, faisons dans l'équation (13) $x=0$. Cela donne

$$a_0^2=x_1^2x_2^2\ldots x_{2n-1}^2.y^2,$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{a_0}{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{2n-1}}. \tag{14}$$

La quantité y est donc une fonction rationnelle des variables $x_1, x_2, \ldots$ et des radicaux correspondans. Si maintenant y a cette valeur et si l'on fait de plus

$$\Delta x_{2n} = -\Delta y,$$

les formules (2, 9, 10) donneront

$$\left\{\begin{aligned} &\varpi x_1 + \varpi x_2 + \cdots + \varpi x_{2n-1} = \varpi y + C, \\ &\varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \cdots + \varpi_0 x_{2n-1} = \varpi_0 y - b_{n-2} + C, \\ &\Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_{2n-1} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a} + C. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Quant aux fonctions ϖy, $\varpi_0 y$, Πy, il faut bien observer que le signe du radical Δy n'est pas toujours le même. Il est dans tous les cas déterminé par la dernière des équations (7) qui, en mettant pour x_{2n} et Δx_{2n} leurs valeurs y et $-\Delta y$, deviendra

$$fy - \varphi y \cdot \Delta y = 0.$$

On en tire

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y}, \tag{16}$$

ce qui fait voir que le radical Δy, comme y, est une fonction *rationnelle* des quantités $x_1, x_2, \ldots \Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$

La fonction y a la propriété d'être zéro en même temps que les variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$. En effet si l'on fait

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n-1} = 0,$$

l'équation (13) ne pourra subsister à moins que tous les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-2}$ ne soient égaux à zéro, donc cette équation se réduit à

$$x^{4n} = x^{4n-2}(x^2 - y^2),$$

donc on aura $y = 0$.

On pourrait donner le signe contraire au second membre de l'équation (14). Celui que nous avons choisi est tel que le radical Δy se réduit à $+1$, en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{2n-1} = 0$, et en même temps $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{2n-1} = +1$. Pour démontrer cela, supposons $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ infiniment petits; on aura alors

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{2n-1} = 1,$$

et par conséquent les équations (13′) font voir que $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ satisfont à l'équation

$$x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + b_{n-2}x^{2n-3} + \cdots + b_0 x + a_0 = 0. \tag{17}$$

Cette équation étant du degré $2n$, doit avoir encore une racine. En la désignant par z, on aura

$$a_0 = z \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_{2n-1},$$

donc en vertu de l'équation (14),

$$z = -y.$$

L'équation est donc satisfaite en faisant $x = -y$. Or cela donne

$$y^{2n} + a_{n-1}y^{2n-2} + \cdots + a_1 y^2 + a_0 = (b_0 + b_1 y^2 + \cdots + b_{n-2} y^{2n-4})y,$$

donc en vertu de l'équation (16):

$$\Delta y = +1. \tag{18}$$

On pourra encore remarquer que y se réduit pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ à $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1}$. On le voit par l'équation (17), qui, n'ayant pas de second terme, donnera la somme des racines égale à zéro, c'est-à-dire

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1} - y = 0,$$

donc

$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1}. \tag{19}$$

B. Si fx est impair et φx pair, fx doit être du degré $2n-1$ et φx du degré $2n-2$. Donc on aura dans ce cas $2n-1$ coefficiens indéterminés, et on parviendra à des formules semblables aux formules (15); mais la fonction y aura une valeur différente. Il sera facile de démontrer qu'elle sera égale à $\frac{1}{cy}$, la valeur de y étant déterminée par l'équation (14).

Second cas, si μ est un nombre impair et égal à $2n+1$.

A. Si fx est impair et φx pair, on aura

$$\left\{\begin{aligned} fx &= (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_{n-1}x^{2n-2} + x^{2n})x, \\ \varphi x &= b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \cdots + b_{n-1} x^{2n-2}, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_{2n}^2)(x^2 - y^2). \tag{21}$$

Les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ sont déterminés par les $2n$ équations linéaires

$$(22)\quad fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0,\ fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0,\ \ldots fx_{2n} + \varphi x_{2n} . \Delta x_{2n} = 0.$$

La fonction y le sera par l'équation

$$(23)\qquad y = \frac{b_0}{x_1 . x_2 \ldots x_{2n}},$$

qu'on obtiendra, en faisant dans (21) $x = 0$. Enfin le radical Δy est déterminé par

$$(24)\qquad \Delta y = \frac{fy}{\varphi y}.$$

Cela posé on aura

$$(25)\quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \cdots + \varpi x_{2n} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \cdots + \varpi_0 x_{2n} = \varpi_0 y - b_{n-1} + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots + \Pi x_{2n} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} + C. \end{cases}$$

Les fonctions y et Δy sont, comme dans le cas précédent, des fonctions rationnelles des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ et des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n}$, et on démontrera de la même manière, qu'on aura pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$,

$$(26)\qquad y = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n},\quad \Delta y = +1,$$

si l'on suppose en même temps que les radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n}$ se réduisent à $+1$; donc y s'évanouira simultanément avec les variables.

Les formules (25) pourront d'ailleurs être déduites sur le champ de celles du premier cas, en y faisant $x_{2n-1} = 0$, et changeant ensuite n en $n+1$.

B. Si fx est pair et φx impair, on parviendra à des formules semblables. La valeur qui en résultera pour la fonction y, sera égale à $\frac{1}{cy}$, où y est déterminé par la formule (23).

On voit par les formules (15, 25), qu'on pourra toujours exprimer la somme d'un nombre donné de fonctions par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant, pour les fonctions de la première espèce, une *constante*, pour celles de la seconde espèce une certaine fonction *algébrique*, et pour celles de la troisième espèce une fonction *logarithmique*.

En remarquant qu'une intégrale quelconque de la forme

$$\int \frac{\theta x . dx}{\Delta x},$$

peut être réduite aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$ et à un certain nombre de fonctions de la troisième espèce, en y ajoutant une expression algébrique et logarithmique, il est clair qu'en faisant

$$\psi x = \int \frac{\theta x . dx}{\Delta x},$$

on aura la relation

$$(27)\qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 + \cdots = \psi y + v + C,$$

où v est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

En vertu des formules (15, 25) il est clair que la fonction v ne change pas de valeur, si l'on ajoute à la fonction rationnelle θx une quantité constante quelconque, de sorte qu'on peut supposer également

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{dx}{\Delta x}.$$

Je dis maintenant que la fonction ψ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (27). En effet si l'on différentie cette équation par rapport à l'une des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$, par exemple à x_1, on aura

$$\psi' x_1 . dx_1 = \psi' y \frac{dy}{dx_1} dx_1 + \frac{dv}{dx_1} dx_1.$$

Cela posé, si l'on suppose toutes les quantités $x_3, x_4, \ldots y$ égales à des constantes déterminées, on aura, en mettant x pour x_1, et en faisant

$$\psi' y = A,\ \frac{dv}{dx_1} = p,\ \frac{dy}{dx_1} = q:$$

$$\psi' x . dx = A q dx + p dx,$$

d'où l'on tire

$$\psi x = \int (Aq + p)\, dx.$$

La fonction ψx ne pourra donc contenir qu'une seule constante indéterminée A, et par conséquent

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{dx}{\Delta x}$$

est son expression générale.

Les propriétés exprimées par les formules de ce paragraphe appartiennent donc aux seules fonctions elliptiques. C'est pourquoi je les ai nommées *fondamentales*.

Dans les formules que nous avons données, y a une valeur unique, mais on pourra satisfaire aux mêmes formules, en mettant pour y une expression algébrique contenant une constante arbitraire. En effet, pour avoir une telle expression, il suffit de supposer une des variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ égale à une constante arbitraire, et la valeur de y qu'on obtiendra ainsi, sera la plus générale possible, comme on sait par la théorie de l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale complète ne contient qu'une seule constante arbitraire.

A l'aide des formules (15, 25) on pourra exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions par une seule fonction. Il est facile d'en tirer les formules suivantes:

$$(28)\quad \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu}\varpi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\varpi x_2 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu}\varpi x_n = C + \varpi y, \\ \frac{\mu_1}{\mu}\varpi_0 x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\varpi_0 x_2 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu}\varpi_0 x_n = \varpi_0 y - p + C, \\ \frac{\mu_1}{\mu}\Pi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu}\Pi x_2 + \cdots + \frac{\mu_n}{\mu}\Pi x_n = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a}\log\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} + C, \end{cases}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \mu$ désignent des nombres entiers quelconques, et où y est une fonction *algébrique* des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, de même que les coefficiens de fa et φa. Pour avoir ces formules, il suffit de supposer dans (13) et (21) un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots y$ égales entre elles.

Pour déterminer $y, fx, \varphi x$, on aura cette équation

$$(29)\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-x_1^2)^{\mu_1}(x^2-x_2^2)^{\mu_2}\ldots(x^2-x_n^2)^{\mu_n}(x^2-y^2)^{\mu},$$

qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de x.

§ 3.

Application au cas où deux fonctions sont données.

Pour réduire deux fonctions à une seule, il suffit de supposer, dans les formules (25), $n=1$. On aura alors

$$fx = a_0x + x^3, \quad \varphi x = b_0,$$

et pour déterminer les deux constantes a_0 et b_0, on aura les deux équations

$$a_0x_1 + x_1^3 + b_0\Delta x_1 = 0, \quad a_0x_2 + x_2^3 + b_0\Delta x_2 = 0,$$

qui donnent

$$a_0 = \frac{x_2^3\Delta x_1 - x_1^3\Delta x_2}{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1}, \quad b_0 = \frac{x_2x_1^3 - x_1x_2^3}{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1}.$$

Connaissant b_0, on aura la valeur de y par la formule (23), savoir pour $n=1$

$$y = \frac{b_0}{x_1x_2};$$

donc

$$(30)\quad y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1},$$

ou bien, en multipliant haut et bas par $x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1$,

$$(31)\quad y = \frac{x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1}{1 - c^2x_1^2x_2^2}.$$

Si l'on exprime a_0 et b_0 en x_1, x_2, y, on aura ces expressions très simples:

$$(32)\quad b_0 = x_1x_2y, \quad a_0 = \tfrac{1}{2}(c^2x_1^2x_2^2y^2 - x_1^2 - x_2^2 - y^2).$$

L'expression de a_0 se tire de l'équation

$$(a_0x + x^3)^2 - b_0^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-y^2),$$

en égalant entre eux les coefficiens de x^4 dans les deux membres.

Les fonctions a_0 et y étant déterminées comme on vient de le voir, les formules (25) donneront, en faisant $n=1$,

$$(33)\quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 = \varpi_0 y - x_1x_2y + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a}\log\frac{a_0a + a^3 + x_1x_2y\Delta a}{a_0a + a^3 - x_1x_2y\Delta a} + C. \end{cases}$$

Quant à la valeur du radical Δy, elle est donnée par l'équation (24)

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y} = \frac{a_0y + y^3}{b_0},$$

c'est-à-dire

$$(34)\quad \Delta y = \frac{a_0 + y^2}{x_1x_2}.$$

Pour réduire la différence de deux fonctions à une seule, il suffit de changer le signe de x_2 dans les formules précédentes. La valeur de y deviendra alors

$$y = \frac{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}. \tag{35}$$

Si dans les formules (33) on fait x_2 égal à une constante arbitraire, on aura la relation qui doit avoir lieu entre les variables de deux fonctions pour qu'elles soient réductibles l'une à l'autre. En faisant $x_2 = e$, $x_1 = x$, on aura

$$y = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2} \quad \text{et} \quad \varpi x = \varpi y + C. \tag{36}$$

En différentiant, il viendra

$$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{dx}{\Delta x}. \tag{37}$$

L'intégrale complète de cette équation est donc exprimée par l'équation algébrique (36), e étant la constante arbitraire. Parmi les intégrales particulières on doit remarquer les suivantes:

1) $y = x$, qui répond à $e = 0$, $\Delta y = \Delta x$,

2) $y = \pm \frac{1}{cx}$, qui répond à $e = \frac{1}{0}$, $\Delta y = \mp \frac{\Delta x}{cx^2}$,

3) $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - c^2 x^2}}$, qui répond à $e = 1$, $\Delta y = \frac{(c^2 - 1)x}{1 - c^2 x^2}$,

4) $y = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1 - c^2 x^2}{1 - x^2}}$, qui répond à $e = \frac{1}{c}$, $\Delta y = \frac{(1 - c^2)x}{(1 - x^2)c}$.

§ 4.

Application au cas où toutes les fonctions données sont égales

Si l'on fait dans les formules (15, 25).

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x, \quad \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x,$$

on aura celles-ci:

$$\begin{cases} \mu \varpi x = \varpi y + C, \\ \mu \varpi_0 x = \varpi_0 y - p + C, \\ \mu \Pi x = \Pi y - \frac{a}{2 \Delta a} \log \frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} + C, \end{cases} \tag{38}$$

où

$$(fz)^2 - (\varphi z)^2 (1 - z^2)(1 - c^2 z^2) = (z^2 - x^2)^\mu (z^2 - y^2), \tag{39}$$

z étant indéterminé.

La fonction y est déterminée par les équations (14, 23):

$$y = -\frac{a_0}{x^\mu}, \quad y = \frac{b_0}{x^\mu}. \tag{40}$$

La première a lieu si $\mu = 2n - 1$, la seconde si $\mu = 2n$. Les équations (13′, 22), qui doivent déterminer les coefficiens $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, se réduiront dans le cas que nous considérons à une seule, savoir

$$fx + \varphi x . \Delta x = 0,$$

mais d'après les principes du calcul différentiel, cette équation doit encore avoir lieu, en la différentiant par rapport à x seul un nombre quelconque de fois moindre que μ. On aura donc en tout μ équations linéaires entre les μ inconnues; on en tire leurs valeurs en fonction rationnelle de la variable x et du radical Δx. Connaissant $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, on aura ensuite la valeur de Δy par l'équation

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y}.$$

On pourrait ainsi déterminer toutes les quantités nécessaires, mais pour mieux approfondir les propriétés de la fonction y, nous allons traiter le problème d'une autre manière, qui conduira successivement aux valeurs de y qui répondent aux valeurs 1, 2, 3, etc. de μ.

Désignons par x_μ la valeur de y qui répond à μ. On aura

$$\varpi x_\mu = C + \mu \varpi x,$$

donc

$$\varpi(x_{\mu+m}) = C + \varpi x_\mu + \varpi x_m,$$

mais si l'on fait

$$y = \frac{x_m \Delta x_\mu + x_\mu \Delta x_m}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2},$$

on aura, en vertu des équations (31, 33)

$$\varpi x_m + \varpi x_\mu = \varpi y,$$

donc

$$\varpi x_{\mu+m} = C + \varpi y. \tag{41}$$

La valeur la plus générale de $x_{\mu+m}$, qui satisfera à cette équation est

$$(41') \qquad x_{\mu+m} = \frac{y\,\Delta e + e\,\Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est une constante. Pour la déterminer, soit x infiniment petit; on aura alors

$$x_m = mx,\ \ x_\mu = \mu x,\ \ x_{\mu+m} = (m+\mu)x,\ \ \Delta x_m = \Delta x_\mu = 1;$$

donc

$$y = (m+\mu)x,\ \ \Delta y = 1.$$

L'équation (41′) donnera donc

$$(m+\mu)x = (m+\mu)x\,\Delta e + e,$$

donc $e = 0$, $\Delta e = 1$ et par suite $x_{m+\mu} = y$, c'est-à-dire que

$$(42) \qquad x_{\mu+m} = \frac{x_\mu \Delta x_m + x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

On aura de la même manière

$$(43) \qquad x_{\mu-m} = \frac{x_\mu \Delta x_m - x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

La première de ces formules servira à trouver $x_{\mu+m}$, lorsqu'on connaît x_m et x_μ; on pourra donc former successivement les fonctions

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,$$

en remarquant que $x_1 = x$, $\Delta x_1 = \Delta x$.

Si l'on fait $m = 1$, on trouvera

$$(44) \qquad x_{\mu+1} = -x_{\mu-1} + \frac{2x_\mu \Delta x}{1 - c^2 x^2 x_\mu^2}.$$

En remarquant que

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = x,$$

cette formule fait voir que x_μ est une fonction rationnelle de x, si μ est un nombre impair, et que x_μ est de la forme $p\,\Delta x$, où p est rationnel, si μ est un nombre pair. Dans le premier cas $\frac{\Delta x_\mu}{\Delta x}$ est rationnel, et dans le second Δx_μ le sera. On voit également que x_μ s'évanouira en même temps que Δx, si μ est un nombre pair. Les quantités

$$x_{2\mu+1},\ \ \frac{\Delta x_{2\mu+1}}{\Delta x},\ \ \frac{x_{2\mu}}{\Delta x},\ \ \Delta x_{2\mu}$$

sont donc des fonctions rationnelles de x.

Si l'on multiplie entre elles les deux formules (42, 43), il viendra

$$(44') \qquad x_{\mu+m} \cdot x_{\mu-m} = \frac{x_\mu^2 - x_m^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_m^2},$$

équation qui paraît être la relation la plus simple qu'on puisse établir entre les fonctions x_μ. En y faisant $m = \mu - 1$, on aura

$$(45) \qquad x_{2\mu-1} = \frac{1}{x}\,\frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2}.$$

De même si dans la formule (42) on fait $m = \mu$, on aura

$$(46) \qquad x_{2\mu} = \frac{2x_\mu \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^4}.$$

Ces deux formules paraissent être les plus commodes pour calculer successivement les fonctions $x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$

Pour trouver les expressions les plus simples de x_μ, supposons

$$(47) \qquad x_\mu = \frac{p_\mu}{q_\mu},\ \ \Delta x_\mu = \frac{r_\mu}{q_\mu^2},$$

où p_μ^2, q_μ sont des fonctions entières de x sans diviseur commun. En mettant ces valeurs dans l'équation (46), on aura

$$\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} = \frac{2p_\mu q_\mu r_\mu}{q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4}.$$

Or il est évident que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression; donc on aura séparément

$$(48) \qquad p_{2\mu} = 2p_\mu q_\mu r_\mu,\ \ q_{2\mu} = q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4.$$

En faisant les mêmes substitutions dans l'équation (45), on obtiendra

$$(49) \qquad \frac{x \cdot p_{2\mu-1}}{q_{2\mu-1}} = \frac{p_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 p_{\mu-1}^2}{q_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 p_{\mu-1}^2}.$$

Or je dis que la fraction du second membre est nécessairement réduite à sa plus simple expression. En effet si l'on avait pour une même valeur de x

$$p_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 p_{\mu-1}^2 = 0,\ \ q_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 p_{\mu-1}^2 = 0,$$

on aurait encore

$$x_\mu^2 = x_{\mu-1}^2,\ \ 1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2 = 0.$$

Mais on a en général

$$x_{2\mu-1} = \frac{x_\mu \Delta x_{\mu-1} + x_{\mu-1} \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2} = \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{x_\mu \Delta x_{\mu-1} - x_{\mu-1} \Delta x_\mu};$$

donc aussi

$$x_\mu \Delta x_{\mu-1} = x_{\mu-1} \Delta x_\mu = 0,$$

ou bien

$$x_\mu^2(1-x_{\mu-1}^2)(1-c^2x_{\mu-1}^2)=0=x_{\mu-1}^2(1-x_\mu^2)(1-c^2x_\mu^2),$$

ce qui est impossible, car il fallait

$$x_\mu^2=\pm\frac{1}{c}.$$

Cela posé, l'équation (49) donnera

$$(50)\qquad p_{2\mu-1}=\frac{1}{x}(p_\mu^2q_{\mu-1}^2-q_\mu^2p_{\mu-1}^2),\quad q_{2\mu-1}=q_\mu^2q_{\mu-1}^2-c^2p_\mu^2p_{\mu-1}^2.$$

Si donc on détermine successivement les fonctions

$$p_2,\ q_2,\ p_3,\ q_3,\ p_4,\ q_4,\ \ldots$$

par les équations (48, 50), $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera toujours réduit à sa plus simple expression.

On pourra faire $p_1=x$, $q_1=1$. D'après la forme des expressions (48, 50) il est clair que

1) $p_{2\mu-1}$ est une fonction entière et impaire de x du degré $(2\mu-1)^2$,
2) $p_{2\mu}=p'\Delta x$, où p' est une fonction entière et impaire du degré $(2\mu)^2-3$,
3) q_μ est une fonction entière et paire du degré μ^2-1 ou μ^2, selon que μ est impair ou pair.

Les fonctions $x_{2\mu-1}$ et $x_{2\mu}$ auront donc la forme suivante:

$$(51)\qquad x_{2\mu-1}=\frac{x(A_0+A_2x^2+A_4x^4+\cdots+A_{(2\mu-1)^2-1}x^{(2\mu-1)^2-1})}{1+A_2^1x^2+A_4^1x^4+\cdots+A^1_{(2\mu-1)^2-1}x^{(2\mu-1)^2-1}},$$

$$(52)\qquad x_{2\mu}=\frac{x\,\Delta x(B_0+B_2x^2+B_4x^4+\cdots+B_{4\mu^2-4}x^{(2\mu)^2-4})}{1+B_2^1x^2+B_4^1x^4+\cdots+B^1_{4\mu^2}x^{(2\mu)^2}}.$$

On aura par exemple

$$(53)\qquad x_2=\frac{2x\,\Delta x}{1-c^2x^4},\quad x_3=x\frac{3-4(1+c^2)x^2+6c^2x^4-c^4x^8}{1-6c^2x^4+4c^2(1+c^2)x^6-3c^4x^8}.$$

Il est facile de voir que les coefficiens A_0, A_2, ... A_2^1, A_4^1, ... B_0, B_2, ... B_2^1, B_4^1, ... seront des fonctions entières de c^2. On a toujours

$$A_0=2\mu-1,\quad B_0=2\mu\quad \text{et}\quad A_2^1=B_2^1=0.$$

La fonction $x_{2\mu}$ est, comme on le voit, irrationnelle; or on peut facilement trouver une fonction rationnelle y qui satisfasse à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta y}=2\mu\frac{dx}{\Delta x}.$$

Une telle fonction est la suivante

$$(54)\qquad y=\sqrt{\frac{1-x_{2\mu}^2}{1-c^2x_{2\mu}^2}}=\frac{\Delta x_{2\mu}}{1-c^2x_{2\mu}^2},$$

car on a, en vertu de la relation (37),

$$\frac{dy}{\Delta y}=\frac{dx_{2\mu}}{\Delta x_{2\mu}},$$

et y est rationnel, puisque les fonctions $\Delta x_{2\mu}$ et $x_{2\mu}^2$ le sont. On se convaincra aisément que cette fonction y aura la forme

$$(55)\qquad y=\frac{1+\alpha x^2+\cdots+\beta x^{(2\mu)^2}}{1+\alpha' x^2+\cdots+\beta' x^{(2\mu)^2}}.$$

Pour $\mu=1$, on aura

$$(56)\qquad y=\frac{1-2x^2+c^2x^4}{1-2c^2x^2+c^2x^4}.$$

Nous verrons dans la suite comment on pourra décomposer les fonctions x_μ et y en facteurs et en fractions partielles.

