XIII.

RECHERCHE DE LA QUANTITÉ QUI SATISFAIT A LA FOIS A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONNÉES.

Annales de Mathématiques pures et appliquées rédigées par M. *J. D. Gergonne*, t. XVII, Paris 1827.

Lorsqu'une quantité satisfait, à la fois, à deux équations algébriques données, ces deux équations ont un facteur commun du premier degré. En supposant quelles n'ont pas d'autre facteur commun que celui-là, on peut toujours, comme l'on sait, exprimer rationnellement l'inconnue en fonction des coefficiens des deux équations. On y parvient d'ordinaire à l'aide de l'élimination; mais je vais faire voir, dans ce qui va suivre, que, dans tous les cas, on peut calculer immédiatement la valeur de l'inconnue, ou, plus généralement encore, la valeur d'une fonction rationnelle quelconque de cette inconnue.

Soient

(1) $$\varphi y = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{m-1} y^{m-1} + y^m = 0,$$

(2) $$\psi y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0,$$

les deux équations proposées, la première du $m^{\text{ième}}$ et l'autre du $n^{\text{ième}}$ degré.

Désignons les n racines de (2) par $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$; en les substituant tour à tour dans (1), on aura les n fonctions

(3) $$\varphi y,\ \varphi y_1,\ \varphi y_2,\ \ldots \varphi y_{n-1}.$$

Soient

(4) $$\left\{\begin{aligned} R &= \varphi y_1 . \varphi y_2 . \varphi y_3 \ldots . \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ R_1 &= \varphi y . \varphi y_2 . \varphi y_3 \ldots . \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ R_2 &= \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_3 \ldots . \varphi y_{n-2} . \varphi y_{n-1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2} &= \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_2 \ldots . \varphi y_{n-3} . \varphi y_{n-1}, \\ R_{n-1} &= \varphi y . \varphi y_1 . \varphi y_2 \ldots . \varphi y_{n-3} . \varphi y_{n-2}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, soit fy la fonction rationnelle de y dont on veut déterminer la valeur, et désignons par θy une autre fonction rationnelle quelconque de y. On aura l'équation identique

(5) $$fy . \theta y . R = fy . \theta y . R.$$

Maintenant, ayant $\varphi y = 0$, on aura

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ R_3 = 0,\ \ldots .\ R_{n-1} = 0,$$

et, par suite,

$$tR + t_1 R_1 + t_2 R_2 + t_3 R_3 + \cdots + t_{n-2} R_{n-2} + t_{n-1} R_{n-1} = tR,$$

où $t, t_1, t_2, \ldots t_{n-2}, t_{n-1}$ sont des quantités quelconques.

En faisant donc d'abord

$$t = \theta y,\ t_1 = \theta y_1,\ t_2 = \theta y_2,\ \ldots t_{n-1} = \theta y_{n-1},$$

et ensuite

$$t = fy . \theta y,\ t_1 = fy_1 . \theta y_1,\ t_2 = fy_2 . \theta y_2,\ \ldots t_{n-1} = fy_{n-1} . \theta y_{n-1},$$

on obtiendra les deux équations

(6) $$\left\{\begin{aligned} & \theta y . R = \theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1}, \\ & fy . \theta y . R = fy . \theta y . R + fy_1 . \theta y_1 . R_1 + fy_2 . \theta y_2 . R_2 + \cdots \\ & \qquad + fy_{n-1} . \theta y_{n-1} . R_{n-1}; \end{aligned}\right.$$

par là, l'équation (5) deviendra

$$\begin{aligned} & fy(\theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1}) \\ & \quad = \theta y . fy . R + \theta y_1 . fy_1 . R_1 + \theta y_2 . fy_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . fy_{n-1} . R_{n-1}; \end{aligned}$$

équation qui, en posant, pour abréger,

(7) $$\left\{\begin{aligned} & \theta y . R + \theta y_1 . R_1 + \theta y_2 . R_2 + \cdots + \theta y_{n-1} . R_{n-1} = \Sigma\, \theta y . R, \\ & fy . \theta y . R + fy_1 . \theta y_1 . R_1 + fy_2 . \theta y_2 . R_2 + \cdots \\ & \qquad + fy_{n-1} . \theta y_{n-1} . R_{n-1} = \Sigma\, fy . \theta y . R, \end{aligned}\right.$$

deviendra

$$fy\,\Sigma\,\theta y\,.\,R = \Sigma\, fy\,.\,\theta y\,.\,R;$$

et de là

(8) $$fy = \frac{\Sigma\, fy\,.\,\theta y\,.\,R}{\Sigma\,\theta y\,.\,R}.$$

Maintenant il est clair que le numérateur et le dénominateur de cette valeur de fy sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines y, $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$; on peut donc en vertu des formules connues, les exprimer rationnellement par les coefficiens des équations (1) et (2). Il en est donc de même de la fonction fy.

La fonction rationnelle θy étant arbitraire, on peut en disposer pour simplifier l'expression de fy. Pour cela, soit

$$fy = \frac{Fy}{\chi y},$$

où Fy et χy sont deux fonctions entières; on aura, en substituant,

$$\frac{Fy}{\chi y} = \frac{\Sigma \frac{Fy\,.\,\theta y\,.\,R}{\chi(y)}}{\Sigma\,\theta y\,.\,R};$$

si donc on suppose $\theta y = \chi y$, on aura

(9) $$\frac{Fy}{\chi y} = \frac{\Sigma\, Fy\,.\,R}{\Sigma\,\chi y\,.\,R};$$

et alors le numérateur et le dénominateur de cette fonction seront des fonctions entières des coefficiens des équations proposées.

Si $\chi y = 1$, on aura, pour une fonction entière quelconque Fy,

(10) $$Fy = \frac{\Sigma\, Fy\,.\,R}{\Sigma R};$$

ou bien

$$Fy = \frac{Fy\,.\,R + Fy_1\,.\,R_1 + Fy_2\,.\,R_2 + \cdots + Fy_{n-1}\,.\,R_{n-1}}{R + R_1 + R_2 + \cdots + R_{n-1}}.$$

Mais on peut encore simplifier beaucoup l'expression de Fy de la manière suivante:

Désignons par $\psi' y$ la dérivée de ψy, par rapport à y, et faisons

$$\theta y = \frac{1}{\psi' y},$$

l'équation (8) donnera

(11) $$Fy = \frac{\Sigma \frac{Fy\, R}{\psi' y}}{\Sigma \frac{R}{\psi' y}}.$$

Cela posé, on peut d'abord exprimer R par une fonction entière de y. En effet, si l'on fait

$$(z - y_1)(z - y_2) \cdots (z - y_{n-1}) = z^{n-1} + v_{n-2} z^{n-2} + v_{n-3} z^{n-3} + \cdots + v_0 = 0,$$

on peut transformer R, qui est une fonction entière et symétrique de $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, en fonction entière des coefficiens $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \cdots + v_{n-2} z^{n-2} + z^{n-1})(z - y) \\ = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{n-1} z^{n-1} + z^n = z^n + (v_{n-2} - y) z^{n-1} \\ + (v_{n-3} - y\, v_{n-2}) z^{n-2} + (v_{n-4} - y\, v_{n-3}) z^{n-3} + \cdots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= q_{n-1} + y, \\ v_{n-3} &= q_{n-2} + y\,.\,v_{n-2}, \\ v_{n-4} &= q_{n-3} + y\,.\,v_{n-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où il suit que $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$ sont des fonctions entières de y; la fonction R l'est donc aussi; elle est donc de la forme

(12) $$R = \varrho_0 + \varrho_1 y + \varrho_2 y^2 + \varrho_3 y^3 + \cdots + \varrho_\mu y^\mu,$$

où il est évident que $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$ seront des fonctions *entières* des coefficiens des équations (1) et (2).

La fonction R sera d'un degré supérieur à $n-1$; mais il est clair qu'on peut, en vertu de l'équation (2), en éliminer toutes les puissances de y supérieures à la $(n-1)^{\text{ème}}$, et de cette manière mettre R sous la forme

$$R = \varrho_0 + \varrho_1 y + \varrho_2 y^2 + \varrho_3 y^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y^{n-1},$$

où $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ sont toujours des fonctions entières de $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

En multipliant R par la fonction entière Fy on aura la fonction $Fy\,.\,R$, qui est de même une fonction entière de y. On peut donc la mettre sous la même forme que R, c'est-à-dire qu'on peut poser

(13) $$Fy\,.\,R = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + t_3 y^3 + \cdots + t_{n-1} y^{n-1},$$

$t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ étant encore des fonctions entières de $p_0, p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$, $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$.

Dès que R sera déterminé par l'équation (12), il est clair qu'on aura

$$R_1 = \varrho_0 + \varrho_1 y_1 + \varrho_2 y_1^2 + \varrho_3 y_1^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_1^{n-1},$$
$$R_2 = \varrho_0 + \varrho_1 y_2 + \varrho_2 y_2^2 + \varrho_3 y_2^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_2^{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n-1} = \varrho_0 + \varrho_1 y_{n-1} + \varrho_2 y_{n-1}^2 + \varrho_3 y_{n-1}^3 + \cdots + \varrho_{n-1} y_{n-1}^{n-1}.$$

On aura de même

$$Fy_1 . R_1 = t_0 + t_1 y_1 + t_2 y_1^2 + t_3 y_1^3 + \cdots + t_{n-1} y_1^{n-1},$$
$$Fy_2 . R_2 = t_0 + t_1 y_2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_2^3 + \cdots + t_{n-1} y_2^{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Fy_{n-1} . R_{n-1} = t_0 + t_1 y_{n-1} + t_2 y_{n-1}^2 + t_3 y_{n-1}^3 + \cdots + t_{n-1} y_{n-1}^{n-1}.$$

Maintenant je dis qu'on aura

$$Fy = \frac{t_{n-1}}{\varrho_{n-1}}.$$

En effet, on a d'abord

$$\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \frac{R}{\psi' y} + \frac{R_1}{\psi' y_1} + \frac{R_2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{\psi' y_{n-1}};$$

donc, en substituant les valeurs de $R, R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$,

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \; & \varrho_0 \left(\frac{1}{\psi' y} + \frac{1}{\psi' y_1} + \frac{1}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{1}{\psi' y_{n-1}} \right) \\ & + \varrho_1 \left(\frac{y}{\psi' y} + \frac{y_1}{\psi' y_1} + \frac{y_2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}}{\psi' y_{n-1}} \right) \\ & + \varrho_2 \left(\frac{y^2}{\psi' y} + \frac{y_1^2}{\psi' y_1} + \frac{y_2^2}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}^2}{\psi' y_{n-1}} \right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \varrho_{n-1} \left(\frac{y^{n-1}}{\psi' y} + \frac{y_1^{n-1}}{\psi' y_1} + \frac{y_2^{n-1}}{\psi' y_2} + \cdots + \frac{y_{n-1}^{n-1}}{\psi' y_{n-1}} \right).\end{aligned}$$

Or, $y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, étant les racines de l'équation (2) on a

$$\psi' y = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \cdots (y - y_{n-1}),$$
$$\psi' y_1 = (y_1 - y)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \cdots (y_1 - y_{n-1}),$$
$$\psi' y_2 = (y_2 - y)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \cdots (y_2 - y_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi' y_{n-1} = (y_{n-1} - y)(y_{n-1} - y_1)(y_{n-1} - y_2) \cdots (y_{n-1} - y_{n-2});$$

donc, d'après une formule connue, les coefficiens de $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$, dans l'expression de $\Sigma \frac{R}{\psi' y}$, s'évanouiront tous, excepté celui de ϱ_{n-1}, qui se réduira à l'unité; on aura donc

$$\Sigma \frac{R}{\psi' y} = \varrho_{n-1}.$$

On prouvera exactement de la même manière que

$$\Sigma \frac{R . Fy}{\psi' y} = t_{n-1};$$

donc, en vertu de l'équation (11),

$$Fy = \frac{t_{n-1}}{\varrho_{n-1}},$$

ou bien, en écrivant t et ϱ, au lieu de t_{n-1} et ϱ_{n-1},

(14) $$Fy = \frac{t}{\varrho}.$$

Soit maintenant $F'y$ une autre fonction entière de y; en supposant

(15) $$F'y . R = t' y^{n-1} + t'_{n-2} y^{n-2} + t'_{n-3} y^{n-3} + \cdots + t_1' y + t_0',$$

$t', t'_{n-2}, t'_{n-3}, \ldots t'_0$ étant des fonctions entières des quantités $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$, on aura

(16) $$F'y = \frac{t'}{\varrho};$$

d'où, en comparant (14) à (16),

(17) $$\frac{Fy}{F'y} = \frac{t}{t'}.$$

Ainsi on aura la valeur d'une fonction rationnelle quelconque $\frac{Fy}{F'y}$ par le développement des deux fonctions

$$Fy . R \text{ et } F'y . R.$$

La formule (17) peut facilement être traduite en théorème.

Le cas le plus simple est celui où l'on cherche uniquement la valeur de y. Alors on a

$$y = \frac{t}{\varrho}$$

où

$$R = \varrho y^{n-1} + \varrho' y^{n-2} + \cdots \text{ et } Ry = t y^{n-1} + t' y^{n-2} + \cdots$$

On peut exprimer t en ϱ et ϱ'. En effet en substituant la valeur de R, il viendra

$$Ry = \varrho y^n + \varrho' y^{n-1} + \cdots;$$

or, en vertu de l'équation (2), on a

$$y^n = -q_{n-1} y^{n-1} - q_{n-2} y^{n-2} - \cdots;$$

donc, en substituant.

$$Ry = (\varrho' - \varrho q_{n-1}) y^{n-1} + \cdots.$$

Dans le développement de Ry, le coefficient de y^{n-1} est donc

$$\varrho' - \varrho q_{n-1} = t;$$

donc

$$y = \frac{\varrho' - \varrho q_{n-1}}{\varrho},$$

ou bien

(18) $$y = -q_{n-1} + \frac{\varrho'}{\varrho}.$$

De cette manière, on n'a besoin de connaître que les coefficiens de y^{n-1} et y^{n-2} dans le développement de

$$R = \varrho y^{n-1} + \varrho' y^{n-2} + \cdots = \varphi y_1 \cdot \varphi y_2 \cdot \varphi y_3 \cdots \varphi y_{n-1}.$$

Paris, le 2 novembre 1826

XIV.

RECHERCHES SUR LA SÉRIE $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

1.

Si l'on fait subir au raisonnement dont on se sert en général quand il s'agit des séries infinies, un examen plus exact, on trouvera qu'il est, à tout prendre, peu satisfaisant, et que par conséquent le nombre des théorèmes, concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est très limité. On applique ordinairement les opérations de l'analyse aux séries infinies de la même manière que si les séries étaient finies, ce qui ne me semble pas permis sans démonstration particulière. Si par exemple on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)(v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots) = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)$$
$$+ (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0) + \cdots$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0 + u_1 + \cdots$ et $v_0 + v_1 + \cdots$ sont finies. Mais si elles sont infinies, il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme; ensuite la série du second membre doit de même converger. C'est seulement avec cette restriction que l'expression ci-dessus est juste; mais, si je ne me trompe, jusqu'à présent on n'y a pas eu égard. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce mémoire. Il y a encore plusieurs opérations semblables à justifier p. ex.

le procédé ordinaire pour diviser une quantité par une série infinie, celui de l'élévation d'une série infinie à une puissance, celui de la détermination de son logarithme, de son sinus, de son cosinus, etc.

Un autre procédé qu'on trouve fréquemment dans l'analyse, et qui assez souvent conduit à des contradictions, c'est qu'on se sert des séries divergentes pour l'évaluation des valeurs numériques des séries. Une série divergente ne peut jamais être égale à une quantité déterminée; c'est seulement une expression jouissant de certaines propriétés qui se rapportent aux opérations auxquelles la série est soumise.

Les séries divergentes peuvent quelquefois servir avec succès de symboles pour exprimer telle ou telle proposition d'une manière abrégée; mais on ne saurait jamais les mettre à la place de quantités déterminées. Par un tel procédé on peut démontrer tout ce qu'on veut, l'impossible aussi bien que le possible.

Une des séries les plus remarquables dans l'analyse algébrique est celle-ci:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}x^n+\cdots$$

Lorsque m est un nombre entier positif, on sait que la somme de cette série, qui dans ce cas est finie, peut s'exprimer par $(1+x)^m$. Lorsque m n'est pas un nombre entier, la série ira à l'infini, et elle sera convergente ou divergente, selon les différentes valeurs qu'on attribuera à m et à x. Dans ce cas on pose de même l'équation

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots,$$

mais alors l'égalité exprime seulement que les deux expressions

$$(1+x)^m \quad \text{et} \quad 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

ont certaines propriétés communes desquelles, pour certaines valeurs de m et de x, dépend l'égalité numérique des expressions. On suppose que l'égalité numérique aura toujours lieu, lorsque la série est convergente; mais c'est ce qui jusqu'à présent n'est pas encore démontré. On n'a même pas examiné tous les cas où la série est convergente. Lors même

qu'on suppose l'existence de l'équation ci-dessus, il reste encore à chercher la valeur de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1+mx+\cdots$ n'en a qu'une seule.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la solution complète du problème suivant:

"Trouver la somme de la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

"pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m pour "lesquelles la série est convergente."

2.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'excellent ouvrage de M. *Cauchy* "Cours d'analyse de l'école polytechnique", qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_m+\cdots$$

sera dite convergente, si pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_0+v_1+\cdots+v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera *la somme de la série*. Dans le cas contraire la série sera dite divergente, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_m+v_{m+1}+\cdots+v_{m+n}$ s'approche indéfiniment de zéro, quelle que soit la valeur de n.

Donc, dans une série convergente quelconque, le terme général v_m s'approchera indéfiniment de zéro*).

Théorème I. Si en désignant par $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ une série de quantités positives, le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α plus grande que 1, la série

*) Pour abréger, on représentera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée.

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots,$$

où ε_m est une quantité qui pour des valeurs toujours croissantes de m ne s'approche pas indéfiniment de zéro, sera nécessairement divergente.

Théorème II. Si dans une série de quantités positives $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m+\cdots$ le quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+\cdots,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 etc. sont des quantités qui ne surpassent pas l'unité, sera nécessairement convergente.

En effet, d'après la supposition, on peut toujours prendre m assez grand pour que $\varrho_{m+1}<\alpha\varrho_m$, $\varrho_{m+2}<\alpha\varrho_{m+1}$, $\ldots$ $\varrho_{m+n}<\alpha\varrho_{m+n-1}$. Il suit de là que $\varrho_{m+k}<\alpha^k\varrho_m$ et par suite

$$\varrho_m+\varrho_{m+1}+\cdots+\varrho_{m+n}<\varrho_m(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)<\frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

donc, à plus forte raison

$$\varepsilon_m\varrho_m+\varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}<\frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Or, puisque $\varrho_{m+k}<\alpha^k\varrho_m$ et $\alpha<1$, il est clair que ϱ_m et par conséquent la somme

$$\varepsilon_m\varrho_m+\varepsilon_{m+1}\varrho_{m+1}+\cdots+\varepsilon_{m+n}\varrho_{m+n}$$

aura zéro pour limite. La série ci-dessus est donc convergente.

Théorème III. En désignant par t_0, t_1, t_2, $\ldots$ t_m $\ldots$ une série de quantités quelconques, si $p_m=t_0+t_1+t_2+\cdots+t_m$ est toujours moindre qu'une quantité déterminée δ, on aura

$$r=\varepsilon_0t_0+\varepsilon_1t_1+\varepsilon_2t_2+\cdots+\varepsilon_mt_m<\delta\varepsilon_0,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 $\ldots$ sont des quantités positives décroissantes.

En effet, on a

$$t_0=p_0,\ t_1=p_1-p_0,\ t_2=p_2-p_1 \text{ etc.}$$

donc

$$r=\varepsilon_0p_0+\varepsilon_1(p_1-p_0)+\varepsilon_2(p_2-p_1)+\cdots+\varepsilon_m(p_m-p_{m-1}),$$

ou bien

$$r=p_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)+p_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\cdots+p_{m-1}(\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_m)+p_m\varepsilon_m.$$

Or les différences $\varepsilon_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\ldots$ étant positives, la quantité r sera évidemment moindre que $\delta\varepsilon_0$.

Définition. Une fonction fx sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x=a$ et $x=b$, si pour une valeur quelconque de x comprise entre ces limites, la quantité $f(x-\beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite fx.

Théorème IV. Si la série

$$f\alpha=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots+v_m\alpha^m+\cdots$$

est convergente pour une certaine valeur δ de α, elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre que δ, et, pour des valeurs toujours décroissantes de β, la fonction $f(\alpha-\beta)$ s'approchera indéfiniment de la limite $f\alpha$, en supposant que α soit égal ou inférieur à δ.

Soit

$$v_0+v_1\alpha+\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi\alpha,$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots=\psi\alpha,$$

on aura

$$\psi\alpha=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1}v_{m+1}\delta^{m+1}+\cdots;$$

donc, d'après le théorème III, $\psi\alpha<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m p$, p désignant la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi\alpha=\omega.$$

Or $f\alpha=\varphi\alpha+\psi\alpha$, donc $f\alpha-f(\alpha-\beta)=\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)+\omega$.

De plus, $\varphi\alpha$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi\alpha-\varphi(\alpha-\beta)=\omega;$$

donc on a de même

$$f\alpha-f(\alpha-\beta)=\omega,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème V. Soit

$$v_0+v_1\delta+v_2\delta^2+\cdots$$

une série convergente, dans laquelle v_0, v_1, v_2 $\ldots$ sont des fonctions continues d'une même quantité variable x entre les limites $x=a$ et $x=b$, la série

$$fx=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots,$$

où $\alpha<\delta$, sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Il est déjà démontré que la série fx est convergente. On peut démontrer comme il suit, que la fonction fx est continue.

Soit

$$v_0+v_1\alpha+\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi x,$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots=\psi x,$$

on aura

$$fx=\varphi x+\psi x.$$

Or

$$\psi x=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1}v_{m+1}\delta^{m+1}+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2}v_{m+2}\delta^{m+2}+\cdots;$$

donc en désignant par θx la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc., on aura en vertu du théorème III:

$$\psi x<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m\theta x.$$

Il s'ensuit qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi x=\omega$, et que par conséquent on ait aussi

$$fx=\varphi x+\omega,$$

où ω est moindre que toute quantité assignable.

On a de même

$$f(x-\beta)=\varphi(x-\beta)+\omega,$$

donc

$$fx-f(x-\beta)=\varphi x-\varphi(x-\beta)+\omega.$$

Or d'après la forme de φx il est clair qu'on peut prendre β assez petit pour qu'on ait

$$\varphi x-\varphi(x-\beta)=\omega,$$

d'où l'on tire

$$fx-f(x-\beta)=\omega.$$

Donc la fonction fx est continue*).

*) Dans l'ouvrage cité de M. *Cauchy* on trouve (p. 131) le théorème suivant: "Lorsque les différens termes de la série, $u_0+u_1+u_2+\cdots$ sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x-\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce.

Théorème VI. Lorsqu'on désigne par ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. ϱ_0', ϱ_1', ϱ_2' etc. les valeurs numériques des membres respectifs des deux séries convergentes

$$v_0+v_1+v_2+\cdots=p,$$
$$v_0'+v_1'+v_2'+\cdots=p',$$

si les séries

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots$$

sont de même convergentes, la série $r_0+r_1+r_2+\cdots$, dont le terme général est,

$$r_m=v_0v_m'+v_1v'_{m-1}+v_2v'_{m-2}+\cdots+v_mv_0',$$

sera de même convergente, et aura pour somme

$$(v_0+v_1+v_2+\cdots)(v_0'+v_1'+v_2'+\cdots).$$

Démonstration. En faisant,

$$p_m=v_0+v_1+\cdots+v_m,$$
$$p_m'=v_0'+v_1'+\cdots+v_m',$$

on voit aisément que

$$\text{(a)}\quad r_0+r_1+r_2+\cdots+r_{2m}=p_mp_m'+[p_0v_{2m}'+p_1v'_{2m-1}+\cdots+p_{m-1}v'_{m+1}\,(=t)$$
$$+p_0'v_{2m}+p_1'v_{2m-1}+\cdots+p'_{m-1}v_{m+1}\,(=t')].$$

Soit

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots=u,$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots=u',$$

il est clair que, sans égard au signe, on aura,

$$t<u(\varrho'_{2m}+\varrho'_{2m-1}+\cdots+\varrho'_{m+1})$$
$$t'<u'(\varrho_{2m}+\varrho_{2m-1}+\cdots+\varrho_{m+1}).$$

Or les séries $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots$ et $\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots$ étant convergentes, les quantités t et t', pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approcheront indéfiniment de la limite zéro. Donc en faisant dans l'équation (a) m infini, on aura

$$r_0+r_1+r_2+r_3+\cdots=(v_0+v_1+v_2+\cdots)(v_0'+v_1'+v_2'+\cdots).$$

Soient $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_0', t_1', t_2' \ldots$ deux séries de quantités positives ou négatives, dont les termes généraux s'approchent indéfiniment de zéro, il suit du théorème II que les séries $t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots$ et $t_0'+t_1'\alpha+t_2'\alpha^2+\cdots$, où α désigne une quantité inférieure à l'unité, doivent être convergentes. Il en sera de même en attribuant à chaque terme sa valeur numérique, donc en vertu du théorème précédent:

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned} &(t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots)(t_0'+t_1'\alpha+t_2'\alpha^2+\cdots)\\ &\quad=t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')\alpha+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')\alpha^2+\cdots\\ &\qquad+(t_mt_0'+t_{m-1}t_1'+t_{m-2}t_2'+\cdots+t_0t_m')\alpha^m+\cdots\end{aligned}\right.$$

Maintenant si l'on suppose que les trois séries,

$$t_0+t_1+t_2+\cdots$$
$$t_0'+t_1'+t_2'+\cdots$$
$$t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')+\cdots$$

soient convergentes, on trouvera, en vertu du théorème IV, en faisant dans l'équation (b) α converger vers l'unité:

$$\begin{aligned}&(t_0+t_1+t_2+\cdots)(t_0'+t_1'+t_2'+\cdots)\\ &\quad=t_0t_0'+(t_1t_0'+t_0t_1')+(t_2t_0'+t_1t_1'+t_0t_2')+\cdots\end{aligned}$$

3.