Nous montrerons de même que les équations précédentes sont toujours résolubles *algébriquement* par rapport à x, de sorte qu'on peut exprimer x en x_μ à l'aide de *radicaux*.

CHAPITRE II.

Sur la relation la plus générale possible entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Après avoir établi dans le chapitre précédent les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, nous allons maintenant en faire l'application au problème général que nous nous sommes proposé. Nous ferons voir qu'on pourra en ramener la solution à celle de quelques autres problèmes plus simples.

§ 1.

Sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une différentielle quelconque algébrique, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Soient x_1, x_2, x_3, ... x_n des variables en nombre quelconque, liées entre elles par des équations algébriques dont le nombre est moindre que celui des variables. Soient $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ des fonctions algébriques quelconques de ces variables et supposons que la différentielle

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu$$

soit complète et que son intégrale soit exprimable à l'aide de fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, de sorte que l'on ait

$$(57)\qquad \begin{aligned} &\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu) \\ &\qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu \\ &\qquad\quad + \alpha_1 . \psi_1 t_1 + \alpha_2 . \psi_2 t_2 + \cdots + \alpha_n . \psi_n t_n, \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \ldots A_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant des quantités constantes, $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu, t_1, t_2, \ldots t_n$ des fonctions *algébriques* des variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, et $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n$ des fonctions elliptiques quelconques des trois espèces avec des *modules et des paramètres quelconques*. Désignons respectivement par $c_1, c_2, \ldots c_n$ les modules de ces fonctions, et faisons pour abréger

$$(58)\qquad \pm\sqrt{(1-x^2)(1-c_m^2 x^2)} = \Delta_m x,$$

de sorte qu'on ait en général

$$(59)\qquad \psi_m x = \int \frac{\theta' dx}{\Delta_m x},$$

θ' étant une fonction rationnelle de x^2 de l'une des trois formes

$$1,\ x^2,\ \frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

selon que $\psi_m x$ est une fonction de la première, de la seconde ou de la troisième espèce. Nous pourrons même supposer que θ' soit une fonction rationnelle quelconque de x.

On pourra regarder un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ comme des variables indépendantes. Soient celles-ci les m premières:

$$(60)\qquad x_1, x_2, x_3, \ldots x_m;$$

alors toutes les quantités

$$(61)\qquad x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_\mu;\ t_1, t_2, \ldots t_n;\ u;\ v_1, v_2, \ldots v_\nu;\ y_1, y_2, \ldots y_\mu$$

seront des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Cela posé, imaginons une fonction algébrique θ telle qu'on puisse exprimer toutes les fonctions

$$(62)\qquad u, v_1, v_2, \ldots v_\nu;\ t_1, t_2, \ldots t_n,\ \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \ldots \Delta_n(t_n)$$

rationnellement en

$$(63)\qquad \theta, x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu, y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu.$$

Il existe une infinité de fonctions θ qui jouissent de cette propriété. Une telle fonction sera par exemple la somme de toutes les fonctions (62), multipliées chacune par un coefficient indéterminé et constant. C'est ce qui est facile à démontrer par la théorie des équations algébriques. La quantité θ, étant une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \ldots$, pourra donc satisfaire à une équation algébrique, dans laquelle tous les coefficiens sont des fonctions *rationnelles* de $x_1, x_2, \ldots$. Or au lieu de supposer ces coefficiens rationnels en $x_1, x_2, \ldots$, nous les supposerons rationnels en

$$(64)\qquad x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu, y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu;$$

car cette supposition permise simplifiera beaucoup le raisonnement. Soit donc

$$(65)\qquad V = 0$$

l'équation en θ; désignons son degré par δ et supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible que la fonction θ puisse être racine d'une autre équation de la même forme, mais dont le degré soit moindre que δ.

Imaginons maintenant qu'on différentie l'équation (57) par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_m$. Il est facile de voir que la différentielle qu'on trouve sera de la forme

$$(66)\qquad p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m = 0,$$

où $p_1, p_2, \ldots p_m$ seront des fonctions *rationnelles* des quantités

$$x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu, u, v_1, v_2, v_3, \ldots v_\nu,$$
$$t_1, t_2, \ldots t_n, \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \ldots \Delta_n(t_n).$$

Donc en introduisant la fonction θ, $p_1, p_2, \ldots p_m$ deviendront des fonctions rationnelles de

$$(67)\qquad \theta, x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu.$$

Cela posé, l'équation (66) donnera séparément

$$(68)\qquad p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0,\ \ldots\ p_m = 0,$$

et il est clair que si ces équations sont satisfaites, l'équation proposée (57) le sera également. Maintenant les équations (68) sont autant d'équations en θ de la même forme que $V = 0$, ou pourront aisément être réduites à cette forme; mais, d'après l'hypothèse, $V=0$ est une équation irréductible en θ, donc il suit d'un théorème connu, que toutes les équations (68) seront encore satisfaites, en mettant pour θ une quelconque des racines de l'équation $V=0$. Donc l'équation (57) aura lieu quelle que soit la valeur de θ, pourvu qu'elle satisfasse à l'équation $V=0$.

Désignons par

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ \theta_\delta \tag{69}$$

les racines de l'équation $V=0$, et par

$$u',\ u'',\ \ldots\ u^{(\delta)};\ v_m',\ v_m'',\ \ldots\ v_m^{(\delta)};\ t_m',\ t_m'',\ \ldots\ t_m^{(\delta)} \tag{70}$$

les valeurs correspondantes des fonctions u, v_m, t_m. Alors l'équation (57) donnera, en substituant dans le second membre d'abord les expressions des quantités u, v_1, v_2, ... t_1, t_2, ..., $\Delta_1(t_1)$, $\Delta_2(t_2)$, ... en fonction rationnelle de θ, x_1, x_2, ... x_μ, y_1, y_2, ... y_μ, et ensuite au lieu de θ successivement les δ valeurs θ_1, θ_2, ... θ_δ, l'équation (57) donnera, dis-je, δ équations semblables qui, ajoutées ensemble, conduiront à celle-ci:

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)=u'+u''+\cdots+u^{(\delta)}\\ &+A_1(\log v_1'+\log v_1''+\cdots+\log v_1^{(\delta)})+\cdots+A_\nu(\log v_\nu'+\log v_\nu''+\cdots+\log v_\nu^{(\delta)})\\ &+\alpha_1(\psi_1t_1'+\psi_1t_1''+\cdots+\psi_1t_1^{(\delta)})+\cdots+\alpha_n(\psi_nt_n'+\psi_nt_n''+\cdots+\psi_nt_n^{(\delta)}).\end{aligned}\right. \tag{71}$$

Le second membre de cette équation pourra être réduit à une forme beaucoup plus simple. Considérons d'abord la partie algébrique

$$u'+u''+\cdots+u^{(\delta)}=U. \tag{72}$$

Cette fonction est exprimée *rationnellement* en

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\mu,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ \theta_\delta,$$

mais elle est en même temps symétrique par rapport à θ_1, θ_2, ... θ_δ, donc en vertu d'un théorème connu sur les fonctions symétriques et rationnelles, on pourra exprimer la fonction U *rationnellement* en fonction de

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\mu \tag{73}$$

et des coefficiens de l'équation $V=0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des quantités (73), donc la fonction U le sera également.

Soit maintenant

$$\log V_m=\log v_m'+\log v_m''+\cdots+\log v_m^{(\delta)}, \tag{74}$$

on aura

$$V_m=v_m'v_m''\ \ldots\ v_m^{(\delta)},$$

donc la fonction V_m est aussi une fonction rationnelle des quantités (73, 69) et symétrique par rapport à θ_1, θ_2, ... θ_δ; donc on démontrera de la même manière que V_m pourra s'exprimer rationnellement par les quantités (73) seules.

Il reste à considérer la partie elliptique de l'équation (71): or d'après les formules du chapitre précédent, on pourra toujours faire

$$\left\{\begin{aligned} &\psi_mt_m'+\psi_mt_m''+\cdots+\psi_mt_m^{(\delta)}\\ &=\psi_mT_m+p+B_1\log q_1+B_2\log q_2+\cdots+B_\nu\log q_\nu\end{aligned}\right. \tag{75}$$

où toutes les quantités

$$T_m,\ \Delta_m(T_m),\ p,\ q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_\nu \tag{76}$$

sont des fonctions rationnelles des fonctions

$$t_m',\ t_m'',\ \ldots\ t_m^{(\delta)},\ \Delta_m(t_m'),\ \Delta_m(t_m''),\ \ldots\ \Delta_m(t_m^{(\delta)});$$

or celles-ci sont des fonctions rationnelles des quantités (69, 73), et il est clair qu'elles seront symétriques par rapport à θ_1, θ_2, ... θ_δ, donc enfin on pourra exprimer les fonctions (76) rationnellement par les quantités x_1, x_2, ... x_μ; y_1, y_2, ... y_μ.

En vertu de ce que nous venons de voir, on pourra donc mettre le second membre de l'équation (71) sous la forme:

$$\begin{aligned} &r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\cdots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)}\\ &+\alpha_1\cdot\psi_1T_1+\alpha_2\cdot\psi_2T_2+\cdots+\alpha_n\cdot\psi_nT_n.\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi parvenus à ce théorème général:

Théorème II. Si une intégrale quelconque de la forme

$$\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu),$$

où y_1, y_2, ... y_μ sont des fonctions *algébriques* de x_1, x_2, ... x_μ, ces derniers étant liés entre eux par un nombre quelconque d'équations *algébriques*, peut être exprimée par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu\\ +\alpha_1\cdot\psi_1t_1+\alpha_2\cdot\psi_2t_2+\cdots+\alpha_n\cdot\psi_nt_n,\end{aligned}$$

où $A_1, A_2, \ldots \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des constantes, $u, v_1, v_2, \ldots t_1, t_2, \ldots$ des fonctions *algébriques* de $x_1, x_2, \ldots$, et $\psi_1, \psi_2, \ldots$ des fonctions elliptiques quelconques, alors je dis qu'on pourra toujours exprimer la même intégrale de la manière suivante:

$$\delta\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\cdots$$
$$+A^{(k)}\log\varrho^{(k)}+\alpha_1.\psi_1\theta_1+\alpha_2.\psi_2\theta_2+\cdots+\alpha_n.\psi_n\theta_n,$$

δ étant un nombre entier; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les mêmes que dans l'équation donnée; $A', A'', \ldots$ des constantes, et

$$\theta_1,\ \Delta_1(\theta_1),\ \theta_2,\ \Delta_2(\theta_2),\ \ldots\ \theta_n,\ \Delta_n(\theta_n),\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \ldots\ \varrho^{(k)}$$

des fonctions *rationnelles* des quantités

$$x_1,\ x_2,\ \ldots x_\mu;\ y_1,\ y_2,\ \ldots y_\mu.$$

Ce théorème est non seulement d'une grande importance pour la solution de notre problème général, mais il est encore le fondement de tout ce qui concerne l'application des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques à la théorie de l'intégration des formules différentielles *algébriques*. J'en ai déduit un grand nombre de résultats nouveaux et généraux que je soumettrai au jugement des géomètres dans une autre occasion.

Comme corollaire de ce théorème on doit remarquer le suivant:

Théorème III. Si une intégrale de la forme

$$\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\cdots+y_\mu dx_\mu)$$

peut être exprimée par une fonction algébrique et logarithmique de la forme

$$u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu,$$

on pourra toujours supposer que $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ soient des fonctions *rationnelles* de $x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu$. Si donc on a l'intégrale $\int y\,dx$, où y est liée à x par une équation algébrique quelconque, on pourra supposer que u, v_1, v_2 etc. soient des fonctions rationnelles de y et x*).

*) J'ai fondé sur ce théorème une nouvelle théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques, mais que les circonstances ne m'ont pas permis de publier jusqu'à présent. Cette théorie dépasse de beaucoup les résultats connus, elle a pour but d'opérer *toutes les réductions possibles* des intégrales des formules algébriques, à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On parviendra ainsi à réduire au plus petit nombre possible les intégrales nécessaires pour représenter sous forme finie toutes les intégrales qui appartiennent à une même classe.

§ 2.

Application du théorème du paragraphe précédent à la relation générale entre des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Du théorème général démontré dans le paragraphe précédent on peut déduire immédiatement plusieurs propositions importantes, relatives à la théorie des fonctions elliptiques.

Soit

$$(77)\quad \alpha_1\psi_1x_1+\alpha_2\psi_2x_2+\cdots+\alpha_\mu\psi_\mu x_\mu=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu,$$

une relation quelconque entre les fonctions elliptiques

$$\psi_1x_1,\ \psi_2x_2,\ \ldots\ \psi_\mu x_\mu,$$

dont les modules sont respectivement $c_1, c_2, \ldots c_\mu$. Si pour abréger on fait $\pm\sqrt{(1-x^2)(1-c_m^2x^2)}=\Delta_mx$, le premier membre sera la même chose que

$$\int\left(\frac{\alpha_1r_1}{\Delta_1x_1}dx_1+\frac{\alpha_2r_2}{\Delta_2x_2}dx_2+\cdots+\frac{\alpha_\mu r_\mu}{\Delta_\mu x_\mu}dx_\mu\right),$$

où $r_1, r_2, \ldots r_\mu$ seront respectivement des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$. Donc en vertu du théorème III on pourra énoncer le suivant:

Théorème IV. Si l'équation (77) a lieu en supposant que $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ soient des fonctions *algébriques* des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, on pourra toujours, sans diminuer la généralité, supposer que $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ soient exprimées rationnellement en $x_1, x_2, \ldots x_\mu, \Delta_1x_1, \Delta_2x_2, \ldots \Delta_\mu x_\mu$.

En écrivant l'équation générale (77) de cette manière:

$$(78)\quad \int\left(\frac{\alpha_1r_1dx_1}{\Delta_1x_1}+\frac{\alpha_2r_2dx_2}{\Delta_2x_2}+\cdots+\frac{\alpha_mr_mdx_m}{\Delta_mx_m}\right)$$
$$=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu-\alpha_{m+1}\psi_{m+1}x_{m+1}-\cdots-\alpha_\mu\psi_\mu x_\mu,$$

on aura, en vertu du théorème II, le suivant:

Théorème V. Si l'équation (77) a lieu, on en pourra toujours tirer une autre de la forme:

$$(79)\quad \delta\alpha_1\psi_1x_1+\delta\alpha_2\psi_2x_2+\cdots+\delta\alpha_m\psi_mx_m+\alpha_{m+1}\psi_{m+1}\theta_1+\cdots+\alpha_\mu\psi_\mu\theta_{\mu-m}$$
$$=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\cdots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},$$

δ étant un nombre entier et les quantités

$$\theta_1,\ \Delta_{m+1}\theta_1,\ \theta_2,\ \Delta_{m+2}\theta_2,\ \ldots\ \theta_{\mu-m},\ \Delta_\mu\theta_{\mu-m},\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \ldots\ \varrho^{(k)}$$

des fonctions *rationnelles* de

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m,\ \Delta_1 x_1,\ \Delta_2 x_2,\ \ldots\ \Delta_m x_m.$$

On aura encore comme corollaire:

Théorème VI. Si une relation quelconque entre les fonctions elliptiques $\psi_1 x_1,\ \psi_2 x_2,\ \ldots\ \psi_\mu x_\mu$ des trois espèces a la forme exprimée par l'équation (77), on en tirera une autre de la forme:

$$(80)\quad \begin{aligned}\delta\alpha_m.\psi_m x = &-\alpha_1.\psi_1\theta_1-\alpha_2.\psi_2\theta_2-\cdots-\alpha_{m-1}.\psi_{m-1}\theta_{m-1}\\ &-\alpha_{m+1}.\psi_{m+1}\theta_{m+1}-\cdots-\alpha_\mu.\psi_\mu\theta_\mu\\ &+r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\cdots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},\end{aligned}$$

δ étant un nombre entier et toutes les quantités

$$\theta_1,\ \Delta_1\theta_1,\ \theta_2,\ \Delta_2\theta_2,\ \ldots\ r,\ \varrho',\ \varrho'',\ \ldots$$

des fonctions rationnelles de la variable x et du radical correspondant $\Delta_m x$. Toutes ces fonctions pourront donc se mettre sous la forme:

$$p+q.\Delta_m x,$$

où p et q sont des fonctions *rationnelles* de x seul.

Voilà le théorème qui nous conduira, comme nous le verrons plus bas, à la solution de notre problème.

Si l'on suppose que toutes les variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ soient égales entre elles et à x, et en outre que les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\mu$ aient le même module, que nous désignerons par c, alors le premier membre de l'équation (77) sera la même chose que $\int\frac{r\,dx}{\Delta x}$, où r est une fonction rationnelle de x; donc en vertu du théorème III on pourra énoncer le suivant:

Théorème VII. Si entre les fonctions ϖx, $\varpi_0 x$, $\Pi_1 x$, $\Pi_2 x$, $\ldots\ \Pi_\mu x$, où $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_\mu$ désignent des fonctions de la troisième espèce, avec des paramètres quelconques, mais avec le même module c que les deux fonctions de la première et de la seconde espèce ϖx et $\varpi_0 x$, on a une relation quelconque de la forme:

$$(81)\quad \left|\begin{aligned}&\alpha\varpi x+\alpha_0\varpi_0 x+\alpha_1\Pi_1 x+\alpha_2\Pi_2 x+\cdots+\alpha_\mu\Pi_\mu x\\ &\qquad = u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\cdots+A_\nu\log v_\nu,\end{aligned}\right.$$

on pourra toujours supposer que les quantités

$$u,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_\nu$$

soient de la forme $p+q\Delta x$, où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Ce théorème est aussi d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous en développerons dans le chapitre IV les conséquences les plus importantes pour notre objet.

§ 3.

Réduction du problème général.

Reprenons la formule du théorème VI. En la différentiant, le résultat sera de la forme

$$P+Q\,\Delta_m x=0,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x; donc on doit avoir séparément $P=0$, $Q=0$, et par suite $P-Q.\Delta_m x=0$, donc la formule (80) aura encore lieu en changeant le signe du radical $\Delta_m x$. Or en faisant ce changement et en désignant par θ_1', θ_2', θ_3' etc. les valeurs correspondantes de $\theta_1, \theta_2, \ldots$, on aura

$$-\delta\alpha_m\psi_m x=-\Sigma\alpha\psi\theta'+v',$$

où pour abréger nous avons mis le signe de sommation Σ, v' étant la partie algébrique et logarithmique. En retranchant cette équation de l'équation (80), on obtiendra

$$(82)\qquad 2\delta\alpha_m\psi_m x=\Sigma\alpha(\psi\theta'-\psi\theta)+v-v'.$$

Cela posé, désignons par c le module de la fonction ψ et par Δx la fonction $\pm\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$; alors on aura, d'après ce qu'on a vu dans le chapitre I (35)

$$\psi\theta'-\psi\theta=\psi y-v'',$$

en faisant

$$y=\frac{\theta'\Delta\theta-\theta\Delta\theta'}{1-c^2\theta^2\theta'^2},$$

v'' étant une expression algébrique et logarithmique.

Soient maintenant

$$\theta=p+q\Delta_m x,\quad \Delta\theta=r+\varrho\Delta_m x,$$

où p, q, r, ϱ sont des fonctions rationnelles de x. En changeant le signe du radical $\Delta_m x$, on aura les valeurs de θ' et $\Delta\theta'$, savoir

$$\theta' = p - q\Delta_m x, \quad \Delta\theta' = r - \varrho\Delta_m x.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, il est clair que cette fonction prendra la forme

$$(83) \qquad y = t\Delta_m x,$$

où t est rationnel en x. En vertu de la formule (34) on voit de même que Δy sera rationnel en x.

Si l'on fait maintenant

$$z = \frac{y\Delta e + e\Delta y}{1 - c^2e^2y^2},$$

où e est constant, on aura encore

$$\psi y = \psi z + v''',$$

donc

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi z + v_1.$$

Or je dis qu'on pourra faire en sorte que z soit une fonction rationnelle de x. En effet il suffit pour cela d'attribuer à la constante e une valeur qui annule Δe.

Soit par exemple $e = 1$, on aura

$$(84) \qquad z = \frac{\Delta y}{1 - c^2y^2} \text{ d'où } \Delta z = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2y^2}y,$$

mais, comme nous venons de le voir, y^2 et Δy sont des fonctions rationnelles de x, donc z le sera de même.

La formule (82) prendra donc la forme suivante:

$$(85) \qquad 2\delta\alpha_m\psi_m x = \Sigma\alpha . \psi z + V,$$

où V est une fonction algébrique et logarithmique, qui en vertu du théorème II pourra se mettre sous la forme

$$u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \cdots,$$

toutes les quantités $u, v_1, v_2, \ldots$ étant de la forme $p + q\Delta_m x$.

En développant le second membre de l'équation (85), on aura aussi la formule

$$(86) \quad \begin{cases} 2\delta\alpha_m . \psi_m x = \alpha_1 . \psi_1 z_1 + \alpha_2 . \psi_2 z_2 + \cdots + \alpha_{m-1} . \psi_{m-1} z_{m-1} \\ \qquad\qquad + \alpha_{m+1} . \psi_{m+1} z_{m+1} + \cdots + \alpha_\mu . \psi_\mu z_\mu + V, \end{cases}$$

où en vertu des deux équations (84, 83) toutes les quantités

$$z_1, \ \frac{\Delta_1 z_1}{\Delta_m x}, \ z_2, \ \frac{\Delta_2 z_2}{\Delta_m x}, \ z_3, \ \frac{\Delta_3 z_3}{\Delta_m x}, \ \ldots z_\mu, \ \frac{\Delta_\mu z_\mu}{\Delta_m x}$$

sont des fonctions rationnelles de la variable x. Cette formule est donc une suite nécessaire de la formule générale (77). Il faut faire attention que δ est un nombre entier et que les coefficiens $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ sont précisément les mêmes dans les deux formules. C'est une remarque essentielle.

A l'aide de la formule (86) on pourra maintenant réduire la formule générale (77) à une autre plus simple. En effet, en éliminant la fonction $\psi_m x$ entre ces deux équations, on trouvera une équation de la même forme que la proposée, mais qui contiendra un nombre moindre de fonctions elliptiques. Faisons $m = \mu$ et mettons x_μ pour x dans la formule (86). On aura

$$2\delta\alpha_\mu . \psi_\mu x_\mu = \alpha_1 . \psi_1 z_1 + \alpha_2 . \psi_2 z_2 + \cdots + \alpha_{\mu-1} . \psi_{\mu-1} z_{\mu-1} + V.$$

En éliminant la fonction $\psi_\mu x_\mu$ entre les deux équations il viendra

$$(87) \quad \alpha_1(2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1) + \cdots + \alpha_{\mu-1}(2\delta\psi_{\mu-1}x_{\mu-1} - \psi_{\mu-1}z_{\mu-1}) = V'.$$

Mais 2δ étant un nombre entier, on pourra, en vertu de ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, trouver des fonctions algébriques $x_1', x_2', \ldots x'_{\mu-1}$ telles que

$$2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1 = \psi_1 x_1' + V_1,$$
$$2\delta\psi_2 x_2 - \psi_2 z_2 = \psi_2 x_2' + V_2$$
$$\text{etc.}$$

donc la formule (87) donnera celle-ci

$$(88) \quad \begin{cases} \alpha_1 . \psi_1 x_1' + \alpha_2 . \psi_2 x_2' + \cdots + \alpha_{\mu-1} . \psi_{\mu-1} x'_{\mu-1} \\ \qquad = u' + A_1'\log v_1' + A_2'\log v_2' + \cdots + A_{\nu'}'\log v_{\nu'}'. \end{cases}$$

Cette équation est précisément de la même forme que l'équation proposée; seulement elle ne contient plus la fonction ψ_μ. On pourra la traiter de la même manière et en chasser une autre fonction, par exemple $\psi_{\mu-1}$. En continuant ainsi, on parviendra enfin à une équation qui ne contiendra que des fonctions algébriques et logarithmiques, et qui ne n'aura pas de difficulté.

On voit donc que le problème général pourra être réduit à celui-ci:

Satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$(89) \quad \begin{cases} \psi x = \beta_1 . \psi_1 y_1 + \beta_2 . \psi_2 y_2 + \cdots + \beta_n . \psi_n y_n \\ \qquad + u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \cdots + A_\nu\log v_\nu, \end{cases}$$

où $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ désignent des fonctions elliptiques des trois espèces, en supposant que

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n$$

soient des fonctions rationnelles de x; *et que* $\Delta_1 y_1,\ \Delta_2 y_2,\ \ldots\ \Delta_n y_n$ *soient de la forme* $p\Delta x$, *où* p *est rationnel en* x, *et où* Δx *désigne le radical qui figure dans la fonction* ψx.

Soient

$$\Delta_1 y_1 = p_1 \Delta x,\ \ \Delta_2 y_2 = p_2 \Delta x,\ \ldots\ \Delta_n y_n = p_n \Delta x.$$

Supposons que ces équations soient satisfaites, et soit

$$\psi x = \int \frac{\theta x . dx}{\Delta x},\ \ \psi_1 x = \int \frac{\theta_1 x . dx}{\Delta_1 x},\ \ldots\ \psi_n x = \int \frac{\theta_n x . dx}{\Delta_n x},$$

$\theta x,\ \theta_1 x,\ \ldots\ \theta_n x$ étant toujours des fonctions rationnelles suivant la nature des fonctions $\psi,\ \psi_1,\ \ldots\ \psi_n$, on aura

$$\psi_m y_m = \int \frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{dy_m}{dx} \cdot \frac{dx}{\Delta x};$$

or $\frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{dy_m}{dx}$ est une fonction rationnelle de x, donc l'intégrale du second membre pourra être réduite à la forme

$$\psi_m y_m = r + A\varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \cdots,$$

où r est une expression algébrique et logarithmique. En transformant toutes les fonctions $\psi x,\ \psi_1 y_1,\ \psi_2 y_2,\ \ldots$ de cette manière, l'équation (89) prendra cette forme

$$(90)\qquad \begin{cases} \alpha\varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \cdots + \alpha_\mu \Pi(x, a_\mu) \\ \qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots \end{cases}$$

En vertu de ce que nous venons de voir il est clair que la solution du problème (89) pourra être réduite à celle des problèmes suivans:

Problème A. Trouver tous les cas possibles où l'on peut satisfaire à l'équation

$$(91)\qquad (1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2),$$

en supposant y et p fonctions rationnelles de l'indéterminée x, c et c' étant des constantes.

Problème B. L'équation (91) étant satisfaite, réduire les trois fonctions

$$\varpi(y, c'),\ \ \varpi_0(y, c'),\ \ \Pi(y, c', a)$$

à la forme

$$r + A\varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \cdots$$

où r est une expression algébrique et logarithmique.

Problème C. Trouver la relation la plus générale entre les fonctions qui ont le même module et la même variable, c'est-à-dire: trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse exprimer une fonction de la forme

$$\alpha\varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \cdots,$$

par des fonctions algébriques et des logarithmes.

La solution complète de ces trois problèmes sera l'objet principal de nos recherches ultérieures. Nous allons commencer par le dernier qui est le plus simple.

CHAPITRE III.

Détermination de la relation la plus générale possible entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques de la même variable et du même module; ou solution du problème C.

Soit comme précédemment

$$\Delta x = \pm \sqrt{(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)},$$

$\varpi x,\ \varpi_0 x$ les fonctions des deux premières espèces et $\Pi\alpha_1,\ \Pi\alpha_2,\ \ldots\ \Pi\alpha_\mu$ des fonctions de la troisième espèce, ayant pour paramètres $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_\mu$, de sorte que

$$\varpi x = \int \frac{dx}{\Delta x},\ \ \varpi_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x},\ \ \Pi\alpha_m = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_m^2}\right)\Delta x}.$$

Cela posé, il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$(92)\qquad \begin{cases} \beta\varpi x + \beta_0 \varpi_0 x + \beta_1 \Pi\alpha_1 + \beta_2 \Pi\alpha_2 + \cdots + \beta_n \Pi\alpha_n \\ \qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu. \end{cases}$$

En vertu du théorème VI on peut supposer que $u,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_\nu$ soient de la forme $p + q\Delta x$, où p et q sont rationnels en x.

Nous supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible de trouver une relation semblable, qui ne contienne pas toutes les fonctions $\Pi\alpha_1,\ \Pi\alpha_2,\ \ldots\ \Pi\alpha_n$. Nous supposons encore qu'aucun des paramètres $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n$ ne soit égal à ± 1 ou à $\pm \frac{1}{c}$; car dans ce cas on pourrait, comme on sait, réduire la fonction correspondante de la troisième espèce aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$.

Cela posé, désignons le premier membre de l'équation (92) par ψx et le second par $u + \Sigma A \log v$. On aura

$$\psi x = u + \Sigma A \log v. \tag{93}$$

Il est clair que cette équation aura encore lieu si le radical Δx change de signe. Donc en désignant par u' et v' les valeurs correspondantes de u et v, on aura

$$-\psi x = u' + \Sigma A \log v'.$$

Cela donne

$$2\psi x = u - u' + \Sigma A \log \frac{v}{v'}.$$

Mettons ici $-x$ au lieu de $+x$, on pourra supposer que Δx reste invariable; la fonction ψx changera de signe, et par conséquent on aura, en désignant par u'', u''', v'', v''' les valeurs correspondantes de u, u', v, v':

$$-2\psi x = u'' - u''' + \Sigma A \log \frac{v''}{v'''}.$$

De là on tire

$$\psi x = \tfrac{1}{4}(u - u' - u'' + u''') + \tfrac{1}{4}\Sigma A \log \frac{v v'''}{v' v''}.$$

Soit

$$v = p + qx + (p' + q'x)\Delta x,$$

p, q, p', q' étant des fonctions paires, on aura

$$v' = p + qx - (p' + q'x)\Delta x,$$
$$v'' = p - qx + (p' - q'x)\Delta x,$$
$$v''' = p - qx - (p' - q'x)\Delta x,$$

donc

$$v v''' = p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)(\Delta x)^2 + 2x(pq' - qp')\Delta x,$$
$$v' v'' = p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)(\Delta x)^2 - 2x(pq' - qp')\Delta x,$$

par conséquent on aura

$$\frac{v v'''}{v' v''} = \frac{fx + \varphi x \,.\, \Delta x}{fx - \varphi x \,.\, \Delta x},$$

fx et φx étant des fonctions entières, dont l'une est *paire* et l'autre *impaire*. Nous les supposerons, ce qui est permis, sans diviseur commun.

La partie algébrique $\frac{1}{4}(u - u' + u''' - u'')$ est évidemment de la forme $r\Delta x$, où r est une fonction impaire de x. En écrivant A au lieu de $\frac{1}{4}A$, l'expression de ψx prendra la forme suivante:

$$\psi x = r\Delta x + \Sigma A \log \frac{fx + \varphi x \,.\, \Delta x}{fx - \varphi x \,.\, \Delta x}. \tag{94}$$

Quant aux coefficiens $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, nous pourrons supposer qu'il soit impossible d'avoir entre eux une relation de cette forme

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \cdots + m_\nu A_\nu = 0, \tag{95}$$

où $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ sont des nombres entiers. En effet, si cette équation avait lieu, on aurait

$$\Sigma A \log v = \frac{1}{m_\nu}\left\{A_1 \log \frac{v_1^{m_\nu}}{v_\nu^{m_1}} + A_2 \log \frac{v_2^{m_\nu}}{v_\nu^{m_2}} + \cdots + A_{\nu-1} \log \frac{v_{\nu-1}^{m_\nu}}{v_\nu^{m_{\nu-1}}}\right\},$$

c'est-à-dire:

$$\Sigma A \log v = A_1' \log v_1' + A_2' \log v_2' + \cdots + A'_{\nu-1} \log v'_{\nu-1},$$

équation dont le second membre contient un nombre moindre de logarithmes que le premier. On pourra répéter cette réduction jusqu'à ce qu'une équation telle que (95) soit impossible. Cela posé, il faut prendre la différentielle des deux membres et comparer entre elles les fonctions algébriques qui en résultent.

Considérons d'abord la partie logarithmique du second membre de la formule (94). Soit pour abréger

$$\varrho = \log \frac{fx + \varphi x \,.\, \Delta x}{fx - \varphi x \,.\, \Delta x}, \tag{96}$$

on aura, en différentiant, un résultat de la forme

$$d\varrho = \frac{v \,.\, dx}{[(fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2]\Delta x}, \tag{97}$$

où v est une fonction paire et entière de x, savoir

$$v = 2(fx \,.\, \varphi' x - \varphi x \,.\, f'x)(\Delta x)^2 - 2fx \,.\, \varphi x \,.\, [(1 + c^2)x - 2c^2x^3]. \tag{98}$$

En faisant

$$\theta x = (fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2, \tag{99}$$

on pourra aussi mettre v sous cette forme:

$$v\varphi x = 2f'x \,.\, \theta x - fx \,.\, \theta' x, \tag{100}$$

équation facile à vérifier.

Cela posé, décomposons la fonction entière θx en facteurs de la forme $(x^2 - a^2)^m$, et faisons en conséquence:

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2 = (x^2 - a_1^2)^{m_1}(x^2 - a_2^2)^{m_2} \ldots (x^2 - a_\mu^2)^{m_\mu} = \theta x. \tag{101}$$

Maintenant l'équation (100) fait voir que si θx a le facteur $(x^2-a^2)^m$, v aura nécessairement le facteur $(x^2-a^2)^{m-1}$; donc la fonction fractionnaire $\frac{v}{\theta x}$ pourra être décomposée de la manière suivante:

$$(102)\qquad \frac{v}{\theta x}=t+\frac{\beta_1'}{a_1^2-x^2}+\frac{\beta_2'}{a_2^2-x^2}+\cdots+\frac{\beta_\mu'}{a_\mu^2-x^2},$$

où t est la partie entière, β_1', β_2', ... β_μ' des constantes. D'abord je dis que t est une constante. En effet l'expression (98) de v fait voir que le degré de cette fonction ne pourra jamais surpasser celui de θx. Pour trouver les coefficiens β_1', β_2', ..., appelons β' l'un quelconque d'entre eux, correspondant au facteur $(x^2-a^2)^m$ de θx. On aura

$$\beta'=\frac{v(a^2-x^2)}{\theta x} \text{ pour } x=a,$$

mais si l'on fait

$$\theta x=R(a^2-x^2)^m,$$

on aura en vertu de l'équation (100)

$$\frac{v(a^2-x^2)}{\theta x}=\frac{2f'x}{\varphi x}(a^2-x^2)-\frac{fx}{\varphi x}\frac{dR}{R.dx}(a^2-x^2)+2mx\frac{fx}{\varphi x};$$

donc en faisant $x=a$

$$\beta'=2ma\frac{fa}{\varphi a}.$$

Or on a $(fa)^2-(\varphi a)^2(\Delta a)^2=0$, donc

$$fa+\varphi a.\Delta a=0,$$

et par suite

$$\beta'=-2ma\Delta a,$$

On a donc

$$(103)\qquad \frac{v}{\theta x}=k-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\cdots-\frac{2m_\mu a_\mu\Delta a_\mu}{a_\mu^2-x^2}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\Delta x}$ on aura la valeur de $d\varrho$. La formule (94) donnera donc, en différentiant,

$$\begin{aligned}\beta+\beta_0x^2+\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2-x^2}+\frac{\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-x^2}+\cdots+\frac{\alpha_n^2\beta_n}{\alpha_n^2-x^2}&=\frac{dr}{dx}(\Delta x)^2-r[(1+c^2)x-2c^2x^3]\\ &+A_1\left(k_1-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\cdots\right)\\ &+A_2\left(k_2-\frac{2m_1'a_1'\Delta a_1'}{a_1'^2-x^2}-\frac{2m_2'a_2'\Delta a_2'}{a_2'^2-x^2}-\cdots\right)\\ &+\text{ etc.}\end{aligned}$$

En substituant pour r une fonction rationnelle quelconque de x, on voit sans peine qu'il sera impossible de satisfaire à cette équation, à moins que r ne soit égal à zéro. En se rappelant que nous avons supposé qu'il soit impossible de trouver une relation entre un nombre moindre des fonctions $\Pi\alpha_1$, $\Pi\alpha_2$, ... $\Pi\alpha_n$, et en ayant égard à l'impossibilité d'une équation de la forme (95), on se convaincra aisément que tous les coefficiens A_1, A_2, ... A_ν doivent être nuls excepté un seul. Soit donc

$$A_2=A_3=\cdots=A_\nu=0 \text{ et } A_1=1,$$

on aura

$$\begin{aligned}\beta+\beta_0x^2+\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2-x^2}+\frac{\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-x^2}+\cdots+\frac{\alpha_n^2\beta_n}{\alpha_n^2-x^2}&\\ =k_1-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\cdots-\frac{2m_\mu a_\mu\Delta a_\mu}{a_\mu^2-x^2}&,\end{aligned}$$

donc

$$\beta=k_1,\ \beta_0=0,\ \alpha_1=a_1,\ \alpha_2=a_2,\ \ldots$$

$$\beta_1=-\frac{2m_1\Delta a_1}{a_1},\ \beta_2=-\frac{2m_2\Delta a_2}{a_2},\ \ldots$$

Cela posé, la formule générale (94) prendra la forme

$$(104).\qquad \beta.\varpi x-\frac{2m_1\Delta a_1}{a_1}\Pi\alpha_1-\cdots-\frac{2m_n\Delta a_n}{a_n}\Pi\alpha_n=\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x}+C,$$

où les paramètres α_1, α_2, ... α_n doivent satisfaire à l'équation

$$(105)\qquad (fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2}\ldots(x^2-\alpha_n^2)^{m_n},$$

l'une des fonctions fx, φx étant paire et l'autre impaire.

Telle est donc la relation la plus générale entre des fonctions rapportées au même module et à la même variable. Il est remarquable que la fonction de la seconde espèce n'entre point dans cette relation. Quant à la quantité constante β qui multiplie la fonction de la première espèce ϖx, elle pourra dans certaines circonstances se réduire à zéro.

L'équation (105) qui donne les relations nécessaires entre les paramètres α_1, α_2, ... α_n est précisément de la même forme que celle que nous avons considéré dans le chapitre I. En regardant α_1, α_2, ... α_n comme des variables, elle donnera en vertu du théorème I,

$$(106)\qquad \begin{cases} m_1\Pi'\alpha_1+m_2\Pi'\alpha_2+\cdots+m_n\Pi'\alpha_n=C-\frac{a}{2\Delta a}\log\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a},\\ m_1\varpi\alpha_1+m_2\varpi\alpha_2+\cdots+m_n\varpi\alpha_n=C,\end{cases}$$

$$\text{où } \Pi'\alpha = \int \frac{d\alpha}{\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\Delta\alpha}.$$

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ satisfont donc à l'équation différentielle

(107) $$\frac{m_1 d\alpha_1}{\Delta\alpha_1} + \frac{m_2 d\alpha_2}{\Delta\alpha_2} + \cdots + \frac{m_n d\alpha_n}{\Delta\alpha_n} = 0.$$

Pour avoir toutes les fonctions de la troisième espèce qui soient réductibles indéfiniment à la première espèce, il faut faire $n=1$. En posant $\alpha_1=\alpha$, $m_1=m$, on a

(108) $$\Pi\alpha = \frac{\beta\alpha}{2m\,\Delta\alpha}\varpi x - \frac{\alpha}{2m\,\Delta\alpha}\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x}.$$

Pour déterminer le paramètre α, on aura dans ce cas l'équation

(109) $$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-\alpha^2)^m,$$

ce qui fait dépendre α d'une équation qui est généralement du degré m^2. Le cas le plus simple est celui où $m=2$. On aura dans ce cas

$$\varphi x = \frac{1}{c}\sqrt{-1},\ fx = ax,$$

donc

$$(x^2-\alpha^2)^2 = x^4 - \left(\frac{1+c^2}{c^2}-a^2\right)x^2 + \frac{1}{c^2} = \left(x^2 \pm \frac{1}{c}\right)^2;$$

donc α pourra avoir les deux valeurs $\frac{1}{\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{-c}}$. Les valeurs correspondantes de a sont $1-\frac{1}{c}$, $1+\frac{1}{c}$. On aura ainsi

$$\Pi\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \int\frac{dx}{(1-cx^2)\,\Delta x} = k\varpi x + \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{-1}}{c-1}\log\frac{(c-1)x+\sqrt{-1}.\Delta x}{(c-1)x-\sqrt{-1}.\Delta x},$$

où l'on pourra changer le signe de c.

Si $m=3$, on aura dans le cas où fx est impair,

$$fx = x^3+ax,\ \varphi x = b,$$

donc

$$(x^3+ax)^2 - b^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^3.$$

De là on tire

$$\alpha^3=b,\ \alpha^3+a\alpha+b\,\Delta\alpha=0,\ 2a-c^2b^2=-3\alpha^2,\ a^2+(1+c^2)b^2=3\alpha^4,$$

donc en éliminant a et b on trouvera

$$a = \tfrac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2),$$

$$\Delta\alpha = \tfrac{1}{2}(1-c^2\alpha^4).$$

Si donc α est une racine de cette équation, on aura

$$\Pi\alpha = \int\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\Delta x} = k\varpi x - \tfrac{1}{3}\frac{\alpha}{1-c^2\alpha^4}\log\frac{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x+\alpha^3.\Delta x}{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x-\alpha^3.\Delta x}.$$

Généralement la quantité α sera, pour un m quelconque, racine de l'une des deux équations

(110) $$x_m=0,\ x_m=\tfrac{1}{0},$$

où x_m est la fonction de x que nous avons considéré dans le paragraphe 4 du chapitre I, et qui est telle qu'on ait

$$\frac{dx_m}{\Delta x_m} = m\frac{dx}{\Delta x},$$

et en même temps

$$x_m = 0 \text{ pour } x=0.$$

On pourra encore remarquer que si l'on désigne par α une racine de $x_m=0$, $\frac{1}{c\alpha}$ sera racine de l'équation $x_m=\frac{1}{0}$. Pour prouver que α satisfait à l'une des équations (110), il suffit de remarquer qu'on a (39):

(111) $$p^2-q^2(\Delta x)^2 = (x^2-\alpha^2)^m(x^2-\alpha_m^2),$$

où α_m désigne la même fonction de α, que x_m de x. En multipliant les deux équations (109, 111) membre à membre, il viendra

(111') $$[pfx\pm q\varphi x(\Delta x)^2]^2-(p\varphi x\pm qfx)^2(\Delta x)^2 = (x^2-\alpha^2)^{2m}(x^2-\alpha_m^2).$$

Or on tire des mêmes équations

$$p^2(fx)^2-q^2(\varphi x)^2(\Delta x)^4 = (x^2-\alpha^2)^m.R,$$

R étant une fonction entière. De là il suit que l'une des deux fonctions

$$pfx+q\varphi x(\Delta x)^2,\ pfx-q\varphi x(\Delta x)^2$$

sera divisible par $(x^2-\alpha^2)^m$; donc en divisant l'équation (111') par $(x^2-\alpha^2)^{2m}$, on aura un résultat de la forme

$$r^2-\varrho^2(\Delta x)^2 = x^2-\alpha_m^2,$$

où l'une des fonctions r et ϱ sera paire et l'autre impaire. On doit donc avoir d'abord $\varrho=0$, et ensuite $r^2=x^2-\alpha_m^2$, d'où $\alpha_m=0$, ou $\alpha_m=\frac{1}{0}$. Réciproquement, si l'une de ces équations a lieu, il est clair par la forme de l'équation (111) qu'on pourra satisfaire à l'équation (109). Il est à remarquer que dans le cas que nous considérons, β ne pourra jamais être zéro. Donc il n'existe pas de fonction de la troisième espèce, exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Le cas particulier le plus remarquable de la formule générale (104) est celui où $n=3$ et $m_1=m_2=m_3=1$. Dans ce cas, en faisant $\alpha_3=\alpha$, $\Delta\alpha_3=-\Delta\alpha$, on aura

$$\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\Pi\alpha_1+\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\Pi\alpha_2=\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\Pi\alpha+\beta.\varpi x-\tfrac{1}{2}\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x},\tag{112}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}&fx=x^3+ax,\quad \varphi x=b,\\ &\text{de sorte que}\\ &(x^3+ax)^2-b^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-\alpha^2)(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2),\end{aligned}\right.\tag{113}$$

d'où l'on tire, comme dans le paragraphe 3 du chapitre 1,

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha=\frac{\alpha_1\Delta\alpha_2+\alpha_2\Delta\alpha_1}{1-c^2\alpha_1^2\alpha_2^2},\\ &b=\alpha\alpha_1\alpha_2;\quad a=\tfrac{1}{2}(c^2\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha^2-\alpha_1^2-\alpha_2^2),\\ &\frac{\Delta\alpha}{\alpha}=\frac{\alpha^2+a}{\alpha\alpha_1\alpha_2};\quad \beta=-c^2\alpha\alpha_1\alpha_2.\end{aligned}\right.\tag{114}$$

Les deux paramètres α_1, α_2 sont donc arbitraires.

Comme cas particulier on doit remarquer celui où α_2 est infini. On aura dans ce cas

$$\alpha=\pm\frac{1}{c\alpha_1}.$$

On pourra donc réduire l'une à l'autre deux fonctions, dont les paramètres sont respectivement α, $\frac{1}{c\alpha}$. La formule correspondante pour effectuer cette réduction est:

$$\Pi\alpha+\Pi\left(\frac{1}{c\alpha}\right)=\varpi x+\tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{\Delta\alpha}\log\frac{x\Delta\alpha+\alpha\Delta x}{x\Delta\alpha-\alpha\Delta x}.\tag{115}$$

Pour trouver toutes les fonctions réductibles l'une à l'autre, il suffit de faire dans la formule (104), $n=2$. Cela donne

$$m_1\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\Pi\alpha_1+m_2\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}\Pi\alpha_2=\beta.\varpi x-\tfrac{1}{2}\log\frac{fx+\varphi x.\Delta x}{fx-\varphi x.\Delta x},\tag{116}$$

où les paramètres α_1 et α_2 sont liés entre eux par l'équation

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2},\tag{117}$$

ce qui donnera une seule équation entre α_1 et α_2.