Examinons maintenant la série proposée,

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots.$$

En la désignant par φm, et faisant pour abréger, $1=m_0$, $\frac{m}{1}=m_1$, $\frac{m(m-1)}{1.2}=m_2$, et en général $\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}=m_\mu$, on aura

$$\text{(1)}\qquad \varphi m=m_0+m_1x+m_2x^2+\cdots+m_\mu x^\mu+\cdots$$

Il s'agit d'abord de trouver les valeurs de m et de x pour lesquelles la série est convergente.

Les quantités m et x étant généralement imaginaires, soit*)

$$x=a+bi,\ m=k+k'i,$$

où a, b, k, k' sont des quantités réelles. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\varphi m=p+qi,$$

où p et q sont des séries dont les termes ont des valeurs réelles. On peut trouver ces séries de la manière suivante: Soit

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=\alpha,\ \frac{a}{\alpha}=\cos\varphi,\ \frac{b}{\alpha}=\sin\varphi,$$

l'on aura

$$x=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

où α et φ sont des quantités réelles, α étant en outre positif. Si l'on fait de plus

$$\frac{m-\mu+1}{\mu}=\delta_\mu(\cos\gamma_\mu+i\sin\gamma_\mu)=\frac{k+k'i-\mu+1}{\mu},$$

on trouvera

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}};\ \cos\gamma_\mu=\frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu};\ \sin\gamma_\mu=\frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Si dans l'expression

$$\frac{m-\mu+1}{\mu}=\delta_\mu(\cos\gamma_\mu+i\sin\gamma_\mu),$$

on fait successivement μ égal à 1, 2, 3, ... μ, on obtiendra μ équations qui multipliées terme à terme donneront

$$\begin{aligned}m_\mu&=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{1.2.3\ldots.\mu}\\ &=\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu[\cos(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)+i\sin(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)].\end{aligned}$$

On tire de là, en multipliant par

*) Pour abréger les formules nous écrivons partout dans ce mémoire i au lieu de $\sqrt{-1}$.

Note des éd.

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi + i\sin\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi + i\sin\mu\varphi):$$

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu \delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_\mu[\cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) \\ + i\sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu)],$$

ou bien en faisant pour abréger

$$\delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_\mu = \lambda_\mu,\ \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu = \theta_\mu:$$

$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu \alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\sin\theta_\mu).$$

L'expression (1) se change par là en celle-ci,

$$\varphi m = 1 + \lambda_1\alpha(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \lambda_2\alpha^2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + i\sin\theta_\mu) + \cdots;$$

ou en celle-ci,

$$\varphi m = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ + i(\lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots).$$

On a donc

$$(2)\quad \begin{cases} p = 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \cdots \\ q = \quad\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \cdots \end{cases}$$

Or je dis que ces séries seront *divergentes* ou *convergentes*, selon que α est *supérieur* ou *inférieur* à l'unité.

De l'expression de λ_μ on tire $\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1}\lambda_\mu$, donc

$$\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1} = \alpha\delta_{\mu+1}\lambda_\mu\alpha^\mu,$$

et

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu} = \alpha\delta_{\mu+1};$$

mais on a

$$\delta_{\mu+1} = \left[\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, δ_μ s'approchera de la limite 1, et par suite $\frac{\lambda_{\mu+1}\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu}$ de la limite α. Donc en vertu des théorèmes I et II du paragraphe précédent les séries p et q seront divergentes ou convergentes, suivant que α est supérieur ou inférieur à l'unité. Il en est donc de même de la série proposée φm.

Le cas où $\alpha = 1$, sera traité plus bas.

Comme la série φm est convergente pour toute valeur de α inférieure

à l'unité, la somme en sera une certaine fonction de m et de x. On peut, comme il suit, établir une propriété de cette fonction à l'aide de laquelle on peut la trouver: On a

$$\varphi m = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots,$$
$$\varphi n = n_0 + n_1x + n_2x^2 + \cdots + n_\mu x^\mu + \cdots,$$

où n_μ désigne la valeur de m_μ pour $m = n$. On en conclut d'après le théorème VI:

$$\varphi m.\varphi n = t_0t_0' + (t_0t_1' + t_1t_0') + (t_0t_2' + t_1t_1' + t_2t_0') + \cdots \\ + (t_0t_\mu' + t_1t'_{\mu-1} + t_2t'_{\mu-2} + \cdots + t_\mu t_0') + \cdots,$$

où $t_\mu = m_\mu x^\mu$, $t_\mu' = n_\mu x^\mu$, en supposant que la série du second membre soit convergente. En substituant les valeurs de t_μ et t_μ', on aura

$$\varphi m.\varphi n = m_0n_0 + (m_0n_1 + m_1n_0)x + (m_0n_2 + m_1n_1 + m_2n_0)x^2 + \cdots \\ + (m_0n_\mu + m_1n_{\mu-1} + m_2n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0)x^\mu + \cdots$$

Or, d'après une propriété connue de la fonction m_μ, on a

$$(m+n)_\mu = m_0n_\mu + m_1n_{\mu-1} + m_2n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0,$$

$(m+n)_\mu$ désignant la valeur de m_μ lorsqu'on y substitue $m+n$ pour m. On aura donc par substitution

$$\varphi m.\varphi n = (m+n)_0 + (m+n)_1x + (m+n)_2x^2 + \cdots + (m+n)_\mu x^\mu + \cdots$$

Or d'après ce qui précède, le second membre de cette équation est une série convergente et précisément la même chose que $\varphi(m+n)$; donc

$$(3)\qquad \varphi m.\varphi n = \varphi(m+n).$$

Cette équation exprime une propriété fondamentale de la fonction φm. De cette propriété nous déduirons une expression de la fonction sous forme finie à l'aide des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Comme on l'a vu plus haut, la fonction φm est de la forme $p+qi$, p et q étant toujours réels et fonctions des quantités k, k', α et φ, et $m = k + k'i$, $x = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Soit

$$p + qi = r(\cos s + i\sin s),$$

on trouvera

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} = r,\ \frac{p}{r} = \cos s,\ \frac{q}{r} = \sin s,$$

r étant toujours positif et s une quantité réelle. Soit

$$r=f(k,k'),\ s=\psi(k,k'),$$

on aura

$$p+qi=\varphi(k+k'i)=f(k,k')[\cos\psi(k,k')+i\sin\psi(k,k')]. \tag{3'}$$

On en tire, en mettant successivement l, l' et $k+l$, $k'+l'$ à la place de k et k',

$$\varphi(l+l'i)=f(l,l')[\cos\psi(l,l')+i\sin\psi(l,l')],$$

$$\varphi[k+l+(k'+l')i]$$
$$=f(k+l,k'+l')[\cos\psi(k+l,k'+l')+i\sin\psi(k+l,k'+l')].$$

Or en vertu de l'équation $\varphi m.\varphi n=\varphi(m+n)$, on a

$$\varphi[k+l+(k'+l')i]=\varphi(k+k'i)\varphi(l+l'i),$$

en faisant $m=k+k'i$, $n=l+l'i$. Donc en substituant, on obtient

$$f(k+l,k'+l')[\cos\psi(k+l,k'+l')+i\sin\psi(k+l,k'+l')]$$
$$=f(k,k')f(l,l')[\cos(\psi(k,k')+\psi(l,l'))+i\sin(\psi(k,k')+\psi(l,l'))].$$

Cette équation donne, lorsqu'on sépare les termes réels des termes imaginaires,

$$f(k+l,k'+l')\cos\psi(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l')\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$
$$f(k+l,k'+l')\sin\psi(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l')\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')].$$

En faisant les carrés et ajoutant les équations membre à membre, on aura

$$[f(k+l,k'+l')]^2=[f(k,k')f(l,l')]^2,$$

d'où

$$f(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l'). \tag{4}$$

En vertu de cette équation les précédentes se transforment en celles-ci:

$$\cos\psi(k+l,k'+l')=\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$
$$\sin\psi(k+l,k'+l')=\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')],$$

d'où l'on tire,

$$\psi(k+l,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(l,l'), \tag{5}$$

m étant un nombre entier positif ou négatif.

Maintenant il s'agit de tirer les fonctions $f(k,k')$ et $\psi(k,k')$ des

équations (4) et (5). D'abord je dis qu'elles sont des fonctions continues de k et k' entre des limites quelconques de ces variables. En effet, d'après le théorème V, p et q sont évidemment des fonctions continues. Or on a

$$f(k,k')=(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}},\ \cos\psi(k,k')=\frac{p}{f(k,k')},\ \sin\psi(k,k')=\frac{q}{f(k,k')};$$

donc $f(k,k')$, de même que $\cos\psi(k,k')$ et $\sin\psi(k,k')$, est une fonction continue. On peut donc supposer que $\psi(k,k')$ est aussi une fonction continue. Nous allons d'abord examiner l'équation (5). $\psi(k,k')$ étant une fonction continue, il faut que m ait la même valeur pour toutes les valeurs de k,k', l,l'. En faisant donc successivement $l=0$, $k=0$, on obtient

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$
$$\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(l,l').$$

En éliminant entre ces équations et l'équation (5) les deux quantités $\psi(k,k')$ et $\psi(l,l')$, on trouvera

$$\psi(k,k'+l')+\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')+\psi(k+l,k'+l').$$

Soit pour abréger

$$\begin{cases}\psi(k,k'+l')=\theta k,\\ 2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')=a,\end{cases} \tag{6}$$

on aura

$$\theta k+\theta l=a+\theta(k+l). \tag{7}$$

En faisant ici successivement $l=k, 2k, \ldots \varrho k$, on aura

$$2\theta k=a+\theta(2k),$$
$$\theta k+\theta(2k)=a+\theta(3k),$$
$$\theta k+\theta(3k)=a+\theta(4k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta k+\theta(\varrho-1)k=a+\theta(\varrho k).$$

En ajoutant ces équations, on trouve

$$\varrho\,\theta k=(\varrho-1)a+\theta(\varrho k). \tag{7'}$$

On en tire, en faisant $k=1$,

$$\theta\varrho=\varrho[\theta(1)-a]+a,$$

ou bien en faisant $\theta(1)-a=c$,

(8) $$\theta\varrho=c\varrho+a.$$

Voilà donc la valeur de la fonction θk, lorsque k est un nombre entier. Mais la fonction θk aura la même forme pour toute valeur de k, ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit. Si l'on pose dans l'équation (7') $k=\frac{\mu}{\varrho}$, μ étant un nombre entier, on en tire $\varrho.\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=(\varrho-1)a+\theta\mu$. Or en vertu de l'équation (8)

$$\theta\mu=c\mu+a,$$

donc en substituant et divisant par ϱ, on trouve

$$\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=c\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)+a.$$

L'équation (8) a donc lieu pour toute valeur positive et rationnelle de ϱ.

Soit $l=-k$, l'équation (7) deviendra,

$$\theta k+\theta(-k)=a+\theta(0).$$

Il s'ensuit, en posant $k=0$,

$$\theta(0)=a,$$

et par conséquent

$$\theta(-k)=2a-\theta k.$$

Or k étant rationnel et positif, on a $\theta k=ck+a$, donc

$$\theta(-k)=-ck+a.$$

L'équation

(9) $$\theta k=ck+a,$$

a donc lieu pour toute valeur rationnelle de k et par conséquent, puisque θk est une fonction continue, pour toute valeur réelle de k.

Or $\theta k=\psi(k,k'+l')$, et $a=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')$; faisant donc $c=\theta(k',l')$, on obtient

(10) $$\psi(k,k'+l')=\theta(k',l').k+2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l').$$

On tire de là, en faisant $k=0$,

$$\psi(0,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l').$$

Cette équation étant de la même forme que l'équation (7), elle donnera de la même manière

$$\psi(0,k')=\beta'k'-2m\pi,$$

β' étant une quantité indépendante de k'.

En mettant l' à la place de k', on obtient $\psi(0,l')=-2m\pi+\beta'l'$. En substituant ces valeurs de $\psi(0,k')$ et de $\psi(0,l')$ dans l'équation (10) on en tirera

$$\psi(k,k'+l')=\theta(k',l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi.$$

On voit par là que $\theta(k',l')$ est une fonction de $k'+l'$. En la désignant par $F(k'+l')$, on aura

$$\psi(k,k'+l')=F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi,$$

et par conséquent, en faisant $l'=0$,

$$\psi(k,k')=Fk'.k+\beta'k'-2m\pi.$$

En remarquant que

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$

$$\psi(0,l')=\beta'l'-2m\pi,$$

l'équation précédente donne

$$F(k'+l').k+\beta'(k'+l')-2m\pi=2m\pi+Fk'.k+\beta'k'-2m\pi+\beta'l'-2m\pi,$$

c'est-à-dire:

$$F(k'+l')=Fk'.$$

Donc faisant $k'=0$, on obtient $Fl'=F(0)=\beta=Fk'$. Par suite la valeur de $\psi(k,k')$ prend la forme,

(11) $$\psi(k,k')=\beta k+\beta'k'-2m\pi,$$

β et β' étant deux constantes. Cette valeur de $\psi(k,k')$ satisfera à l'équation (5) dans toute sa généralité comme il est aisé de le voir.

Maintenant, examinons l'équation,

$$f(k+l,k'+l')=f(k,k')f(l,l').$$

Puisque $f(k,k')$ est toujours une quantité positive, on peut poser

$$f(k,k')=e^{F(k,k')},$$

$F(k,k')$ désignant une fonction réelle continue de k et k'. En substituant et en prenant les logarithmes des deux membres, on trouvera

$$F(k+l,k'+l')=F(k,k')+F(l,l').$$

Comme cette équation coïncide avec l'équation (5), en mettant F à la place de ψ, et 0 à la place de m, elle donnera en vertu de l'équation (11)

$$F(k,k')=\delta k+\delta' k', \tag{12}$$

δ et δ', de même que β et β', étant deux quantités indépendantes de k et de k'. La fonction $f(k,k')$ prendra donc la forme,

$$f(k,k')=e^{\delta k+\delta' k'}.$$

Les fonctions $\psi(k,k')$ et $f(k,k')$ étant trouvées de cette manière, on aura, d'après l'équation (3'),

$$\varphi(k+k'i)=e^{\delta k+\delta' k'}[\cos(\beta k+\beta' k')+i\sin(\beta k+\beta' k')], \tag{13}$$

où il reste encore à trouver les quantités δ, δ', β, β', qui ne peuvent être que des fonctions de α et de φ. On a

$$\varphi(k+k'i)=p+qi,$$

p et q étant donnés par les équations (2). En séparant les quantités réelles des imaginaires, on aura

$$\left\{\begin{aligned} e^{\delta k+\delta' k'}\cos(\beta k+\beta' k') &= 1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots \\ &\qquad +\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots \\ e^{\delta k+\delta' k'}\sin(\beta k+\beta' k') &= \lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots \\ &\qquad +\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\cdots \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Nous allons d'abord considérer le cas où m est réel, c'est-à-dire où $k'=0$. Alors les expressions (14) prennent la forme,

$$\left\{\begin{aligned} e^{\delta k}\cos\beta k &= 1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi \\ &\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots=f\alpha \\ e^{\delta k}\sin\beta k &= \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi \\ &\qquad +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots=\theta\alpha. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Pour trouver δ et β, posons $k=1$, on aura

$$e^\delta\cos\beta=1+\alpha\cos\varphi;\ e^\delta\sin\beta=\alpha\sin\varphi.$$

On en tire

$$e^\delta=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta=\frac{1+\alpha\cos\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},\ \sin\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation donne, en désignant par s la plus petite de toutes les valeurs de β qui y satisfasse, et qui est toujours renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\beta=s+\mu\pi,$$

μ étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les équations (15) se changent en celles-ci:

$$f\alpha=e^{\delta k}\cos k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\cos ks\cos k\mu\pi-e^{\delta k}\sin ks.\sin k\mu\pi,$$
$$\theta\alpha=e^{\delta k}\sin k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\sin ks\cos k\mu\pi+e^{\delta k}\cos ks.\sin k\mu\pi.$$

De ces équations on tire

$$\cos k\mu\pi=e^{-\delta k}(f\alpha.\cos ks+\theta\alpha.\sin ks),$$
$$\sin k\mu\pi=e^{-\delta k}(\theta\alpha.\cos ks-f\alpha.\sin ks).$$

Or, d'après le théorème IV, $\theta\alpha$ et $f\alpha$ sont des fonctions continues de α; par conséquent il faut que $\cos k\mu\pi$ et $\sin k\mu\pi$ conservent les mêmes valeurs pour toute valeur de α. Il suffit donc pour les trouver, d'attribuer à α une valeur quelconque. Soit $\alpha=0$, on aura, en remarquant qu'alors $e^\delta=1$, $f\alpha=1$, $\theta\alpha=0$, $s=0$,

$$\cos k\mu\pi=1,\ \sin k\mu\pi=0.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de $f\alpha$ et $\theta\alpha$, et en se rappelant que $e^\delta=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtiendra

$$f\alpha=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cos ks,\ \theta\alpha=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\sin ks.$$

Donc enfin les expressions (15) deviendront:

$$\left\{\begin{aligned} &1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots \\ &\qquad\qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cos ks, \\ &\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots \\ &\qquad\qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\sin ks, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

s étant renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et satisfaisant à l'équation

$$\text{tang}\, s = \frac{\alpha \sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Les expressions (16) ont été établies pour la première fois par M. *Cauchy* dans l'ouvrage cité plus haut.

On a supposé ici la quantité α moindre que l'unité. On verra plus bas que α peut aussi être égal à l'unité, lorsqu'on donne à la quantité k une valeur convenable.

Dans ce qui précède nous avons trouvé les quantités δ et β. Maintenant nous allons montrer comment on peut trouver les deux autres quantités inconnues δ' et β'. Faisant à cet effet dans les équations (14) $k=0$ et $k'=n$, on obtiendra

$$\begin{aligned} e^{\delta' n}\cos\beta' n &= 1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots, \\ e^{\delta' n}\sin\beta' n &= \phantom{1+{}}\lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots, \end{aligned}$$

où $\lambda_\mu=\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu$, $\theta_\mu=\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu$, δ_μ et γ_μ étant déterminés par les équations

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\ \cos\gamma_\mu=-\frac{\mu-1}{\mu\delta_\mu},\ \sin\gamma_\mu=\frac{n}{\mu\delta_\mu}.$$

De ces équations on déduit les suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n-1}{n} &= \frac{\lambda_1}{n}\alpha\cos\theta_1+\frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\cos\theta_2+\cdots, \\ \frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n} &= \frac{\lambda_1}{n}\alpha\sin\theta_1+\frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\sin\theta_2+\cdots. \end{aligned}$$

Or en supposant n positif on a $\lambda_1=\delta_1=n$, donc $\frac{\lambda_\mu}{n}=\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu$, et par suite

$$\begin{aligned} \frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n-1}{n} &= \alpha\cos\theta_1+\delta_2\alpha^2\cos\theta_2+\delta_2\delta_3\alpha^3\cos\theta_3+\cdots, \\ \frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n} &= \alpha\sin\theta_1+\delta_2\alpha^2\sin\theta_2+\delta_2\delta_3\alpha^3\sin\theta_3+\cdots. \end{aligned}$$

Ces séries sont convergentes pour toute valeur de n, zéro y compris, ce qu'on voit aisément par le théorème II. En faisant donc converger n vers la limite zéro, et remarquant que, d'après le théorème V, les séries sont des fonctions continues, on obtient

$$\begin{aligned} \delta' &= \alpha\cos\theta_1'+\delta_2'\alpha^2\cos\theta_2'+\delta_2'\delta_3'\alpha^3\cos\theta_3'+\cdots, \\ \beta' &= \alpha\sin\theta_1'+\delta_2'\alpha^2\sin\theta_2'+\delta_2'\delta_3'\alpha^3\sin\theta_3'+\cdots, \end{aligned}$$

puisque δ' et β' sont les limites des quantités $\frac{e^{\delta' n}\cos\beta' n-1}{n}$ et $\frac{e^{\delta' n}\sin\beta' n}{n}$; θ_μ' est la limite de θ_μ et δ_μ' celle de δ_μ. Or, d'après l'expression de δ_μ, on a $\delta_\mu'=\frac{\mu-1}{\mu}$; donc $\cos\gamma_\mu=-1$; $\sin\gamma_\mu=0$ (lorsque $\mu>1$), donc

$$\begin{aligned} \cos\theta_\mu' &= \cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)=+\sin\mu\varphi.(-1)^\mu, \\ \sin\theta_\mu' &= \sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)=-\cos\mu\varphi.(-1)^\mu, \end{aligned}$$

où il faut se rappeler qu'en vertu de l'équation

$$n i=\delta_1(\cos\gamma_1+i\sin\gamma_1),$$

on a $\cos\gamma_1=0$, $\sin\gamma_1=1$. Donc les valeurs de β' et δ' seront celles-ci:

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots, \\ \delta' &= -\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots. \end{aligned}$$

De cette manière on a trouvé les quantités β' et δ' par des séries infinies. On peut aussi les exprimer sous forme finie. Car on tire de l'équation (15):

$$\begin{aligned} \frac{e^{\delta k}\cos\beta k-1}{k} &= \alpha\cos\varphi+\frac{k-1}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots, \\ \frac{e^{\delta k}\sin\beta k}{k} &= \alpha\sin\varphi+\frac{k-1}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots. \end{aligned}$$

On en déduit, en faisant converger k vers zéro,

$$(17)\qquad \begin{cases} \delta=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots, \\ \beta=\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots, \end{cases}$$

donc $\beta'=\delta$, $\delta'=-\beta$. Donc les expressions (14) prennent la forme

$$(18)\qquad \begin{cases} 1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots \\ \qquad\qquad =e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k')=p, \\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\cdots \\ \qquad\qquad =e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k')=q, \end{cases}$$

où

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\ \beta=\text{arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi};$$

or la somme de la série proposée étant égale à $p+qi$, on aura

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}x^\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}[\cos(\beta k+\delta k')+i\sin(\beta k+\delta k')].$$

Maintenant on a

$$m=k+k'i,\ x=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)=a+bi;$$

donc

$$\alpha=\sqrt{a^2+b^2},\ \alpha\cos\varphi=a,\ \alpha\sin\varphi=b,$$

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)=\tfrac{1}{2}\log[(1+a)^2+b^2],\ \beta=\text{arc tang}\frac{b}{1+a}.$$

En substituant et en écrivant m pour k et n pour k', l'expression ci-dessus prend la forme:

(19)

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\ .\ 2}(a+bi)^2$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3}(a+bi)^3+\cdots$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)\ldots(m-\mu+1+ni)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ \mu}(a+bi)^\mu+\cdots$$
$$=\left[\cos\left(m\,\text{arc tang}\frac{b}{1+a}+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\right)+i\sin\left(m\,\text{arc tang}\frac{b}{1+a}+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\right)\right]$$
$$\times[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc tang}\frac{b}{1+a}}.$$

Cette expression a lieu comme nous l'avons vu, de même que l'expression (18), pour toute valeur de $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ inférieure à l'unité.

En faisant p. ex. $b=0$, $n=0$, on a l'expression

$$1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\cdots=(1+a)^m, \tag{20}$$

de laquelle nous tirerons parti ci-après.

4.

Dans ce qui précède on a trouvé la somme de la série proposée toutes les fois que $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ est inférieur à l'unité. Il reste encore à examiner le cas où cette quantité est égale à 1.

Nous avons vu par le théorème IV que lorsque α s'approche indéfiniment de l'unité, la série

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots$$

s'approchera en même temps de la limite $v_0+v_1+v_2+\cdots$, en supposant que cette dernière série soit convergente. En faisant donc converger α vers l'unité dans les équations (18), on aura

$$\left\{\begin{aligned}1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots&=e^{\delta_1k-\beta_1k'}\cos(\beta_1k+\delta_1k'),\\ \lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots&=e^{\delta_1k-\beta_1k'}\sin(\beta_1k+\delta_1k'),\end{aligned}\right. \tag{21}$$

où δ_1 et β_1 sont les limites des quantités δ et β, en supposant que les séries, contenues dans ces équations, soient convergentes. Or il est clair que $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ est la limite de δ, et que

$$\text{arc tang}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{arc tang}\frac{2\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi}{2(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}=\text{arc tang}(\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)$$

est celle de β; on a donc

$$\delta_1=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi),\quad \beta_1=\text{arc tang}(\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi). \tag{22}$$

Nous n'avons donc qu'à examiner dans quels cas les séries sont convergentes. A cet effet il faut distinguer trois cas: lorsque k est égal à -1, ou compris entre -1 et $-\infty$; lorsque k est égal à zéro ou compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est compris entre 0 et -1.

Premier cas, lorsque k est égal à -1 ou compris entre -1 et $-\infty$. On a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En faisant donc $k=-1-n$, on a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on voit que δ_μ est toujours égal ou supérieur à l'unité. Or on a $\lambda_\mu = \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\mu$, donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, λ_μ ne convergera pas vers zéro, donc en vertu du théorème I les séries (21) sont divergentes.