CHAPITRE IV

De l'équation $(1-y^2)(1-c'^2y^2)=r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$.

Considérons maintenant le problème (A), savoir de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$(1-y^2)(1-c'^2y^2)=r^2(1-x^2)(1-c^2x^2),\tag{118}$$

y et r étant des fonctions rationnelles de x. La méthode qui s'offre d'abord pour résoudre ce problème est celle des coefficiens indéterminés, mais cette méthode ne paraît guère applicable si le degré de la fonction y est un peu élevé; du moins son application serait très pénible. Je vais en indiquer une autre qui conduit assez simplement à la solution de ce problème, qui est, ce me semble, le plus important dans la théorie des fonctions elliptiques.

§ 1.

Réduction du problème à celui de satisfaire à l'équation:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')}=\varepsilon\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Nous allons voir d'abord que si l'équation (118) a lieu, on doit avoir nécessairement

$$r=\frac{1}{\varepsilon}\frac{dy}{dx},$$

où ε est constant.

Il est facile de voir que les deux facteurs $1-y^2$, $1-c'^2y^2$ ne peuvent s'évanouir en même temps, car cela donnerait $c'^2=1$, mais ce cas est exclu. On doit donc avoir séparément

$$1-y^2=r_1^2\varrho,\quad 1-c'^2y^2=r_2^2\varrho',\tag{119}$$

r_1 et r_2 étant des fonctions rationnelles dont le produit est égal à r. On aura également

$$\varrho\varrho'=(1-x^2)(1-c^2x^2).$$

Or, en différentiant les deux équations (119), on en tirera

$$\left\{\begin{aligned}-2y\,dy&=r_1(r_1d\varrho+2\varrho\,dr_1),\\ -2c'^2y\,dy&=r_2(r_2d\varrho'+2\varrho'dr_2),\end{aligned}\right.\tag{120}$$

Mais il est clair que y ne pourra avoir aucun facteur commun, ni avec r_1 ni avec r_2, donc il faut que le numérateur de la fraction rationnelle $\frac{dy}{dx}$ soit divisible par r_1 et par r_2; mais ces deux fonctions ne pourront s'évanouir en même temps, donc on doit avoir

$$\frac{dy}{dx}=r_1 r_2 v = r v, \tag{121}$$

v étant une fonction rationnelle de x, qui ne devient pas infinie en attribuant à x une valeur qui donne $r=0$. Soit $y=\frac{p}{q}$, où p et q sont deux fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura évidemment

$$\left\{\begin{array}{l} r=\frac{\theta}{q^2}, \\ \text{donc} \\ q^2\frac{dy}{dx}=\theta v=\frac{q\,dp-p\,dq}{dx}. \end{array}\right. \tag{122}$$

Cela fait voir que v est une fonction entière. Or je dis que v se réduira à une constante. Désignons par m et n les degrés des fonctions p et q, et par μ et ν ceux de θ et v. Cela posé, il y a trois cas à considérer:

1) *Si* $m>n$. Dans ce cas l'équation

$$(q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2)=\theta^2(1-x^2)(1-c^2x^2) \tag{123}$$

fait voir qu'on doit avoir

$$4m=2\mu+4;$$

mais comme on a

$$\theta v=\frac{q\,dp-p\,dq}{dx},$$

il s'ensuit que

$$\mu+\nu=m+n-1,$$

donc

$$\nu<2m-\mu-1,$$

ou, puisque $2m-\mu=2$,

$$\nu<1,$$

donc

$$\nu=0,$$

et par conséquent v constant.

2) *Si* $n>m$. On aura de la même manière

$$4n=2\mu+4,\quad 2n-\mu=2,$$

$$\nu<2n-\mu-1,\quad \nu<1,\quad \nu=0,$$

donc aussi dans ce cas v sera égal à une constante.

3) *Si* $n=m$. Dans ce cas il peut arriver que le degré de l'une des fonctions

$$q-p,\quad q+p,\quad q-c'p,\quad q+c'p$$

soit moindre que $n=m$. Soit donc par exemple

$$q-p=\varphi,$$

où le degré de φ, que nous désignerons par $m-k$, ne pourra surpasser m. On aura en vertu de l'équation (123)

$$4m-k=2\mu+4,$$

d'où

$$2m-\mu=2+\tfrac{1}{2}k;$$

maintenant si l'on substitue la valeur de $q=p+\varphi$, on aura

$$\theta v=\frac{p\,dq-q\,dp}{dx}=\frac{p\,d\varphi-\varphi\,dp}{dx},$$

donc

$$\mu+\nu=m+m-k-1=2m-k-1,$$

si $k>0$, et

$$\mu+\nu=m+m-k-2=2m-k-2,$$

si $k=0$. Dans le premier cas on a

$$\nu=2m-\mu-k-1=1-\tfrac{1}{2}k=0,$$

et dans le second

$$\nu=2m-\mu-2=0.$$

Le degré de la fonction entière v est donc dans tous les cas égal à zéro, et par conséquent v se réduit à une constante. En la désignant par ε, on aura

$$\varepsilon r=\frac{dy}{dx}. \tag{124}$$

Cela posé, l'équation

$$(1-y^2)(1-c'^2y^2)=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\varepsilon^{-2}(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

donnera celle-ci:

$$(125) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon . dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}};$$

le problème est ainsi ramené à celui de satisfaire de la manière la plus générale à cette équation en supposant y rationnel en x. En intégrant, on aura

$$(126) \qquad \varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C.$$

En comparant ce résultat à ce que nous avons démontré dans le chapitre II, on aura ce théorème:

Théorème VIII. „Si l'on a une relation quelconque entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques, et qu'on désigne par c le module de l'une d'elles prise à volonté, parmi les autres fonctions on en trouvera au moins une, de module c', et telle qu'on ait entre *les fonctions de la première espèce*, correspondantes respectivement aux modules c' et c, cette relation très simple

$$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C,$$

où y est une fonction rationnelle de x et ε une quantité constante."

Ce théorème est de la plus grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs de y et des modules c' et c propres à satisfaire à l'équation (125). Si la fonction y contient des puissances de x supérieures à la première, elle jouira d'une certaine propriété, qui conduira à son expression générale, en supposant connue la solution complète dans le cas où y ne contient x qu'à la première puissance. C'est pourquoi nous donnerons d'abord la solution pour ce cas.

§ 2.

Solution du problème dans le cas où $y = \frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x}$.

En substituant cette valeur de y dans l'équation

$$\varepsilon^2(1-y^2)(1-c'^2y^2) = (1-x^2)(1-c^2x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

rien n'est plus facile, que de trouver toutes les solutions possibles. Je vais seulement les transcrire:

$$\text{I.} \quad c' = \pm c, \quad y = \pm x, \quad y = \pm \frac{1}{cx}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\text{II.} \quad c' = \pm \frac{1}{c}, \quad y = \pm cx, \quad y = \pm \frac{1}{x}, \quad \varepsilon = \pm c,$$

$$\text{III.} \quad c' = \pm \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{c}}{1 \mp x\sqrt{c}}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{c})^2,$$

$$\text{IV.} \quad c' = \pm \left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{c}}{1 \mp x\sqrt{c}}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1-\sqrt{c})^2,$$

$$\text{V.} \quad c' = \pm \left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{-c}}{1 \mp x\sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1+\sqrt{-c})^2,$$

$$\text{VI.} \quad c' = \pm \left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}} \cdot \frac{1 \pm x\sqrt{-c}}{1 \mp x\sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,(1-\sqrt{-c})^2,$$

On voit que le module c' a six valeurs différentes. La fonction y en aura douze, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de y. Ces formules nous seront utiles pour la solution du problème général.

§ 3.

Propriété générale de la fonction rationnelle y, *qui satisfait à une équation de la forme:*

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}.$$

Soit pour abréger

$$\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)} = \Delta' y \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)} = \Delta x,$$

l'équation (125), à laquelle il s'agit de satisfaire, prendra la forme

$$(127) \qquad \frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

où y est supposé fonction *rationnelle* de x. Soit

$$(128) \qquad y = \psi x$$

la fonction cherchée. Si, en réduisant ψx à sa plus simple expression, la variable x y entre élevée jusqu'à la μ^{me} puissance inclusivement, nous dirons pour abréger que ψx est une fonction rationnelle de x du degré μ. Sa forme générale sera donc

$$(129) \qquad \psi x = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_\mu x^\mu},$$

le numérateur n'ayant pas de diviseur commun avec le dénominateur, et les deux coefficiens A_μ et B_μ n'étant pas nuls à la fois.

Cela posé, si l'on considère x comme fonction de y, l'équation $y = \psi x$ donnera pour x, μ valeurs, qui seront nécessairement inégales, en supposant y arbitraire. Il est évident que toutes ces valeurs de x satisferont également à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\varDelta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta x}.$$

En désignant donc par x et x' deux d'entre elles, on aura en même temps

$$\frac{dy}{\varDelta' y} = \varepsilon \frac{dx'}{\varDelta x'}.$$

Donc, en égalant ces deux valeurs de $\frac{dy}{\varDelta' y}$, on aura

$$\frac{dx'}{\varDelta x'} = \frac{dx}{\varDelta x}.$$

Une telle relation aura donc toujours lieu entre deux racines quelconques de l'équation

$$y = \psi x.$$

Il est facile d'en tirer une équation algébrique entre x' et x. En effet l'intégrale complète de cette équation est en vertu de l'équation (36)

(130) $$x' = \frac{x \varDelta e + e \varDelta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant une constante. Maintenant x et x' étant tous deux racines de l'équation $y = \psi x$, on aura

$$y = \psi x, \quad y = \psi x',$$

donc

(131) $$\psi x' = \psi x,$$

et puisque y est variable, cette équation doit nécessairement avoir lieu pour une valeur quelconque de x. On aura donc immédiatement ce théorème:

Théorème IX. „Pour qu'une fonction rationnelle y de x, du degré μ, puisse satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{\varDelta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\varDelta x},$$

il faut que cette fonction y reste invariable, en mettant pour x, μ valeurs différentes de la forme

$$\frac{x \varDelta e + e \varDelta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant constant."

Ce théorème nous conduira, comme on va voir, de la manière la plus simple à l'expression générale de y. Il s'agit seulement de déterminer les valeurs convenables de la constante e; car celles-ci étant trouvées, rien n'est plus facile que de déterminer ensuite toutes les autres conditions nécessaires. Occupons-nous d'abord de la recherche de cette constante.

§ 4.

Détermination de toutes les racines de l'équation $y = \psi x$.

Faisons pour abréger

(132) $$\theta x = \frac{x \varDelta e + e \varDelta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

nous aurons d'après ce que nous venons de voir (131),

(133) $$\psi(\theta x) = \psi x,$$

où le signe du radical $\varDelta x$ est évidemment arbitraire. Je remarque maintenant que cette équation, ayant lieu pour une valeur quelconque de x, subsistera encore en mettant θx pour x. On aura donc

$$\psi[\theta(\theta x)] = \psi(\theta x) = \psi x.$$

En mettant de nouveau θx au lieu de x et ainsi de suite, on aura

$$y = \psi x = \psi(\theta x) = \psi(\theta^2 x) = \psi(\theta^3 x) = \cdots = \psi(\theta^n x) = \text{etc.},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\theta^2 x = \theta\theta x, \ \theta^3 x = \theta\theta^2 x, \ \ldots \text{ etc. } \theta^n x = \theta\theta^{n-1} x.$$

De là il suit que toutes les quantités de la série

(134) $$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^n x, \ \ldots$$

seront des racines de l'équation $y = \psi x$. Maintenant cette équation n'ayant qu'un nombre limité de racines, savoir μ, il faut nécessairement que plusieurs des quantités de la série (134) soient égales entre elles. Il s'agit de savoir si cela serait possible. Pour cela il faut d'abord avoir l'expression générale de $\theta^n x$ en fonction de x et e. Regardons pour le moment e comme variable indépendante. Alors on aura en vertu de l'équation (132),

$$\theta^n x = \frac{\theta^{n-1} x . \varDelta e + e \varDelta(\theta^{n-1} x)}{1 - c^2 e^2 (\theta^{n-1} x)^2},$$

$$\frac{d(\theta^n x)}{\varDelta(\theta^n x)} = \frac{d(\theta^{n-1} x)}{\varDelta(\theta^{n-1} x)} + \frac{de}{\varDelta e}.$$

En mettant dans cette équation successivement $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 au lieu de n, et en supposant, ce qui est permis, que les radicaux $\Delta(\theta^n x)$, $\Delta(\theta^{n-1} x)$ ... $\Delta(\theta x)$, Δx ont les mêmes signes dans deux équations consécutives, on aura sur le champ

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx}{\Delta x} + n\frac{de}{\Delta e}.$$

Cela posé, déterminons d'après les règles du paragraphe 4 du chapitre I une fonction rationnelle e_n de e, telle que

$$\frac{de_n}{\Delta e_n} = n\frac{de}{\Delta e},$$

on aura

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_n}{\Delta e_n}.$$

Mais si l'on fait

$$x' = \frac{x\Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2},$$

on a

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_n}{\Delta e_n},$$

donc

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx'}{\Delta x'}.$$

Cette dernière équation donne la suivante:

$$\theta^n x = \frac{x'\Delta e' + e'\Delta x'}{1 - c^2 e'^2 x'^2};$$

où e' est une constante.

Pour déterminer cette constante, faisons $e=0$; on aura alors $e_n=0$ et $\Delta e_n = 1$. Donc la valeur de x' deviendra: $x'=x$, et par suite celle de $\theta^n x$ sera

$$\theta^n x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Mais ayant $\theta x = x$, on aura encore $\theta^n x = x$, donc

$$x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Cette équation devant avoir lieu pour une valeur quelconque de x, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparément $e'=0$, $\Delta e'=1$; donc on aura

$$\theta^n x = x',$$

c'est-à-dire

(135) $$\theta^n x = \frac{x\Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Telle sera l'expression de $\theta^n x$ pour une valeur quelconque du nombre entier n. Comme on le voit, elle a la forme que doit avoir une racine quelconque de l'équation $y = \psi x$.

Cela posé, soient $\theta^m x$ et $\theta^{m+n} x$ deux quantités de la série (134), égales entre elles; il en existera toujours d'après la remarque faite plus haut. On aura donc

$$\theta^{m+n} x = \theta^m x,$$

mais $\theta^{m+n} x$ est évidemment la même chose que $\theta^n(\theta^m x)$, donc en mettant x pour $\theta^m x$, il viendra

(136) $$\theta^n x = x.$$

Une telle équation doit donc toujours avoir lieu, quel que soit x. Si elle a lieu effectivement, il est clair que la série (134) ne contiendra que n termes différens, car, passé $\theta^{n-1} x$, les termes se reproduiront dans le même ordre, puisqu'on a $\theta^{n+1} x = \theta x$, $\theta^{n+2} x = \theta^2 x$ etc. Si l'on suppose, ce qui est permis, que n, dans l'équation $\theta^n x = x$, a la plus petite valeur possible pour la valeur donnée de e, il est clair également que les n quantités

(137) $$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x$$

seront nécessairement différentes entre elles. Car si l'on avait par exemple

$$\theta^m x = \theta^{m+\mu} x,$$

il en résulterait $\theta^\mu x = x$, ce qui est contre l'hypothèse, attendu que μ est moindre que n.

Il s'agit donc de satisfaire à l'équation

$$\theta^n x = x.$$

En y substituant l'expression de $\theta^n x$, donnée par la formule (135), il viendra

$$x = \frac{x\Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Or il est impossible de satisfaire à cette équation pour une valeur quelconque de x, à moins qu'on n'ait séparément les deux équations:

(138) $$e_n = 0,\ \Delta e_n = 1;$$

et réciproquement, si ces équations sont satisfaites, l'équation $\theta^n x = x$ le sera également. Or je dis qu'il sera toujours possible de satisfaire à ces deux équations à la fois.

D'abord si n est impair, les deux quantités e_n et $\frac{\Delta e_n}{\Delta e}$ seront des fonctions rationnelles de e, comme nous l'avons vu chapitre 1 § 4. Si donc on désigne par e une racine quelconque de l'équation

(139) $$e_n = 0,$$

il suffit, pour satisfaire à l'équation $\Delta e_n = 1$, de déterminer le radical Δe de telle sorte que

(140) $$\Delta e = \frac{\Delta e}{\Delta e_n},$$

après avoir mis le second membre de cette expression sous la forme d'une fonction rationnelle en e. C'est ce qu'on voit en remarquant que si $e_n = 0$, la quantité $\Delta e_n = \pm\sqrt{(1 - e_n^2)(1 - c^2 e_n^2)}$ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$, -1.

Si au contraire n est un nombre pair, on a vu que Δe_n sera une fonction *rationnelle* de e, de même que $\frac{\Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2}$. En désignant cette dernière par ε_n, on doit avoir, en vertu des équations (138),

(141) $$\varepsilon_n = 1.$$

Or je dis que si e est une racine quelconque de cette équation, on aura à la fois $e_n = 0$, $\Delta e_n = 1$. En effet ayant

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2} = \frac{\sqrt{1 - e_n^2}}{\sqrt{1 - c^2 e_n^2}} = 1.$$

on en tire en carrant,

$$1 - e_n^2 = 1 - c^2 e_n^2,$$

et cela donne

$$e_n = 0,$$

car c^2 est différent de l'unité. Or ayant $e_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$, on aura évidemment $\Delta e_n = 1$; donc etc.

On pourra donc satisfaire à la fois aux deux équations

$$e_n = 0, \quad \Delta e_n = 1,$$

et l'on aura toujours n^2 valeurs différentes et convenables de e, car en vertu des formules (51, 55) les équations $e_n = 0$, $\varepsilon_n = 1$ seront du degré n^2 en e.

Il s'agit maintenant de choisir les valeurs de e qui rendent toutes les n quantités x, θx, ... $\theta^{n-1} x$ différentes entre elles, car cela est une seconde condition à laquelle doit satisfaire e.

Or pour cela il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourraient donner $\theta^\mu x = x$, où μ est moindre que n. On pourra toujours supposer μ facteur de n. En effet soit k le plus grand commun diviseur de μ et n, on pourra trouver deux nombres entiers μ' et n' tels que

$$\mu' \mu = n' n + k.$$

Or l'équation $\theta^\mu x = x$ donne

$$\theta^{\mu'\mu} x = x,$$

donc

$$\theta^{n'n+k} x = x = \theta^k \theta^{n'n} x;$$

mais en vertu de $\theta^n x = x$, on a encore

$$\theta^{n'n} x = x,$$

donc enfin

$$\theta^k x = x;$$

donc, si $\theta^\mu x = x$, on aura encore $\theta^k x = x$, où k est diviseur de n. Donc il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourraient satisfaire en même temps à ces deux équations

$$e_\mu = 0, \quad \Delta e_\mu = 1,$$

où μ est un facteur de n; et il faut nécessairement les rejeter toutes, car si l'on a $\theta^\mu x = x$, on a nécessairement $\theta^n x = x$.

Ainsi on déterminera aisément une équation en e, dont toutes les racines donneront des valeurs convenables de cette constante. Si n est un nombre premier impair, on a $\mu = 1$; donc la seule racine qu'il faut rejeter de celles de l'équation $e_n = 0$, est celle-ci

$$e = 0.$$

On aura donc $n^2 - 1$ valeurs convenables de e. Car l'équation $e_n = 0$ est du degré n^2.

Il y a une remarque essentielle à faire sur les quantités

$$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \ldots \ \theta^{n-1} x,$$

c'est qu'on aura toujours en même temps

(142) $$\theta^m x = \frac{x \Delta e_m + e_m \Delta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}, \quad \theta^{n-m} x = \frac{x \Delta e_m - e_m \Delta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}.$$

En effet, on a (43)

$$e_{n-m} = \frac{e_n \Delta e_m - e_m \Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2 e_m^2};$$

mais $e_n = 0$, $\Delta e_n = 1$, donc

$$e_{n-m} = -e_m.$$

On aura également (42)

$$e_n = \frac{e_m \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_{n-m}^2} = 0,$$

donc à cause de $e_{n-m} = -e_m$, on aura

$$\Delta e_{n-m} = \Delta e_m.$$

En substituant ces valeurs de e_{n-m}, Δe_{n-m} dans l'équation

$$\theta^{n-m} x = \frac{x \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta x}{1 - c^2 e_{n-m}^2 x^2},$$

on aura précisément la seconde des équations (142).

Si l'on multiplie entre elles les valeurs de $\theta^m x$ et $\theta^{n-m} x$, le produit sera rationnel, et l'on trouvera

$$(143) \qquad \theta^m x \,.\, \theta^{n-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

On aura de même

$$(144) \qquad \theta^m x + \theta^{n-m} x = \frac{2x \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

Ces formules nous seront utiles dans la suite.

D'après ce qui précède, les n quantités

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x$$

sont différentes entre elles, et racines de l'équation $y = \psi x$. Le degré μ de cette équation est donc égal à n, s'il ne surpasse pas ce nombre. Nous verrons plus bas qu'il suffira de considérer le cas où $\mu = n$. On pourra même supposer n premier.

§ 5.

Détermination de toutes les valeurs de y qui pourront répondre aux mêmes valeurs des racines, lorsqu'on en connaît une seule.

Pour simplifier la solution du problème général, voyons d'abord si plusieurs valeurs différentes de la fonction y et du module c' pourront répondre aux mêmes racines de l'équation $y = \psi x$. Rien n'est plus facile que de déterminer toutes les valeurs de y et c'. En effet, soit $\psi z = \frac{p}{q}$, où p et q sont des fonctions entières de z sans diviseur commun. En désignant par

$$x,\ x',\ x'' \ \ldots\ x^{(\mu-1)}$$

toutes les racines de l'équation

$$y = \psi x,$$

on aura

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \ldots (z - x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Soit maintenant y' une autre valeur de y qui répond aux mêmes valeurs de x, x', x'' . . ., on aura, en désignant par p' et q' les valeurs correspondantes des fonctions p et q,

$$p' - q'y' = (a' - b'y')(z - x)(z - x')(z - x'') \ldots (z - x^{(\mu-1)}),$$

donc

$$\frac{p - qy}{p' - q'y'} = \frac{a - by}{a' - b'y'}.$$

En attribuant à z une valeur constante, il est clair que cette équation donnera pour y' une expression de la forme

$$(145) \qquad y' = \frac{\alpha + \beta y}{\alpha' + \beta' y}.$$

où α, β, α', β' sont des constantes. En désignant maintenant par c'' le module qui répond à y', on aura en même temps

$$\frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)}} = \varepsilon' \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

donc

$$(146) \qquad \frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)}}.$$

En substituant l'expression de y' en y, on aura les équations nécessaires pour déterminer y', c'', ε'. Ce problème est précisément le même que celui du paragraphe 2. On voit donc qu'une seule solution de l'équation

$$\frac{dy}{\Delta y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

en donnera sur le champ cinq autres, qui seront en général différentes entre elles. La fonction y aura toujours deux valeurs correspondantes au même module c', savoir y et $\frac{1}{c'y}$.

§ 6.

Solution complète du problème dans le cas où $\mu = n$.

Supposons maintenant que l'équation $y = \psi x$ n'ait d'autres racines que celles-ci:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{n-1} x,$$

ce qui arrive toujours lorsque μ est un nombre premier, comme nous le verrons plus bas. On aura alors, si p et q signifient la même chose qu'au paragraphe précédent,

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \dots (z - \theta^{n-1} x). \tag{147}$$

En attribuant à z une valeur particulière, on aura une expression de y dans laquelle tout est déterminé, excepté trois quantités constantes. Nous allons voir qu'on pourra toujours les déterminer de sorte que l'équation différentielle proposée soit satisfaite. Pour cela considérons deux cas selon que n est un nombre impair ou non.

Cas I. *Si n est un nombre impair.* Faisons dans ce cas $n = 2\mu + 1$. Alors l'équation (147) donne, en attribuant à z la valeur particulière zéro,

$$a' - b'y = -(a - by)\, x . \theta x . \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x,$$

d'où

$$y = \frac{a' + a . x . \theta x . \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x}{b' + b . x . \theta x . \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x}. \tag{148}$$

En remarquant maintenant qu'en vertu de l'équation (143)

$$\theta^m x . \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair que l'expression précédente de y sera une fonction rationnelle de x du degré $2\mu + 1$; donc, puisque cette fonction reste invariable, en mettant pour x les $2\mu + 1$ valeurs

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ \dots\ \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est évident à cause de $\theta^{2\mu+1} x = x$, on conclura que l'équation (147) a lieu en mettant pour y cette fonction et pour p et q les valeurs correspondantes en z. Cette équation pourra s'écrire comme il suit:

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^{2\mu} x)(z - \theta^2 x)(z - \theta^{2\mu-1} x) \dots \\ \dots (z - \theta^{\mu} x)(z - \theta^{\mu+1} x). \tag{149}$$

Cela posé, faisons

$$x = 1,\ -1,\ \frac{1}{c}\ -\frac{1}{c},$$

et désignons les valeurs correspondantes de y par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Comme on a pour ces valeurs de x, $\Delta x = 0$, il s'ensuit en vertu des deux équations (142) du paragraphe 4, que

$$\theta^m x = \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x \Delta e_m}{1 - c^2 x^2 e_m^2},$$

d'où l'on voit que les facteurs du second membre de l'équation (149) seront égaux deux à deux, en faisant abstraction du premier facteur $z - x$. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} p - q\alpha &= (a - b\alpha)(1 - z) . \varrho^2, \\ p - q\beta &= (a - b\beta)(1 + z) . \varrho'^2, \\ p - q\gamma &= (a - b\gamma)(1 - cz) . \varrho''^2, \\ p - q\delta &= (a - b\delta)(1 + cz) . \varrho'''^2, \end{aligned}\right. \tag{150}$$

où ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' seront des fonctions entières de z du degré μ. Mais puisqu'on doit avoir

$$(q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = r^2 (1 - z^2)(1 - c^2 z^2), \tag{151}$$

les équations précédentes font voir que les quatre constantes α, β, γ, δ doivent être les mêmes que celles-ci:

$$+1,\ -1,\ +\frac{1}{c'},\ -\frac{1}{c'},$$

et si cette condition a lieu, les quatre équations (150) en donneront évidemment une de la forme (151), et par suite on aura

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}, \tag{152}$$

en vertu de ce qu'on a vu dans le paragraphe 1 de ce chapitre.

Comme il suffit de connaître une seule valeur de y, nous pourrons faire par exemple

$$\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = \frac{1}{c'},\ \delta = -\frac{1}{c'}. \tag{153}$$

Cela posé, il nous reste à satisfaire à ces équations. Or si l'on fait pour un moment

$$(154)\qquad \varphi x = x.\theta x.\theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x = \frac{x(x^2-e^2)(x^2-e_2^2)\ldots(x^2-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)};$$

l'expression de y deviendra

$$(155)\qquad y = \frac{a'+a.\varphi x}{b'+b.\varphi x},$$

d'où l'on déduira, en remarquant que $\varphi(-x) = -\varphi x$, et faisant $x = 1$, -1, $\frac{1}{c}$, $-\frac{1}{c}$;

$$\alpha = \frac{a'+a\varphi(1)}{b'+b\varphi(1)},\ \beta = \frac{a'-a\varphi(1)}{b'-b\varphi(1)},\ \gamma = \frac{a'+a\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b'+b\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},\ \delta = \frac{a'-a\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b'-b\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},$$

donc en vertu des équations (153), on aura

$$a'-b'+(a-b)\varphi(1) = 0,\ a'+b'-(a+b)\varphi(1) = 0,$$

$$a'-\frac{b'}{c'}+\left(a-\frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0,\ a'+\frac{b'}{c'}-\left(a+\frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0.$$

Il est impossible de satisfaire à ces équations à moins que l'une des quantités a', b' ne soit zéro. Faisons donc $a' = 0$, on aura en même temps $b = 0$. Donc deux des équations précédentes donneront

$$\frac{b'}{a} = \varphi(1) = c'.\varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

d'où l'on tire la valeur de c', savoir

$$c' = \frac{\varphi(1)}{\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}.$$

La valeur de y deviendra

$$y = \frac{a}{b'}\,\varphi x = \frac{\varphi x}{\varphi(1)}.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(1)$ et de $\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$, on aura en vertu dè l'expression de φx,

$$\varphi(1) = \frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\,\frac{1-e_2^2}{1-c^2e_2^2}\cdots\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}}\,\frac{1-c^2e^2}{1-e^2}\,\frac{1-c^2e_2^2}{1-e_2^2}\cdots\frac{1-c^2e_\mu^2}{1-e_\mu^2},$$

donc

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}\varphi(1)},$$

et

$$c' = c^{2\mu+1}[\varphi(1)]^2,\ \varphi(1) = \frac{\sqrt{c'}}{c^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Pour avoir enfin la valeur du coefficient ε, il suffit de faire $x = 0$, après avoir différentié l'expression de y. On aura

$$\frac{dy}{dx} = \pm e^2e_2^2e_3^2\ldots e_\mu^2\,\frac{1}{\varphi(1)},$$

mais comme on a

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon\,\frac{\Delta' y}{\Delta x},$$

il en résulte, en faisant $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\varepsilon,$$

donc on pourra faire

$$\varepsilon = e^2e_2^2e_3^2\ldots e_\mu^2\,\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.$$

D'après ce qui précède on pourra maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème X. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_{2\mu+1} = 0$, mais qui ne puisse être racine d'une autre équation de la même forme $e_{2m+1} = 0$, où $2m+1$ est diviseur de $2\mu+1$. Cela posé, si l'on détermine la fonction y, le module c', et le coefficient ε, d'après les formules

$$(156)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\,\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)(e_3^2-x^2)\ldots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)(1-c^2e_3^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)},\\ c' &= c^{2\mu+1}\left(\frac{(1-e^2)(1-e_2^2)(1-e_3^2)\ldots(1-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2)(1-c^2e_2^2)(1-c^2e_3^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2)}\right)^2,\\ \varepsilon &= \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\,e^2e_2^2e_3^2\ldots e_\mu^2,\\ &\text{on aura toujours}\\ &\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \pm\varepsilon\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},\end{aligned}\right.$$

en déterminant convenablement le signe du second membre.“

Connaissant ainsi un système de valeurs de y, c', ε, on en aura cinq autres, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, à l'aide des formules du paragraphe 2. A chaque valeur de e répondent donc six systèmes de valeurs de y, c', ε. On aura même douze valeurs de y, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de cette fonction. Nous reviendrons plus bas à la question du nombre total des solutions qui répondent à la même valeur de μ.

Pour donner un exemple des formules ci-dessus, soit $\mu = 1$. Puisque dans ce cas $2\mu+1=3$ est un nombre premier, on pourra, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, prendre pour e une racine quelconque de l'équation $e_3=0$, excepté la racine zéro. Cette équation est, en vertu de la formule (53), qui donne l'expression de x_3, du huitième degré, savoir:

$$0=3-4(1+c^2)e^2+6c^2e^4-c^4e^8.$$

La quantité e étant une racine quelconque de cette équation, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\pm\varepsilon\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$c'=c^3\left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\right)^2,\quad \varepsilon=c\sqrt{\frac{c}{c'}}\,e^2,\quad y=\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c'}}\,\frac{x(e^2-x^2)}{1-c^2e^2x^2}.$$

Puisque e^2 est déterminé en c par une équation du quatrième degré, le module c' pourra l'être également. Cette équation est

$$(c'-c)^2=4\sqrt{cc'}\,(1-\sqrt{cc'}\,)^2.$$

L'expression générale de y, donnée plus haut (156), est sous forme de produit. Rien n'est plus facile que de décomposer cette fraction en fractions partielles. En effet, puisque les racines de l'équation

$$0=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}z(z^2-e^2)(z^2-e_2^2)\ldots(z^2-e_\mu^2)+y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$$

sont les $2\mu+1$ quantités suivantes

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ \ldots\ \theta^{2\mu}x,$$

la somme de ces quantités sera égale au coefficient de $z^{2\mu}$, divisé par celui de $z^{2\mu+1}$ et pris avec le signe $-$, donc

$$x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu}x=\frac{(-1)^{\mu+1}c^{2\mu}e^2e_2^2\ldots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}}\,.\,c'^{-\frac{1}{2}}}\,y;$$

donc, en vertu de l'équation

$$\theta^m x+\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{2\Delta e_m\,.\,x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura l'expression suivante de y:

$$(157)\quad y=\left(x+\frac{2\Delta e\,.\,x}{1-c^2e^2x^2}+\frac{2\Delta e_2\,.\,x}{1-c^2e_2^2x^2}+\cdots+\frac{2\Delta e_\mu\,.\,x}{1-c^2e_\mu^2x^2}\right)\frac{\sqrt{c}}{c^\mu\sqrt{c'}}\,\frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2e_2^2\cdots e_\mu^2}.$$

Cas II. *Si n est un nombre pair.* Faisons $n=2\mu$. Puisqu'on a

$$\theta^m x=\frac{x\Delta e_m+e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},\quad \theta^{2\mu-m}x=\frac{x\Delta e_m-e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura, en faisant $m=\mu$,

$$\theta^\mu x=\frac{x\Delta e_\mu+e_\mu\Delta x}{1-c^2e_\mu^2x^2}=\frac{x\Delta e_\mu-e_\mu\Delta x}{1-c^2e_\mu^2x^2}.$$

Cette égalité ne peut subsister, à moins que e_μ n'ait une des deux valeurs zéro où l'infini. Cela donne lieu à considérer séparément ces deux cas:

A. Si $e_\mu=\frac{1}{0}$, on aura

$$\theta^\mu x=\pm\frac{1}{cx}.$$

En substituant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura

$$\theta^{\mu+m}x=\pm\frac{1}{c\theta^m x}.$$

Les racines de l'équation $y=\psi x$ deviendront donc

$$x,\ \pm\frac{1}{cx},\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{\mu-1}x,\ \theta^{\mu+1}x,\ \theta^{\mu+2}x,\ \ldots\ \theta^{2\mu-1}x,$$

par conséquent on aura

$$(158)\quad p-qy=(a-by)(z-x)\left(z\mp\frac{1}{cx}\right)(z-\theta x)(z-\theta^{2\mu-1}x)\ldots$$
$$\ldots(z-\theta^{\mu-1}x)(z-\theta^{\mu+1}x).$$

En désignant par a' et b' les coefficiens de $z^{2\mu-1}$ dans les deux fonctions entières p et q, on aura

$$a'-b'y=-(a-by)\left(x\pm\frac{1}{cx}+\theta x+\theta^{2\mu-1}x+\cdots+\theta^{\mu-1}x+\theta^{\mu+1}x\right)$$
$$=(by-a)\left(x\pm\frac{1}{cx}+\frac{2\Delta e\,.\,x}{1-c^2e^2x^2}+\frac{2\Delta e_2\,.\,x}{1-c^2e_2^2x^2}+\cdots+\frac{2\Delta e_{\mu-1}\,.\,x}{1-c^2e_{\mu-1}^2x^2}\right).$$

L'expression qu'on en tire pour y sera évidemment une fonction rationnelle de x du degré 2μ, et puisqu'elle reste invariable en mettant pour x les 2μ quantités*)

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{2\mu-1}x,$$

l'équation (158) aura lieu en mettant pour y cette valeur et pour p et q les valeurs correspondantes en z.

Nous allons voir qu'on aura une valeur convenable de y en faisant

$$a=b'=0.$$

*) On a

$$y=\frac{a'+a(x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu-1}x)}{b'+b(x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu-1}x)}\ \text{et}\ \theta^{2\mu}x=x.$$

Cela donne

$$y=\frac{a'}{b}\,\frac{1}{x\pm\frac{1}{cx}+\frac{2\varDelta e.x}{1-c^2e^2x^2}+\cdots+\frac{2\varDelta e_{\mu-1}x}{1-c^2e_{\mu-1}^2x^2}},$$

expression qui est évidemment de la forme

$$(159)\qquad y=A\,\frac{x(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_{\mu-1}^2x^2)}{1+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_\mu x^{2\mu}}=A.\varphi x.$$

Pour déterminer la valeur de A, remarquons que si l'on fait $x=1$, y doit avoir une des valeurs: ± 1, $\pm\frac{1}{c'}$. Soit par exemple $y=1$, pour $x=1$, on aura

$$(160)\qquad A=\frac{1}{\varphi(1)}.$$

Cela posé, faisons dans l'équation (158) $x=1$. En remarquant que $a=0$, on aura

$$q-p=(1-z)(1\mp cz)\varrho^2,$$

ϱ étant une fonction entière de z, car pour $x=1$ on aura

$$\theta^m x=\theta^{2\mu-m}x=\frac{\varDelta e_m}{1-c^2e_m^2}.$$

En changeant le signe de z dans l'équation précédente, on aura, en remarquant que q est une fonction paire et p une fonction impaire,

$$q+p=(1+z)(1\pm cz)\varrho'^2.$$

Cela donne

$$q^2-p^2=(1-z^2)(1-c^2z^2)(\varrho\varrho')^2.$$

Maintenant, puisqu'on doit avoir

$$(161)\qquad (q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2)=(1-z^2)(1-c^2z^2)r^2,$$

cela fait voir que la fonction $q^2-c'^2p^2$ doit être un carré parfait. Or on pourra toujours déterminer c' de manière que cette condition soit remplie. Faisons dans l'équation (158)

$$x=\frac{1}{\sqrt{\pm c}},$$

on aura

$$\theta^{\mu+m}x=\theta^m(\theta^\mu x)=\theta^m\left(\pm\frac{1}{cx}\right)=\theta^m\left(\frac{1}{\sqrt{\pm c}}\right),$$

donc

$$\theta^{\mu+m}x=\theta^m x.$$

Si donc on désigne par α la valeur de y qui répond à $x=\frac{1}{\sqrt{\pm c}}$, les racines de l'équation $\alpha=\psi x$, c'est-à-dire de

$$p-\alpha q=0,$$

seront égales entre elles deux à deux; donc $p-\alpha q$ sera un carré parfait. En changeant le signe de z, on aura $p+\alpha q$, qui par conséquent sera également un carré; donc en multipliant, on aura

$$p^2-\alpha^2q^2=t^2,$$

où t est une fonction entière de z. En faisant donc

$$c'=\frac{1}{\alpha},$$

l'équation (161) aura lieu, et par suite on aura

$$\frac{dv}{\varDelta' v}=\varepsilon\frac{dz}{\varDelta z},\quad \text{où}\quad \frac{p}{q}=v,$$

c'est-à-dire, en changeant z en x

$$\frac{dy}{\varDelta' y}=\varepsilon\frac{dx}{\varDelta x}.$$

Pour déterminer le coefficient ε on aura d'abord, en vertu de la dernière équation,

$$\varepsilon=\frac{dy}{dx},\quad \text{pour}\quad x=0.$$

Mais l'expression de y donnera

$$\frac{dy}{dx}=A=\frac{1}{\varphi(1)},$$

donc

$$\varepsilon=\frac{1}{\varphi(1)}.$$

Le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de y est décomposé en facteurs; savoir si l'on fait $y=\frac{p'}{q'}$, on a

$$p'=\frac{1}{\varphi(1)}x(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_{\mu-1}^2x^2).$$

On pourra facilement décomposer de la même manière le dénominateur q', comme on va le voir.

En divisant les membres de la formule (147) par y, il viendra à cause de $a=0$:

$$\frac{p}{y} - q = -b(z-x)(z-\theta x)(z-\theta^2 x)\ldots(z-\theta^{2\mu-1}x).$$

Cela posé, soit δ une valeur de x, qui rende y infini, c'est-à-dire une des racines de l'équation $q'=0$. On aura

$$q = b(z-\delta)(z-\theta\delta)(z-\theta^2\delta)\ldots(z-\theta^{2\mu-1}\delta).$$

Il suffit donc de connaître une valeur de δ. Or une telle valeur est $\frac{1}{\sqrt{\mp c}}$. En effet, puisqu'on doit avoir $y=\frac{1}{0}$, et remarquant que

$$y = \frac{a'}{b}\,\frac{1}{x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu-1}x},$$

on aura

$$r = x+\theta x+\theta^2 x+\cdots+\theta^{2\mu-1}x = 0.$$

Soit pour une valeur quelconque de x

$$p_m = \theta^m x+\theta^{2\mu-m}x+\theta^{\mu+m}x+\theta^{3\mu-m}x,$$

on aura évidemment, en remarquant que $\theta^{2\mu}x=x$,

$$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_{2\mu-1}=4r.$$

Or je dis que si l'on fait

$$x=\frac{1}{\sqrt{\mp c}},$$

on aura

$$p_m=0,$$

pour une valeur quelconque de m. En effet on a d'abord

$$\theta^m x+\theta^{2\mu-m}x=\frac{2x\cdot\Delta e_m}{1-c^2e_m^2x^2},$$

donc en mettant $\theta^\mu x$ au lieu de x, et remarquant que $\theta^\mu x=\pm\frac{1}{cx}$,

$$\theta^{m+\mu}x+\theta^{3\mu-m}x=\frac{\pm 2\Delta e_m}{cx(1-e_m^2x^{-2})}.$$

En faisant maintenant

$$x=\frac{1}{\sqrt{\pm c}},$$

on aura

$$\theta^m x+\theta^{2\mu-m}x=\frac{2\Delta e_m}{\sqrt{(\mp c)}\,(1\pm ce_m^2)}=-(\theta^{m+\mu}x+\theta^{3\mu-m}x),$$

et par suite

$$p_m=0.$$

On pourra donc faire

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\mp c}}.$$

En remarquant que $q'=1$ pour $x=0$, on aura, en mettant dans l'expression de q, x au lieu de z,

$$q'=\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\theta\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\theta^2\delta}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\theta^{2\mu-1}\delta}\right).$$

D'après ce qui précède on pourra énoncer ce théorème:

Théorème XI. „Soit c une racine quelconque de l'équation $e_\mu=\frac{1}{0}$, mais qui ne satisfait pas en même temps à deux équations de la forme $e_m=0$, $\Delta e_m=1$, où m est facteur de 2μ. Cela posé, si l'on détermine les trois quantités y, c', ε par les formules

$$(162)\quad\begin{cases}\pm\dfrac{\varepsilon}{c}\cdot\dfrac{1}{y}=x\pm\dfrac{1}{cx}+\dfrac{2\Delta e\cdot x}{1-c^2e^2x^2}+\dfrac{2\Delta e_2\cdot x}{1-c^2e_2^2x^2}+\cdots+\dfrac{2\Delta e_{\mu-1}\cdot x}{1-c^2e_{\mu-1}^2x^2}.\\[2ex] \pm\varepsilon=c\left(1\pm\dfrac{1}{c}+\dfrac{2\Delta e}{1-c^2e^2}+\dfrac{2\Delta e_2}{1-c^2e_2^2}+\cdots+\dfrac{2\Delta e_{\mu-1}}{1-c^2e_{\mu-1}^2}\right),\\[2ex] \text{on aura toujours}\\[1ex] \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=\dfrac{\varepsilon\cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.\text{“}\end{cases}$$

Le cas le plus simple de cette formule est celui où $\mu=1$. On aura alors

$$(163)\quad\begin{cases}\varepsilon=\pm c\left(1\pm\dfrac{1}{c}\right)=1\pm c.\\[2ex] y=(1\pm c)\dfrac{x}{1\pm cx^2},\quad c'=\dfrac{2\sqrt{\pm c}}{1\pm c},\\[2ex] \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}}=(1\pm c)\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.\end{cases}$$

Après avoir déterminé par le théorème précédent un système de valeurs pour y, c', ε, on aura cinq autres solutions à l'aide des formules du deuxième paragraphe de ce chapitre.

B. Si $e_\mu=0$, le radical Δe_μ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$ ou -1; mais il faut ici prendre $\Delta e_\mu=-1$, car si l'on avait en même temps $e_\mu=0$, $\Delta e_\mu=1$, il en résulterait $\theta^\mu x=x$, ce qui n'est pas. Mais comme on a

$$\theta^{\mu} x = \frac{x \Delta e_{\mu} + e_{\mu} \Delta x}{1 - c^2 e_{\mu}^2 x^2},$$

cela donne

$$\theta^{\mu} x = -x,$$

et en mettant $\theta^m x$ au lieu de x,

$$\theta^{\mu+m} x = -\theta^m x.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ seront dans ce cas égales deux à deux, mais de signe contraire, et par conséquent ψx sera une fonction paire de x. En faisant

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

on aura

$$(164)\quad p - qy = (a - by)(z^2 - x^2)[z^2 - (\theta x)^2][z^2 - (\theta^2 x)^2] \ldots [z^2 - (\theta^{\mu-1} x)^2].$$

Si l'on fait $z = 0$, et qu'on désigne les valeurs correspondantes de p et q par a' et b', on aura

$$a' - b'y = \pm (a - by)(x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{\mu-1} x)^2,$$

ce qui donne pour y une expression rationnelle du degré 2μ. Comme dans les deux premiers cas, on démontrera aisément qu'il sera toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' de telle sorte que l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

soit satisfaite, en attribuant au module c' et au coefficient ε des valeurs convenables. Je vais considérer seulement le cas le plus simple, où $\mu = 1$. On aura alors

$$a' - b'y = (-a + by) x^2,$$

et par suite

$$y = \frac{a' + a x^2}{b' + b x^2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

on trouvera facilement une solution, savoir

$$(165)\quad y = \frac{1 + c x^2}{1 - c x^2},\ c' = \frac{1 - c}{1 + c},\ \varepsilon = (1 + c)\sqrt{-1}.$$

Connaissant ainsi une solution, on en déduira les cinq autres par les formules du deuxième paragraphe, de sorte que l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

pourra être satisfaite des six manières suivantes:

$$(166)\quad c' = \frac{1 \pm c}{1 \mp c},\ \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{1 \mp \sqrt{1 - c^2}},\ \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 1}}{c \mp \sqrt{c^2 - 1}}.$$

§ 7.