Deuxième cas, lorsque k est positif. Supposons que c soit une quantité positive inférieure à k, on aura

$$(\mu-k-1+c)^2 = (\mu-k-1)^2 + 2c(\mu-k-1) + c^2,$$

donc

$$(\mu-k-1)^2 + k'^2 = (\mu-k-1+c)^2 + k'^2 - c^2 - 2c(\mu-k-1).$$

Si l'on fait

$$\mu > k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c},$$

il s'ensuit que $k'^2 - c^2 - 2c(\mu-k-1)$ est négatif; par conséquent

$$(\mu-k-1)^2 + k'^2 < (\mu-k-1+c)^2,$$

c'est-à-dire:

$$\delta_\mu < \frac{\mu-k-1+c}{\mu},\quad \delta_\mu < 1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Si dans l'équation (20) on fait $\alpha = \frac{1}{\mu}$, $m = -n$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n} = 1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(1+n)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}-\cdots$$
$$= 1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\cdots$$

Donc en faisant $n = 1+k-c$, on voit aisément que

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c} > 1-\frac{1+k-c}{\mu};$$

par conséquent

$$\delta_\mu < \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c},\quad \text{où}\quad \mu > k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}\ (=\varrho),$$

donc

$$\delta_{\varrho+\mu} < \left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},\quad \text{où}\quad \mu > 0.$$

En posant successivement $\mu = 1, 2, 3\ldots\mu$, et en faisant le produit des résultats, on obtiendra

$$\delta_{\varrho+1}\delta_{\varrho+2}\ldots\delta_{\varrho+\mu} < \left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c};$$

or $\lambda_{\mu+\varrho} = \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_{\mu+\varrho}$, donc

$$\lambda_{\mu+\varrho} < \delta_1\delta_2\ldots\delta_\varrho\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

par conséquent lorsqu'on fait $\mu = 0, 1, 2\ldots\mu$,

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\cdots+\lambda_{\varrho+\mu} < \delta_1\delta_2\ldots\delta_\varrho(\varrho+1)^{1+k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}\right).$$

Si maintenant dans l'expression (20) on fait $\alpha = -\frac{1}{\varrho+\mu+1}$, $m = -k+c$, on aura

$$\left(1-\frac{1}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k} = 1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}+\frac{(k-c)(k-c+1)}{1.2(\varrho+\mu+1)^2}+\cdots,$$

donc en se rappelant que $k > c$:

$$\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k} > 1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}.$$

Il s'ensuit, en divisant par $(k-c)(\varrho+\mu+1)^{k-c}$,

$$\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}} < \frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+\mu)^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right).$$

Cela donne, en faisant $\mu = 0, 1, 2\ldots\mu$ et ajoutant,

$$\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\cdots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}$$
$$< \frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{\varrho^{k-c}}-\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right) < \frac{1}{k-c}\cdot\frac{1}{\varrho^{k-c}}.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\cdots+\lambda_{\varrho+\mu} < \delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_\varrho\frac{(\varrho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\varrho^{k-c}},$$

pour toute valeur de μ. Donc la série $1+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\cdots$, dont tous les termes sont positifs, est convergente, et par conséquent, d'après le théorème II, les séries

$$1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots$$
$$\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots$$

seront de même convergentes.

Troisième cas, lorsque k est égal à zéro ou compris entre zéro et -1. Dans ce cas les séries ci-dessus seront convergentes pour toute valeur de k, pourvu que φ ne soit pas égal à $(2n+1)\pi$. Cela peut se démontrer comme il suit: Soit

$$m=k+k'i,\ x=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

$$1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_nx^n=p_n.$$

En multipliant par $1+x$, on obtient

$$1+(m_1+1)x+(m_2+m_1)x^2+\cdots+(m_n+m_{n-1})x^n+m_nx^{n+1}=p_n(1+x).$$

Or on sait que

$$m_1+1=(m+1)_1,\ m_2+m_1=(m+1)_2\ \ldots,\ m_n+m_{n-1}=(m+1)_n,$$

donc en substituant:

$$1+(m+1)_1x+(m+1)_2x^2+\cdots+(m+1)_nx^n=-m_nx^{n+1}+p_n(1+x).$$

Maintenant, si l'on fait $n=\infty$, le premier membre de cette équation sera, d'après le cas précédent, une série convergente. En la désignant par s, on aura

$$s=p_n(1+x)-m_n[\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi],$$

où n est infini. Or on peut démontrer comme dans le deuxième cas que $m_n=0$ pour $n=\infty$. On a donc

$$s=p(1+x),\ \text{où}\ p=1+m_1x+m_2x^2+\cdots$$

Cette équation donne, si $x+1$ n'est pas égal à zéro,

$$p=\frac{s}{1+x}.$$

La série p est donc alors convergente, et par conséquent les séries ci-dessus le sont également.

Si $x+1=0$, on a $1+\cos\varphi+i\sin\varphi=0$, donc $\sin\varphi=0$, $1+\cos\varphi=0$, d'où $\varphi=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les séries en question sont convergentes pour toute valeur de k égale à zéro ou comprise entre 0 et -1, si φ n'est pas égal à $(2n+1)\pi$.

Lorsque $\varphi=(2n+1)\pi$, les séries sont nécessairement divergentes, car si elles étaient convergentes, elles auraient pour somme les limites des fonctions

$$e^{k\delta-k'\beta}[\cos(k\beta+k'\delta)+i\sin(k\beta+k'\delta)],$$

en y faisant converger α vers l'unité, et faisant $\varphi=(2n+1)\pi$. Or

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\ \beta=\text{arc.tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi},$$

donc pour $\varphi=(2n+1)\pi$ on a

$$\delta=\log(1-\alpha),\ \beta=0.$$

La fonction en question prendra donc la forme

$$(1-\alpha)^k[\cos(k'\log(1-\alpha))+i\sin(k'\log(1-\alpha))].$$

Or, k étant égal à zéro ou négatif, il est clair qu'en faisant converger α vers l'unité, on n'obtiendra pas pour cette fonction une limite finie et déterminée. Donc les séries sont divergentes.

De ce qui précède il s'ensuit, que les séries (21) ont lieu pour toute valeur de φ, lorsque k est positif, et pour toute valeur de φ pour laquelle $\cos\frac{\varphi}{2}$ n'est pas zéro, lorsque k est égal à zéro ou compris entre -1 et 0, quelle que soit d'ailleurs la valeur de k'. Dans tout autre cas les séries sont divergentes. Dans le cas que nous examinons, la série générale (19), lorsqu'on y fait $b^2+a^2=1$, ou $b=\sqrt{1-a^2}$, prend la forme:

$$(23)\ \left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\,.\,2}(a+\sqrt{a^2-1})^2\\&+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\,.\,2\,.\,3}(a+\sqrt{a^2-1})^3+\cdots\\&=(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\Big)\\&\qquad+i\sin\Big(m\,\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\Big)\Big].\end{aligned}\right.$$

Voici un résumé des résultats précédents:

I. Lorsque la série,

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\,.\,2}(a+bi)^2+\cdots$$

est convergente, elle a pour somme

$$[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc.tang}\frac{b}{1+a}}\Big[\cos\Big(m\,\text{arc.tang}\frac{b}{1+a}+\frac{n}{2}\log[(1+a)^2+b^2]\Big)$$
$$+i\sin\Big(m\,\text{arc.tang}\frac{b}{1+a}+\frac{n}{2}\log[(1+a)^2+b^2]\Big)\Big].$$

II. La série est convergente pour toute valeur de m et n, lorsque la quantité $\sqrt{a^2+b^2}$ est inférieure à l'unité. Si $\sqrt{a^2+b^2}$ est égal à l'unité, la série est convergente pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, si l'on n'a pas en même temps $a=-1$. Si $a=-1$, m doit être positif. Dans tout autre cas la série proposée est divergente.

Comme cas particuliers on doit considérer les suivants:

A. Lorsque $n=0$. On a alors

$$(24)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}(a+bi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+bi)^2+\cdots \\ =[(1+a)^2+b^2]^{\frac{m}{2}}\left[\cos\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{b}{1+a}\right)+i\sin\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{b}{1+a}\right)\right]. \end{cases}$$

Cette expression donne, en faisant $a=\alpha\cos\varphi$, $b=\alpha\sin\varphi$ et en séparant les termes réels des imaginaires:

$$(25)\quad \begin{cases} 1+\frac{m}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right), \\ \frac{m}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\cdots \\ \qquad =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\sin\left(m\,\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right). \end{cases}$$

B. Lorsque $b=0$.

Dans ce cas l'expression générale prend la forme suivante:

$$(26)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}a+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\,.\,2}a^2+\cdots \\ \qquad =(1+a)^m[\cos(n.\log(1+a))+i\sin(n.\log(1+a))]. \end{cases}$$

C. Lorsque $n=0$, $b=0$.

Alors on a

$$(27)\quad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3+\cdots=(1+a)^m.$$

Cette expression a lieu pour toute valeur de m lorsque la valeur numérique de a est inférieure à l'unité, de plus pour toute valeur de m comprise entre

-1 et $+\infty$, lorsque $a=1$, et pour toute valeur positive de m, lorsque $a=-1$. Pour toute autre valeur de a et de m le premier membre est une série divergente.

Faisant p. ex. $a=1$, $a=-1$, on a

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}+\cdots=2^m,$$
$$1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\cdots=0.$$

La première équation a lieu pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, et la seconde pour toute valeur positive de m.

D. Lorsque $\sqrt{a^2+b^2}=1$.

Alors on a

$$(28)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\,.\,2}(a+\sqrt{a^2-1})^2+\cdots \\ =(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\left[\cos\left(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right),\right. \\ \qquad \left.+i\sin\left(m\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right)\right]. \end{cases}$$

Si l'on fait ici $a=\cos\varphi$, on obtient

$$(29)\quad \begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\,.\,2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots \\ =(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}e^{-n(\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)}\left[\cos\left(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right)\right. \\ \qquad \left.+i\sin\left(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right)\right], \end{cases}$$

en remarquant qu'on a

$$\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}=\text{arc. tang}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi,$$

si l'on suppose $\frac{1}{2}\varphi$ compris entre $\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$ et $\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$.

E. Lorsque $\sqrt{a^2+b^2}=1,\ a=\cos\varphi,\ b=\sin\varphi,\ n=0.$

Dans ce cas l'expression précédente donne

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdots\\&=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}[\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+i\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)]\\&\qquad\text{depuis }\tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\text{ jusqu'à }\tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2},\end{aligned}\right.$$

ou, en séparant la partie réelle de l'imaginaire,

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi+\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)\\&\frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi+\cdots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)\\&\qquad\text{depuis }\tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\text{ jusqu'à }\tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right.$$

F. Lorsque $a=0,\ b=\operatorname{tang}\varphi.$

Dans ce cas on obtient, lorsque φ est compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$,

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}i\operatorname{tang}\varphi+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\,.\,2}(i\operatorname{tang}\varphi)^2+\cdots\\&=(\cos\varphi)^{-m}e^{-n\varphi}[\cos(m\varphi-n\log\cos\varphi)+i\sin(m\varphi-n\log\cos\varphi)].\end{aligned}\right.$$

5.

Des expressions précédentes on peut, par des transformations convenables, en déduire plusieurs autres, parmi lesquelles il s'en trouve de très remarquables. Nous allons en développer quelques unes. Pour plus de détail on peut consulter l'ouvrage cité de M. *Cauchy*.

A.

Sommation des séries $\alpha\cos\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,$
$\alpha\sin\varphi-\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots.$

Lorsque α est supérieur à l'unité, on voit aisément que ces séries sont divergentes. Si α est inférieur à l'unité, nous avons vu plus haut qu'elles

sont convergentes; leurs sommes sont les quantités β et δ du § 3, c'est-à-dire, en mettant pour β et δ leurs valeurs données par les équations (18),

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,\\&\text{arc. tang}\,\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}=\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots\end{aligned}\right.$$

Pour avoir les sommes de ces séries lorsque $\alpha=+1$ ou -1, il faut seulement faire converger α vers cette limite. La première expression donne de cette manière

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)=\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots,\\&\tfrac{1}{2}\log(2-2\cos\varphi)=-\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi-\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots,\end{aligned}\right.$$

en supposant que les seconds membres de ces équations soient des séries convergentes, ce qui a lieu, d'après le théorème II, pour toute valeur de φ, excepté pour $\varphi=(2\mu+1)\pi$ dans la première expression, et pour $\varphi=2\mu\pi$ dans la seconde, μ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

La seconde formule donne, en supposant φ compris entre π et $-\pi$, et en se rappelant qu'on a alors

$$\text{arc. tang}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\text{arc. tang}\,(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi:$$

$$(35)\quad \tfrac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots\ (\text{depuis }\varphi=+\pi\text{ jusqu'à }\varphi=-\pi).$$

Lorsque $\varphi=\pi$ ou $=-\pi$, la série se réduit à zéro, comme on le voit aisément. Il s'ensuit que la fonction:

$$\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots$$

a la propriété remarquable d'être discontinue pour les valeurs $\varphi=\pi$ et $\varphi=-\pi$. En effet, lorsque $\varphi=\pm\pi$, la fonction se réduit à zéro; si au contraire $\varphi=\pm(\pi-\alpha)$, α étant positif et moindre que π, la valeur de la fonction est

$$\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

La formule (33) contient comme cas particulier la suivante:

$$(36)\qquad \text{arc. tang}\,\alpha=\alpha-\tfrac{1}{3}\alpha^3+\tfrac{1}{5}\alpha^5-\cdots$$

ce qu'on trouve en faisant $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Cette formule sera applicable pour toute valeur de α, depuis -1 jusqu'à $+1$, les limites y comprises.

B.

Développement de $\cos m\varphi$ et de $\sin m\varphi$ suivant les puissances de $\operatorname{tang}\varphi$.

On peut déduire ces développemens de l'expression (32). En effet, en faisant $n=0$, et séparant les parties réelles des parties imaginaires, on obtient, après avoir multiplié par $(\cos\varphi)^m$,

$$(37)\quad\begin{cases}\cos m\varphi=(\cos\varphi)^m\Big(1-\frac{m(m-1)}{1.2}(\operatorname{tang}\varphi)^2\\ \qquad\qquad+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(\operatorname{tang}\varphi)^4-\cdots\Big),\\ \sin m\varphi=(\cos\varphi)^m\Big(m(\operatorname{tang}\varphi)-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\operatorname{tang}\varphi)^3+\cdots\Big),\end{cases}$$

depuis $\varphi=\frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, et ces équations ont lieu pour toute valeur de m lorsque $\operatorname{tang}\varphi$ est moindre que 1. Si $\operatorname{tang}\varphi=\pm1$, elles ont lieu pour tout m compris entre -1 et $+\infty$. Elles sont alors:

$$(38)\quad\begin{cases}\cos\left(m\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}-\cdots\right)\\ \sin\left(m\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\cdots\right).\end{cases}$$

C.

Développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$ en séries ordonnées suivant les cosinus et les sinus des arcs multiples.

Depuis quelque temps plusieurs analystes se sont occupés du développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$. Mais jusqu'à présent, si je ne me trompe, ces efforts n'ont pas entièrement réussi. On est bien parvenu à des expressions justes sous certaines restrictions, mais ces expressions n'ont pas été rigoureusement fondées. On peut les déduire assez simplement des expressions démontrées ci-dessus. En effet, si l'on ajoute les deux équations (31), après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$, on obtient

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-2\varphi)+\cdots$$
$$=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos\left(\alpha-\frac{m\varphi}{2}+m\varrho\pi\right)$$
$$\left(\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Or puisque $2+2\cos\varphi=4(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2$, on aura, en faisant $\varphi=2x$,

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\cdots=(2\cos x)^m\cos(\alpha-mx+2m\varrho\pi)$$
$$\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\cdots=(-2\cos x)^m\cos[\alpha-mx+m(2\varrho+1)\pi]$$
$$\text{depuis } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

Si l'on fait ici 1) $\alpha=mx$; 2) $\alpha=mx+\frac{\pi}{2}$; 3) $\alpha=my$, $x=y-\frac{\pi}{2}$; 4) $\alpha=my-\frac{\pi}{2}$, $x=y-\frac{\pi}{2}$, on obtiendra

1) $(2\cos x)^m\cos 2m\varrho\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\cdots$,

2) $(2\cos x)^m\sin 2m\varrho\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\cdots$,

$$\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2};$$

3) $(2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\cdots$,

4) $(2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\cdots$,

$$\text{depuis } x=2\varrho\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+1)\pi;$$

5) $(-2\cos x)^m\cos m(2\varrho+1)\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\cdots$,

6) $(-2\cos x)^m\sin m(2\varrho+1)\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\cdots$,

$$\text{depuis } x=(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi;$$

7) $(-2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\cdots$,

8) $(-2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\cdots$,

$$\text{depuis } x=(2\varrho+1)\pi \text{ jusqu'à } x=(2\varrho+2)\pi.$$

Ces formules ont encore lieu pour les valeurs limites de x, lorsque m est positif. Lorsque m est compris entre -1 et 0 ces valeurs sont exclues.

Comme cas particuliers on peut considérer les deux suivants:

$$(2\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \cdots,$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \cdots$$

$$\left(\text{depuis } x = -\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x = \frac{\pi}{2}\right).$$

XV.

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. II, Berlin 1827.

Lorsque une intégrale définie contient une quantité constante indéterminée, on peut souvent en déduire, par différentiation, une équation différentielle par laquelle l'intégrale définie peut se déterminer en fonction de la quantité constante. Le plus souvent cette équation différentielle est linéaire; si elle est en même temps du premier ordre, elle peut, comme on sait, s'intégrer. Quoique cela n'ait pas lieu en général, lorsque l'équation est du second ordre ou d'un ordre plus élevé, on peut pourtant quelquefois déduire de ces équations plusieurs relations intéressantes entre les intégrales définies. Montrer cela sera l'objet de ce mémoire.

Soit $\frac{d^2y}{da^2} + p\frac{dy}{da} + qy = 0$ une équation différentielle linéaire du second ordre entre y et a, p et q étant deux fonctions de a. Supposons qu'on connaisse deux intégrales particulières de cette équation, savoir $y = y_1$ et $y = y_2$, on aura

$$\frac{d^2y_1}{da^2} + p\frac{dy_1}{da} + qy_1 = 0; \quad \frac{d^2y_2}{da^2} + p\frac{dy_2}{da} + qy_2 = 0.$$

De ces équations on tire, en éliminant q,

$$y_2\frac{d^2y_1}{da^2} - y_1\frac{d^2y_2}{da^2} = \frac{d\left(y_2\frac{dy_1}{da} - y_1\frac{dy_2}{da}\right)}{da} = -p\left(y_2\frac{dy_1}{da} - y_1\frac{dy_2}{da}\right),$$

donc en intégrant

$$y_2\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}=e^{-\int p\,da}, \tag{0}$$

e étant la base des logarithmes Népériens.

Supposons que les deux fonctions y_1 et y_2 soient exprimées en intégrales définies, de sorte que $y_1=\int v\,dx$, $y_2=\int u\,dx$, v et u étant des fonctions de x et de a, cette relation entre y_1 et y_2 donne en substituant,

$$\int u\,dx\int\frac{dv}{da}\,dx-\int v\,dx\int\frac{du}{da}\,dx=e^{-\int p\,da}. \tag{1}$$

Cette équation exprime, comme on le voit, une relation entre les quatre intégrales $\int u\,dx$, $\int v\,dx$, $\int\frac{du}{da}\,dx$, $\int\frac{dv}{da}\,dx$. Il s'agit maintenant de trouver des intégrales qui puissent satisfaire à une équation différentielle du second ordre. Il y a plusieurs intégrales qui jouissent de cette propriété, et que nous allons considérer successivement.

I. Soit $v=\frac{(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$ et $y=\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$,

$$\frac{dy}{da}=(\gamma+1)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},\quad \frac{d^2y}{da^2}=\gamma(\gamma+1)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma-1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},$$

le signe $\int_0^1$ dénotant que l'intégrale est prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. En différentiant la quantité $(x+a)^{\gamma}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}=r$ par rapport à x, on obtient

$$dr=dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+a)^{\gamma-1}[\gamma x(1-x)+\alpha(x+a)(1-x)-\beta(x+a)x].$$

Or

$$\begin{aligned}&\gamma x(1-x)+\alpha(x+a)(1-x)-\beta(x+a)x\\ &=-\gamma(a^2+a)+[a(\beta+\gamma)+(a+1)(\alpha+\gamma)](x+a)-(\alpha+\beta+\gamma)(x+a)^2,\end{aligned}$$

donc en intégrant entre les limites $x=0$, $x=1$, on obtient

$$\begin{aligned}0=&-\gamma(a^2+a)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma-1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\\ &+[(\beta+\gamma)a+(\alpha+\gamma)(a+1)]\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}-(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.\end{aligned}$$

De cette équation on tire, en divisant par $\frac{a^2+a}{\gamma+1}$ et substituant à la place des intégrales leurs valeurs en y,

$$\frac{d^2y}{da^2}-\left(\frac{\alpha+\gamma}{a}+\frac{\beta+\gamma}{1+a}\right)\frac{dy}{da}+\frac{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{a(a+1)}\,y=0. \tag{2}$$

Si l'on met à la place de α, β, γ respectivement $1-\beta$, $1-\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma-1$, on aura la même équation, donc

$$y_1=\int_0^1\frac{(x+a)^{\gamma+1}\,dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\quad\text{et}\quad y_2=\int_0^1\frac{(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}\,dx}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}} \tag{3}$$

sont deux intégrales particulières de cette équation.

Or $p=-\frac{\alpha+\gamma}{a}-\frac{\beta+\gamma}{1+a}$, et par conséquent $e^{-\int p\,da}=Ca^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}$, donc l'équation (0) donne

$$y_2\frac{dy_1}{da}-y_1\frac{dy_2}{da}=Ca^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}. \tag{4}$$

Pour déterminer la quantité constante C, soit $a=\infty$, on trouvera facilement

$$C=-(\alpha+\beta-1)\int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.\int_0^1 dx\,.\,x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$C=\pi[\cot(\alpha\pi)+\cot(\beta\pi)].$$

Par suite l'équation (4) donne

$$\left\{\begin{aligned}&(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1\frac{dx\,(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.\int_0^1\frac{dx\,(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}\\ &-(\gamma+1)\int_0^1\frac{dx\,(x+a)^{\gamma}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.\int_0^1\frac{dx\,(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}\\ &=-\pi[\cot(\alpha\pi)+\cot(\beta\pi)]\,a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Le cas où $\gamma=-\alpha-\beta$ mérite d'être remarqué. On a alors, comme on le voit aisément,

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}}=\frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.$$

Or

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}=\frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

Γm étant égal à $\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\,dx$, donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}.$$

Soit p. ex. $\beta = 1-\alpha$, on aura

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha x^{1-\alpha}(x+a)} = \frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}\,\frac{1}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha},$$

or $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\alpha\,.\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+a)\,x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,\frac{1}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha}.$$

II. Soit $y = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^\gamma}$. En différentiant on obtient

$$\frac{dy}{da} = -\gamma \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^{\gamma+1}},$$

$$\frac{d^2y}{da^2} = \gamma(\gamma+1) \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^{\gamma+2}}.$$

Lorsqu'on différentie la fonction $x^{1-\alpha}(1+x)^{1-\beta}(x+a)^{-\gamma-1} = r$, on obtient

$$dr = \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^{\gamma+2}}[(1-\alpha)(1+x)(x+a)+(1-\beta)x(x+a)-(\gamma+1)x(1+x)]$$
$$= \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^{\gamma+2}}\,q,$$

donc, puisque

$$q = (\gamma+1)(1-a)a - [(\alpha+\gamma)(1-a)-(\gamma+\beta)a](x+a) + (1-\alpha-\beta-\gamma)(x+a)^2:$$

$$dr = (\gamma+1)a(1-a)\frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^{\gamma+2}}$$
$$-[(\alpha+\gamma)(1-a)-(\beta+\gamma)a]\frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^{\gamma+1}} + (1-\alpha-\beta-\gamma)\frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^\gamma}.$$

On tire de là en intégrant

(6) $$\frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}\right)\frac{dy}{da} + \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{a(1-a)}\,y = 0.$$

En mettant respectivement $1-\beta$, $1-\alpha$, $\gamma+\alpha+\beta-1$ à la place de α, β, γ, il en résulte la même équation, donc

$$y_1 = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^\gamma} \quad\text{et}\quad y_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}},$$

sont deux intégrales particulières de cette équation.

Or, puisque $p = \frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}$ et par suite $e^{-\int p\,da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}$, on a en vertu de l'équation (0)

$$y_2\frac{dy_1}{da} - y_1\frac{dy_2}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

En faisant $a=1$, on trouve $C=0$, et par conséquent

$$y_2\frac{dy_1}{da} - y_1\frac{dy_2}{da} = 0,$$

c'est-à-dire $y_1 = Cy_2$, C étant une constante. Pour la trouver on fera $a=1$; on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = C\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}}.$$

Or

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma\beta\,.\,\Gamma\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)},$$

donc

$$C = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma\beta\,.\,\Gamma\gamma}.$$

Par conséquent l'équation $y_1 = Cy_2$ donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta (x+a)^\gamma} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma\beta\,.\,\Gamma\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}.$$

Si dans l'équation (6) on met $(1-a)$ à la place de a, β et α à la place de α et β, elle ne change pas de forme.