Réduction du problème général au cas où le degré de la fonction rationnelle y est un nombre premier.

Soit maintenant $y = \psi x$ une fonction rationnelle quelconque qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}.$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe 3, l'équation

$$y = \psi x$$

aura toujours n racines de la forme

$$(167)\quad x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{n-1} x,\ \text{où}\ \theta^n x = x.$$

Cela posé, désignons par x' une nouvelle racine, différente de celles-ci, de sorte que

$$\psi x' = \psi x = y.$$

On a

$$\psi(\theta^m x) = \psi x,$$

donc aussi

$$\psi(\theta^m x') = \psi x' = y.$$

Il suit de là que les n quantités

$$(168)\quad x',\ \theta x',\ \theta^2 x',\ \ldots\ \theta^{n-1} x',$$

qui sont différentes entre elles, seront racines de l'équation dont il s'agit. Or toutes ces n racines sont différentes des racines (167). En effet, si l'on avait $\theta^m x' = \theta^{\mu} x$, il en résulterait

$$\theta^{n-m} \theta^m x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

c'est-à-dire

$$x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

ce qui est contre l'hypothèse. Le degré μ de l'équation $y = \psi x$ est donc égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre. Dans le dernier cas, si l'on désigne par x'' une racine différente des $2n$ racines précédentes, on aura en même temps celles-ci:

$$x'',\ \theta x'',\ \theta^2 x'' \ldots \theta^{n-1} x'',$$

qui seront différentes entre elles et des racines (167, 168). Donc μ sera égal à $3n$ ou plus grand que ce nombre. En continuant jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines, on voit que μ doit être un multiple de n, et si l'on fait en conséquence

$$\mu = m.n,$$

les μ racines se distribueront en m groupes de n termes chacun, savoir

$$(169)\qquad \left\{\begin{array}{l} x,\ \theta x,\ \theta^2 x \ldots \theta^{n-1} x, \\ x',\ \theta x',\ \theta^2 x' \ldots \theta^{n-1} x', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(m-1)},\ \theta x^{(m-1)},\ \theta^2 x^{(m-1)} \ldots \theta^{n-1} x^{(m-1)}. \end{array}\right.$$

Cela posé, soit

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

p et q étant des fonctions entières de z, sans diviseur commun. On aura

$$(170)\qquad \begin{aligned} p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \ldots (z - \theta^{n-1} x) \\ \times (z - x')(z - \theta x')(z - \theta^2 x') \ldots (z - \theta^{n-1} x') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times (z - x^{(m-1)})(z - \theta x^{(m-1)})(z - \theta^2 x^{(m-1)}) \ldots (z - \theta^{n-1} x^{(m-1)}), \end{aligned}$$

et d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, on pourra trouver une fonction rationnelle, $y_1 = \psi_1 x$, telle que les racines de l'équation

$$y_1 = \psi_1 x$$

soient les n quantités

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots \theta^{n-1} x,$$

et que y_1 satisfasse à une équation différentielle de la forme

$$(171)\qquad \frac{dy_1}{\sqrt{(1 - y_1^2)(1 - c_1^2 y_1^2)}} = \varepsilon_1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)}}.$$

Faisons

$$\psi_1 z = \frac{p'}{q'},$$

p' et q' étant des fonctions entières du degré n; on aura

$$(172)\qquad p' - q' y_1 = (a' - b' y_1)(z - x)(z - \theta x) \ldots (z - \theta^{n-1} x),$$

a' et b' étant des constantes.

En mettant au lieu de x successivement les m valeurs

$$x,\ x',\ x'',\ \ldots x^{(m-1)}$$

et puis multipliant entre elles les équations qui en résultent, on obtiendra, en ayant égard à l'équation (170),

$$(173)\qquad \frac{p - qy}{a - by} = \frac{p' - q' y_1}{a' - b' y_1} \cdot \frac{p' - q' y_2}{a' - b' y_2} \cdots \frac{p' - q' y_m}{a' - b' y_m},$$

où

$$y_2,\ y_3,\ \ldots y_m$$

sont les valeurs de la fonction y_1, qui répondent aux valeurs

$$x',\ x'',\ \ldots x^{(m-1)}$$

de x.

Cela posé, attribuons à x deux valeurs particulières α, β, telles que

$$\psi\alpha = 0,\quad \psi\beta = \tfrac{1}{0};$$

en désignant par

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots \beta_m$$

les valeurs de $y_1, y_2, \ldots y_m$, respectivement correspondantes aux valeurs α et β de x, l'équation (173) donnera

$$(174)\qquad \left\{\begin{array}{l} p = A'(p' - \alpha_1 q')(p' - \alpha_2 q') \ldots (p' - \alpha_m q'), \\ q = A''(p' - \beta_1 q')(p' - \beta_2 q') \ldots (p' - \beta_m q'), \end{array}\right.$$

où A' et A'' sont deux constantes. En divisant p par q, on voit que $\frac{p}{q} = \psi z$ sera fonction rationnelle de $\frac{p'}{q'} = \psi_1 z$. En mettant x au lieu de z, on aura

$$\frac{p}{q} = y,\quad \frac{p'}{q'} = y_1,$$

donc

$$(175)\qquad y = A \frac{(y_1 - \alpha_1)(y_1 - \alpha_2)(y_1 - \alpha_3) \ldots (y_1 - \alpha_m)}{(y_1 - \beta_1)(y_1 - \beta_2)(y_1 - \beta_3) \cdots (y_1 - \beta_m)},$$

$A = \frac{A'}{A''}$ étant constant.

On voit donc que y pourra être exprimé par une fonction rationnelle de y_1 du degré m.

En combinant maintenant l'équation (171) avec celle-ci:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

qui doit avoir lieu, on aura

$$(176) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)}};$$

donc la fonction y, rationnelle en y_1 et du degré m, doit satisfaire à cette équation. Réciproquement, si cette équation a lieu, l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$$

subsistera également, car la fonction y_1 est déterminée en x de manière à satisfaire à la formule (171). Ainsi le problème général est réduit à satisfaire de la manière la plus générale à l'équation (176). Or ce problème est précisément le même que celui que nous traitons; seulement le degré de la fonction y en y_1 sera m, tandis que y, comme fonction de x, est du degré $m.n$, qui est plus grand que m. On pourra donc appliquer à l'équation (176) le même procédé qu'à l'équation $\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x}$, et il est évident qu'on parviendra ainsi à l'expression générale de y, car les degrés des fonctions successives vont toujours en décroissant.

Supposons maintenant que le degré μ de la fonction y en x soit un nombre premier. Puisque $\mu = m.n$, on a nécessairement $m = 1$, $\mu = n$. Par suite

$$y = A \frac{y_1 - \alpha_1}{y_1 - \beta_1}.$$

On connaît l'expression de y_1 en x par les formules du paragraphe précédent. En substituant l'expression de y en y_1 dans l'équation (176), on déterminera à l'aide des formules du paragraphe 2 toutes les solutions possibles.

En vertu de ce qui précède on pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème XII. Soit y une fonction rationnelle de x d'un degré quelconque μ, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \varepsilon \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

on pourra toujours décomposer μ en deux facteurs n et m, dont l'un n est un nombre premier, tels qu'on ait

$$\frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)}} = \varepsilon_1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

et

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)}},$$

y étant une fonction rationnelle de y_1 du degré m, et y_1 une fonction rationnelle de x du degré n.

Si donc on désigne par $n, n_1, n_2, \ldots n_\nu$ des nombres premiers dont le produit est μ, et qu'on fasse pour abréger

$$\Delta(x, c) = \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

on pourra faire

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon_\nu \frac{dy_\nu}{\Delta(y_\nu, c_\nu)} = \varepsilon_{\nu-1} \frac{dy_{\nu-1}}{\Delta(y_{\nu-1}, c_{\nu-1})} = \cdots = \varepsilon_1 \frac{dy_1}{\Delta(y_1, c_1)} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta x},$$

y_1 étant une fonction rationnelle de x du degré n,
y_2 - - - - - - - y_1 - - n_1,
y_3 - - - - - - - y_2 - - n_2.
. . . .
y_ν - - - - - - - $y_{\nu-1}$ - - $n_{\nu-1}$,
y - - - - - - - y_ν - - n_ν.

En vertu de ce théorème la solution du problème général est ramenée au cas où le degré de la fonction y est un nombre premier. On aura toutes les solutions qui répondent à ce cas par les formules du paragraphe précédent, et ainsi le problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce chapitre pourra être regardé comme résolu.

§ 8.

Sur la forme de la fonction y.

Désignons par $x, x' x'' \ldots x^{(\mu-1)}$ les racines de l'équation

$$y = \psi x.$$

Si l'on fait $\psi z = \frac{p}{q}$, p et q étant des fonctions entières de z, on aura

$$(177) \qquad p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \ldots (z - x^{(\mu-1)}),$$

a et b étant des constantes. Cela posé, soit α une racine de l'équation $y=0$, on aura en faisant $x=\alpha$,

$$p=a(z-\alpha)(z-\alpha')(z-\alpha'')\ldots(z-\alpha^{(\mu-1)}). \tag{178}$$

Soit de même β une racine de l'équation $y=\frac{1}{0}$. Cela donnera, en faisant $x=\beta$ après avoir divisé les deux membres de l'équation (177) par y,

$$q=b(z-\beta)(z-\beta')(z-\beta'')\ldots(z-\beta^{(\mu-1)}). \tag{179}$$

Ces valeurs de p et q donneront, en mettant x au lieu de z,

$$y=A\frac{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots(x-\alpha^{(\mu-1)})}{(x-\beta)(x-\beta')\ldots(x-\beta^{(\mu-1)})}, \tag{180}$$

où A est un coefficient constant, qu'on détermine en remarquant que si l'on fait $x=1$, y doit avoir une des valeurs ± 1, $\pm\frac{1}{c'}$.

Mais il y a deux cas à considérer séparément: savoir, il pourra arriver que l'une des deux quantités a et b soit égale à zéro, et dans ce cas l'une des racines des équations $y=0$, $y=\frac{1}{0}$ sera nulle ou infinie.

Cas premier, si $b=0$. On aura

$$p-qy=a(z-x)(z-x')\ldots(z-x^{(\mu-1)}), \tag{181}$$

et p sera du degré μ, et q seulement du degré $\mu-1$. En égalant le coefficient de $z^{\mu-1}$ dans les deux membres, on aura

$$a'-b'y=-a(x+x'+x''+\cdots+x^{(\mu-1)}), \tag{182}$$

a' et b' étant des constantes. Maintenant si

$$x'=\frac{x\Delta e+e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

est une racine de $y=\psi x$, la quantité

$$\frac{x\Delta e-e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

le sera également; donc si ces deux quantités sont différentes entre elles pour toutes les valeurs de e, μ sera un nombre impair, et en faisant $\mu=2n+1$, on aura

$$a'-b'y=-a\left(x+\frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\frac{2x\Delta e_2}{1-c^2e_2^2x^2}+\cdots+\frac{2x\Delta e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right). \tag{183}$$

Maintenant si l'on fait $x=\pm 1$, $\pm\frac{1}{c}$, on doit avoir $y=\pm 1$, $y=\pm\frac{1}{c'}$,

d'où il est facile de conclure que a' sera égal à zéro. Donc y sera une fonction impaire de x, et de la forme

$$y=Ax\left(1+\frac{2\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\cdots+\frac{2\Delta e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right). \tag{184}$$

Cela fait voir que

$$q=(1-c^2e_1^2z^2)\ldots(1-c^2e_n^2z^2).$$

Pour avoir p, il suffit de faire dans l'équation (181) $x=0$, ce qui donne

$$p=az(z^2-e_1^2)\ldots(z^2-e_n^2),$$

donc on aura

$$y=a\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_n^2x^2)}. \tag{185}$$

Telle est donc la forme de la fonction y dans le cas où le degré de son numérateur est impair et plus grand que celui du dénominateur.

Si pour quelque valeur de e les deux quantités

$$\frac{x\Delta e+e\Delta x}{1-c^2e^2x^2},\quad \frac{x\Delta e-e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

étaient égales, on aurait

$$e=0, \text{ ou } e=\tfrac{1}{0}.$$

Soit d'abord $e=\frac{1}{0}$, on aura $x'=\pm\frac{1}{cx}$, et par suite le second membre de l'équation (182) serait une fonction impaire de x, dont le degré serait un nombre pair. On trouve que cela donne $a'=0$; donc en faisant $\mu=2n$,

$$y=A\left(x\pm\frac{1}{cx}+\frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\cdots+\frac{2x\Delta e_{n-1}}{1-c^2e_{n-1}^2x^2}\right), \tag{186}$$

et par suite y sera exprimé en produit de facteurs comme il suit:

$$y=\frac{a(1-\delta_1^2x^2)(1-\delta_2^2x^2)\ldots(1-\delta_n^2x^2)}{x(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_{n-1}^2x^2)}, \tag{187}$$

Si au contraire $e=0$, on aura en même temps

$$x'=-x.$$

Donc dans ce cas y sera une fonction paire de x. Mais alors le degré du numérateur doit être le même que celui du dénominateur, comme il est facile de s'en convaincre; par conséquent l'expression (187) appartient à y toutes les fois que le degré du numérateur est un nombre pair et en même temps plus grand que celui du dénominateur.

Cas second, si $a=0$. On aura alors

$$p-qy=by(z-x)(z-x')\dots(z-x^{(\mu-1)}).$$

En raisonnant comme ci-dessus on trouvera aisément que dans le cas où μ est un nombre impair, y sera une fonction impaire de x de la forme

(188) $$y=a\frac{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_n^2x^2)}{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\dots(e_n^2-x^2)}.$$

Si μ est pair, y sera une fonction impaire de x de la forme

(189) $$y=a\frac{x(1-c^2e_1^2x^2)\dots(1-c^2e_{n-1}^2x^2)}{(1-\delta_1^2x^2)\dots(1-\delta_n^2x^2)}.$$

§ 9.

De la fonction $x_{2\mu+1}$.

Nous avons vu (chapitre I paragraphe 4) que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\varDelta y}=(2\mu+1)\frac{dx}{\varDelta x}$$

peut être satisfaite, en mettant pour y une fonction impaire de x du degré $(2\mu+1)^2$ qui s'évanouit avec x. En la désignant comme nous l'avons fait à l'endroit cité par $x_{2\mu+1}$, et faisant pour abréger $(2\mu+1)^2-1=2n$, cette fonction, en vertu de ce que nous venons de voir dans le paragraphe précédent, doit avoir la forme suivante:

(190) $$x_{2\mu+1}=a\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\dots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_n^2x^2)},$$

et on aura en même temps

(191) $$x_{2\mu+1}=A\left(x+\frac{2\varDelta e_1.x}{1-c^2e_1^2x^2}+\frac{2\varDelta e_2.x}{1-c^2e_2^2x^2}+\dots+\frac{2\varDelta e_n.x}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Pour déterminer les coefficiens a et A, faisons $x=\frac{1}{0}$. On trouvera alors

$$Ac^{2n}e_1^2e_2^2\dots e_n^2=a.$$

Si l'on fait x infiniment petit, la première formule donne

$$x_{2\mu+1}=ae_1^2e_2^2\dots e_n^2x,$$

mais l'équation différentielle donne dans ce cas

$$x_{2\mu+1}=(2\mu+1)x,$$

par suite

$$ae_1^2e_2^2\dots e_n^2=2\mu+1.$$

De même si l'on fait x infiniment grand, la seconde expression de $x_{2\mu+1}$ donne $x_{2\mu+1}=Ax$, mais dans le même cas l'équation différentielle donne

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{cx_{2\mu+1}^2}=\frac{dx}{cAx^2}=(2\mu+1)\frac{dx}{cx^2};$$

donc

(192) $$A=\frac{1}{2\mu+1}.$$

Connaissant A, on aura ensuite

(193) $$e_1^2e_2^2\dots e_n^2=\frac{2\mu+1}{c^n},\quad a=c^n=c^{2\mu^2+2\mu}.$$

Les quantités $e_1, e_2, \dots e_n$ ont entre elles des relations remarquables que nous allons développer. Considérons l'équation

$$x_{2\mu+1}=y.$$

Les racines de cette équation sont les $(2\mu+1)^2$ quantités

$$x,\ \frac{x\varDelta e_1\pm e_1\varDelta x}{1-c^2e_1^2x^2},\ \frac{x\varDelta e_2\pm e_2\varDelta x}{1-c^2e_2^2x^2},\ \dots\ \frac{x\varDelta e_n\pm e_n\varDelta x}{1-c^2e_n^2x^2}.$$

Soit $\theta x=\frac{x\varDelta e+e\varDelta x}{1-c^2e^2x^2}$ l'une quelconque de ces racines, les $2\mu+1$ quantités

$$x,\ \theta x,\ \theta^2x\ \dots\ \theta^{2\mu}x$$

seront encore des racines et différentes entre elles, si l'on prend pour e une quantité qui n'est pas racine d'une équation

$$x_{2m+1}=0,$$

où $2m+1$ est facteur de $2\mu+1$. Soit de même

$$\theta_1x=\frac{x\varDelta e'+e'\varDelta x}{1-c^2e'^2x^2}$$

une autre racine, on aura encore les racines suivantes:

$$\theta_1x,\ \theta_1^2x,\ \dots\ \theta_1^{2\mu}x,$$

qui seront différentes entre elles.

Cela posé, faisons

$$x_{2\mu+1}=\psi x;$$

on aura en général

$$\psi(\theta^m x)=\psi(\theta_1^k x),$$

quels que soient les nombres entiers m et k. En mettant $\theta^m x$ pour x, on aura

$$\psi(\theta_1^k \theta^m x) = \psi(\theta^{2m} x) = x_{2\mu+1};$$

donc toute quantité de la forme

$$\theta_1^k \theta^m x$$

sera racine de l'équation $y = \psi x$. Je dis maintenant que si l'on attribue à k et m toutes les valeurs entières moindres que $2\mu+1$, les valeurs qui en résultent pour la fonction $\theta_1^k \theta^m x$, seront toutes différentes entre elles. En effet, si l'on avait

$$\theta_1^k \theta^m x = \theta_1^{k'} \theta^{m'} x,$$

il en résulterait, en mettant $\theta^{2\mu+1-m'} x$ pour x et remarquant que $\theta^{2\mu+1} x = x$,

$$\theta_1^k \theta^{n'} x = \theta_1^{k'} x,$$

en posant $n' = m + 2\mu + 1 - m'$.

Cela donne

$$\theta_1^{2\mu+1-k} \theta_1^k \theta^{n'} x = \theta_1^{k''} x,$$

en posant $k'' = 2\mu + 1 - k + k'$, c'est-à-dire

$$\theta^{n'} x = \theta_1^{k''} x,$$

et par suite

$$\theta^{n'\mu'} x = \theta_1^{k''\mu'} x.$$

Maintenant, puisque $2\mu+1$ est un nombre premier, on pourra faire

$$k''\mu' = (2\mu+1)\beta + 1,$$

donc

$$\theta_1^{(2\mu+1)\beta} \theta_1 x = \theta_1 x = \theta^{n'\mu'} x,$$

c'est-à-dire que $\theta_1 x$ serait une des quantités

$$x,\ \theta x,\ \ldots\ \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

L'expression $\theta_1^k \theta^m x$ a donc $(2\mu+1)^2$ valeurs différentes et par conséquent ces valeurs seront les racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Soit maintenant

$$x' = \theta_1^k x,\ x'' = \theta_1^k \theta^m x,\ x''' = \theta^m x.$$

On aura, en regardant e et e' comme variables,

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + k\frac{de'}{\Delta e'},$$

$$\frac{dx'''}{\Delta x'''} = \frac{dx}{\Delta x} + m\frac{de}{\Delta e}.$$

En mettant dans la première formule x''' au lieu de x, x' se changera en x'', donc

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx'''}{\Delta x'''} + k\frac{de'}{\Delta e'},$$

donc

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx}{\Delta x} + k\frac{de'}{\Delta e'} + m\frac{de}{\Delta e};$$

et si l'on fait

$$k\frac{de'}{\Delta e'} = \frac{de_k'}{\Delta e_k'},\quad m\frac{de}{\Delta e} = \frac{de_m}{\Delta e_m}:$$

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_k'}{\Delta e_k'} + \frac{de_m}{\Delta e_m}.$$

Si donc on fait

(194) $$e_{m,k} = \frac{e_m \Delta e_k' + e_k' \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_k'^2},$$

on aura

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_{m,k}}{\Delta e_{m,k}},$$

d'où, en supposant que e_m et e_k' s'évanouissent avec e et e',

(195) $$x'' = \frac{x \Delta e_{m,k} + e_{m,k} \Delta x}{1 - c^2 e_{m,k}^2 x^2} = \theta_1^k \theta^m x.$$

Toutes les racines de l'équation $y = x_{2\mu+1}$ pourront donc être représentées par cette même formule.

Donc pour connaître toutes les racines, il suffit d'avoir la valeur des deux quantités e et e', qui sont deux racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = 0.$$

Toutes les racines de cette équation

$$x_{2\mu+1} = 0,$$

lesquelles, par ce qui précède, sont les $(2\mu+1)^2$ quantités

$$0,\ \pm e_1,\ \pm e_2,\ \ldots\ \pm e_n,$$

sont donc exprimées par la formule

$$e_{m,k},$$

en donnant à m et k toutes les valeurs moindres que $2\mu+1$. Il est facile de voir qu'on pourra exprimer $e_{m,k}$ en fonction rationnelle des deux quantités c, c'; donc on voit que toutes les racines de l'équation $x_{2\mu+1}=0$, pourront s'exprimer rationnellement par deux d'entre elles et par le module c.

Si l'on veut exprimer $x_{2\mu+1}$ à l'aide des fonctions $\theta_1 x$ et θx, on pourra le faire d'une manière fort simple. En effet, en remarquant que le dernier terme d'une équation est le produit de toutes ses racines, on aura sur le champ

$$\begin{aligned}(196)\qquad x_{2\mu+1}=c^{2\mu^2+2\mu}\,.\,x\,.\,\theta x\,.\,\theta^2 x \ldots \theta^{2\mu}x \\ \times\theta_1 x\,.\,\theta_1\theta x\,.\,\theta_1\theta^2 x \ldots \theta_1\theta^{2\mu}x \\ \times\theta_1^2 x\,.\,\theta_1^2\theta x\,.\,\theta_1^2\theta^2 x \ldots \theta_1^2\theta^{2\mu}x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times\theta_1^{2\mu} x\,.\,\theta_1^{2\mu}\theta x\,.\,\theta_1^{2\mu}\theta^2 x \ldots \theta_1^{2\mu}\theta^{2\mu}x.\end{aligned}$$

On a aussi

$$(197)\qquad x_{2\mu+1}=\frac{1}{2\mu+1}\sum_0^{2\mu}{}_m\sum_0^{2\mu}{}_n(\theta_1^m\theta^n x).$$

§ 10.