Il s'ensuit que

$$y_3 = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\,dx}{(1+x)^\alpha (x+1-a)^\gamma}$$

est de même une intégrale particulière de la même équation. On a donc

$$y_3\frac{dy_1}{da} - y_1\frac{dy_3}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

En mettant xa à la place de x dans l'expression de y_1, on obtient

$$y_1 = a^{-\alpha-\gamma+1}\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^\beta};\quad \frac{dy_1}{da} = -\gamma\, a^{-\alpha-\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}.$$

On trouve de même, en mettant $(1-a)x$ à la place de x,

$$y_2 = (1-a)^{-\beta-\gamma+1}\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha},$$

$$\frac{dy_2}{da} = \gamma(1-a)^{-\beta-\gamma}\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha}.$$

En substituant ces valeurs, multipliant par $a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}$ et écrivant C au lieu de $-\frac{C}{\gamma}$, on trouve

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} C = {} & a\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^\beta}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha} \\ & +(1-a)\int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}. \end{aligned}\right.$$

Pour trouver C, soit $a=0$, on aura

$$C = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}dx}{(1+x)^{\gamma+\alpha}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1)}\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1).$$

Si l'on fait p. ex. $\beta = 1-\alpha$, on aura en remarquant que

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma\alpha = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\quad \Gamma(\gamma+1) = \gamma.\Gamma\gamma:$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\gamma.\sin\alpha\pi} = {} & a\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\gamma(1+ax)^{1-\alpha}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\gamma+1}[1+(1-a)x]^\alpha} \\ & +(1-a)\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^{1-\alpha}}\cdot\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^\gamma[1+(1-a)x]^\alpha}. \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ on a

$$\begin{aligned} 2\pi = {} & a\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)(1+ax)}\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^3[1+(1-a)x]} \\ & +(1-a)\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)[1+(1-a)x]}\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^3(1+ax)}. \end{aligned}$$

Toutes ces intégrales peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques. En effet, soit $x = (\operatorname{tang}\varphi)^2$, on aura après quelques transformations légères

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} = {} & a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a)\sin^2\varphi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi.\cos^2\varphi}{\sqrt{1-a.\sin^2\varphi}} \\ & +(1-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a\sin^2\varphi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi.\cos^2\varphi}{\sqrt{1-(1-a)\sin^2\varphi}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, lorsqu'on fait $a = c^2$, $b^2 = 1-c^2$,

$$\frac{\pi}{2} = F^1(c)E^1(b) + F^1(b)E^1(c) - F^1(c)F^1(b),$$

où, d'après la notation de M. *Legendre*,

$$F^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},\quad E^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

La formule ci-dessus se trouve dans les *Exercices de Calcul intégral par M. Legendre*, t. I, p. 61.

Dans la formule générale (7) les intégrales peuvent s'exprimer par d'autres dont les limites sont 0 et 1. Soit à cet effet $x = \frac{y}{1-y}$; on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)} = {} & a\int_0^1 \frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{y^\alpha[1-(1-a)y]^\beta}\cdot\int_0^1 \frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{y^\beta(1-ay)^\alpha} \\ & +(1-a)\int_0^1 \frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{y^\alpha[1-(1-a)y]^\beta}\cdot\int_0^1 \frac{dy(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{y^\beta(1-ay)^\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons vu plus haut que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha}.$$

On peut trouver, comme il suit, une expression plus générale de laquelle celle-ci est un cas particulier. En différentiant l'intégrale

$$y = \int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}$$

par rapport à a, on obtient

$$\frac{dy}{da} = -(\alpha+\beta)\int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{dy}{da}+\left(\frac{\alpha}{1+a}+\frac{\beta}{a}\right)y=-\frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{a(1+a)(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

En multipliant cette équation par $a^\beta(1+a)^\alpha$, le premier membre devient une différentielle complète, égale à $d[y.a^\beta(1+a)^\alpha]$, on aura donc en intégrant

$$y.a^\beta(1+a)^\alpha=C-x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^a\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Pour trouver C, qui peut être une fonction de x, nous ferons $a=\infty$. On aura

$$y.a^\beta(1+a)^\alpha=\int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

et par conséquent,

$$C=\int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}+x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^\infty\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Si l'on fait $a=\frac{x-xy}{y-x}$, et par suite $y=\frac{x+ax}{a+x}$, on trouvera

$$\int_0^\infty\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}=-x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\int_1^x dy.y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$
$$=x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\left(-\int_0^x dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}+\int_0^1 dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right).$$

En substituant cette valeur, on obtient

$$C=\int_0^1 dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=\frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

et par conséquent

$$\frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}=a^\beta(1+a)^\alpha\int_0^x\frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}+x^\alpha(1-x)^\beta\int_0^a\frac{da.a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Si p. ex. $\alpha+\beta=1$, on aura

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{(1+a)^\alpha}{a^{\alpha-1}}\int_0^x\frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}{x+a}+\frac{x^\alpha}{(1-x)^{\alpha-1}}\int_0^a\frac{da.a^{-\alpha}(1+a)^{\alpha-1}}{x+a}.$$

Si de plus $\alpha=\frac{1}{2}$, on obtient

$$\pi=\sqrt{a+a^2}\int_0^x\frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-x^2}}+\sqrt{x-x^2}\int_0^a\frac{da}{(a+x)\sqrt{a+a^2}},$$

ce qui est juste, car

$$\int_0^x\frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{a+a^2}}\text{arc. tang}\sqrt{\frac{x+xa}{a-ax}},$$
$$\int_0^a\frac{da}{(a+x)\sqrt{a+a^2}}=\frac{2}{\sqrt{x-x^2}}\text{arc. tang}\sqrt{\frac{a-ax}{x+xa}};$$

et $\text{arc. tang}\,z+\text{arc. tang}\frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}$.

III. Soit $y=\int_0^1 e^{-ax}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$, où $\alpha>0$, $\beta>0$.

En différentiant par rapport à a on obtient

$$\frac{dy}{da}=-\int_0^1 e^{-ax}x^\alpha(1-x)^{\beta-1}dx,$$
$$\frac{d^2y}{da^2}=\int_0^1 e^{-ax}x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Lorsqu'on différentie la fonction $r=e^{-ax}x^\alpha(1-x)^\beta$ par rapport à x on obtient

$$dr=\alpha e^{-ax}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx-(\alpha+\beta+a)e^{-ax}x^\alpha(1-x)^{\beta-1}dx$$
$$+ae^{-ax}x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

donc en intégrant depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et substituant pour les intégrales leurs valeurs en y, $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{da^2}$:

$$\frac{d^2y}{da^2}+\left(\frac{\alpha+\beta}{a}+1\right)\frac{dy}{da}+\frac{\alpha}{a}y=0.$$

On satisfait aussi à cette équation en faisant

$$y=y_1=\int_1^\infty e^{-ax}x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}dx,$$

a étant positif. Or on a $p=\frac{\alpha+\beta}{a}+1$, donc $e^{-\int p\,da}=\frac{C}{e^a a^{\alpha+\beta}}$. Donc l'équation (0) donne

$$y_1\frac{dy}{da}-y\frac{dy_1}{da}=\frac{C}{e^a a^{\alpha+\beta}}.$$

Si dans l'expression de y_1 on met $x+1$ à la place de x, on trouve

$$y_1 = e^{-a}\int_0^\infty e^{-ax}x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha-1}\,dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = -e^{-a}\int_0^\infty e^{-ax}x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha}\,dx,$$

ou bien, en mettant $\frac{x}{a}$ à la place de x,

$$y_1 = e^{-a}a^{-\alpha-\beta+1}\int_0^\infty e^{-x}x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1}\,dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = -e^{-a}a^{-\alpha-\beta}\int_0^\infty e^{-x}x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha}\,dx.$$

En substituant ces valeurs de y_1, $\frac{dy_1}{da}$ de même que celles de y, $\frac{dy}{da}$, en multipliant par $e^a a^{\alpha+\beta}$, et faisant $a=0$, on trouvera

$$C = \int_0^\infty e^{-x}dx\,.\,x^{\beta+\alpha-1}\,.\int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

c'est-à-dire

$$C = \Gamma(\alpha+\beta)\frac{\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta.$$

On aura donc

$$\Gamma\alpha\,.\,\Gamma\beta = \int_0^1 e^{-ax}\,dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,.\int_0^\infty e^{-x}\,dx\,.\,x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha}$$
$$-a\int_0^1 e^{-ax}\,dx\,.\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,.\int_0^\infty e^{-x}\,dx\,.\,x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1}.$$

Lorsque $\beta = 1-\alpha$, on a

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \int_0^1 \frac{dx}{x}e^{-ax}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}.\int_0^\infty e^{-x}\,dx\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha}$$
$$-a\int_0^1 dx\,.\,e^{-ax}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}.\int_0^\infty \frac{dx}{x+a}e^{-x}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha}.$$

IV. Soit

$$y = \int_0^\infty e^{ax-x^2}x^{\alpha-1}\,dx, \text{ où } \alpha > 0.$$

En différentiant on aura

$$\frac{dy}{da} = \int_0^\infty e^{ax-x^2}x^{\alpha}\,dx, \quad \frac{d^2y}{da^2} = \int_0^\infty e^{ax-x^2}x^{\alpha+1}\,dx.$$

Or

$$d(e^{ax-x^2}x^{\alpha}) = dx\,.\,e^{ax-x^2}x^{\alpha-1}(\alpha + ax - 2x^2),$$

donc en intégrant depuis $x=0$, jusqu'à $x=\infty$, en substituant les valeurs des intégrales en y, $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{da^2}$, et divisant par -2, on aura

$$\frac{d^2y}{da^2} - \tfrac{1}{2}a\frac{dy}{da} - \tfrac{1}{2}\alpha y = 0.$$

Cette équation conserve la même forme lorsqu'on remplace a par $-a$, donc

$$y = y_1 = \int_0^\infty e^{-ax-x^2}x^{\alpha-1}\,dx$$

est de même une intégrale particulière de cette équation. Puisque p est égal à $-\frac{1}{2}a$, on a $e^{-\int p\,da} = Ce^{\frac{a^2}{4}}$, et par conséquent,

$$y_1\frac{dy}{da} - y\frac{dy_1}{da} = Ce^{\frac{a^2}{4}}.$$

Si, pour trouver la quantité constante C, on fait $a=0$, on trouvera

$$y = \int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{da} = \int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha}\,dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

$$y_1 = \int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy_1}{da} = -\int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha}\,dx = -\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

donc en substituant:

$$C = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{a^2}{4}} = \int_0^\infty e^{ax-x^2}dx\,.\,x^{\alpha-1}\,.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx\,.\,x^{\alpha}$$
$$+\int_0^\infty e^{ax-x^2}dx\,.\,x^{\alpha}\,.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx\,.\,x^{\alpha-1}.$$

Si l'on met $a\sqrt{-1}$ à la place de a, on obtient la formule suivante:

$$\tfrac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\frac{a^2}{4}}=\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\cos ax\,.\,x^{\alpha-1}\,.\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\cos ax\,.\,x^{\alpha}$$
$$+\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\sin ax\,x^{\alpha-1}\,.\int_0^\infty dx\,.\,e^{-x^2}\sin ax\,.\,x^{\alpha}.$$

Note. Les quantités constantes (exposants), qui se trouvent dans les intégrales de ce mémoire, doivent avoir des valeurs telles que les intégrales ne deviennent pas infinies. Ces valeurs sont faciles à trouver.

XVI.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, 3. Berlin 1827, 1828.

Depuis longtemps les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires, ont été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans ces derniers temps, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions nommées elliptiques, tant pour leur belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques. La première idée de ces fonctions à été donnée par l'immortel *Euler*, en démontrant, que l'équation séparée

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

est intégrable algébriquement. Après *Euler*, *Lagrange* y a ajouté quelque chose, en donnant son élégante théorie de la transformation de l'intégrale $\int\frac{R\,.\,dx}{\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)}}$, où R est une fonction rationnelle de x. Mais le premier et, si je ne me trompe, le seul, qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est M. *Legendre*, qui, d'abord dans un mémoire sur les fonctions elliptiques, et ensuite dans ses excellents Exercices de mathématiques, a développé nombre de propriétés élégantes de ces fonctions, et en a montré l'application. Depuis la publication de cet ouvrage, rien n'a été ajouté à la théorie de M. *Legendre*. Je crois qu'on ne verra pas ici sans plaisir des recherches ultérieures sur ces fonctions.

En général on comprend sous la dénomination de fonctions elliptiques, toute fonction comprise dans l'intégrale

$$\int \frac{R\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}},$$

où R est une fonction rationnelle et $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des quantités constantes et *réelles*. M. *Legendre* a démontré que par des substitutions convenables on peut toujours ramener cette intégrale à la forme

$$\int \frac{P\,dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}},$$

où P est une fonction rationnelle de y^2. Par des réductions convenables, cette intégrale peut être ensuite ramenée à la forme

$$\int \frac{A+By^2}{C+Dy^2}\,\frac{dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4}},$$

et celle-ci à

$$\int \frac{A+B\sin^2\theta}{C+D\sin^2\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

où c est réel et moindre que l'unité.

Il suit de là, que toute fonction elliptique peut être réduite à l'une des trois formes:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}};\quad \int d\theta\sqrt{1-c^2\sin^2\theta},\quad \int \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

auxquelles M. *Legendre* donne les noms de fonctions elliptiques de la première, seconde et troisième espèce. Ce sont ces trois fonctions que M. *Legendre* a considérées, surtout la première, qui a les propriétés les plus remarquables et les plus simples.

Je me propose, dans ce mémoire, de considérer la fonction inverse, c'est-à-dire la fonction $\varphi\alpha$, déterminée par les équations

$$\alpha = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}},$$

$$\sin\theta = \varphi\alpha = x.$$

La dernière équation donne

$$d\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = d(\varphi\alpha) = dx,$$

donc

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

M. *Legendre* suppose c^2 positif, mais j'ai remarqué que les formules deviennent plus simples, en supposant c^2 négatif, égal à $-e^2$. De même j'écris pour plus de symétrie $1-c^2x^2$ au lieu de $1-x^2$, en sorte que la fonction $\varphi\alpha = x$ sera donnée par l'équation

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

ou bien

$$\varphi'\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)}.$$

Pour abréger, j'introduis deux autres fonctions de α, savoir

$$f\alpha = \sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha};\quad F\alpha = \sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}.$$

Plusieurs propriétés de ces fonctions se déduisent immédiatement des propriétés connues de la fonction elliptique de la première espèce, mais d'autres sont plus cachées. Par exemple on démontre que les équations $\varphi\alpha=0$, $f\alpha=0$, $F\alpha=0$ ont un nombre infini de racines, qu'on peut trouver toutes. Une des propriétés les plus remarquables est qu'on peut exprimer rationnellement $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ (m étant un nombre entier) en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Aussi rien n'est plus facile que de trouver $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, lorsqu'on connaît $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; mais le problème inverse, savoir de déterminer $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, est plus difficile, parcequ'il dépend d'une équation d'un degré élevé (savoir du degré m^2).

La résolution de cette équation est l'objet principal de ce mémoire. D'abord on fera voir, comment on peut trouver toutes les racines, au moyen des fonctions φ, f, F. On traitera ensuite de la résolution algébrique de l'équation en question, et on parviendra à ce résultat remarquable, que $\varphi\frac{\alpha}{m}$, $f\frac{\alpha}{m}$, $F\frac{\alpha}{m}$ peuvent être exprimés en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, par une formule qui, par rapport à α, ne contient d'autres irrationnalités que des radicaux. Cela donne une classe très générale d'équations qui sont résolubles algébriquement. Il est à remarquer que les expressions des racines contiennent des quantités constantes qui, en général, ne sont pas exprimables par des quantités algébriques. Ces quantités constantes dépendent d'une équation du degré m^2-1. On fera voir comment, au moyen de fonctions algébriques, on peut en ramener la résolution à celle d'une équation du degré $m+1$. On donnera plusieurs expressions des fonctions $\varphi(2n+1)\alpha$, $f(2n+1)\alpha$, $F(2n+1)\alpha$ en fonction de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. On en déduira ensuite les valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en fonction de α. On démontrera, que ces fonctions peuvent être décomposées en un nombre infini de facteurs, et même en une infinité de fractions partielles.

§ I.

Propriétés fondamentales des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

1.

En supposant que

(1) $$\varphi\alpha = x,$$

on aura en vertu de ce qui précède

(2) $$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Par là on voit que α, considéré comme fonction de x, est positif depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{c}$. En faisant donc

(3) $$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

il est évident que $\varphi\alpha$ est positif et va en augmentant depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{\omega}{2}$, et qu'on aura

(4) $$\varphi(0)=0,\quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{c}.$$

Comme α change de signe, lorsqu'on écrit $-x$ à la place de x, il en est de même de la fonction $\varphi\alpha$ par rapport à α, et par conséquent on aura l'équation

(5) $$\varphi(-\alpha) = -\varphi\alpha.$$

En mettant dans (1) xi au lieu de x (où i, pour abréger, représente la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$) et désignant la valeur de α par βi, il viendra

(6) $$xi=\varphi(\beta i) \quad\text{et}\quad \beta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

β est réel et positif depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{e}$, donc en faisant

(7) $$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+c^2x^2)}},$$

x sera positif, depuis $\beta=0$ jusqu'à $\beta=\frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire que la fonction $\frac{1}{i}\varphi(\beta i)$ sera positive entre les mêmes limites. En faisant $\beta=\alpha$ et $y=\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$, on a

$$\alpha = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-e^2y^2)(1+c^2y^2)}},$$

donc on voit, qu'en supposant c au lieu de e et e au lieu de c,

$$\frac{\varphi(\alpha i)}{i} \text{ se changera en } \varphi\alpha.$$

Et comme

$$f\alpha = \sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha},$$
$$F\alpha = \sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha},$$

on voit que par le changement de c en e et e en c, $f(\alpha i)$ et $F(\alpha i)$ se changeront respectivement en $F\alpha$ et $f\alpha$. Enfin les équations (3) et (7) font voir que par la même transformation ω et ϖ se changeront respectivement en ϖ et ω.

D'après la formule (7) on aura $x=\frac{1}{e}$ pour $\beta=\frac{\varpi}{2}$, donc en vertu de l'équation $xi=\varphi(\beta i)$, il viendra

(8) $$\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = i\cdot\frac{1}{e}.$$

2.

En vertu de ce qui précède, on aura les valeurs de $\varphi\alpha$ pour toute valeur réelle de α, comprise entre $-\frac{\omega}{2}$ et $+\frac{\omega}{2}$, et pour toute valeur imaginaire de la forme βi de cette quantité, si β est une quantité contenue entre les limites $-\frac{\varpi}{2}$ et $+\frac{\varpi}{2}$. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de cette fonction pour une valeur quelconque, réelle ou imaginaire, de la variable. Pour y parvenir, nous allons d'abord établir les propriétés fondamentales des fonctions φ, f et F.

Ayant

$$f^2\alpha = 1 - c^2\varphi^2\alpha,$$
$$F^2\alpha = 1 + e^2\varphi^2\alpha,$$

on aura, en différentiant

$$f\alpha . f'\alpha = -c^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha,$$
$$F\alpha . F'\alpha = e^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha.$$

Or d'après (2) on a

$$\varphi'\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)} = f\alpha . F\alpha,$$

donc, en substituant cette valeur de $\varphi'\alpha$ dans les deux équations précédentes, on trouvera que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont liées entre elles par les équations

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi'\alpha = f\alpha . F\alpha, \\ f'\alpha = -c^2\varphi\alpha . F\alpha, \\ F'\alpha = e^2\varphi\alpha . f\alpha. \end{cases}$$

Cela posé, je dis qu'en désignant par α et β deux indéterminées, on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\[2ex] f(\alpha+\beta) = \dfrac{f\alpha . f\beta - c^2\varphi\alpha . \varphi\beta . F\alpha . F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\[2ex] F(\alpha+\beta) = \dfrac{F\alpha . F\beta + e^2\varphi\alpha . \varphi\beta . f\alpha . f\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Ces formules peuvent être déduites sur le champ des propriétés connues des fonctions elliptiques (*Legendre* Exercices de Calcul intégral); mais on peut aussi les vérifier aisément de la manière suivante.

En désignant par r le second membre de la première des équations (10), on aura, en différentiant par rapport à α,

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\varphi'\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . F\alpha . f'\alpha + \varphi\beta . f\alpha . F'\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} - \frac{(\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha)\, 2e^2c^2\varphi\alpha . \varphi^2\beta . \varphi'\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}.$$

En substituant pour $\varphi'\alpha$, $f'\alpha$, $F'\alpha$ leurs valeurs données par les équations (9), il viendra

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{f\alpha . F\alpha . f\beta . F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta} - \frac{2e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta . f\alpha . f\beta . F\alpha . F\beta}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}$$
$$+ \frac{\varphi\alpha . \varphi\beta . (1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)(-c^2F^2\alpha + e^2f^2\alpha) - 2e^2c^2\varphi\alpha . \varphi\beta . \varphi^2\beta . f^2\alpha . F^2\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2},$$

d'où, en substituant pour $f^2\alpha$ et $F^2\alpha$ leurs valeurs $1-c^2\varphi^2\alpha$, $1+e^2\varphi^2\alpha$, et en réduisant, on tire

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{(1-e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)[(e^2-c^2)\varphi\alpha . \varphi\beta + f\alpha . f\beta . F\alpha . F\beta] - 2e^2c^2\varphi\alpha . \varphi\beta(\varphi^2\alpha + \varphi^2\beta)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta)^2}.$$

Maintenant α et β entrent symétriquement dans l'expression de r; donc on aura la valeur de $\frac{dr}{d\beta}$, en permutant α et β dans la valeur de $\frac{dr}{d\alpha}$. Or par là l'expression de $\frac{dr}{d\alpha}$ ne change pas de valeur, donc on aura

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dr}{d\beta}.$$

Cette équation aux différentielles partielles fait voir que r est fonction de $\alpha+\beta$; donc on aura

$$r = \psi(\alpha+\beta).$$

La forme de la fonction ψ se trouvera en donnant à β une valeur particulière. En supposant par exemple $\beta = 0$, et en remarquant que $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, les deux valeurs de r deviendront

$$r = \varphi\alpha \quad \text{et} \quad r = \psi\alpha,$$

donc

$$\psi\alpha = \varphi\alpha,$$

d'où

$$r = \psi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha+\beta).$$

La première des formules (10) a donc effectivement lieu.

On vérifiera de la même manière les deux autres formules.

3.

Des formules (10) on peut déduire une foule d'autres. Je vais rapporter quelques-unes des plus remarquables. Pour abréger je fais

$$(11) \qquad 1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta = R.$$

En changeant d'abord le signe de β, on obtiendra

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta)+\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{2\,\varphi\alpha.f\beta.F\beta}{R}, \\[2mm] \varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{2\,\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}, \\[2mm] f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=\dfrac{2\,f\alpha.f\beta}{R}, \\[2mm] f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)=\dfrac{-2\,c^2.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.F\beta}{R}, \\[2mm] F(\alpha+\beta)+F(\alpha-\beta)=\dfrac{2\,F\alpha.F\beta}{R}, \\[2mm] F(\alpha+\beta)-F(\alpha-\beta)=\dfrac{2\,e^2.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.f\beta}{R}. \end{cases}$$

En formant le produit de $\varphi(\alpha+\beta)$ et $\varphi(\alpha-\beta)$, on trouvera

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}\cdot\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta-\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}$$
$$=\frac{\varphi^2\alpha.f^2\beta.F^2\beta-\varphi^2\beta.f^2\alpha.F^2\alpha}{R^2},$$

ou, en substituant les valeurs de $f^2\beta$, $F^2\beta$, $f^2\alpha$, $F^2\alpha$ en $\varphi\beta$ et $\varphi\alpha$,

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^4\beta+e^2c^2\varphi^2\beta.\varphi^4\alpha}{R^2}$$
$$=\frac{(\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta)(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)}{R^2};$$

or $R=1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta$, donc

$$(13)\quad \varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta}{R}.$$

On trouvera de même

$$(14)\quad \begin{cases} f(\alpha+\beta).f(\alpha-\beta)=\dfrac{f^2\alpha-c^2\varphi^2\beta.F^2\alpha}{R}=\dfrac{f^2\beta-c^2\varphi^2\alpha.F^2\beta}{R} \\[2mm] \qquad =\dfrac{1-c^2\varphi^2\alpha-c^2\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\dfrac{f^2\alpha.f^2\beta-c^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}, \\[2mm] F(\alpha+\beta).F(\alpha-\beta)=\dfrac{F^2\alpha+e^2\varphi^2\beta.f^2\alpha}{R}=\dfrac{F^2\beta+e^2\varphi^2\alpha.f^2\beta}{R} \\[2mm] \qquad =\dfrac{1+e^2\varphi^2\alpha+e^2\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\dfrac{F^2\alpha.F^2\beta-e^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}. \end{cases}$$

4.

En faisant dans les formules (10) $\beta=\pm\frac{\omega}{2}$, $\beta=\pm\frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant que $f\left(\pm\frac{\omega}{2}\right)=0$, $F\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=0$, on aura

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\pm\dfrac{\omega}{2}\right)=\pm\varphi\dfrac{\omega}{2}\cdot\dfrac{f\alpha}{F\alpha};\; f\left(\alpha\pm\dfrac{\omega}{2}\right)=\mp\dfrac{F\frac{\omega}{2}}{\varphi\frac{\omega}{2}}\cdot\dfrac{\varphi\alpha}{F\alpha}; \\[2mm] \qquad F\left(\alpha\pm\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{F\frac{\omega}{2}}{F\alpha}; \\[2mm] \varphi\left(\alpha\pm\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\pm\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i\right)\cdot\dfrac{F\alpha}{f\alpha};\; F\left(\alpha\pm\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\mp\dfrac{f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}\cdot\dfrac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\[2mm] \qquad f\left(\alpha\pm\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\dfrac{f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\alpha}; \end{cases}$$

ou bien:

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha\pm\dfrac{\omega}{2}\right)=\pm\dfrac{1}{c}\,\dfrac{f\alpha}{F\alpha};\; f\left(\alpha\pm\dfrac{\omega}{2}\right)=\mp\sqrt{e^2+c^2}\,\dfrac{\varphi\alpha}{F\alpha}; \\[2mm] \qquad F\left(\alpha\pm\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}\,\dfrac{1}{F\alpha}; \\[2mm] \varphi\left(\alpha\pm\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\pm\dfrac{i}{e}\,\dfrac{F\alpha}{f\alpha};\; F\left(\alpha\pm\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\pm i\sqrt{e^2+c^2}\,\dfrac{\varphi\alpha}{f\alpha}; \\[2mm] \qquad f\left(\alpha\pm\dfrac{\varpi}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{e^2+c^2}}{e}\,\dfrac{1}{f\alpha}. \end{cases}$$

De là on tire sur le champ

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+\alpha\right)=\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}-\alpha\right);\; f\left(\dfrac{\omega}{2}+\alpha\right)=-f\left(\dfrac{\omega}{2}-\alpha\right); \\[2mm] \qquad F\left(\dfrac{\omega}{2}+\alpha\right)=F\left(\dfrac{\omega}{2}-\alpha\right); \\[2mm] \varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i-\alpha\right);\; F\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=-F\left(\dfrac{\varpi}{2}i-\alpha\right); \\[2mm] \qquad f\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=f\left(\dfrac{\varpi}{2}i-\alpha\right). \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \varphi\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\alpha + \frac{\varpi}{2}i\right) = \pm\frac{i}{ce}; \quad F\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right)F\alpha = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{c}; \\ \qquad f\left(\alpha \pm \frac{\varpi}{2}i\right)f\alpha = \frac{\sqrt{e^2+c^2}}{e}. \end{cases}$$

En faisant $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}i$, on en déduit

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}, \quad f\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}, \quad F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}.$$

En mettant ensuite dans les trois premières équations (17) $\alpha + \frac{\omega}{2}$ au lieu de α, et dans les trois dernières $\alpha + \frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, on obtiendra les suivantes

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\omega) = -\varphi\alpha; \quad f(\alpha+\omega) = -f\alpha; \quad F(\alpha+\omega) = F\alpha; \\ \varphi(\alpha+\varpi i) = -\varphi\alpha; \quad f(\alpha+\varpi i) = f\alpha; \quad F(\alpha+\varpi i) = -F\alpha; \end{cases}$$

et en mettant $\alpha+\omega$ et $\alpha+\varpi i$ au lieu de α:

$$(20)\quad \begin{cases} \varphi(2\omega+\alpha) = \varphi\alpha; \quad \varphi(2\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha; \quad \varphi(\omega+\varpi i+\alpha) = \varphi\alpha; \\ f(2\omega+\alpha) = f\alpha; \quad f(\varpi i+\alpha) = f\alpha; \\ F(\omega+\alpha) = F\alpha; \quad F(2\varpi i+\alpha) = F\alpha. \end{cases}$$

Ces équations font voir que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont des fonctions *périodiques*. On en déduira sans peine les suivantes, où m et n sont deux nombres entiers positifs ou négatifs:

$$(21)\quad \begin{cases} \varphi[(m+n)\omega + (m-n)\varpi i + \alpha] = \varphi\alpha; \\ \varphi[(m+n)\omega + (m-n+1)\varpi i + \alpha] = -\varphi\alpha; \\ f(2m\omega + n\varpi i + \alpha) = f\alpha; \quad f[(2m+1)\omega + n\varpi i + \alpha] = -f\alpha. \\ F(m\omega + 2n\varpi i + \alpha) = F\alpha; \quad F[m\omega + (2n+1)\varpi i + \alpha] = -F\alpha. \end{cases}$$

Ces formules peuvent aussi s'écrire comme il suit:

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) = \pm(-1)^{m+n}\varphi\alpha, \\ f(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) = (-1)^m f\alpha, \\ F(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) = (-1)^n F\alpha. \end{cases}$$

On peut remarquer comme cas particuliers:

$$(22')\quad \begin{cases} \varphi(m\omega \pm \alpha) = \pm(-1)^m\varphi\alpha; \quad \varphi(n\varpi i \pm \alpha) = \pm(-1)^n\varphi\alpha; \\ f(m\omega \pm \alpha) = (-1)^m f\alpha; \quad f(n\varpi i \pm \alpha) = f\alpha; \\ F(m\omega \pm \alpha) = F\alpha; \quad F(n\varpi i \pm \alpha) = (-1)^n F\alpha. \end{cases}$$

5.

Les formules qu'on vient d'établir font voir qu'on aura les valeurs des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, si on les connaît pour les valeurs réelles de cette quantité, comprises entre $\frac{\omega}{2}$ et $-\frac{\omega}{2}$ et pour les valeurs imaginaires de la forme βi, où β est compris entre $\frac{\varpi}{2}$ et $-\frac{\varpi}{2}$.

En effet, supposons qu'on demande la valeur des fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$, où α et β sont des quantités réelles quelconques. En mettant dans les formules (10) βi à la place de β, il est clair qu'on aura les trois fonctions dont il s'agit, exprimées par les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$. Il ne reste donc qu'à déterminer ces dernières. Or, quelles que soient les valeurs de α et β, on peut toujours trouver deux nombres entiers m et n, tels que $\alpha = m\omega \pm \alpha'$, $\beta = n\varpi \pm \beta'$, où α' est une quantité comprise entre 0 et $+\frac{\omega}{2}$, et β' entre 0 et $+\frac{\varpi}{2}$. Donc on aura, en vertu des équations (22′), en substituant les valeurs précédentes de α et β,

$$\begin{aligned} \varphi\alpha &= \varphi(m\omega \pm \alpha') = \pm(-1)^m\varphi\alpha', \\ f\alpha &= f(m\omega \pm \alpha') = (-1)^m f\alpha', \\ F\alpha &= F(m\omega \pm \alpha') = F\alpha', \\ \varphi(\beta i) &= \varphi(n\varpi i \pm \beta' i) = \pm(-1)^n\varphi(\beta' i), \\ f(\beta i) &= f(n\varpi i \pm \beta' i) = f(\beta' i), \\ F(\beta i) &= F(n\varpi i \pm \beta' i) = (-1)^n F(\beta' i). \end{aligned}$$

Donc les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ seront exprimées comme on vient de le dire, et par suite aussi les fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$.

Nous avons vu précédemment, que $\varphi\alpha$ est réel depuis $\alpha = -\frac{\omega}{2}$ jusqu'à

$\alpha = +\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ est réel depuis $\alpha = -\frac{\varpi}{2}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{\varpi}{2}$. Donc en vertu des équations (22) il est clair

1) que $\varphi\alpha$ et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ sont réels pour toute valeur réelle de α; $\varphi\alpha$ est compris entre $-\frac{1}{c}$ et $+\frac{1}{c}$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ entre $-\frac{1}{e}$ et $+\frac{1}{e}$;

2) que $\varphi\alpha$ s'évanouit pour $\alpha = m\omega$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ pour $\alpha = m\varpi$, m étant un nombre entier positif ou négatif; mais $\varphi\alpha$ n'est pas nul pour aucune autre valeur réelle de α.

En remarquant, que $f\alpha = \sqrt{1 - c^2\varphi^2\alpha}$, $F\alpha = \sqrt{1 + e^2\varphi^2\alpha}$, il suit de ce que nous venons de dire

1) que les fonctions $f\alpha$, $F\alpha$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$ sont réelles pour toute valeur de α;

2) que $f\alpha$ est compris entre les limites -1 et $+1$ et $F\alpha$ entre les limites $+1$ et $+\sqrt{1 + \frac{e^2}{c^2}}$, de sorte que $F\alpha$ est positif pour toute valeur réelle de α;

3) que $f(\alpha i)$ est positif et compris entre les limites $+1$ et $\sqrt{1 + \frac{c^2}{e^2}}$ et $F(\alpha i)$ entre les limites -1 et $+1$ pour toute valeur réelle de α;

4) que $f\alpha$ s'évanouit pour $\alpha = (m + \frac{1}{2})\omega$ et $F(\alpha i)$ pour $\alpha = (m + \frac{1}{2})\varpi$; mais que ces fonctions ne s'annulent pour aucune autre valeur de α.

On remarquera ce qui suit, comme corollaires des formules (22):

1) Soit $\alpha = 0$. Dans ce cas, en remarquant que $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, on aura

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi(m\omega + n\varpi i) = 0, \\ f(m\omega + n\varpi i) = (-1)^m, \\ F(m\omega + n\varpi i) = (-1)^n. \end{cases}$$

2) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2}$. En vertu des équations:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c},\ f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0,\ F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{e^2 + c^2}}{c} = \frac{b}{c},$$

on aura

$$(24) \qquad \begin{cases} \varphi[(m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i] = (-1)^{m+n}\frac{1}{c}, \\ f[(m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i] = 0, \\ F[(m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i] = (-1)^n\frac{b}{c}. \end{cases}$$

3) Soit $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$. En vertu des équations

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{i}{e},\ f\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{b}{e},\ F\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = 0,$$

on aura

$$(25) \qquad \begin{cases} \varphi[m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = (-1)^{m+n}\frac{i}{e}, \\ f[m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = (-1)^m\frac{b}{e}, \\ F[m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = 0. \end{cases}$$

4) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$. En vertu des équations ci-dessus on aura

$$(26) \qquad \begin{cases} \varphi[(m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = \frac{1}{0}, \\ f[(m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = \frac{1}{0}, \\ F[(m + \frac{1}{2})\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i] = \frac{1}{0}. \end{cases}$$

6.

Les équations (23), (24), (25) font voir que la fonction $\varphi\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + n\varpi i$; que $f\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = (m + \frac{1}{2})\omega + n\varpi i$, et que $F\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + (n + \frac{1}{2})\varpi i$. Or je dis que pour toute autre valeur de α, les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ auront nécessairement une valeur différente de zéro. Supposons en effet qu'on ait

$$\varphi(\alpha + \beta i) = 0,$$

α et β étant des quantités réelles. En vertu de la première des formules (10), cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$\frac{\varphi\alpha . f(\beta i)F(\beta i) + \varphi(\beta i)f\alpha . F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2(\beta i)} = 0.$$

Maintenant les quantités $\varphi\alpha$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ sont réelles et $\varphi(\beta i)$ est de la forme iA, où A est réel; donc cette équation ne peut subsister à moins qu'on n'ait séparément

$$\varphi\alpha . f(\beta i)F(\beta i) = 0;\ \varphi(\beta i)f\alpha . F\alpha = 0.$$

Ces équations ne peuvent être satisfaites que de deux manières, savoir en faisant

$$\varphi\alpha=0,\quad \varphi(\beta i)=0,$$

ou

$$f(\beta i)F(\beta i)=0,\quad f\alpha . F\alpha=0.$$

Les deux premières équations donnent $\alpha=m\omega$; $\beta=n\varpi$. Les deux dernières, en remarquant que $F\alpha$ et $f(\beta i)$ ne peuvent jamais s'évanouir, donnent

$$f\alpha=0,\quad F(\beta i)=0,$$

d'où

$$\alpha=(m+\tfrac{1}{2})\omega,\quad \beta=(n+\tfrac{1}{2})\varpi.$$

Mais pour ces valeurs de α et β, la valeur de $\varphi(\alpha+\beta i)$ deviendra infinie; donc les seules valeurs de α et β sont $\alpha=m\omega$ et $\beta=n\varpi$, et par conséquent toutes les racines de l'équation

$$\varphi x=0,$$

peuvent être représentées par

$$x=m\omega+n\varpi i. \tag{27}$$

De la même manière on trouvera que toutes les racines de l'équation

$$fx=0,$$

peuvent être représentées par

$$x=(m+\tfrac{1}{2})\omega+n\varpi i, \tag{28}$$

et celles de l'équation

$$Fx=0,$$

par

$$x=m\omega+(n+\tfrac{1}{2})\varpi i. \tag{29}$$

7.

Les formules (26) font voir qu'on satisfait aux trois équations

$$\varphi x=\tfrac{1}{0},\quad fx=\tfrac{1}{0},\quad Fx=\tfrac{1}{0},$$

en donnant à x une des valeurs de la forme

$$x=(m+\tfrac{1}{2})\omega+(n+\tfrac{1}{2})\varpi i. \tag{30}$$

Or on peut démontrer que les équations en question n'ont pas d'autres racines. En effet, ayant

$$\varphi x=\frac{i}{ec}\,\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)},\quad fx=\frac{b}{e}\,\frac{1}{f\left(x-\frac{\varpi}{2}i\right)},\quad Fx=\frac{b}{c}\,\frac{1}{F\left(x-\frac{\omega}{2}\right)};$$

les équations en question entraîneront celles-ci:

$$\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)=0,\quad f\left(x-\frac{\varpi}{2}i\right)=0,\quad F\left(x-\frac{\omega}{2}\right)=0;$$

mais en vertu de ce qu'on vient de voir dans le numéro précédent, ces équations donnent respectivement

$$x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i=m\omega+n\varpi i;\quad x-\frac{\varpi}{2}i=(m+\tfrac{1}{2})\omega+n\varpi i,$$

$$x-\frac{\omega}{2}=m\omega+(n+\tfrac{1}{2})\varpi i;$$

ces trois équations sont équivalentes à la suivante:

$$x=(m+\tfrac{1}{2})\omega+(n+\tfrac{1}{2})\varpi i,$$

c. q. f. d.

8.

Ayant trouvé comme ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi x=0,\quad fx=0,\quad Fx=0,$$
$$\varphi x=\tfrac{1}{0},\quad fx=\tfrac{1}{0},\quad Fx=\tfrac{1}{0};$$

je vais maintenant chercher les racines des équations plus générales

$$\varphi x=\varphi a,\quad fx=fa,\quad Fx=Fa,$$

où a est une quantité quelconque réelle ou imaginaire. Considérons d'abord l'équation

$$\varphi x-\varphi a=0.$$

En faisant dans la seconde des formules (12)

$$\alpha=\frac{x+a}{2},\quad \beta=\frac{x-a}{2},$$

on trouvera

$$\varphi x-\varphi a=\frac{2\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)f\left(\frac{x+a}{2}\right)F\left(\frac{x+a}{2}\right)}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{x+a}{2}\right)\varphi^2\left(\frac{x-a}{2}\right)}=0.$$

Cette équation ne peut subsister que dans l'un des cinq cas suivants:

1) si $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)=0$, d'où $x=a+2m\omega+2n\varpi i$,

2) si $f\left(\frac{x+a}{2}\right)=0$, d'où $x=-a+(2m+1)\omega+2n\varpi i$,

3) si $F\left(\frac{x+a}{2}\right)=0$, d'où $x=-a+2m\omega+(2n+1)\varpi i$,

4) si $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)=\frac{1}{0}$, d'où $x=a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i$,

5) si $\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right)=\frac{1}{0}$, d'où $x=-a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i$.

La résolution de ces cinq équations est contenue dans les formules (27), (28), (29), (30).

Des valeurs trouvées de x il faut rejeter celles que donne la formule

$$x=-a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i,$$

car une telle valeur de x donne, en vertu de l'équation (22),

$$\varphi x=-\varphi a,$$

tandis qu'on doit avoir $\varphi x=\varphi a$; mais les autres valeurs de x, exprimées par les quatre premières formules, peuvent être admises. Elles sont, comme on le voit, contenues dans la seule formule:

$$x=(-1)^{m+n}a+m\omega+n\varpi i. \tag{31}$$

Telle est donc l'expression générale de toutes les racines de l'équation

$$\varphi x=\varphi a.$$

On trouvera de la même manière que toutes les racines de l'équation

$$fx=fa$$

sont représentées par la formule

$$x=\pm a+2m\omega+n\varpi i, \tag{32}$$

et toutes celles de l'équation

$$Fx=Fa$$

par la formule

$$x=\pm a+m\omega+2n\varpi i. \tag{33}$$

§ II.

Formules qui donnent les valeurs de $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ exprimées en fonctions rationnelles de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

9.

Reprenons les formules (12). En faisant dans la 1^e, la 3^e et la 5^e $\alpha=n\beta$, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(n+1)\beta &= -\varphi(n-1)\beta+\frac{2\varphi(n\beta)f\beta.F\beta}{R}, \\ f(n+1)\beta &= -f(n-1)\beta+\frac{2f(n\beta)f\beta}{R}, \\ F(n+1)\beta &= -F(n-1)\beta+\frac{2F(n\beta)F\beta}{R}, \end{aligned}\right. \tag{34}$$

où $R=1+e^2c^2\varphi^2(n\beta)\varphi^2\beta$.

Ces formules donnent la valeur de $\varphi(n+1)\beta$ en $\varphi(n-1)\beta$ et $\varphi(n\beta)$; celle de $f(n+1)\beta$ en $f(n-1)\beta$ et $f(n\beta)$, et celle de $F(n+1)\beta$ en $F(n-1)\beta$ et $F(n\beta)$. Donc en faisant successivement $n=1, 2, 3 \ldots,$ on trouvera successivement les valeurs des fonctions:

$$\varphi(2\beta),\ \varphi(3\beta),\ \varphi(4\beta)\ldots\varphi(n\beta),$$
$$f(2\beta),\ f(3\beta),\ f(4\beta)\ldots f(n\beta),$$
$$F(2\beta),\ F(3\beta),\ F(4\beta)\ldots F(n\beta),$$

exprimées en fonctions rationnelles des trois quantités

$$\varphi\beta,\ f\beta,\ F\beta.$$

En faisant p. ex. $n=1$, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(2\beta) &= \frac{2\varphi\beta.f\beta.F\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ f(2\beta) &= -1+\frac{2f^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ F(2\beta) &= -1+\frac{2F^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ étant des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, on peut toujours les réduire à la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des fonctions entières de $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$. De même il est clair que le dénominateur Q aura la même valeur pour les trois fonctions que l'on considère. Soit donc

$$(35') \qquad \varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\ f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},\ F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n},$$

on aura également

$$\varphi(n+1)\beta=\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},\ f(n+1)\beta=\frac{P'_{n+1}}{Q_{n+1}},\ F(n+1)\beta=\frac{P''_{n+1}}{Q_{n+1}},$$
$$\varphi(n-1)\beta=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ f(n-1)\beta=\frac{P'_{n-1}}{Q_{n-1}},\ F(n-1)\beta=\frac{P''_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

En substituant ces valeurs, la première des formules (34) deviendra

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}+\frac{2f\beta.F\beta\dfrac{P_n}{Q_n}}{1+c^2e^2\varphi^2\beta\dfrac{P_n^2}{Q_n^2}},$$

ou bien

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{-P_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2P_nQ_nQ_{n-1}f\beta.F\beta}{Q_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2)}.$$

En égalant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions, on aura

$$(36) \qquad P_{n+1}=-P_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2f\beta.F\beta.P_nQ_nQ_{n-1},$$
$$(37) \qquad Q_{n+1}=\quad Q_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2).$$

La seconde et la troisième des équations (34) donneront de la même manière

$$(38) \qquad P'_{n+1}=-P'_{n-1}(Q_n^2+c^2e^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2f\beta.P_n'Q_nQ_{n-1},$$
$$(39) \qquad P''_{n+1}=-P''_{n-1}(Q_n^2+e^2c^2\varphi^2\beta.P_n^2)+2F\beta.P_n''Q_nQ_{n-1}.$$

En faisant dans ces quatre formules $n=1, 2, 3\ldots$, et remarquant qu'on aura

$$Q_0=1,\ Q_1=1,\quad P_0=0,\ P_1=\varphi\beta,$$
$$P_0'=1,\ P_1'=f\beta,\ P_0''=1,\ P_1''=F\beta,$$

on trouvera successivement les fonctions entières Q_n, P_n, P_n', P_n'', pour toutes les valeurs de n.

Soient pour abréger:

$$(40) \qquad \varphi\beta=x,\ f\beta=y,\ F\beta=z,$$
$$(41) \qquad R_n=Q_n^2+e^2c^2x^2P_n^2,$$

les formules précédentes donneront

$$(42) \qquad \begin{cases} Q_{n+1}=Q_{n-1}R_n, \\ P_{n+1}=-P_{n-1}R_n+2yzP_nQ_nQ_{n-1}, \\ P'_{n+1}=-P'_{n-1}R_n+2yP_n'Q_nQ_{n-1}, \\ P''_{n+1}=-P''_{n-1}R_n+2zP_n''Q_nQ_{n-1}. \end{cases}$$

En posant $n=1, 2$, on aura

$$(43) \qquad \begin{cases} R_1=Q_1^2+e^2c^2x^2P_1^2=1+e^2c^2x^4, \\ Q_2=Q_0R_1=1+e^2c^2x^4, \\ P_2=-P_0R_1+2yzP_1Q_1Q_0=2xyz, \\ P_2'=-P_0'R_1+2yP_1'Q_1Q_0=-1-e^2c^2x^4+2y^2, \\ P_2''=-P_0''R_1+2zP_1''Q_1Q_0=-1-e^2c^2x^4+2z^2. \end{cases}$$

$$(44) \qquad \begin{cases} R_2=Q_2^2+e^2c^2x^2P_2^2=(1+e^2c^2x^4)^2+e^2c^2x^2.4x^2y^2z^2, \\ Q_3=Q_1R_2=R_2, \\ P_3=-P_1R_2+2yzP_2Q_2Q_1=-xR_2+4y^2z^2xQ_2 \\ \qquad\qquad =x(4y^2z^2Q_2-R_2), \\ P_3'=-P_1'R_2+2yP_2'Q_2Q_1=-yR_2+2yP_2'Q_2 \\ \qquad\qquad =y(2Q_2P_2'-R_2), \\ P_3''=z(2Q_2P_2''-R_2). \end{cases}$$

En continuant de la sorte, et en remarquant que $y^2=1-c^2x^2$, $z^2=1+e^2x^2$, on verra aisément que les quantités

$$Q_n,\ \frac{P_{2n}}{xyz},\ \frac{P_{2n+1}}{x},\ P_{2n}',\ \frac{P'_{2n+1}}{y},\ P_{2n}'',\ \frac{P''_{2n+1}}{z}$$

sont des fonctions entières des trois quantités x^2, y^2, z^2, et par conséquent aussi de l'une quelconque de ces quantités, pour une valeur entière quelconque de n.

Cela fait voir que les expressions de $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ seront de la forme suivante:

$$(45) \qquad \begin{cases} \varphi(2n\beta)=\varphi\beta.f\beta.F\beta.T, & \varphi(2n+1)\beta=\varphi\beta.T', \\ f(2n\beta)=T_1, & f(2n+1)\beta=f\beta.T'', \\ F(2n\beta)=T_2, & F(2n+1)\beta=F\beta.T''', \end{cases}$$

où T etc. représentent des fonctions rationnelles des quantités $(\varphi\beta)^2$, $(f\beta)^2$, $(F\beta)^2$.

§ III.

Résolution des équations

$$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\ f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},\ F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n}.$$

10.

D'après ce qu'on a vu, les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ s'expriment rationnellement en x, y, z. La réciproque n'a pas lieu, car les équations (35′) sont en général d'un degré très-élevé. Elles ont par cette raison un certain nombre de racines. Nous allons voir comment on peut aisément exprimer toutes ces racines au moyen des fonctions φ, f, F.

A. Considérons d'abord l'équation $\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n}$, ou $Q_n.\varphi(n\beta)=P_n$, et cherchons toutes les valeurs de x. Il faut distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair:

1) *Si n est un nombre pair.*

D'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent (45), on aura dans ce cas

$$\varphi(2n\beta)=xyz.\psi(x^2),$$

ou, en vertu des formules

$$y=\sqrt{1-c^2x^2},\ z=\sqrt{1+e^2x^2}:$$

$$\varphi(2n\beta)=x.\psi(x^2)\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}.$$

Donc l'équation en x deviendra,

$$\varphi^2(2n\beta)=x^2(\psi x^2)^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2).$$

En désignant le second membre par $\theta(x^2)$, on aura

$$\varphi^2(2n\beta)=\theta(x^2).$$

$\varphi\beta$ étant une des valeurs de x, on aura

(46) $$\varphi^2(2n\beta)=\theta(\varphi^2\beta),$$

équation qui a lieu, quelle que soit la valeur de β. On trouvera comme il suit les autres valeurs de x. Soit $x=\varphi\alpha$ une racine quelconque, on doit avoir

$$\varphi^2(2n\beta)=\theta(\varphi^2\alpha).$$

Or, en mettant dans (46) α au lieu de β, il viendra

$$\varphi^2(2n\alpha)=\theta(\varphi^2\alpha),$$

donc

(47) $$\varphi^2(2n\beta)=\varphi^2(2n\alpha),$$

équation qui revient à ces deux que voici:

$$\varphi(2n\alpha)=\varphi(2n\beta)\ \text{ et }\ \varphi(2n\alpha)=-\varphi(2n\beta).$$

La première donne, en vertu de (31),

$$2n\alpha=(-1)^{m+\mu}2n\beta+m\omega+\mu\varpi i,$$

où m et μ sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, zéro y compris.

La seconde donne les mêmes valeurs de $2n\alpha$, mais de signe contraire, comme il est aisé de le voir, en l'écrivant comme il suit:

$$\varphi(-2n\alpha)=\varphi(2n\beta).$$

Toute valeur de $2n\alpha$ qui satisfait à l'équation (47) peut donc être représentée par

$$2n\alpha=\pm[(-1)^{m+\mu}2n\beta+m\omega+\mu\varpi i].$$

De là on tire la valeur de α, en divisant par $2n$, savoir

$$\alpha=\pm\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right).$$

Ayant la valeur de α, on aura

(48) $$\varphi\alpha=\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right)=x.$$

Donc toutes les valeurs de x sont contenues dans cette expression, et on les trouvera en donnant aux nombres m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Or pour avoir toutes celles qui sont différentes entre elles, il suffit de donner à m et μ des valeurs entières moindres que $2n$. En effet, quels que soient ces nombres, on peut toujours les supposer réduits à la forme:

$$m=2nk+m',\ \mu=2nk'+\mu',$$

où k, k' sont des nombres entiers, et m', μ' des nombres entiers moindres que $2n$. En substituant ces valeurs dans l'expression de x, elle deviendra:

$$x=\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i+k\omega+k'\varpi i\right);$$

or en vertu de (22) cette expression se réduit à

$$(49)\qquad x=\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i\right).$$

Cette valeur de x est de la même forme que la précédente (48), seulement m et μ sont remplacés par m' et μ', qui, tous les deux, sont positifs et moindres que $2n$; donc on obtiendra toutes les valeurs différentes de x, en donnant seulement à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ exclusivement. Toutes ces valeurs sont nécessairement différentes entre elles. En effet, supposons par exemple qu'on ait

$$\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i\right)$$
$$=\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right),$$

il s'ensuivrait, d'après (31),

$$(-1)^{m'+\mu'}\beta+\frac{m'}{2n}\omega+\frac{\mu'}{2n}\varpi i=\pm\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right)+k\omega+k'\varpi i,$$

k et k' étant des entiers. Cette équation donne

$$\mu'=k'.2n\pm\mu,\ \ m'=k.2n\pm m,\ \ (-1)^{m'+\mu'}=\pm(-1)^{m+\mu}.$$

Les deux premières équations ne peuvent subsister à moins qu'on n'ait $k'=1$, $k=1$, $\mu'=2n-\mu$, $m'=2n-m$, et alors la dernière deviendra

$$(-1)^{4n-m-\mu}=-(-1)^{m+\mu},$$

d'où l'on tire

$$(-1)^{2m+2\mu}=-1,$$

résultat absurde. Donc toutes les valeurs de x, contenues dans la formule (48) sont différentes entre elles, si m et μ sont positifs et moindres que $2n$.