De l'équation $x_{2\mu+1}=0$.

D'après ce qui précède les racines de l'équation $x_{2\mu+1}=0$ sont exprimées par $e_{m,k}$ en donnant à m et k toutes les valeurs moindres que $2\mu+1$. Une de ces valeurs est zéro, savoir $e_{0,0}$.

En divisant le numérateur de la fraction $x_{2\mu+1}$ par x, on aura, en égalant le quotient à zéro, une équation

$$(198)\qquad P=0,$$

du degré $4\mu^2+4\mu$. Je dis que cette équation peut être résolue à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$ et du degré 2μ.

Soit p une fonction quelconque symétrique et rationnelle des quantités $e_1, e_2, \ldots e_{2\mu}$. En mettant pour $e_2, e_3, \ldots e_{2\mu}$ leurs expressions en fonction rationnelle de e_1, p deviendra de même une fonction rationnelle de cette racine. Faisons

$$(199)\qquad p=\varphi e_1,$$

on aura évidemment

$$(200)\qquad \varphi e_1=\varphi e_2=\varphi e_3=\cdots=\varphi e_{2\mu},$$

équations qui auront lieu quelle que soit la racine e. Cela posé, mettons $e_{m,1}$ au lieu de e, il est clair que

$$e_2,\ e_3,\ \ldots\ e_{2\mu}$$

se changeront respectivement en

$$e_{2m,2},\ e_{3m,3},\ \ldots\ e_{2\mu m,2\mu}.$$

Donc on aura

$$(201)\qquad \varphi e_{m,1}=\varphi e_{2m,2}=\cdots=\varphi e_{2\mu m,2\mu}.$$

Formons l'équation

$$(202)\qquad \begin{cases}(p-\varphi e_1)(p-\varphi e_{0,1})(p-\varphi e_{1,1})(p-\varphi e_{2,1})\ldots(p-\varphi e_{2\mu,1})\\ =p^{2\mu+2}-q_{2\mu+1}\cdot p^{2\mu+1}+q_{2\mu}\cdot p^{2\mu}-\cdots-q_1\cdot p+q_0=0,\end{cases}$$

$q_0, q_1, \ldots q_{2\mu+1}$ seront des fonctions symétriques et rationnelles de φe_1, $\varphi e_{0,1}, \ldots \varphi e_{2\mu,1}$. Or on pourra les exprimer rationnellement en c. En effet, il suffit d'avoir la valeur de

$$(203)\qquad (\varphi e_1)^k+(\varphi e_{0,1})^k+\cdots+(\varphi e_{2\mu,1})^k=\varrho_k.$$

En vertu des équations (200, 201) cette quantité pourra s'écrire comme il suit:

$$\begin{aligned}2\mu\varrho_k= (\varphi e_1)^k + (\varphi e_2)^k + (\varphi e_3)^k + \cdots + (\varphi e_{2\mu})^k \\ +(\varphi e_{0,1})^k+(\varphi e_{0,2})^k+(\varphi e_{0,3})^k+\cdots+(\varphi e_{0,2\mu})^k \\ +(\varphi e_{1,1})^k+(\varphi e_{2,2})^k+(\varphi e_{3,3})^k+\cdots+(\varphi e_{2\mu,2\mu})^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(\varphi e_{2\mu,1})^k+(\varphi e_{4\mu,2})^k+(\varphi e_{6\mu,3})^k+\cdots+(\varphi e_{4\mu\mu,2\mu})^k.\end{aligned}$$

Or le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation $P=0$; donc on pourra exprimer ϱ_k rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire par c.

On voit donc que les coefficiens de l'équation (202), $q_0, q_1, q_2, \ldots$ seront des fonctions rationnelles de c. Donc une fonction symétrique quelconque des racines

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots\ e_{2\mu}$$

pourra se déterminer par le module c, à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cela posé, faisons

$$(204)\qquad (e-e_1)(e-e_2)\ldots(e-e_{2\mu})= e^{2\mu}+p_{\mu-1}\cdot e^{2\mu-2}+p_{\mu-2}\cdot e^{2\mu-4}+\cdots+p_1\cdot e^2+p_0=0.$$

Les coefficiens $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{\mu-1}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de $e_1, e_2, \ldots e_{2\mu}$; donc, comme nous venons de le voir, on pourra les déterminer à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$. Ainsi, pour avoir les racines de l'équation $P=0$, il suffira de résoudre des équations du degré 2μ et $2\mu+2$.

Ce qui précède est susceptible d'une application importante. Le module c', exprimé par la formule (156), est, comme on le voit, une fonction rationnelle et symétrique de $e, e_2, e_3, \ldots e_{2\mu}$. Donc, en vertu de la propriété démontrée précédemment, on pourra déterminer le module c' en c à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cette équation ne paraît guère résoluble algébriquement, excepté lorsque $2\mu+1=3$. Dans ce cas elle sera du quatrième degré.

En appliquant le théorème XII à l'équation

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}}=(2\mu+1)\frac{dx}{\Delta x},$$

on aura, en remarquant que le degré de la fonction $x_{2\mu+1}$ est $(2\mu+1)^2$, et $2\mu+1$ un nombre premier,

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}}=\frac{2\mu+1}{\varepsilon}\,\frac{dy}{\Delta' y}=(2\mu+1)\frac{dx}{\Delta x},$$

y étant une fonction de x du degré $2\mu+1$, et $x_{2\mu+1}$ une fonction de y du même degré. On aura

$$y=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\cdot\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)}$$

et

$$x_{2\mu+1}=\frac{c'^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y(e'^2-y^2)(e'^2_2-y^2)\ldots(e'^2_\mu-y^2)}{(1-c'^2e'^2y^2)(1-c'^2e'^2_2y^2)\ldots(1-c'^2e'^2_\mu y^2)},$$

$$c'=c^{2\mu+1}\left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\cdot\frac{1-e_2^2}{1-c^2e_2^2}\cdots\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2}\right)^2,$$

$$c=c'^{2\mu+1}\left(\frac{1-e'^2}{1-c'^2e'^2}\cdot\frac{1-e'^2_2}{1-c'^2e'^2_2}\cdots\frac{1-e'^2_\mu}{1-c'^2e'^2_\mu}\right)^2,$$

$$\varepsilon=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\,e^2e_2^2\ldots e_\mu^2.$$

e' est déterminé de la même manière en c' que e l'est en c. Donc si l'on change c en c', e se changera en e'. De là il suit que l'équation entre les modules c' et c doit rester la même si l'on change simultanément c en c' et c' en c.

Puisque c' dépend d'une équation du degré $2\mu+2$, on pourra donner à la fonction y, $2\mu+2$ valeurs différentes.

§ 11.

Des transformations différentes qui répondent à un même degré de la fonction y.

Soit

$$y=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_\mu x^\mu}{B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots+B_\mu x^\mu}$$

et

(205) $$\frac{dy}{\Delta(y,c')}=\varepsilon\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Supposons μ premier et d'abord $\mu=1$. Dans ce cas le module c', en vertu des formules du paragraphe 2, aura six valeurs différentes, et la fonction y en aura douze.

Si $\mu=2$, on aura toutes les solutions possibles en combinant les deux formules (163, 165) avec les six formules du paragraphe 2, ce qui donne 18 valeurs différentes du module c'.

Si l'on fait

$$c_1=\frac{1-c}{1+c},\quad c_2=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c_3=\frac{2\sqrt{-c}}{1-c},$$

ces 18 valeurs s'obtiendront en mettant dans les six fonctions

$$\pm c,\ \pm\frac{1}{c},\ \pm\left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2,\ \pm\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2,\ \pm\left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2,\ \pm\left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2,$$

les trois quantités c_1, c_2, c_3 au lieu de c.

Si μ est un nombre premier impair $2n+1$, on aura d'abord $2n+2$ valeurs du module c' qui répondent à la forme suivante de y:

$$y=\frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\,\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_n^2x^2)}.$$

Or de chaque valeur de y de cette forme on déduit, en vertu des six formules du paragraphe 2, cinq autres valeurs de la forme:

$$c'y,\ \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{c'}}{1\mp y\sqrt{c'}},\ \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{c'}}{1\mp y\sqrt{c'}},\ \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{-c'}}{1\mp y\sqrt{-c'}},$$

$$\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{-c'}}{1\mp y\sqrt{-c'}},$$

auxquelles répondent respectivement les modules:

$$\frac{1}{c'},\ \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2,\ \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2,\ \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2,\ \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2.$$

On aura donc en tout $6(2n+2)=6(\mu+1)$ valeurs différentes pour le module c'. On en aura un nombre double pour la fonction y.

§ 12.

Résolution de l'équation $y=\psi x$.

L'équation algébrique $y=\psi x$, où ψx est une fonction *rationnelle* quelconque de x, satisfaisant à une équation différentielle de la forme (205), jouira de la propriété remarquable d'être résoluble par rapport à x à l'aide de radicaux. C'est ce qu'il est facile de démontrer à l'aide de la forme des racines de cette équation. D'abord si le degré μ est un nombre composé $=n\,.\,n_1\,.\,n_2\ldots n_\nu$, on pourra faire comme nous venons de le voir dans le § 7:

$$y=\psi_\nu y_\nu,\ y_\nu=\psi_{\nu-1}y_{\nu-1},\ \ldots\ y_2=\psi_1 y_1,\ y_1=\psi x,$$

$\psi_\nu,\ \psi_{\nu-1},\ \ldots\ \psi_1,\ \psi$ désignant des fonctions rationnelles respectivement des degrés $n_\nu,\ n_{\nu-1},\ \ldots\ n_1,\ n$, ces derniers nombres étant premiers. On aura donc la valeur de x en y à l'aide de la résolution de $\nu+1$ équations des degrés $n,\ n_1,\ \ldots\ n_\nu$ respectivement. Il suffit donc de résoudre l'équation $y=\psi x$ dans le cas où le degré μ est un nombre premier. Si $\mu=2$, on aura l'expression de x par les règles connues. Soit donc μ impair $=2\mu+1$. Alors les racines de l'équation $y=\psi x$ seront les $2\mu+1$ quantités

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ \ldots\ \theta^{2\mu}x.$$

Cela posé, soit δ une racine imaginaire de l'équation

$$\delta^{2\mu+1}=1,$$

et faisons

$$v=x+\delta\,.\,\theta x+\delta^2\,.\,\theta^2 x+\cdots+\delta^{2\mu}\,.\,\theta^{2\mu}x,$$
$$v'=x+\delta\,.\,\theta^{2\mu}x+\delta^2\,.\,\theta^{2\mu-1}x+\cdots+\delta^{2\mu}\,.\,\theta x.$$

En substituant pour les quantités $\theta^m x$ leurs valeurs

$$\theta^m x=\frac{x\Delta e_m+e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

et remarquant que

$$\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{x\Delta e_m-e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

il est clair qu'on aura

$$v=p+q\Delta x,\ v'=p-q\Delta x,$$

p et q étant des fonctions rationnelles de x. Cela fait voir que vv' et $v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles de x; or je dis qu'on pourra exprimer ces quantités en fonction rationnelle de y. En effet, en vertu de la forme de v et v', il est clair que si l'on fait

$$vv'=\varphi x,\ v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}=fx,$$

les deux fonctions φx et fx ne changeront pas de valeur si l'on met pour x les $2\mu+1$ quantités

$$x,\ \theta x,\ \ldots\ \theta^{2\mu}x.$$

Donc on aura

$$\varphi x=\frac{1}{2\mu+1}(\varphi x+\varphi\theta x+\cdots+\varphi\theta^{2\mu}x)=vv',$$
$$fx=\frac{1}{2\mu+1}(fx+f\theta x+\cdots+f\theta^{2\mu}x)=v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}.$$

Ces expressions des quantités vv', $v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions *rationnelles et symétriques* des racines de l'équation $y=\psi x$; donc on pourra les exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire en y.

Faisons donc

$$vv'=s$$
$$v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}=t,$$

s et t seront des fonctions rationnelles de y. On en tire

$$v=\sqrt[2\mu+1]{\frac{t}{2}+\sqrt{\frac{t^2}{4}-s^{2\mu+1}}}.$$

On connaît donc la fonction v. Cela posé, si l'on désigne par $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_{2\mu}$ les valeurs de v qui répondent respectivement aux racines $1,\ \delta,\ \delta^2,\ \delta^3,\ \ldots\ \delta^{2\mu}$ de l'équation $\delta^{2\mu+1}=1$, on aura sur le champ

$$x=\frac{1}{2\mu+1}(v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{2\mu}),$$
$$\theta^m x=\frac{1}{2\mu+1}(v_0+\delta^{-m}v_1+\delta^{-2m}v_2+\cdots+\delta^{-2m\mu}v_{2\mu}),$$

ce qui est l'expression générale des racines.

On aura ainsi une classe très étendue d'équations algébriques de tous les degrés qui seront résolubles algébriquement. Nous n'entrerons pas ici dans des détails sur ce sujet, mais nous renvoyons nos lecteurs à la seconde partie de ce mémoire, où nous en donnerons des développemens étendus à cause des belles propriétés des fonctions elliptiques qu'on en peut déduire.

Comme cas particulier on pourra remarquer l'équation

$$x_\mu = y,$$

où x_μ désigne la fonction rationnelle de x du degré μ^2, qui satisfera à l'équation

$$\frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = \mu \frac{dx}{\Delta x}.$$

On en pourra donc toujours tirer la valeur de x en y à l'aide de radicaux. Si μ est un nombre impair, on pourra donner aux racines cette forme très simple:

$$x = \frac{1}{\mu}\left[ay + (p_1 + q_1 \Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + (p_2 + q_2 \Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + (p_{\mu^2-1} + q_{\mu^2-1} \Delta y)^{\frac{1}{\mu}}\right],$$

où $p_1, p_2, p_3 \ldots$ sont des fonctions *entières impaires* de y du degré μ, et $q_1, q_2, q_3 \ldots$ des fonctions paires de y du degré $\mu - 3$. p_m et q_m seront déterminés par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2 (1 - y^2)(1 - c^2 y^2) = (y^2 - e_m^2)^\mu,$$

où e_m est une constante, savoir une racine de l'équation $x_\mu = 0$.

CHAPITRE V.

Théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module.

A l'aide des théorèmes que nous avons établis dans les chapitres précédens, nous pourrons maintenant donner la solution de ce problème:

„*Étant proposée une fonction elliptique d'un module quelconque, exprimer cette fonction de la manière la plus générale en d'autres fonctions.*"

§ 1.

Condition générale pour la transformation.

Soit proposée une intégrale de la forme

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x},$$

on demande s'il est possible d'exprimer cette intégrale par des fonctions algébriques, logarithmiques et des fonctions elliptiques, dont les modules sont $c_1, c_2, \ldots c_m$, en sorte qu'on ait:

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x} = A_1 . \psi_1 x_1 + A_2 . \psi_2 x_2 + \cdots + A_m . \psi_m x_m + V,$$

où $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont des constantes, $x_1, x_2, \ldots x_m$ des fonctions algébriques de x, et V une fonction algébrique et logarithmique; $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ désignent des fonctions elliptiques ayant respectivement $c_1, c_2, \ldots c_m$ pour modules.

Cela posé, cette équation donnera en vertu de la formule (86):

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x} = k_1 . \psi_1 y_1 + k_2 . \psi_2 y_2 + \cdots + k_m . \psi_m y_m + V',$$

les quantités

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$$

de même que

$$\frac{\Delta_1 y_1}{\Delta x}, \frac{\Delta_2 y_2}{\Delta x}, \frac{\Delta_3 y_3}{\Delta x}, \ldots \frac{\Delta_m y_m}{\Delta x}$$

étant des fonctions rationnelles de x.

Si l'on suppose, ce qui est permis, qu'il soit impossible d'exprimer

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x}$$

par un nombre moindre des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$, il est clair qu'aucune des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$ ne pourra être constante.

On doit donc avoir séparément, en vertu du théorème démontré dans le premier paragraphe du chapitre précédent,

$$\frac{dy_1}{\Delta_1 y_1} = \varepsilon_1 \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dy_2}{\Delta_2 y_2} = \varepsilon_2 \frac{dx}{\Delta x}, \ldots \frac{dy_m}{\Delta_m y_m} = \varepsilon_m \frac{dx}{\Delta x},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes. Cela donne en intégrant,

$$\varpi(y_1, c_1) = \varepsilon_1 \varpi x, \quad \varpi(y_2, c_2) = \varepsilon_2 \varpi x, \ldots \varpi(y_m, c_m) = \varepsilon_m \varpi x$$

sauf une constante qu'il faut ajouter à chacune de ces équations. On pourra donc énoncer ce théorème:

Théorème XIII. Une relation quelconque entre des fonctions elliptiques, ayant c, c_1, c_2, ... c_m pour modules, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait entre les fonctions correspondantes de la première espèce, cette relation

$$(206) \qquad \varpi(x, c) = \frac{1}{\varepsilon_1}\varpi(y_1, c_1) = \frac{1}{\varepsilon_2}\varpi(y_2, c_2) = \cdots = \frac{1}{\varepsilon_m}\varpi(y_m, c_m),$$

où ε_1, ε_2, ... ε_m sont des constantes et y_1, y_2, ... y_m des fonctions rationnelles de la variable x.

On pourra donc encore satisfaire aux équations suivantes:

$$(207) \qquad \begin{cases} \varpi(x_1, c) = \varepsilon' \varpi(x, c_1), \\ \varpi(x_2, c) = \varepsilon'' \varpi(x, c_2), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varpi(x_m, c) = \varepsilon^{(m)} \varpi(x, c_m), \end{cases}$$

x_1, x_2, ... x_m étant des fonctions rationnelles de x; ou bien, si l'on désigne par c et c' les modules de deux quelconques des fonctions entre lesquelles on a une relation, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$(208) \qquad \varpi(x', c') = \varepsilon\,\varpi(x, c),$$

en supposant x' fonction rationnelle de x, ou x fonction rationnelle de x'. Cette équation donne

$$(209) \qquad \frac{dx'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Soit maintenant x' fonction rationnelle de x; si r' désigne une fonction rationnelle quelconque de x', on pourra transformer r' en une fonction pareille de x. En la désignant par r, on aura donc $r' = r$. Donc en multipliant l'équation différentielle ci-dessus par r', on aura, en intégrant

$$(210) \qquad \int \frac{r'dx'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon \int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)}.$$

Quelle que soit la fonction rationnelle r, on pourra toujours, comme on sait, exprimer

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)}$$

par des fonctions elliptiques des trois espèces avec le module c. On aura donc ce théorème:

Théorème XIV. Si une fonction elliptique quelconque φx, ayant c' pour module, peut être exprimée par d'autres fonctions dont les modules sont c_1, c_2, ... c_m, on pourra toujours exprimer la même fonction φx par des fonctions elliptiques d'un même module c, c étant l'un quelconque des modules c_1, c_2, ... c_m, et cela de la manière suivante:

$$(211) \qquad \varphi y = \int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)},$$

où y et r sont des fonctions rationnelles de x.

La continuation d'après un manuscrit inédit.

En vertu de ce théorème tout ce qui concerne la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module se réduit à exprimer l'intégrale $\int \frac{r\,dx}{\Delta(x, c)}$ par des fonctions elliptiques.

§ 2.

Transformation des fonctions de la première et de la seconde espèce.

Supposons d'abord que φx soit une fonction de la première espèce, de sorte qu'on ait

$$\varphi x = \int \frac{dx}{\Delta(x, c')}.$$

Dans ce cas la fonction r se réduit à une constante, et on aura par suite

$$(212) \qquad \varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c),$$

où y est rationnel en x. Cette équation est la même que celle-ci:

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Nous en avons donné la solution dans le chapitre précédent. Passons aux fonctions de la seconde espèce:

$$\varphi x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta(x, c')} = \varpi_0(x, c').$$

On aura alors

$$(213) \qquad \varpi_0(y, c') = \varepsilon \int \frac{y^2 dx}{\Delta(x, c)}.$$

Comme y est une fonction rationnelle de x, l'intégrale du second membre paraît contenir des fonctions de la troisième espèce, mais nous verrons qu'on peut toujours la réduire à une expression de la forme:

$$A . \varpi(x, c) + B . \varpi_0(x, c) + v,$$

où v est une fonction algébrique de x. Il y a un moyen bien simple de prouver cela, savoir en différentiant l'équation

$$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c)$$

par rapport au module c. Cette équation revient à celle-ci:

$$\int dy (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - c'^2 y^2)^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon \int dx (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - c^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

En la différentiant par rapport à c et remarquant que les trois quantités y, c', ε contiennent cette quantité, on aura

$$c' \frac{dc'}{dc} \int \frac{y^2 dy}{(1 - c'^2 y^2) \Delta(y, c')} + \frac{dy}{dc} \cdot \frac{1}{\Delta(y, c')} = \frac{d\varepsilon}{dc} \int \frac{dx}{\Delta(x, c)} + c\varepsilon \int \frac{x^2 dx}{(1 - c^2 x^2) \Delta(x, c)};$$

mais on a

$$\int \frac{x^2 dx}{(1 - c^2 x^2) \Delta(x, c)} = \frac{1}{c^2 - 1} \cdot \frac{x(1 - x^2)}{\Delta(x, c)} + \frac{1}{1 - c^2} \int \frac{(1 - x^2) dx}{\Delta(x, c)},$$

$$\int \frac{y^2 dy}{(1 - c'^2 y^2) \Delta(y, c')} = \frac{1}{c'^2 - 1} \cdot \frac{y(1 - y^2)}{\Delta(y, c')} + \frac{1}{1 - c'^2} \int \frac{(1 - y^2) dy}{\Delta(y, c')}.$$

En substituant on aura

$$\frac{c'}{1 - c'^2} \cdot \frac{dc'}{dc} \left\{ \varpi(y, c') - \varpi_0(y, c') - \frac{y(1 - y^2)}{\Delta(y, c')} \right\} + \frac{dy}{dc} \cdot \frac{1}{\Delta(y, c')}$$
$$= \frac{d\varepsilon}{dc} \varpi(x, c) + \frac{c\varepsilon}{1 - c^2} \left\{ \varpi(x, c) - \varpi_0(x, c) - \frac{x(1 - x^2)}{\Delta(x, c)} \right\},$$

et de là en mettant pour $\varpi(y, c')$ sa valeur $\varepsilon \varpi(x, c)$,

$$(214) \qquad \varpi_0(y, c') = A \varpi(x, c) + B \varpi_0(x, c) + p,$$

où l'on a fait pour abréger

$$(215) \quad \begin{cases} A = \varepsilon \left\{ 1 - \dfrac{c\,dc(1 - c'^2)}{c'\,dc'(1 - c^2)} \right\} - \dfrac{d\varepsilon(1 - c'^2)}{c'\,dc'}, \\[2ex] B = \dfrac{\varepsilon c(1 - c'^2) dc}{c'(1 - c^2) dc'}, \\[2ex] p = \dfrac{(1 - c'^2) dc}{c'\,dc'} \cdot \dfrac{dy}{dc} \cdot \dfrac{1}{\Delta(y, c')} + B \dfrac{x(1 - x^2)}{\Delta(x, c)} - \dfrac{y(1 - y^2)}{\Delta(y, c')}. \end{cases}$$

Or on pourra parvenir plus directement à l'expression de $\varpi_0(y, c')$, savoir en décomposant la fonction rationnelle y^2 en fractions partielles.