Le nombre total des valeurs de x est, comme il est aisé de le voir, égal à $2(2n)^2=8n^2$; or l'équation $\varphi^2(2n\beta)=\theta(x^2)$ ne peut avoir de racines égales, car dans ce cas on aurait $\frac{d\theta(x^2)}{dx}=0$, ce qui donnerait pour x une valeur indépendante de β. Donc le degré de l'équation $\varphi^2(2n\beta))=\theta(x^2)$ est égal au nombre des racines, c'est-à-dire à $8n^2$. Si par exemple $n=1$, on aura l'équation

$$\varphi^2(2\beta)=\theta(x^2)=\frac{4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}{(1+e^2c^2x^4)^2},$$

ou bien

$$(1+e^2c^2x^4)^2\varphi^2(2\beta)=4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2),$$

et, d'après la formule (48), les racines de cette équation, au nombre de huit, seront:

$$x=\pm\varphi\beta,\ \ x=\pm\varphi\left(-\beta+\frac{\omega}{2}\right),$$
$$x=\pm\varphi\left(-\beta+\frac{\varpi}{2}i\right),\ \ x=\pm\varphi\left(\beta+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right).$$

2) *Si n est un nombre impair, égal à $2n+1$.*

Dans ce cas $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ est, comme nous l'avons vu, une fonction rationnelle de x, et par conséquent l'équation en x sera:

$$(50)\qquad \varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

On trouvera, précisément comme dans le cas précédent, que toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par

$$(51)\qquad x=\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta+\frac{m}{2n+1}\omega+\frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

où il faut donner à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$ inclusivement. Donc le nombre des racines différentes est $(2n+1)^2$. C'est aussi le degré de l'équation en question. On peut aussi exprimer les racines par

$$x=(-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta+\frac{m}{2n+1}\omega+\frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right).$$

Si par exemple $n=1$, on aura une équation du degré $3^2=9$. La formule (51) donne pour x les 9 valeurs suivantes:

$$\varphi(\beta);$$
$$\varphi\left(-\beta-\frac{\omega}{3}\right),$$
$$\varphi\left(-\beta+\frac{\omega}{3}\right),$$
$$\varphi\left(-\beta-\frac{\varpi}{3}i\right),$$
$$\varphi\left(-\beta+\frac{\varpi}{3}i\right),$$

$$\varphi\left(\beta-\frac{\omega}{3}-\frac{\varpi}{3}i\right),$$
$$\varphi\left(\beta-\frac{\omega}{3}+\frac{\varpi}{3}i\right),$$
$$\varphi\left(\beta+\frac{\omega}{3}-\frac{\varpi}{3}i\right),$$
$$\varphi\left(\beta+\frac{\omega}{3}+\frac{\varpi}{3}i\right).$$

B. Considérons maintenant l'équation

(52) $$f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},$$

et cherchons les valeurs de y qui satisfont à cette équation. La fonction $\frac{P_n'}{Q_n}$ étant, comme on l'a vu plus haut, rationnelle en y, l'équation en y, en faisant $\frac{P_n'}{Q_n}=\psi y$, sera

$$f(n\beta)=\psi y.$$

Une des racines de cette équation est $y=f\beta$, donc, quelle que soit la valeur de β,

(53) $$f(n\beta)=\psi(f\beta).$$

Pour trouver les autres valeurs de y, désignons par α une nouvelle inconnue, telle que $y=f\alpha$; on aura

$$f(n\beta)=\psi(f\alpha);$$

or, en vertu de (53) le second membre est égal à $f(n\alpha)$; donc pour déterminer α, on aura l'équation

$$f(n\alpha)=f(n\beta).$$

En vertu de la formule (32) cette équation donne pour expression générale de $n\alpha$:

$$n\alpha=\pm n\beta+2m\omega+\mu\varpi i,$$

m et μ étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, zéro y compris. De là on tire

$$\alpha=\pm\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i$$

et par conséquent:

$$f\alpha=f\left(\pm\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)=y.$$

C'est la valeur générale de y.

Maintenant pour avoir les valeurs différentes de y, je dis qu'il suffit de prendre β avec le signe $+$ et de donner à m et μ toutes les valeurs entières, moindres que n. En effet, comme on a $f(+\alpha)=f(-\alpha)$, on aura d'abord

$$f\left(-\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)=f\left(\beta-\frac{2m}{n}\omega-\frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Donc on peut toujours dans l'expression de y prendre β avec le signe $+$. Ainsi toutes les valeurs de y sont contenues dans l'expression

(54) $$y=f\left(\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Maintenant, quels que soient les nombres m et μ, on peut toujours supposer

$$m=k.n+m',\quad \mu=k'.n+\mu',$$

où k, k', m', μ' sont des nombres entiers, les deux derniers étant en même temps positifs et moindres que n.

En substituant, il viendra

$$y=f\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i+2k\omega+k'\varpi i\right).$$

Or, en vertu de la formule (22), le second membre de cette équation est égal à

(55) $$f\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i\right)=y,$$

quantité de la même forme que le second membre de (54); seulement m' et μ' sont positifs et moindres que n. Donc etc.

En donnant à m et μ toutes les valeurs possibles, moindres que n, on trouvera n^2 valeurs de y. Or, en général toutes ces quantités sont différentes entre elles. En effet, supposons par exemple

$$f\left(\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)=f\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i\right),$$

on aura en vertu de la formule (32), en désignant par k, k' deux nombres entiers,

$$\beta+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i=\pm\left(\beta+\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i\right)+2k\omega+k'\varpi i.$$

Puisque β peut avoir une valeur quelconque, il est clair que cette équation ne peut subsister à moins qu'on ne prenne dans le second membre le signe supérieur. Alors il viendra

$$\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i=\frac{2m'}{n}\omega+\frac{\mu'}{n}\varpi i+2k\omega+k'\varpi i,$$

d'où l'on tire, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$m=m'+kn,\quad \mu=\mu'+k'n,$$

équations absurdes, en remarquant que les nombres m, m', μ et μ' sont tous positifs et inférieurs à n. Donc en général l'équation

$$f(n\beta)=\psi y$$

a n^2 racines différentes entre elles et pas davantage. Or généralement toutes les racines de cette équation sont différentes entre elles. En effet, si deux d'entre elles étaient égales, on aurait à la fois

$$f(n\beta)=\psi y \quad \text{et} \quad 0=\psi' y,$$

et cela est impossible, car on remarquera que les coefficiens de y dans ψy ne contiennent pas β. Donc généralement l'équation (52) est nécessairement du degré n^2.

C. L'équation

$$F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n}, \tag{56}$$

étant traitée par rapport à z, absolument de la même manière que l'équation $f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n}$ l'a été par rapport à y, donne pour expression générale des valeurs de z

$$z=F\left(\beta+\frac{m}{n}\omega+\frac{2\mu}{n}\varpi i\right), \tag{57}$$

où m et μ sont entiers, positifs et moindres que n. Le nombre des valeurs de z est n^2, et elles sont en général toutes différentes entre elles.

Donc généralement l'équation (56) est du degré n^2.

11.

Nous avons trouvé ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\quad f(n\beta)=\frac{P_n'}{Q_n},\quad F(n\beta)=\frac{P_n''}{Q_n},$$

racines, qui sont exprimées par les formules (48), (51), (54), (57). Toutes ces racines sont différentes entre elles, excepté pour des valeurs particulières de β; mais pour ces valeurs, les racines différentes sont contenues dans les mêmes formules. — Dans ce dernier cas un certain nombre des valeurs des quantités x, y, z seront égales; mais il est clair que toutes ces valeurs égales ou inégales seront néanmoins les racines des équations dont il s'agit. Cela se fait voir en faisant converger β vers une valeur particulière qui donne pour x, ou y, ou z des valeurs égales.

En faisant dans la formule (48) $\beta=\frac{\alpha}{2n}$, on aura l'équation

$$\varphi^2\alpha=\frac{P_{2n^2}}{Q_{2n^2}},$$

dont les racines sont

$$x=\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\frac{\alpha}{2n}+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right), \tag{58}$$

où m et μ ont toutes les valeurs entières et positives moindres que $2n$.

En faisant de même dans la formule (50) $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$, on aura l'équation $\varphi\alpha=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, dont les racines sont

$$x=(-1)^{m+\mu}\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \tag{59}$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$.

Enfin en faisant dans les formules (52), (56) $\beta=\frac{\alpha}{n}$, on aura l'équation $f\alpha=\frac{P_n'}{Q_n}$, dont les racines sont

$$y=f\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right), \tag{60}$$

et l'équation $F\alpha=\frac{P_n''}{Q_n}$, dont les racines sont

$$z=F\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{m}{n}\omega+\frac{2\mu}{n}\varpi i\right), \tag{61}$$

où m et μ sont renfermés entre les limites 0 et $n-1$ inclusivement. Si n est impair et égal à $2n+1$, on peut aussi supposer

$$y=(-1)^m f\left(\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{m}{2n+1}\omega+\frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$z = (-1)^\mu F\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

m et μ ayant toutes les valeurs entières de $-n$ à $+n$.

Dans toutes ces équations la quantité α peut avoir une valeur quelconque.

Comme cas particuliers on doit remarquer les suivants:

1) En faisant dans (58) et (59) $\alpha = 0$, on aura les équations

$$(62)\quad \begin{cases} P^z_{2n} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \pm\varphi\left(\frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant } 0 \text{ et } 2n-1), \\ P_{2n+1} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant } -n \text{ et } +n). \end{cases}$$

2) En faisant dans (60) $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et dans (61) $\alpha = \frac{\varpi}{2} i$, et remarquant que $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = 0$, on obtiendra les deux équations

$$(63)\quad P_n' = 0, \text{ dont les racines sont } y = f\left((2m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n} + \frac{\mu}{n}\varpi i\right)$$

$$(64)\quad P_n'' = 0, \text{ dont les racines sont } z = F\left(\frac{m}{n}\omega + (2\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{n}\right)$$

(les limites de m et μ étant 0 et $n-1$).

3) En faisant dans (58) $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$, et en remarquant que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{1}{0}$, on aura l'équation

$$Q^z_{2n} = 0,$$

dont les racines seront

$$x = \pm\varphi\left([m + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}]\frac{\omega}{2n} + [\mu + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}]\frac{\varpi i}{2n}\right).$$

Les valeurs de x doivent être égales deux à deux, et l'on verra aisément que les valeurs inégales peuvent être représentées par

$$(65)\quad x = \varphi\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n} + (\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n}\right),$$

en donnant à m et à μ toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $2n-1$. Donc ce sont les racines de l'équation par rapport à x

$$Q_{2n} = 0.$$

En faisant de même dans (59) $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$, on aura l'équation

$$Q_{2n+1} = 0,$$

dont les racines seront

$$(66)\quad \begin{cases} x = (-1)^{m+\mu}\varphi\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ y = (-1)^m\, f\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ z = (-1)^\mu\, F\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1} + (\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers de $-n$ à $+n$.

Parmi les valeurs de x, y, z, il faut remarquer celles qui répondent à $m = n$, $\mu = n$. Alors on a

$$x = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \tfrac{1}{0}.$$

$$y = (-1)^n f\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \tfrac{1}{0}.$$

$$z = (-1)^n F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right) = \tfrac{1}{0}.$$

Ces valeurs infinies font voir que le degré de l'équation $Q_{2n+1} = 0$ est moindre d'une unité que celui des équations dont elle sort. En écartant ces valeurs, celles qui restent, au nombre de $(2n+1)^2 - 1$, seront les racines de l'équation $Q_{2n+1} = 0$.

§ IV.

Résolution algébrique des équations

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

12.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, comment on peut aisément exprimer les racines des équations en question au moyen des fonctions φ, f, F. Nous allons maintenant en déduire la résolution de ces mêmes équations, ou la détermination des fonctions $\varphi\frac{\alpha}{n}$, $f\frac{\alpha}{n}$, $F\frac{\alpha}{n}$ en fonctions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Comme on a

$$\varphi \frac{\alpha}{m\mu} = \varphi\left(\frac{1}{m} \frac{\alpha}{\mu}\right),$$

on peut supposer que n est un nombre premier. Nous considérerons d'abord le cas où $n=2$, et ensuite celui où n est un nombre impair.

A. *Expressions des fonctions* $\varphi \frac{\alpha}{2}$, $f \frac{\alpha}{2}$, $F \frac{\alpha}{2}$.

13.

Les valeurs de $\varphi \frac{\alpha}{2}$, $f \frac{\alpha}{2}$, $F \frac{\alpha}{2}$ peuvent être trouvées très facilement de la manière suivante. En supposant dans les formules (35) $\beta = \frac{\alpha}{2}$, et en faisant

$$x = \varphi \frac{\alpha}{2}, \quad y = f \frac{\alpha}{2}, \quad z = F \frac{\alpha}{2},$$

il viendra

$$f\alpha = \frac{y^2 - c^2 x^2 z^2}{1 + e^2 c^2 x^4}, \quad F\alpha = \frac{z^2 + e^2 y^2 x^2}{1 + e^2 c^2 x^4},$$

ou bien, en substituant les valeurs de y^2 et z^2 en x^2,

$$f\alpha = \frac{1 - 2c^2 x^2 - c^2 e^2 x^4}{1 + e^2 c^2 x^4}, \quad F\alpha = \frac{1 + 2e^2 x^2 - e^2 c^2 x^4}{1 + e^2 c^2 x^4}.$$

Ces équations donnent

$$1 + f\alpha = \frac{2(1 - c^2 x^2)}{1 + e^2 c^2 x^4}, \quad 1 - f\alpha = \frac{2c^2 x^2 (1 + e^2 x^2)}{1 + e^2 c^2 x^4},$$

$$F\alpha - 1 = \frac{2e^2 x^2 (1 - c^2 x^2)}{1 + e^2 c^2 x^4}, \quad F\alpha + 1 = \frac{2(1 + e^2 x^2)}{1 + e^2 c^2 x^4},$$

d'où

$$\frac{F\alpha - 1}{1 + f\alpha} = e^2 x^2, \quad \frac{1 - f\alpha}{F\alpha + 1} = c^2 x^2,$$

et par suite, en remarquant que $y^2 = 1 - c^2 x^2$, $z^2 = 1 + e^2 x^2$,

$$z^2 = \frac{F\alpha + f\alpha}{1 + f\alpha}, \quad y^2 = \frac{F\alpha + f\alpha}{1 + F\alpha}.$$

De ces équations on tire, en extrayant la racine carrée, et en remplaçant x, y, z par leurs valeurs $\varphi \frac{\alpha}{2}$, $f \frac{\alpha}{2}$, $F \frac{\alpha}{2}$,

$$(67) \quad \begin{cases} \varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1 - f\alpha}{1 + F\alpha}} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{F\alpha - 1}{f\alpha + 1}}, \\ f \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{F\alpha + f\alpha}{1 + F\alpha}}, \quad F \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{F\alpha + f\alpha}{1 + f\alpha}}. \end{cases}$$

Telles sont les formes les plus simples qu'on puisse donner aux valeurs des fonctions $\varphi \frac{\alpha}{2}$, $f \frac{\alpha}{2}$, $F \frac{\alpha}{2}$. De cette manière on peut exprimer algébriquement $\varphi \frac{\alpha}{2}$, $f \frac{\alpha}{2}$, $F \frac{\alpha}{2}$ en $f\alpha$, $F\alpha$. De la même manière $\varphi \frac{\alpha}{4}$, $f \frac{\alpha}{4}$, $F \frac{\alpha}{4}$ s'exprimeront en $f \frac{\alpha}{2}$, $F \frac{\alpha}{2}$, et ainsi de suite. Donc en général les fonctions $\varphi \frac{\alpha}{2^n}$, $f \frac{\alpha}{2^n}$, $F \frac{\alpha}{2^n}$ peuvent être exprimées au moyen d'extractions de racines carrées, en fonctions des trois quantités $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Pour appliquer les formules trouvées ci-dessus pour la *bissection* à un exemple, supposons $\alpha = \frac{\omega}{2}$. Alors on aura $f \frac{\omega}{2} = 0$, $F \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{e^2 + c^2}}{c}$, donc en substituant,

$$\varphi \frac{\omega}{4} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{c}\sqrt{e^2 + c^2}}} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1}{c}\sqrt{e^2 + c^2} - 1},$$

$$f \frac{\omega}{4} = \sqrt{\frac{\frac{1}{c}\sqrt{e^2 + c^2}}{1 + \frac{1}{c}\sqrt{e^2 + c^2}}},$$

$$F \frac{\omega}{4} = \sqrt{\frac{1}{c}\sqrt{e^2 + c^2}},$$

ou bien

$$\varphi \frac{\omega}{4} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + c\sqrt{e^2 + c^2}}} = \frac{\sqrt{c\sqrt{e^2 + c^2} - c^2}}{ec},$$

$$f \frac{\omega}{4} = \frac{\sqrt[4]{e^2 + c^2}}{\sqrt{c + \sqrt{e^2 + c^2}}} = \frac{1}{e} \sqrt{e^2 + c^2 - c\sqrt{e^2 + c^2}},$$

$$F \frac{\omega}{4} = \sqrt[4]{1 + \frac{e^2}{c^2}} = \sqrt{F \frac{\omega}{2}}.$$

B. *Expressions des fonctions* $\varphi\frac{\alpha}{2n+1}$, $f\frac{\alpha}{2n+1}$, $F\frac{\alpha}{2n+1}$ *en fonction algébrique des quantités* $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

14.

Pour trouver les valeurs de $\varphi\frac{\alpha}{2n+1}$, $f\frac{\alpha}{2n+1}$, $F\frac{\alpha}{2n+1}$ en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, il faut résoudre les équations

$$\varphi\alpha=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ f\alpha=\frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ F\alpha=\frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

qui toutes sont du degré $(2n+1)^2$. Nous allons voir qu'il est toujours possible d'effectuer algébriquement cette résolution.

Soient

(68) $$\varphi_1\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m\,\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right)$$

et

(69) $$\psi\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),\quad \psi_1\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu\varphi_1\left(\beta-\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où θ est une racine imaginaire quelconque de l'équation $\theta^{2n+1}-1=0$. Cela posé, je dis que les deux quantités

$$\psi\beta\,.\,\psi_1\beta \text{ et } (\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}$$

pourront être exprimées rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$.

D'abord, en écrivant $\varphi_1\beta$ comme il suit:

$$\varphi_1\beta=\varphi\beta+\sum_1^n{}_m\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\beta-\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\varphi\beta+\sum_1^n{}_m\frac{2\varphi\beta\cdot f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta},$$

on voit que $\varphi_1\beta$ peut s'exprimer rationnellement en $\varphi\beta$. Soit donc $\varphi_1\beta=\chi(\varphi\beta)$, on a de même

$$\varphi_1\left(\beta\pm\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\chi\left[\varphi\left(\beta\pm\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\chi\left\{\frac{\varphi\beta\cdot f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\pm\varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\beta\cdot F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}\right\},$$

ou bien, en faisant

$$\varphi\beta=x,\ f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=a,\ \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=b,$$

et en substituant pour $f\beta$ et $F\beta$ leurs valeurs $\sqrt{1-c^2x^2}$ et $\sqrt{1+e^2x^2}$:

$$\varphi_1\left(\beta\pm\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\chi\left(\frac{ax\pm b\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}{1+e^2c^2b^2x^2}\right);$$

or, χ désignant une fonction rationnelle, le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$R_\mu\pm R_\mu'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

où R_μ et R_μ' sont des fonctions rationnelles de x. Donc on a

$$\varphi_1\left(\beta\pm\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=R_\mu\pm R_\mu'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}.$$

En substituant dans les expressions de $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$, il viendra

(70) $$\begin{cases}\psi\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu R_\mu+\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu R_\mu',\\ \psi_1\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu R_\mu-\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu R_\mu'.\end{cases}$$

Maintenant, R_μ et R_μ' étant des fonctions rationnelles de x, les quantités $\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\theta^\mu R_\mu$ et $\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\theta^\mu R_\mu'$ le sont également. En élevant donc $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$ à la $(2n+1)^{\text{ième}}$ puissance, les deux quantités $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$ pourront se mettre sous la forme:

$$(\psi\beta)^{2n+1}=t+t'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$
$$(\psi_1\beta)^{2n+1}=t-t'\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

t et t' étant des fonctions rationnelles de x. En prenant la somme des valeurs de $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$, on aura

$$(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}=2t.$$

Donc la quantité $(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}$ peut être exprimée rationnellement en x. Il en est de même du produit $\psi\beta\,.\,\psi_1\beta$, comme on le voit par les équations (70). Donc on peut faire

(71) $$\begin{cases}\psi\beta\,.\,\psi_1\beta=\lambda x,\\ (\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}=\lambda_1 x,\end{cases}$$

λx et $\lambda_1 x$ désignant des fonctions rationnelles de x. Or ces fonctions ont la propriété de ne pas changer de valeur, lorsqu'on met à la place de x une autre racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Considérons d'abord la fonction λx. En remettant la valeur de $x = \varphi\beta$, on aura

$$\psi\beta \cdot \psi_1\beta = \lambda(\varphi\beta),$$

d'où l'on tire, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β,

$$\lambda\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1} + \frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right] = \psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) \cdot \psi_1\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right).$$

Cela posé, en remarquant que

$$(72) \qquad \sum_{-n}^{+n}{}_m \psi(m+k) = \sum_{-n}^{+n}{}_m \psi(m) + \sum_{1}^{k}{}_m [\psi(m+n) - \psi(m-n-1)],$$

on aura, en faisant, dans l'expression de $\varphi_1\beta$, $\beta = \beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$,

$$\begin{aligned}\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) &= \sum_{-n}^{+n}{}_m \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)}{2n+1}\omega\right) \\ &= \varphi_1\beta + \sum_{1}^{k}{}_m \left[\varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) - \varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right)\right];\end{aligned}$$

or

$$\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)}{2n+1}\omega - 2\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)}{2n+1}\omega\right);$$

donc

$$(73) \qquad \varphi_1\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\beta.$$

En mettant dans l'expression de $\psi\beta$, $\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, on trouvera

$$\psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right);$$

or en vertu de la formule (73) on a

$$\varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc

$$\psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right).$$

En vertu de la formule (72) on a

$$\begin{aligned}&\sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right) \\ &\quad = \theta^{-k'} \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) + \sum_{1}^{k'}{}_\mu \theta^{n+\mu-k'} \varphi_1\left(\beta + \frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right) \\ &\qquad - \sum_{1}^{k'}{}_\mu \theta^{\mu-n-1-k'} \varphi_1\left(\beta + \frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

donc, en remarquant que $\theta^{n+\mu-k'} = \theta^{\mu-n-1-k'}$ et que

$$\varphi_1\left(\beta + \frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right) = \varphi_1\left(\beta + \frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1} - 2\varpi i\right) = \varphi_1\left(\beta + \frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right),$$

il viendra

$$(74) \qquad \psi\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k'} \psi\beta.$$

On trouvera de même

$$\psi_1\left(\beta + \frac{2k'\varpi i}{2n+1} + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{k'} \psi_1\beta.$$

Ces deux équations donneront

$$\psi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right) \cdot \psi_1\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right) = \psi\beta \cdot \psi_1\beta,$$

$$\left[\psi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1} + \left[\psi_1\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1} = (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1}.$$

En vertu de ces équations on obtiendra, en mettant, dans les valeurs de $\lambda(\varphi\beta)$ et $\lambda_1(\varphi\beta)$, $\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β,

$$\lambda(\varphi\beta) = \lambda\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right],$$

$$\lambda_1(\varphi\beta) = \lambda_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Or $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ exprime une racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc, comme nous l'avons dit, les fonctions λx et $\lambda_1 x$ auront les mêmes valeurs, quelle que soit la racine qu'on mette à la place de x. Soient x_0, x_1, $x_2 \ldots x_{2\nu}$ ces racines, on aura

$$\lambda x = \frac{1}{2\nu+1}(\lambda x_0 + \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_{2\nu}),$$

$$\lambda_1 x = \frac{1}{2\nu+1}(\lambda_1 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1 x_{2\nu}).$$

Or le second membre de ces équations est une fonction *rationnelle et symétrique* des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, donc λx et $\lambda_1 x$ pourront s'exprimer rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$. En faisant

$$\lambda x = B,\ \ \lambda_1 x = 2A,$$

les équations (71) donneront

$$(\psi\beta)^{2n+1}(\psi_1\beta)^{2n+1} = B^{2n+1},\ \ (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1} = 2A,$$

d'où l'on tire

(75) $$\psi\beta = \sqrt[2n+1]{A + \sqrt{A^2 - B^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right).$$

15.