Soit $x - a$ un facteur du dénominateur de y, on aura

$$(216) \qquad y^2 = \frac{A}{(x - a)^2} + \frac{B}{x - a} + S,$$

où A et B sont des constantes. En faisant $y = \frac{1}{\varphi x}$, on trouve d'après les règles connues

$$(217) \qquad A = \frac{1}{(\varphi' a)^2}; \quad B = -\frac{\varphi'' a}{(\varphi' a)^3}.$$

Or si l'on met dans l'équation

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

$\frac{1}{\varphi x}$ au lieu de y, il viendra

$$(218) \quad (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)(\varphi' x)^2 = \varepsilon^2 [(\varphi x)^2 - 1][(\varphi x)^2 - c'^2]$$
$$= \varepsilon^2 (\varphi x)^4 - \varepsilon^2 (1 + c'^2)(\varphi x)^2 + \varepsilon^2 c'^2.$$

En y faisant $x = a$ on a $\varphi x = 0$, donc

$$(1 - a^2)(1 - c^2 a^2)(\varphi' a)^2 = \varepsilon^2 c'^2.$$

De même si l'on différentie l'équation (218) par rapport à x et qu'on fasse ensuite $x = a$, on aura

$$2(1 - a^2)(1 - c^2 a^2) \varphi' a . \varphi'' a - [2(1 + c^2) a - 4 c^2 a^3](\varphi' a)^2 = 0;$$

on a donc

$$(219) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{(\varphi' a)^2} = \dfrac{(1 - a^2)(1 - c^2 a^2)}{\varepsilon^2 c'^2} = A, \\[2ex] -\dfrac{\varphi'' a}{(\varphi' a)^3} = \dfrac{-(1 + c^2) a + 2 c^2 a^3}{\varepsilon^2 c'^2} = B. \end{cases}$$

En vertu de ces valeurs de A et de B il est facile d'avoir l'expression de $\int y^2 \frac{dy}{\Delta(y, c')}$. En effet, en multipliant l'expression de y^2 par $\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}$, il viendra

$$(220)\quad \int \frac{y^2 dy}{\Delta(y,c')} = \frac{1}{\varepsilon c'^2} \int \left\{ \frac{(1-a^2)(1-c^2a^2)}{(x-a)^2} + \frac{2c^2a^3-(1+c^2)a}{x-a} \right\} \frac{dx}{\Delta(x,c)} + \varepsilon \int \frac{S dx}{\Delta(x,c)}.$$

Or si l'on différentie la fonction

$$\frac{\Delta(x,c)}{x-a} = r,$$

on trouvera

$$dr = -\left\{ \frac{(1-a^2)(1-c^2a^2)}{(x-a)^2} + \frac{2c^2a^3-(1+c^2)a}{x-a} + c^2a^2 - c^2x^2 \right\} \frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

donc la première des intégrales du second membre de l'équation (220) est la même chose que

$$\int (c^2x^2 - c^2a^2) \frac{dx}{\Delta(x,c)} - \frac{\Delta(x,c)}{x-a} = \frac{\Delta(x,c)}{a-x} - c^2a^2\varpi(x,c) + c^2\varpi_0(x,c).$$

Donc l'expression de $\int \frac{y^2 dy}{\Delta(y,c')}$ deviendra

$$\int \frac{y^2 dy}{\Delta(y,c')} = \frac{1}{\varepsilon c'^2} \left\{ \frac{\Delta(x,c)}{a-x} - c^2a^2\varpi(x,c) + c^2\varpi_0(x,c) \right\} + \varepsilon \int \frac{S dx}{\Delta(x,c)}.$$

En désignant donc par $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ toutes les racines de l'équation $\frac{1}{y} = 0$, on aura

$$(221)\quad \varepsilon c'^2 \varpi_0(y, c'^2) = \mu c^2 \varpi_0(x,c) - [c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\mu^2) - \varepsilon^2 c'^2 k^2]\varpi(x,c) + \Delta(x,c) \left\{ \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \cdots + \frac{1}{a_\mu - x} \right\},$$

où k est une quantité constante, savoir la valeur de y pour $x = \frac{1}{0}$.

Cette formule répond à une fonction rationnelle y du degré μ, savoir

$$y = k \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\mu)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_\mu)};$$

mais il y a deux cas qu'il faut considérer séparément: il pourra arriver que l'une des quantités a_μ et α_μ sera infinie. Soit d'abord $a_\mu = \frac{1}{0}$. Alors on aura $k = 0$. Dans ce cas la fonction y sera une fonction impaire de x, dont le numérateur sera d'un degré moindre que celui du dénominateur. Si μ est pair, on aura en mettant 2μ pour μ,

$$y = \varepsilon \frac{x(1-\beta_1^2x^2)(1-\beta_2^2x^2)\ldots(1-\beta_{\mu-1}^2x^2)}{(1-\delta_1^2x^2)(1-\delta_2^2x^2)\ldots(1-\delta_\mu^2x^2)},$$

et la formule (221) deviendra

$$(222)\quad \varepsilon c'^2 \varpi_0(y,c') = 2\mu c^2 \varpi_0(x,c) - 2c^2 \left\{ \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta_2^2} + \cdots + \frac{1}{\delta_\mu^2} \right\} \varpi(x,c) + 2x.\Delta(x,c) \left\{ \frac{\delta_1^2}{1-\delta_1^2x^2} + \frac{\delta_2^2}{1-\delta_2^2x^2} + \cdots + \frac{\delta_\mu^2}{1-\delta_\mu^2x^2} \right\}.$$

Si μ est un nombre impair, on aura en mettant $2\mu+1$ pour μ,

$$(223)\quad y = \frac{(1-c^2a_1^2x^2)(1-c^2a_2^2x^2)\ldots(1-c^2a_\mu^2x^2)}{x(a_1^2-x^2)(a_2^2-x^2)\ldots(a_\mu^2-x^2)} \cdot \frac{a_1^2 . a_2^2 \ldots a_\mu^2}{\varepsilon c'},$$

et la formule (221) deviendra

$$(224)\quad \varepsilon c'^2 \varpi_0(y,c') = (2\mu+1)c^2\varpi_0(x,c) - 2c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\mu^2)\varpi(x,c) + 2x\Delta(x,c) \left\{ -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{a_1^2-x^2} + \cdots + \frac{1}{a_\mu^2-x^2} \right\}.$$

Supposons maintenant $\alpha_\mu = 0$. On aura alors $k = \frac{1}{0}$. La fonction y sera impaire, mais le dénominateur sera d'un degré plus petit que celui du numérateur. Pour avoir les formules qui répondent à ce cas, il suffit de mettre dans les deux équations (222, 224), $\frac{1}{cz}$ au lieu de x. Cela donne

$$\Delta(x,c) = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{c^2z^2}\right)\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{\Delta(z,c)}{cz^2},$$

$$\varpi(x,c) = +\int \frac{dz}{\Delta(z,c)} = +\varpi(z,c),$$

$$c^2\varpi_0(x,c) = +\int \frac{dz}{z^2\Delta(z,c)} = +c^2\varpi_0(z,c) - \frac{\Delta(z,c)}{z}.$$

Donc en substituant dans la formule (224) et mettant $z = x$,

$$(225)\quad \varepsilon c'^2 \varpi_0(y,c') = (2\mu+1)c^2\varpi_0(x,c) - 2c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\mu^2)\varpi(x,c) + 2x\Delta(x,c) \left\{ \frac{c^2a_1^2}{1-c^2a_1^2x^2} + \frac{c^2a_2^2}{1-c^2a_2^2x^2} + \cdots + \frac{c^2a_\mu^2}{1-c^2a_\mu^2x^2} \right\}.$$

L'expression de y sera, en vertu de la formule (223),

$$y = \frac{\varepsilon}{a_1^2 . a_2^2 \ldots a_\mu^2} \cdot \frac{x(a_1^2-x^2)(a_2^2-x^2)\ldots(a_\mu^2-x^2)}{(1-c^2a_1^2x^2)(1-c^2a_2^2x^2)\ldots(1-c^2a_\mu^2x^2)}.$$

Pour donner un exemple soit

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad y = (1+c)\frac{x}{1+cx^2}, \quad \varepsilon = 1+c;$$

alors on a $\mu=2$, et la formule (222) donnera, pour $\mu=1$,

$$\varpi_0(y,c')=\frac{c(1+c)}{2}\varpi_0(x,c)+\frac{1+c}{2}\varpi(x,c)-\frac{1+c}{2}\cdot\frac{x\varDelta(x,c)}{1+cx^2}.$$

§ 3.

Transformation des fonctions de la troisième espèce.

Soit maintenant

$$\varphi y=\int\frac{dy}{\left(1-\frac{y^2}{a'^2}\right)\varDelta(y,c')}=\Pi(y,c',a').$$

En mettant pour $\frac{dy}{\varDelta(y,c')}$ sa valeur $\varepsilon\frac{dx}{\varDelta(x,c)}$, on aura

$$\Pi(y,c',a')=\varepsilon\int\frac{dx}{\left(1-\frac{y^2}{a'^2}\right)\varDelta(x,c)}. \tag{226}$$

Pour réduire le second membre aux fonctions elliptiques il faut décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{1-\frac{y^2}{a'^2}}$ en fractions partielles. Soit donc d'abord

$$\frac{1}{a'-y}=k'+\frac{A_1}{a_1-x}+\frac{A_2}{a_2-x}+\cdots+\frac{A_\mu}{a_\mu-x}=k'+\Sigma\frac{A}{a-x},$$

où il est clair que k' est une constante. Pour déterminer $A_1, A_2, \ldots$ on aura d'abord

$$A=\frac{(a-x)}{a'-y}\quad\text{pour}\quad x=a,$$

donc

$$A=\frac{dx}{dy};$$

or on a

$$\varepsilon\varDelta(y,c')=\frac{dy}{dx}\varDelta(x,c),$$

donc en faisant $x=a$ et remarquant que la valeur de y deviendra alors a', on aura

$$\varepsilon\varDelta(a',c')=\frac{dy}{dx}\varDelta(a,c),$$

et par conséquent

$$A=\frac{\varDelta(a,c)}{\varepsilon\varDelta(a',c')}.$$

En substituant on aura par conséquent

$$\frac{1}{a'-y}=k'+\frac{1}{\varepsilon\varDelta(a',c')}\left\{\frac{\varDelta(a_1,c)}{a_1-x}+\frac{\varDelta(a_2,c)}{a_2-x}+\cdots+\frac{\varDelta(a_\mu,c)}{a_\mu-x}\right\}. \tag{227}$$

En désignant de même les racines de l'équation $a'+y=0$ par $b_1, b_2, \ldots b_\mu$, on aura

$$\frac{1}{a'+y}=k''+\frac{1}{\varepsilon\varDelta(a',c')}\left\{\frac{\varDelta(b_1,c)}{b_1-x}+\frac{\varDelta(b_2,c)}{b_2-x}+\cdots+\frac{\varDelta(b_\mu,c)}{b_\mu-x}\right\}.$$

En ajoutant ces valeurs de $\frac{1}{a'-y}$ et $\frac{1}{a'+y}$ on aura celle de $\frac{2a'}{a'^2-y^2}$. Mais il suffit de considérer la formule (227). En la multipliant par $\frac{dy}{\varDelta(y,c')}$ et intégrant, il viendra

$$\varDelta(a',c')\int\frac{dy}{(a'-y)\varDelta(y,c)}=k_1\varpi(x,c)+\Sigma\varDelta(a,c)\int\frac{dx}{(a-x)\varDelta(x,c)}. \tag{228}$$

Cela posé, ayant $\frac{1}{a-x}=\frac{a+x}{a^2-x^2}$, on en tire

$$\int\frac{dx}{(a-x)\varDelta(x,c)}=\frac{1}{a}\Pi(x,c,a)+\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)\varDelta(x,c)}.$$

De même on aura

$$\int\frac{dy}{(a'-y)\varDelta(y,c')}=\frac{1}{a'}\Pi(y,c',a')+\int\frac{y\,dy}{(a'^2-y^2)\varDelta(y,c')}.$$

Donc la formule (228) donnera en substituant

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\varDelta(a',c')}{a'}\Pi(y,a',c')+\varDelta(a',c')\int\frac{y\,dy}{(a'^2-y^2)\varDelta(y,c')}\\ &\qquad=k_1\varpi(x,c)+\Sigma\frac{\varDelta(a,c)}{a}\Pi(x,a,c)+\Sigma\varDelta(a,c)\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)\varDelta(x,c)}.\end{aligned}\right. \tag{229}$$

Les intégrales qui entrent encore dans cette formule seront, comme on le voit, exprimables par des logarithmes.

On aura par conséquent

$$\frac{\varDelta(a',c')}{a'}\Pi(y,c',a')=k_1\varpi(x,c)+\Sigma\frac{\varDelta(a,c)}{a}\Pi(x,c,a)+v'. \tag{230}$$

Il est à remarquer que cette formule ne contient pas de fonctions de la seconde espèce.

La fonction de la troisième espèce $\Pi(y,c',a')$ est donc ainsi réduite à la fonction de la première espèce $\varpi(x,c)$ et à μ fonctions de la troisième espèce.

Or je dis qu'on pourra toujours exprimer les μ fonctions du second membre par une seule. C'est ce qui est facile à prouver à l'aide des formules établies dans les chapitres précédens. D'abord si l'on détermine une quantité α de sorte que l'équation

$$(fx)^2-(\varphi x)^2[\Delta(x,c)]^2=(x^2-a_1^2)(x^2-a_2^2)\ldots(x^2-a_\mu^2)(x^2-\alpha^2)$$

soit satisfaite, fx et φx étant des fonctions entières de x, dont l'une est paire et l'autre impaire, on aura sur le champ, en vertu de la formule (104),

$$\Sigma\frac{\Delta(a,c)}{a}\Pi(x,c,a)=k_2\varpi(x,c)+\frac{\Delta(\alpha,c)}{\alpha}\Pi(x,c,\alpha)-\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{fx+\varphi x\,\Delta(x,c)}{fx-\varphi x\,\Delta(x,c)}\right\}.$$

Donc en substituant:

$$(231)\quad \frac{\Delta(a'c')}{a'}\Pi(y,c',a')=(k_1+k_2)\varpi(x,c)+\frac{\Delta(\alpha,c)}{\alpha}\Pi(x,c,\alpha)$$
$$+v'-\tfrac{1}{2}\log\left\{\frac{fx+\varphi x\,\Delta(x,c)}{fx-\varphi x\,\Delta(x,c)}\right\}.$$

Quant aux coefficiens des puissances de x dans les deux fonctions fx et φx, ils sont déterminés par les μ équations suivantes:

$$fa_1+\varphi a_1.\Delta(a_1,c)=0,$$
$$fa_2+\varphi a_2.\Delta(a_2,c)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$fa_\mu+\varphi a_\mu.\Delta(a_\mu,c)=0,$$

auxquelles il faut ajouter celle-ci:

$$f\alpha+\varphi\alpha.\Delta(\alpha,c)=0,$$

pour déterminer le signe du radical $\Delta(\alpha,c)$.

On peut encore réduire les fonctions du second membre de l'équation (230) d'une autre manière: on pourra les exprimer par l'une quelconque d'entre elles, comme nous allons le voir.

Soit a l'une quelconque des quantités $a_1, a_2, \ldots a_\mu$. Alors comme elles seront les racines de l'équation

$$a'=y=\psi(x),$$

elles auront, en vertu de ce qui a été démontré dans le troisième paragraphe du chapitre précédent, toutes la forme

$$\frac{a\,\Delta(e,c)+e\,\Delta(a,c)}{1-c^2e^2a^2},$$

où e est une constante indépendante de a. Soit donc

$$(232)\qquad a_m=\frac{a\,\Delta(e_m,c)+e_m\,\Delta(a,c)}{1-c^2e_m^2a^2},$$

on aura en vertu de la formule (112)

$$\frac{\Delta(a_m,c)}{a_m}.\Pi(x,c,a_m)=\frac{\Delta(a,c)}{a}\Pi(x,c,a)$$
$$+\beta_m\varpi(x,c)+\frac{\Delta(e_m,c)}{e_m}\Pi(x,c,e_m)+\log S_m.$$

La formule (230) deviendra donc en substituant

$$(233)\qquad \frac{\Delta(a',c')}{a'}\Pi(y,c',a')=(k_1+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{\mu-1})\varpi(x,c)$$
$$+\mu\frac{\Delta(a,c)}{a}\Pi(x,c,a)+\Sigma\frac{\Delta(e_m,c)}{e_m}\Pi(x,c,e_m)$$
$$+v'+\log S_1+\log S_2+\cdots+\log S_{\mu-1}.$$

Je dis maintenant que $\Sigma\frac{\Delta(e_m,c)}{e_m}\Pi(x,c,e_m)$ se réduit à zéro. En effet, si l'expression de a_m est racine de l'équation $a'-y=0$, elle le sera encore en mettant $-e_m$ pour e_m. Si donc μ est un nombre impair, les termes qui composent l'expression $\Sigma\frac{\Delta(e_m,c)}{e_m}\Pi(x,c,e_m)$ sont deux-à-deux égales et de signes contraires. Si μ est un nombre pair, l'expression dont il s'agit se réduira à un seul terme $\frac{\Delta(e,c)}{e}\Pi(x,c,e)$, où e est zéro ou l'infini. Si e est nul, ce terme le sera de même. Si $e=\frac{1}{0}$, la valeur correspondante de a_m est $\pm\frac{1}{ca}$, donc en vertu de la formule (115) . . . .

XXIX.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, Berlin 1827.

Théorème. Si la somme de la série infinie

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

est égale à zéro pour toutes les valeurs de x entre deux limites réelles α et β, on aura nécessairement

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \ldots a_m = 0 \ldots,$$

de sorte que la somme de la série s'évanouira pour une valeur quelconque de x.

Problème. En supposant la série

$$fx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

convergente pour toute valeur positive *moindre* que la quantité positive α, on propose de trouver la limite vers laquelle converge la valeur de la fonction fx, en faisant converger x vers la limite α.

Théorème. Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4}},$$

où α, β, γ, δ, ε, a sont des quantités *réelles*, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement que la quantité a soit un nombre *rationnel*.

Problème. Trouver une intégrale *algébrique* des deux équations séparées:

$$\frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 3x^2 + x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{3 - 3y^2 + y^4}},$$

$$\frac{dx\sqrt{3}}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 + x^4}}.$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

Problème. Le nombre $\alpha^{\mu-1} - 1$ peut il être divisible par μ^2, μ étant un nombre premier, et α un entier moindre que μ et plus grand que l'unité?

ERRATA.

Page 50. Dans la première et l'avant-dernière formule les signes des seconds membres doivent être changés.

Page 154, dernière ligne, *au lieu de* $\frac{1}{a-x}$, *lisez* $\frac{1}{a-x}$.

Page 163, dernière ligne, *au lieu de* $h\,y^{(m)}$, *lisez* $h\,y^{(a')}$.

Page 185, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $3[f(11)+11\,.\,\frac{1}{6}]$, *lisez* $3[f(11)+11\,.\,\frac{1}{3}]$.

Page 192, ligne 13, en descendant, *au lieu de* $\varepsilon^{\frac{\pi\,\mu_m-a_m}{n}}$, *lisez* $\varepsilon\,\frac{\pi\,\mu_m-a_m}{n}$.

Page 237, ligne 12, en descendant, *au lieu de* $\delta' = -\alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \cdots$ *lisez* $\delta' = -(\alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \cdots)$

Page 239, ligne 6 et 7, en remontant, *au lieu de* lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est compris entre 0 et -1, *lisez:* lorsque k est compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et -1.

Page 265, ligne 13, en remontant, *au lieu de* Fa, *lisez* $F\alpha$.

Page 277, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\varphi x = \frac{i}{e\,c}\,\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)}$,

lisez $\varphi x = -\frac{i}{e\,c}\,\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)}$.

Page 313, lignes 3 et 4, en remontant, *au lieu de* v_1 en $\theta^{-m}v_1$, *lisez* $\sqrt[n]{v_1}$ en $\theta^{-m}\sqrt[n]{v_1}$.

Page 343, ligne 10, en descendant, le numérateur du dernier facteur doit être $1-\frac{\alpha^2}{[m\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}$.

Page 357, ligne 8, en descendant, *au lieu de* $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$, *lisez* $\alpha^2+\beta^2-1$.

Page 419, ligne 3 et 4, en descendant. Effacez les exposans 2.

Page 458, ligne 9, en remontant, *au lieu de* c', *lisez partout* c''.

Page 582, ligne 12, en remontant, *au lieu de* $y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$,

lisez $(-1)^{\mu+1}y(1-c^2e^2z^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2z^2)$.

Page 582, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $\frac{(-1)^{\mu+1}c^{2\mu}e^2e_2^2\ldots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}}\,.\,c'^{-\frac{1}{2}}}\,y$,

lisez $\frac{c^{2\mu}e^2e_2^2\ldots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}}\,c'^{-\frac{1}{2}}}\,y$.

Page 582, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2e_2^2\ldots e_\mu^2}$, *lisez* $\frac{1}{e\;e_2^2\ldots e_\mu^2}$.

Page 586, ligne 5, en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{\sqrt{\pm c}}$, *lisez* $\frac{1}{\sqrt{\mp c}}$.

Page 586, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\frac{2\,\Delta e_m}{\sqrt{(\mp c)(1\pm c\,e_m^2)}}$, *lisez* $\frac{2\,\Delta e_m}{\sqrt{\mp c}\,(1\pm c\,e_m^2)}$.

Page 589, ligne 3, en descendant, *au lieu de* $\frac{1\pm\sqrt{1-c^2}}{1\mp\sqrt{1-c^2}}$, $\frac{c\pm\sqrt{c^2-1}}{c\mp\sqrt{c^2-1}}$,

lisez $\left(\frac{1\pm\sqrt{1-c^2}}{1\mp\sqrt{1-c^2}}\right)^2$, $\left(\frac{c\pm\sqrt{c^2-1}}{c\mp\sqrt{c^2-1}}\right)^2$.

Page 613, ligne 9, en descendant, *au lieu de* $a_\mu=0$, *lisez* $a_\mu=\frac{1}{6}$.