Ayant trouvé la valeur de $\psi\beta$, on en déduira facilement celle de $\varphi_1\beta$. En effet, en prenant pour θ successivement toutes les racines imaginaires de l'équation $\theta^{2n+1} - 1 = 0$, et en désignant les valeurs correspondantes de A et B par A_1, B_1, A_2, B_2 etc., on obtiendra

$$\sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta_1^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right),$$

$$\sqrt[2n+1]{A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta_2^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right),$$

. . . .

$$\sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta_{2n}^\mu \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right).$$

On connaît de même la somme des racines:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1} + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right) = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right),$$

qui est égale à $(2n+1)\varphi(2n+1)\beta$, comme nous le verrons dans la suite. En ajoutant ces équations membre à membre, après avoir multiplié la première par θ_1^{-k}, la seconde par θ_2^{-k}, la troisième par $\theta_3^{-k} \ldots$ et la $(2n)^{\text{ième}}$ par θ_{2n}^{-k}, il viendra

$$\sum_{-n}^{+n}{}_\mu (1 + \theta_1^{\mu-k} + \theta_2^{\mu-k} + \cdots + \theta_{2n}^{\mu-k})\, \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\tilde\omega i}{2n+1}\right)$$

$$= (2n+1)\varphi(2n+1)\beta + \sum_{1}^{2n}{}_\mu\, \theta_\mu^{-k} \sqrt[2n+1]{A_\mu + \sqrt{A_\mu^2 - B_\mu^{2n+1}}};$$

or la somme

$$1 + \theta_1^{\mu-k} + \theta_2^{\mu-k} + \cdots + \theta_{2n}^{\mu-k}$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs de k, excepté pour $k = \mu$. Dans ce cas elle devient égale à $2n+1$. Donc le premier membre de l'équation précédente devient

$$(2n+1)\, \varphi_1\left(\beta + \frac{2k\tilde\omega i}{2n+1}\right),$$

donc, en substituant et divisant par $(2n+1)$, on a

(76) $$\varphi_1\left(\beta + \frac{2k\tilde\omega i}{2n+1}\right) =$$

$$\varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\left[\theta_1^{-k} \sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}}} + \theta_2^{-k} \sqrt[2n+1]{A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2^{2n+1}}}\right.$$

$$\left. + \cdots + \theta_{2n}^{-k} \sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}}\right].$$

Pour $k = 0$, on a

(77) $$\varphi_1\beta = \varphi(2n+1)\beta + \frac{1}{2n+1}\left[\sqrt[2n+1]{A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}}} + \sqrt[2n+1]{A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2^{2n+1}}}\right.$$

$$\left. + \cdots + \sqrt[2n+1]{A_{2n} + \sqrt{A_{2n}^2 - B_{2n}^{2n+1}}}\right].$$

16.

Ayant ainsi trouvé la valeur de $\varphi_1\beta$, il s'agit d'en tirer celle de $\varphi\beta$. Or cela peut se faire aisément comme il suit. Soit

(78) $$\psi_2\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right),\ \ \psi_3\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \theta^m \varphi\left(\beta - \frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on a

$$\varphi\left(\beta \pm \frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \frac{\varphi\beta . f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) \pm f\beta . F\beta . \varphi\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}.$$

Il suit de là qu'on peut faire

$$\psi_2\beta = r + f\beta . F\beta . s, \quad \psi_3\beta = r - f\beta . F\beta . s,$$

où r et s sont des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$. De là on tire

$$(79) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi_2\beta . \psi_3\beta &= \chi(\varphi\beta), \\ (\psi_2\beta)^{2n+1} + (\psi_3\beta)^{2n+1} &= \chi_1(\varphi\beta), \end{aligned} \right.$$

$\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ étant deux fonctions rationnelles de $\varphi\beta$.

Cela posé, je dis que $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ pourront s'exprimer rationnellement en $\varphi_1\beta$. On a vu que

$$(80) \qquad \varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_1^n{}_m \frac{2\varphi\beta . f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}.$$

En faisant $\varphi\beta = x$, on aura une équation en x du degré $(2n+1)$. Une racine de cette équation est $x = \varphi\beta$; or, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, $\varphi_1\beta$ ne change pas de valeur; donc $x = \varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ sera une racine, quel que soit le nombre entier k. Or, en donnant à k toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$, $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ prendra $2n+1$ valeurs différentes, donc ces $2n+1$ quantités seront précisément les $2n+1$ racines de l'équation en x.

Cela posé, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β dans l'expression de $\psi_2\beta$, il viendra en vertu de l'équation (72)

$$\begin{aligned} \psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) &= \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)\omega}{2n+1}\right) \\ &= \theta^{-k}\psi_2\beta + \sum_1^k{}_m \theta^{m+n-k}\varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) \\ &\quad - \sum_1^k{}_m \theta^{m-n-1-k}\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

donc, puisque $\theta^{m+n-k} = \theta^{m-n-1-k}$ et $\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)$,

on en tirera

$$(81) \qquad \psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k}\psi_2\beta.$$

De même on aura

$$\psi_3\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{+k}\psi_3\beta.$$

On voit par ces relations que les équations qui donnent les valeurs des fonctions $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$, conduisent à ces deux égalités:

$$\chi\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right] = \chi(\varphi\beta),$$

$$\chi_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right] = \chi_1(\varphi\beta).$$

De là on tire

$$\chi(\varphi\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_k \chi\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right],$$

$$\chi_1(\varphi\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_k \chi_1\left[\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

Or, ces valeurs de $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ sont des fonctions rationnelles et symétriques de toutes les racines de l'équation (80). Donc elles peuvent être exprimées rationnellement par les coefficiens de la même équation, c'est-à-dire rationnellement en $\varphi_1\beta$.

Soit

$$\chi(\varphi\beta) = D, \quad \chi_1(\varphi\beta) = 2C,$$

les équations (79) donneront

$$\psi_2\beta = \sqrt[2n+1]{C + \sqrt{C^2 - D^{2n+1}}},$$

d'où, en remettant la valeur de $\psi_2\beta$,

$$(82) \qquad \sqrt[2n+1]{C + \sqrt{C^2 - D^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

De là on tire, en mettant θ_μ au lieu de θ, et en désignant les valeurs correspondantes de C et D par C_μ et D_μ,

$$\theta_\mu^{-k}\sqrt[2n+1]{C_\mu + \sqrt{C_\mu^2 - D_\mu^{2n+1}}} = \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta_\mu^{m-k}\varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

En y joignant l'équation

$$\varphi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m\, \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on en tirera facilement

$$(83)\quad (2n+1).\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \varphi_1\beta + \sum_{1}^{2n}{}_\mu\, \theta_\mu^{-k} \sqrt[2n+1]{C_\mu + \sqrt{C_\mu^2 - D_\mu^{2n+1}}}.$$

En supposant $k=0$, il viendra

$$(84)\quad \varphi\beta = \frac{1}{2n+1}\left(\varphi_1\beta + \sqrt[2n+1]{C_1+\sqrt{C_1^2-D_1^{2n+1}}} + \cdots + \sqrt[2n+1]{C_{2n}+\sqrt{C_{2n}^2-D_{2n}^{2n+1}}}\right).$$

Cette équation donne $\varphi\beta$ en fonction algébrique de $\varphi_1\beta$; or nous avons trouvé précédemment $\varphi_1\beta$ en fonction algébrique de $\varphi(2n+1)\beta$. Donc en mettant $\frac{\alpha}{2n+1}$ au lieu de β, on aura $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction algébrique de $\varphi\alpha$.

Par une analyse toute semblable on trouvera $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction de $f\alpha$ et $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction de $F\alpha$.

17.

Les expressions que nous venons de trouver des quantités $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$, la première en $\varphi(2n+1)\beta$, et la seconde en $\varphi_1\beta$, contiennent chacune la somme de $2n$ radicaux différens du $(2n+1)^{\text{ième}}$ degré. Il en résultera pour $\varphi\beta$, $\varphi_1\beta$, $(2n+1)^{2n}$ valeurs, tandis que chacune de ces quantités est la racine d'une équation du $(2n+1)^{\text{ième}}$ degré. Mais on peut donner aux expressions de $\varphi\beta$ et $\varphi_1\beta$ une forme telle que le nombre des valeurs de ces quantités soit précisément égal à $2n+1$. Pour cela soit

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i.\sin\frac{2\pi}{2n+1};$$

on peut faire

$$\theta_1 = \theta,\ \ \theta_2 = \theta^2,\ \ \theta_3 = \theta^3, \ldots \theta_{2n} = \theta^{2n}.$$

Soient de même

$$(85)\quad \begin{cases} \psi^k\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^{k\mu}\varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ \psi_1^k\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^{k\mu}\varphi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

on aura en vertu de l'équation (74)

$$\psi^k\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{-k\nu}\psi^k\beta,$$
$$\psi_1^k\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{+k\nu}\psi_1^k\beta,$$
$$\psi^1\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{-\nu}\psi^1\beta,$$
$$\psi_1^1\left(\beta+\frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{+\nu}\psi_1^1\beta.$$

Soit maintenant

$$(86)\quad \begin{cases} \dfrac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^k} + \dfrac{\psi_1^k\beta}{(\psi_1^1\beta)^k} = P(\varphi\beta), \\ \dfrac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^{k-2n-1}} + \dfrac{\psi_1^k\beta}{(\psi_1^1\beta)^{k-2n-1}} = Q(\varphi\beta), \end{cases}$$

$P(\varphi\beta)$ et $Q(\varphi\beta)$ seront des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$; or en mettant $\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β, il est clair, en vertu des formules précédentes, que P et Q ne changent pas de valeur; donc on aura

$$P(\varphi\beta) = \frac{1}{(2n+1)^2}.\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, P\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right];$$

or, le second membre étant une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, $P(\varphi\beta)$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$. Il en est de même de $Q(\varphi\beta)$. Ces deux quantités étant connues, les équations (86) donneront

$$\frac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^k}\left[1-\left(\frac{\psi^1\beta}{\psi_1^1\beta}\right)^{2n+1}\right] = P(\varphi\beta) - \frac{Q(\varphi\beta)}{(\psi_1^1\beta)^{2n+1}};$$

or

$$(\psi^1\beta)^{2n+1} = A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}},$$
$$(\psi_1^1\beta)^{2n+1} = A_1 - \sqrt{A_1^2 - B_1^{2n+1}},$$

donc

$$\frac{\psi^k\beta}{(\psi^1\beta)^k}2\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}} = Q(\varphi\beta) - (A_1 - \sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}})\,P(\varphi\beta).$$

Donc on aura

$$\psi^k\beta = (\psi^1\beta)^k.(F_k + H_k\sqrt{A_1^2-B_1^{2n+1}}),$$

où F_k et H_k sont des fonctions rationnelles de $\varphi(2n+1)\beta$. En remplaçant A_1 et B_1 par A et B et substituant les valeurs de $\psi^k\beta$ et $(\psi^1\beta)^k$, il viendra

$$\sqrt[2n+1]{A_k+\sqrt{A_k^2-B_k^{2n+1}}}=(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{k}{2n+1}}(F_k+H_k\sqrt{A^2-B^{2n+1}}),$$

donc la valeur de $\varphi_1\beta$ deviendra

$$(87)\quad \varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\Big[(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+(F_2+H_2\sqrt{A^2-B^{2n+1}})(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\cdots+(F_{2n}+H_{2n}\sqrt{A^2-B^{2n+1}})(A+\sqrt{A^2-B^{2n+1}})^{\frac{2n}{2n+1}}\Big].$$

Par un procédé tout semblable on trouvera

$$(88)\quad \varphi\beta=\frac{1}{2n+1}\Big[\varphi_1\beta+(C+\sqrt{C^2-D^{2n+1}})^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+(K_2+L_2\sqrt{C^2-D^{2n+1}})(C+\sqrt{C^2-D^{2n+1}})^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\cdots+(K_{2n}+L_{2n}\sqrt{C^2-D^{2n+1}})(C+\sqrt{C^2-D^{2n+1}})^{\frac{2n}{2n+1}}\Big].$$

où K_2, L_2, K_3, $L_3 \ldots K_{2n}$, L_{2n} sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1\beta$.

Ces expressions de $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$ n'ont que $2n+1$ valeurs différentes, qu'on obtiendra en attribuant aux radicaux leurs $2n+1$ valeurs. Il suit de notre analyse qu'on peut prendre $\sqrt{A^2-B^{2n+1}}$ et $\sqrt{C^2-D^{2n+1}}$ avec tel signe qu'on voudra.

18.

La valeur que nous avons trouvée pour $\varphi\beta$ ou $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contient encore, outre la fonction $\varphi\alpha$, les suivantes:

$$e,\ c,\ \theta,$$
$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),$$
$$f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),$$

pour des valeurs quelconques de m depuis 1 jusqu'à $2n$. Maintenant, quelle que soit la valeur de m, on peut toujours exprimer algébriquement $\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ en $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, et $\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$ en $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Tout est donc connu dans l'expression de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, excepté les deux quantités indépendantes de α, $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Ces quantités dépendent seulement de c et e, et elles peuvent être trouvées par la résolution d'une équation du degré $(2n+1)^2-1$, savoir de l'équation $\frac{P_{2n+1}}{x}=0$. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment on peut en ramener la résolution à celle d'équations moins élevées.

§ V.

C. *Sur l'équation* $P_{2n+1}=0$.

19.

L'expression que nous venons de trouver pour $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contiendra, comme nous l'avons vu, les deux quantités constantes $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. On trouvera ces quantités en résolvant l'équation

$$P_{2n+1}=0,$$

dont les racines seront représentées par

$$(89)\qquad x=\varphi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où m et μ pourront être tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$. Une de ces racines, qui répond à $m=0$, $\mu=0$, est égale à zéro. Donc P_{2n+1} est divisible par x. En écartant ce facteur, on aura une équation du degré $(2n+1)^2-1$,

$$(90)\qquad R=0.$$

En faisant $x^2=r$, l'équation en r, $R=0$, sera du degré $\frac{(2n+1)^2-1}{2}=2n(n+1)$, et les racines de cette équation seront

$$(91)\qquad r=\varphi^2\left(\frac{m\omega\pm\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

μ et m ayant toutes les valeurs positives au dessous de $n+1$, en faisant abstraction de la racine zéro.

Nous allons voir maintenant, comment on peut ramener la résolution de l'équation $R=0$ à celle de deux équations, l'une du degré n et l'autre du degré $2n+2$. D'abord, je dis qu'on peut représenter toutes les valeurs de r par

$$(92)\qquad \varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right) \text{ et } \varphi^2\left(m.\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$, et à m toutes celles depuis 1 jusqu'à n. En effet $\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ représente d'abord n valeurs de r; or les autres peuvent être représentées par $\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$. Soit, pour le démontrer, $m\mu=(2n+1)k+m'$, où m' est un nombre entier compris entre les limites $-n$ et $+n$. En substituant, on aura

$$\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(k\omega+\frac{m'\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=\varphi^2\left(\frac{m'\omega+m\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(\frac{-m'\omega-m\varpi i}{2n+1}\right).$$

$\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$ est donc une valeur de r; maintenant, à chaque valeur de μ répond une valeur différente de m'. Car si l'on avait

$$m\mu_1=(2n+1)k_1+m',$$

il s'ensuivrait

$$m(\mu-\mu_1)=(2n+1)(k-k_1),$$

ce qui est impossible, puisque $2n+1$ est un nombre premier. Donc $\varphi^2\left(m\frac{\mu\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$, combiné avec $\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, représente toutes les valeurs de r.

Cela posé, soit

$$(93)\qquad \left[r-\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right]\left[r-\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\right]\dots\left[r-\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$=r^n+p_{n-1}r^{n-1}+p_{n-2}r^{n-2}+\dots+p_1r+p_0.$$

Les quantités $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$, seront des fonctions rationnelles et symétriques de $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\dots\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)$; ces fonctions peuvent être trouvées au moyen d'une équation du degré $2n+2$. Soit p une fonction rationnelle et symétrique quelconque de $\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$, $\varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right)\dots$

$\varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)$, où ω' désigne la quantité $m\omega+\mu\varpi i$. En vertu des formules que nous avons données plus haut pour exprimer $\varphi(n\beta)$ en $\varphi\beta$, il est clair qu'on peut exprimer $\varphi^2\left(m'\frac{\omega'}{2n+1}\right)$ en fonction rationnelle de $\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$. Donc on peut faire

$$(94)\quad p=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right), \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right)\dots\varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

θ désignant une fonction symétrique et rationnelle. En mettant $\nu\omega'$ au lieu de ω', il viendra

$$(95)\quad \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right), \varphi^2\left(\frac{2\nu\omega'}{2n+1}\right)\dots\varphi^2\left(\frac{n\nu\omega'}{2n+1}\right)\right];$$

or en faisant

$$a\nu=(2n+1)k_a'+k_a,$$

où k_a est entier et compris entre $-n$ et $+n$, la série

$$k_1,\ k_2, \dots k_n$$

aura au signe près les mêmes termes que celle-ci:

$$1,\ 2,\ 3\dots n;$$

donc il est clair que le second membre de l'équation (95) aura la même valeur que p. Donc

$$(96)\qquad \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

équation qui, en faisant $\omega'=\omega$ et $\omega'=m\omega+\varpi i$, donnera les deux suivantes:

$$(97)\qquad \begin{cases} \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right], \\ \psi\left[\varphi^2\left(\nu\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right], \end{cases}$$

donc, en faisant, pour abréger,

$$(98)\qquad \varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)=r_\nu,\quad \varphi^2\left(\nu\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=r_{\nu,m},$$

il viendra

$$(99)\qquad \psi r_\nu=\psi r_1;\quad \psi r_{\nu,m}=\psi r_{1,m}.$$

Cela posé, soit

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned}&(p-\psi r_1)(p-\psi r_{1,0})(p-\psi r_{1,1})(p-\psi r_{1,2})\dots(p-\psi r_{1,2n})\\&\qquad=q_0+q_1\cdot p+q_2\cdot p^2+\dots+q_{2n+1}\cdot p^{2n+1}+p^{2n+2}.\end{aligned}\right.$$

Je dis qu'on peut exprimer les coefficiens q_0, q_1 etc. rationnellement en e et c. D'abord, en vertu des formules connues, on peut exprimer rationnellement ces coefficiens en t_1, $t_2\dots t_{2n+2}$, si l'on fait, pour abréger,

$$(101)\qquad t_k=(\psi r_1)^k+(\psi r_{1,0})^k+(\psi r_{1,1})^k+\dots+(\psi r_{1,2n})^k.$$

Il s'agit donc de trouver les quantités t_1, $t_2\dots$; or cela pourra aisément se faire au moyen des relations (99). En effet, en y faisant successivement $\nu=1, 2\dots n$, après avoir élevé les deux membres à la $k^{\text{ième}}$ puissance, on en tirera sur le champ:

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned}(\psi r_1)^k&=\frac{1}{n}[(\psi r_1)^k+(\psi r_2)^k+\dots+(\psi r_n)^k],\\(\psi r_{1,m})^k&=\frac{1}{n}[(\psi r_{1,m})^k+(\psi r_{2,m})^k+\dots+(\psi r_{n,m})^k].\end{aligned}\right.$$

Donc en mettant pour m tous les nombres entiers $0, 1\dots 2n$, et en substituant ensuite dans l'expression de t_k, il viendra:

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned}n.t_k=&(\psi r_1)^k+(\psi r_2)^k+\dots+(\psi r_n)^k\\&+(\psi r_{1,0})^k+(\psi r_{2,0})^k+\dots+(\psi r_{n,0})^k\\&+(\psi r_{1,1})^k+(\psi r_{2,1})^k+\dots+(\psi r_{n,1})^k\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&+(\psi r_{1,2n})^k+(\psi r_{2,2n})^k+\dots+(\psi r_{n,2n})^k.\end{aligned}\right.$$

Cette valeur de t_k est, comme on le voit, une fonction rationnelle et symétrique des $n(2n+2)$ quantités r_1, $r_2\dots r_n$, $r_{1,0}$, $r_{2,0}\dots r_{n,0}\dots r_{1,2n}$, $r_{2,2n}\dots r_{n,2n}$, qui sont les $n(2n+2)$ racines de l'équation $R=0$. Donc, comme on sait, t_k pourra s'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, et par suite en fonction rationnelle de e et c. Ayant ainsi trouvé les quantités t_k, on en tire les valeurs de q_0, $q_1\dots q_{2n+1}$, qui seront également des fonctions rationnelles de e et c.

20.

Cela posé, en faisant

$$(104)\qquad 0=q_0+q_1p+q_2p^2+\dots+q_{2n+1}p^{2n+1}+p^{2n+2},$$

on aura une équation du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré, dont les racines seront

$$\psi r_1,\ \psi r_{1,0},\ \psi r_{1,1},\ \psi r_{1,2}\dots\psi r_{1,2n}.$$

La fonction ψr_1, c'est-à-dire une fonction quelconque rationnelle et symétrique des racines r_1, r_2, $r_3\dots r_n$ pourra donc être trouvée au moyen d'une équation du degré $2n+2$. Donc on aura de cette manière les coefficiens p_0, $p_1\dots p_{n-1}$, en résolvant n équations, chacune du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré.

Ayant déterminé p_0, $p_1\dots$, on aura, en résolvant l'équation

$$(105)\qquad 0=p_0+p_1r+\dots+p_{n-1}r^{n-1}+r^n,$$

les valeurs des quantités

$$r_1,\ r_2\dots r_n;\ r_{1,0},\ r_{2,0}\dots r_{n,0};\ r_{1,1},\ r_{2,1}\dots r_{n,1}\ \text{etc.}$$

dont la première est égale à $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$. Donc la détermination de cette quantité, ou bien la résolution de l'équation $R=0$, qui est du degré $(2n+2)n$, est réduite à celle d'équations des degrés $(2n+2)$ et n.

Mais on peut encore simplifier le procédé précédent. En effet, comme nous le verrons, pour avoir les quantités p_0, $p_1\dots$, il suffit de connaître l'une quelconque d'entre elles, et alors on peut exprimer les autres rationnellement par celle-là. Soient généralement p, q deux fonctions rationnelles et symétriques des quantités r_1, $r_2\dots r_n$, on peut faire, comme nous l'avons vu,

$$p=\psi r_1,\quad q=\theta r_1,$$

ψr_1 et θr_1 désignant deux fonctions rationnelles de r_1, qui ont cette propriété de rester les mêmes, si l'on change r_1 en une autre quelconque des quantités r_1, $r_2\dots r_n$. Supposons maintenant

$$s_k=(\psi r_1)^k\theta r_1+(\psi r_{1,0})^k\theta r_{1,0}+(\psi r_{1,1})^k\theta r_{1,1}+\dots+(\psi r_{1,2n})^k\theta r_{1,2n},$$

je dis que s_k pourra être exprimé rationnellement en e et c. En effet, on a

$$(\psi r_1)^k\theta r_1=(\psi r_\nu)^k\theta r_\nu=\frac{1}{n}[(\psi r_1)^k\theta r_1+(\psi r_2)^k\theta r_2+\dots+(\psi r_n)^k\theta r_n],$$

$$\begin{aligned}(\psi r_{1,m})^k\theta r_{1,m}=(\psi r_{\nu,m})^k\theta r_{\nu,m}=\frac{1}{n}[(\psi r_{1,m})^k\theta r_{1,m}+(\psi r_{2,m})^k\theta r_{2,m}+\dots\\+(\psi r_{n,m})^k\theta r_{n,m}].\end{aligned}$$

En faisant $m=0, 1, 2\dots 2n$, et en substituant dans l'expression de s_k, on verra que s_k est une fonction rationnelle et symétrique des racines r_1, r_2

$\dots r_{1,0} \dots$ de l'équation $R=0$; donc s_k pourra s'exprimer rationnellement en e et c.

Connaissant s_k, on obtiendra, en faisant $k=0, 1, 2 \dots 2n$, $2n+1$ équations, desquelles on tirera aisément la valeur de θr_1, en fonction rationnelle de ψr_1. Donc, une fonction de la forme p étant donnée, on peut exprimer une autre fonction quelconque de la même forme en fonction rationnelle de p. Donc, comme nous l'avons dit, on peut exprimer les coefficiens $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$ rationnellement par l'un quelconque d'entre eux. Donc enfin, pour en avoir les valeurs, il suffit de résoudre une seule équation du degré $2n+2$, et par conséquent, pour avoir les racines de l'équation $R=0$, il suffit de résoudre une équation du degré $2n+2$, et $2n+2$ équations du degré n.

21.

Maintenant, parmi les équations dont dépend la détermination des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$, celles du degré n peuvent être résolues algébriquement. Le procédé par lequel nous allons effectuer cette résolution est entièrement semblable à celui qui est dû à M. *Gauss* pour la résolution de l'équation

$$\theta^{2n+1}-1=0.$$

Soit proposée l'équation

$$0=p_0+p_1 r+p_2 r^2+\cdots+p_{n-1} r^{n-1}+r^n, \tag{106}$$

dont les racines sont:

$$\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right),\ \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right), \dots \varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right),$$

où ω' a une des valeurs ω, $m\omega+\varpi i$. Désignons par α une des racines primitives du nombre $2n+1$, c'est-à-dire un nombre entier tel que $\mu=2n+1$ soit le nombre le plus petit qui rende $\alpha^{\mu-1}-1$ divisible par $2n+1$: je dis que les racines de l'équation (106) peuvent aussi être représentées par

$$\varphi^2(\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha^2\varepsilon),\ \varphi^2(\alpha^3\varepsilon) \dots \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon), \tag{107}$$

où $\varepsilon=\frac{\omega'}{2n+1}$.

Soit

$$\alpha^m=(2n+1)k_m \pm a_m,$$

où k est entier, et a_m entier, positif et moindre que $n+1$, je dis que les termes de la série

$$1,\ a_1,\ a_2 \dots a_{n-1}$$

seront tous différens entre eux. En effet, si l'on a

$$a_m=a_\mu,$$

il en résulte, ou

$$\alpha^m-\alpha^\mu=(2n+1)(k_m-k_\mu),$$

ou

$$\alpha^m+\alpha^\mu=(2n+1)(k_m+k_\mu).$$

Il faut donc que l'une des quantités $\alpha^m-\alpha^\mu$, $\alpha^m+\alpha^\mu$ soit divisible par $2n+1$; or supposons $m>\mu$, ce qui est permis, il faut que $\alpha^{m-\mu}-1$ ou $\alpha^{m-\mu}+1$ soit divisible par $2n+1$; or cela est impossible, car $m-\mu$ est moindre que n. Donc les quantités $1, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ sont différentes entre elles, et par conséquent elles coïncident, mais dans un ordre différent, avec les nombres $1, 2, 3, 4 \dots n$. Donc, en remarquant que

$$\varphi^2[((2n+1)k_m \pm a_m)\varepsilon]=\varphi^2(a_m\varepsilon),$$

on voit que les quantités (107) sont les mêmes que celles-ci:

$$\varphi^2(\varepsilon),\ \varphi^2(2\varepsilon) \dots \varphi^2(n\varepsilon),$$

c'est-à-dire les racines de l'équation (106) c. q. f. d.

Il y a encore à remarquer, qu'ayant

$$\alpha^n=(2n+1)k_n-1,$$

on aura

$$\alpha^{n+m}=(2n+1)k_n\alpha^m-\alpha^m,$$

donc

$$a_{n+m}=-a_m$$

et

$$\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon)=\varphi^2(\alpha^m\varepsilon).$$

Cela posé, soit θ une racine imaginaire quelconque de l'équation

$$\theta^n-1=0$$

et

$$\psi(\varepsilon)=\varphi^2(\varepsilon)+\varphi^2(\alpha\varepsilon)\theta+\varphi^2(\alpha^2\varepsilon)\theta^2+\cdots+\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)\theta^{n-1}. \tag{108}$$

En vertu de ce que nous avons vu précédemment, le second membre de cette équation peut être transformé en une fonction *rationnelle* de $\varphi^2(\varepsilon)$. Faisons

$$\psi\varepsilon = \chi(\varphi^2\varepsilon). \tag{109}$$

En mettant dans la première expression de $\psi(\varepsilon)$, $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, il viendra

$$\begin{aligned}\psi(\alpha^m\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon)\theta + \varphi^2(\alpha^{m+2}\varepsilon)\theta^2 + \cdots \\ + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)\theta^{n-m-1} + \varphi^2(\alpha^n\varepsilon)\theta^{n-m} + \cdots + \varphi^2(\alpha^{n+m-1}\varepsilon)\theta^{n-1};\end{aligned}$$

mais nous avons vu que $\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon)$, donc

$$\begin{aligned}\psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{n-m}\varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-m+1}\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^{n-m+2}\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \cdots \\ + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha^{m-1}\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \theta\varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-m-1}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).\end{aligned}$$

En multipliant par θ^m, le second membre deviendra égal à $\psi\varepsilon$, donc

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{-m}\psi\varepsilon, \tag{110}$$

ou bien

$$\psi\varepsilon = \theta^m\chi[\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)],$$

d'où l'on tire, en élevant les deux membres à la $n^{\text{ième}}$ puissance, et en tenant compte de la relation $\theta^{mn} = 1$,

$$(\psi\varepsilon)^n = [\chi(\varphi^2(\alpha^m\varepsilon))]^n. \tag{111}$$

Cette formule donne, en faisant successivement $m = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1$, n équations qui, ajoutées membre à membre donneront la suivante:

$$\begin{aligned}n(\psi\varepsilon)^n = [\chi(\varphi^2\varepsilon)]^n + [\chi(\varphi^2(\alpha\varepsilon))]^n + [\chi(\varphi^2(\alpha^2\varepsilon))]^n + \cdots \\ + [\chi(\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon))]^n;\end{aligned} \tag{112}$$

or le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des quantités $\varphi^2\varepsilon$, $\varphi^2(\alpha\varepsilon) \ldots \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)$, c'est-à-dire des racines de l'équation (106); donc $(\psi\varepsilon)^n$ peut être exprimé en fonction rationnelle de p_0, $p_1 \ldots p_{n-1}$, par conséquent en fonction rationnelle de l'une quelconque de ces quantités. Soit v la valeur de $(\psi\varepsilon)^n$, on aura

$$\sqrt[n]{v} = \varphi^2\varepsilon + \theta\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^2\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon). \tag{113}$$

Cela posé, soit $\theta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Les racines imaginaires de l'équation $\theta^n - 1$ peuvent être représentées par

$$\theta,\ \theta^2, \ldots \theta^{n-1}.$$

Donc en faisant successivement θ égal à chacune de ces racines et en désignant les valeurs correspondantes de v par v_1, $v_2 \ldots v_{n-1}$, il viendra

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{v_1} &= \varphi^2(\varepsilon) + \theta\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon), \\ \sqrt[n]{v_2} &= \varphi^2(\varepsilon) + \theta^2\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \theta^{2n-2}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt[n]{v_{n-1}} &= \varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-1}\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \theta^{(n-1)^2}\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).\end{aligned}$$

En combinant ces équations avec la suivante:

$$-p_{n-1} = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon) + \cdots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$

on en tire aisément

$$\begin{aligned}\varphi^2(\alpha^m\varepsilon) = \frac{1}{n}(-p_{n-1} + \theta^{-m}\sqrt[n]{v_1} + \theta^{-2m}\sqrt[n]{v_2} + \theta^{-3m}\sqrt[n]{v_3} + \cdots \\ + \theta^{-(n-1)m}\sqrt[n]{v_{n-1}}),\end{aligned} \tag{114}$$

et pour $m = 0$,

$$\varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}(-p_{n-1} + \sqrt[n]{v_1} + \sqrt[n]{v_2} + \cdots + \sqrt[n]{v_{n-1}}). \tag{115}$$

22.

Toutes les racines de l'équation (106) sont contenues dans la formule (115), mais puisque leur nombre n'est que n, il reste encore à donner à $\varphi^2(\varepsilon)$ une forme qui ne contienne pas de racines étrangères à la question. Or cela se fait aisément comme il suit. Soit

$$s_k = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

En posant ici $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, $\sqrt[n]{v_k}$ se changera en $\theta^{-km}\sqrt[n]{v_k}$, et v_1 en $\theta^{-m}v_1$, donc s_k se changera en

$$\frac{\theta^{-km}\sqrt[n]{v_k}}{(\theta^{-m}\sqrt[n]{v_1})^k} = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

La fonction s_k, comme on le voit, ne change pas de valeur, en mettant $\alpha^m\varepsilon$

au lieu de ε. Or s_k est une fonction rationnelle de $\varphi^2(\varepsilon)$. Donc, en désignant s_k par $\lambda[\varphi^2(\varepsilon)]$, on aura

$$s_k = \lambda[\varphi^2(\alpha^m \varepsilon)],$$

quel que soit le nombre entier m. De là on tirera, de la même manière que nous avons trouvé $(\psi\varepsilon)^n$, la valeur de s_k en fonction rationnelle de l'une des quantités $p_0, p_1 \dots p_{n-1}$. Connaissant s_k, on a

$$\sqrt[n]{v_k} = s_k(\sqrt[n]{v_1})^k.$$

Donc en mettant v au lieu de v_1, l'expression de $\varphi^2(\alpha^m \varepsilon)$ deviendra

$$(116)\quad \varphi^2(\alpha^m \varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + \theta^{-m} v^{\frac{1}{n}} + s_2 \theta^{-2m} v^{\frac{2}{n}} + \dots + s_{n-1}\theta^{-(n-1)m} v^{\frac{n-1}{n}}\right);$$

pour $m = 0$:

$$(117)\quad \varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} + s_3 v^{\frac{3}{n}} + \dots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Cette expression n'a que n valeurs différentes, qui répondent aux n valeurs de $v^{\frac{1}{n}}$. Donc en dernier lieu la résolution de l'équation $P_{2n+1} = 0$ est réduite à celle d'une seule équation du degré $2n + 2$; mais *en général* cette équation ne paraît pas être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complètement dans plusieurs cas particuliers, par exemple, lorsque $e = c$, $e = c\sqrt{3}$, $e = c(2 \pm \sqrt{3})$ etc. Dans le cours de ce mémoire je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie.

En effet entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci:

"On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m parties "égales *par la règle et le compas seuls*, si m est de la forme 2^n ou "$2^n + 1$, ce dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si "m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes."

Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. *Gauss*, relativement au cercle.

§ VI.

Expressions diverses des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$.

23.

En faisant usage des formules connues, qui donnent les valeurs des coefficiens d'une équation algébrique en fonction des racines, on peut tirer plusieurs expressions des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ des formules du paragraphe précédent. Je vais considérer les plus remarquables. Pour abréger les formules, je me servirai des notations suivantes. Je désignerai

1) Par $\sum\limits_{k}^{k'}{}_m \psi m$ la somme, et par $\prod\limits_{k}^{k'}{}_m \psi m$ le produit de toutes les quantités de la forme ψm, qu'on obtiendra en donnant à m toutes les valeurs entières, depuis k jusqu'à k', les limites k et k' y comprises.

2) Par $\sum\limits_{k}^{k'}{}_m \sum\limits_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(m,\mu)$ la somme, et par $\prod\limits_{k}^{k'}{}_m \prod\limits_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(m,\mu)$ le produit de toutes les quantités de la forme $\psi(m,\mu)$ qu'on obtiendra en donnant à m toutes les valeurs entières de k à k', et à μ les valeurs entières de ν à ν', en y comprenant toujours les limites.

D'après cela il est clair qu'on aura

$$(119)\quad \sum_{k}^{k'}{}_m \psi(m) = \psi(k) + \psi(k+1) + \dots + \psi(k'),$$

$$(120)\quad \prod_{k}^{k'}{}_m \psi(m) = \psi(k) \,.\, \psi(k+1) \dots \psi(k'),$$

$$(121)\quad \sum_{k}^{k'}{}_m \sum_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(m,\mu) = \sum_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(k,\mu) + \sum_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(k+1,\mu) + \dots + \sum_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(k',\mu),$$

$$(122)\quad \prod_{k}^{k'}{}_m \prod_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(m,\mu) = \prod_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(k,\mu) \,.\, \prod_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(k+1,\mu) \dots\dots \prod_{\nu}^{\nu'}{}_\mu \psi(k',\mu).$$

Cela posé, considérons les équations

$$(123)\quad \begin{cases} \varphi(2n+1)\beta = \dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ f(2n+1)\beta = \dfrac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ F(2n+1)\beta = \dfrac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \end{cases}$$

Nous avons vu que P_{2n+1} est une fonction rationnelle de x du degré

$(2n+1)^2$ et de la forme $x.\psi(x^2)$. De même P'_{2n+1} et P''_{2n+1} sont des fonctions de cette même forme, la première par rapport à y et la seconde par rapport à z. Enfin Q_{2n+1} est une fonction qui, exprimée indifféremment en x, y ou z, sera du degré $(2n+1)^2-1$, et contiendra seulement des puissances paires. Donc on aura

$$\begin{aligned}
P_{2n+1} &= Ax^{(2n+1)^2} + \dots + Bx, \\
P'_{2n+1} &= A'y^{(2n+1)^2} + \dots + B'y, \\
P''_{2n+1} &= A''z^{(2n+1)^2} + \dots + B''z, \\
Q_{2n+1} &= Cx^{(2n+1)^2-1} + \dots + D, \\
Q_{2n+1} &= C'y^{(2n+1)^2-1} + \dots + D', \\
Q_{2n+1} &= C''z^{(2n+1)^2-1} + \dots + D''.
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (123), il viendra

$$\begin{aligned}
(Ax^{(2n+1)^2} + \dots + Bx) &= \varphi(2n+1)\beta.(Cx^{(2n+1)^2-1} + \dots + D), \\
(A'y^{(2n+1)^2} + \dots + B'y) &= f(2n+1)\beta.(C'y^{(2n+1)^2-1} + \dots + D'), \\
(A''z^{(2n+1)^2} + \dots + B''z) &= F(2n+1)\beta.(C''z^{(2n+1)^2-1} + \dots + D'').
\end{aligned}$$

Dans la première de ces équations A est le coefficient du premier terme, $-\varphi(2n+1)\beta.C$ celui du second, et $-\varphi(2n+1)\beta.D$ le dernier terme. Donc $\frac{C}{A}\varphi(2n+1)\beta$ est égal à la somme, et $\frac{D}{A}\varphi(2n+1)\beta$ égal au produit des racines de l'équation dont il s'agit, équation qui est la même que celle-ci:

(124) $$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc en remarquant que A, C et D (et en général tous les coefficiens) sont indépendants de β, on voit que $\varphi(2n+1)\beta$ est (à un coefficient constant près) égal à la somme et au produit de toutes les racines de l'équation (124).

De la même manière on voit que $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$ sont respectivement égaux au produit ou à la somme des racines des équations

$$f(2n+1)\beta = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad F(2n+1)\beta = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

en ayant soin de multiplier le résultat par un coefficient constant, choisi convenablement.

Maintenant d'après le n° 11 les racines des équations (123) sont respectivement:

$$\begin{aligned}
x &= (-1)^{m+\mu}\varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right), \\
y &= (-1)^{m} f\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right), \\
z &= (-1)^{\mu} F\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),
\end{aligned}$$

où les limites de m et μ sont $-n$ et $+n$. Donc en vertu de ce qu'on vient de voir, et en faisant usage des notations adoptées, on aura les formules suivantes:

(125) $$\left\{\begin{aligned}
\varphi(2n+1)\beta &= A \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
f(2n+1)\beta &= A' \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m} f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
F(2n+1)\beta &= A'' \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{\mu} F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right); \\
\varphi(2n+1)\beta &= B \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu \varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
f(2n+1)\beta &= B' \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
F(2n+1)\beta &= B'' \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les quantités constantes A, A', A'', B, B', B'', il faudra donner à β une valeur particulière. Ainsi en faisant dans les trois premières formules $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, après avoir divisé les deux membres par $\varphi\beta$, il viendra, en remarquant que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$,

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta} \\
A' &= \frac{f(2n+1)\beta}{f\beta} \\
A'' &= \frac{F(2n+1)\beta}{F\beta}
\end{aligned}\right\} \text{pour } \beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i.$$

Soit $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i + \alpha$, on a

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha+n\omega+n\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} \\
&= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} = \frac{\varphi\alpha}{\varphi(2n+1)\alpha}, \\
A' &= \frac{f\left((2n+1)\alpha+n\omega+n\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} \\
&= (-1)^n\frac{f\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} = (-1)^n\frac{f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}{f\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}, \\
A'' &= \frac{F\left((2n+1)\alpha+n\omega+n\varpi i+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{F\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} \\
&= (-1)^n\frac{F\left((2n+1)\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}{F\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)} = (-1)^n\frac{F\left(\alpha+\frac{\varpi}{2}i\right)}{F\left((2n+1)\alpha+\frac{\varpi}{2}i\right)}.
\end{aligned}\right\}\text{pour } \alpha=0.$$

Ces expressions de A, A', A'' deviendront de la forme $\frac{0}{0}$ en faisant $\alpha=0$, donc on trouvera d'après les règles connues

$$A=\frac{1}{2n+1}, \quad A'=A''=\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

D'après cela les trois premières formules deviendront

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(2n+1)\beta &= \frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\,\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
f(2n+1)\beta &= \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu(-1)^m f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
F(2n+1)\beta &= \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu(-1)^\mu F\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour avoir la valeur des constantes B, B', B'', je remarque qu'on aura

$$(127)\quad \begin{aligned}
\prod_{-n}^{+n}{}_m\prod_{-n}^{+n}{}_\mu\psi(m,\mu) &= \psi(0,0)\prod_1^n{}_m\psi(m,0)\,\psi(-m,0)\prod_1^n{}_\mu\psi(0,\mu)\,\psi(0,-\mu) \\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\psi(m,\mu)\,\psi(-m,-\mu)\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\psi(m,-\mu)\,\psi(-m,\mu).
\end{aligned}$$

En appliquant cette transformation aux formules (125), en divisant la première par $\varphi\beta$, la seconde par $f\beta$ et la troisième par $F\beta$, en faisant ensuite dans la première $\beta=0$, dans la seconde $\beta=\frac{\omega}{2}$ et dans la troisième $\beta=\frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant que $\frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta}=2n+1$, pour $\beta=0$, que $\frac{f(2n+1)\beta}{f\beta}=(-1)^n(2n+1)$, pour $\beta=\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{F(2n+1)\beta}{F\beta}=(-1)^n(2n+1)$, pour $\beta=\frac{\varpi}{2}i$, on trouvera

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned}
(2n+1) &= B\prod_1^n{}_m\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\prod_1^n{}_\mu\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) \\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
(-1)^n(2n+1) &= B'\prod_1^n{}_m f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\prod_1^n{}_\mu f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) \\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
(-1)^n(2n+1) &= B''\prod_1^n{}_m F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\prod_1^n{}_\mu F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) \\
&\times\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

En tirant de ces équations les valeurs de B, B', B'', et les substituant ensuite dans les formules transformées, il viendra

$$
(129)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varphi(2n+1)\beta=\\
&\qquad(2n+1)\varphi\beta\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\frac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{\varphi\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\\
&\qquad\times\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\,\frac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)},\\
&f(2n+1)\beta=\\
&\qquad(-1)^n(2n+1)f\beta\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\frac{f\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{f\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\\
&\qquad\times\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\,\frac{f\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)f\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)},\\
&F(2n+1)\beta=\\
&\qquad(-1)^n(2n+1)F\beta\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\frac{F\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{F\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\\
&\qquad\times\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{F\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\,\frac{F\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)F\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.
\end{aligned}\right.
$$

On peut donner à ces expressions des formes plus simples, en faisant usage des formules suivantes:

$$\frac{\varphi(\beta+\alpha)\varphi(\beta-\alpha)}{\varphi^2\alpha}=-\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{f(\beta+\alpha)f(\beta-\alpha)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}=-\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{F(\beta+\alpha)F(\beta-\alpha)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}=-\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}},$$

qu'on vérifiera aisément au moyen des formules (13), (16), (18).

En vertu de ces formules il est clair qu'on peut mettre les équations (129) sous la forme:

$$
(130)\quad\left\{\begin{aligned}
&\varphi(2n+1)\beta=\\
&\qquad(2n+1)\varphi\beta\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\qquad\times\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\,\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}},\\
&f(2n+1)\beta=\\
&\qquad(-1)^n(2n+1)f\beta\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\qquad\times\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\,\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}},\\
&F(2n+1)\beta=\\
&\qquad(-1)^n(2n+1)F\beta\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\qquad\times\mathop{\Pi_m}\limits_{1}^{n}\mathop{\Pi_\mu}\limits_{1}^{n}\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\,\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.
\end{aligned}\right.
$$

Ces formules donnent, comme on le voit, les valeurs de $\varphi(2n+1)\beta$, $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$, exprimées respectivement en fonction rationnelle de $\varphi\beta$, $f\beta$ et $F\beta$ sous forme de produits.

Nous donnerons encore les valeurs de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$ sous une autre forme, qui sera utile dans la suite.

On a $f^2\beta = 1 - c^2\varphi^2\beta$, donc

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\alpha} = \frac{c^2(\varphi^2\beta - \varphi^2\alpha)}{f^2\alpha}$$

et

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = \frac{c^2\left[\varphi^2\beta - \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)};$$

or en vertu de l'équation (18) on a

$$f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{1}{f^2\alpha},$$

donc

$$\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\alpha}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}} = \frac{1}{f^4\alpha}\,\frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\,\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}.$$

On trouvera de même

$$\frac{1-\frac{F^2\beta}{F^2\alpha}}{1-\frac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}} = \frac{1}{F^4\alpha}\,\frac{e^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\,\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}.$$

En vertu de ces formules, et en faisant $\beta=0$ pour déterminer le facteur constant, il est clair qu'on peut écrire les expressions de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$, comme il suit:

$$(130')\left\{\begin{aligned}
f(2n+1)\beta &= f\beta\,\prod_1^n{}_m\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\cdot\prod_1^n{}_\mu\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\times\prod_1^n{}_m\,\prod_1^n{}_\mu\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}},\\
F(2n+1)\beta &= F\beta\,\prod_1^n{}_m\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}\,\prod_1^n{}_\mu\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\\
&\times\prod_1^n{}_m\,\prod_1^n{}_\mu\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}\,\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ce paragraphe nous n'avons considéré les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ que dans le cas des valeurs impaires de n. On pourrait trouver des expressions analogues de ces fonctions pour des valeurs paires de n; mais comme il n'y a à cela aucune difficulté, et que d'ailleurs les formules auxquelles nous sommes parvenus sont celles qui nous seront les plus utiles dans la suite, je ne m'en occuperai pas.

§ VII.

Développement des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en séries et en produits infinis.

24.

En faisant dans les formules du paragraphe précédent $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$, on obtiendra des expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, qui, à cause du nombre indéterminé n, peuvent être variées d'une infinité de manières.

Parmi toutes les formules qu'on obtiendra ainsi, celles qui résultent de la supposition de n infini sont les plus remarquables. Alors les fonctions φ, f, F disparaîtront des valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, et on obtiendra pour ces fonctions des expressions algébriques, mais composées d'une infinité de termes. Pour avoir ces expressions, il faut faire, dans les formules (126), (130), $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et ensuite chercher la limite du second membre de ces équations pour des valeurs toujours croissantes de n. Pour abréger, soit v une quantité dont la limite est zéro pour des valeurs toujours croissantes de n. Cela posé, considérons successivement les trois formules (126).

En faisant dans la première des formules (126) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant que

$$(131)\quad \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta(m,\mu) = \theta(0,0) + \sum_1^n{}_m [\theta(m,0)+\theta(-m,0)] + \sum_1^n{}_\mu [\theta(0,\mu)+\theta(0,-\mu)]$$
$$+ \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu [\theta(m,\mu)+\theta(-m,-\mu)+\theta(m,-\mu)+\theta(-m,\mu)],$$

il est clair qu'on peut mettre la formule dont il s'agit sous la forme:

$$(132)\quad \varphi\alpha = \frac{1}{2n+1}\cdot\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_m (-1)^m \left[\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu (-1)^\mu \left[\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right] - \frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi(n-m,n-\mu)$$
$$+ \frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi_1(n-m,n-\mu),$$

où l'on a fait pour abréger,

$$(133)\quad \begin{cases} \psi(m,\mu) = \dfrac{1}{2n+1}\cdot\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)} + \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}, \\[2ex] \psi_1(m,\mu) = \dfrac{1}{2n+1}\cdot\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)} + \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}. \end{cases}$$

Maintenant, en remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\cdot\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{A_m}{2n+1},$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\cdot f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot F\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\cdot\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{B_\mu}{2n+1};$$

où A_m et B_μ sont des quantités finies, le second membre de l'équation (132) jusqu'au terme qui a le signe $-$, prendra la forme

$$\frac{1}{2n+1}\varphi\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2}\sum_1^n{}_m (-1)^m (A_m+B_m);$$

or la limite de cette quantité est évidemment zéro; donc, en prenant la limite de la formule (132), on aura

$$\varphi\alpha = -\frac{i}{ec}\lim.\sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi(n-m,\ n-\mu)$$
$$+ \frac{i}{ec}\lim.\sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi_1(n-m,\ n-\mu),$$

ou bien:

$$(134)\quad \varphi\alpha = -\frac{i}{ec}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu)$$
$$+ \frac{i}{ec}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi_1(m,\mu).$$

Il suffit de connaître l'une de ces limites, car on aura l'autre en changeant seulement le signe de i. Cherchons la limite de

$$\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu).$$

Pour cela, il faut essayer de mettre la quantité précédente sous la forme

$$P+v,$$

où P est indépendant de n, et v une quantité qui a zéro pour limite; car alors la quantité P sera précisément la limite dont il s'agit.

25.

Considérons d'abord l'expression

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \psi(m,\mu).$$

Soit

$$(135)\quad \theta(m,\mu) = \frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i]^2},$$

et faisons

$$(136)\qquad \psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}R_\mu,$$

on aura

$$(137)\qquad \sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\psi(m,\mu)-\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\theta(m,\mu)=2\alpha\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est une quantité de la forme $\frac{v}{2n+1}$.

D'après les formules (12), (13) on aura

$$\frac{1}{\varphi(\beta+\varepsilon)}+\frac{1}{\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{\varphi(\beta+\varepsilon)+\varphi(\beta-\varepsilon)}{\varphi(\beta+\varepsilon).\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{2\varphi\beta.f\varepsilon.F\varepsilon}{\varphi^2\beta-\varphi^2\varepsilon},$$

donc, en faisant $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$ et $\varepsilon=\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}=\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ et $f\varepsilon.F\varepsilon=\theta\varepsilon$, on a

$$\psi(m,\mu)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Or on a

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{A\alpha^3}{(2n+1)^3},$$

donc

$$\psi(m,\mu)=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\left(\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}+\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}\right),$$

et par conséquent

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\left\{\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}\right\}$$
$$+\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}\cdot\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Donc la valeur de R_μ deviendra

$$(138)\qquad R_\mu=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\left(1+\frac{A\alpha^2}{(2n+1)^2}\right)-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}.$$

Cela posé, il y a deux cas à considérer, suivant que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite ou non.

a) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}+\frac{B_\mu\varepsilon_\mu^4}{(2n+1)^4},$$

$$\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\sqrt{1-c^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\sqrt{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}=1+\frac{C_\mu\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^4},$$

où B_μ, C_μ, D ont des limites finies; donc, en substituant,

$$(139)\qquad R_\mu=A\alpha^2.\frac{\frac{1}{\varepsilon_\mu^2}+\frac{C_\mu}{(2n+1)^2}}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}-1+\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2.\varepsilon_\mu^2}-B_\mu\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}}$$
$$+\frac{C_\mu\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}-\frac{D\alpha^4}{\varepsilon_\mu^4}-C_\mu+B_\mu}{\left(1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}\right)^2-\left(1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon_\mu^2}\right)\left(\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2\varepsilon_\mu^2}-B_\mu\frac{\varepsilon_\mu^2}{(2n+1)^2}\right)};$$

or que ε_μ soit fini ou infini, il est clair que cette quantité convergera toujours vers une quantité finie pour des valeurs toujours croissantes de n. Donc on aura

$$(140)\qquad R_\mu=r_\mu+v_\mu,$$

où r_μ est une quantité finie indépendante de n.

b) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité finie, il est clair qu'en nommant cette limite δ_μ, on aura

$$(141)\qquad R_\mu=-\frac{\theta(\delta_\mu)}{\varphi^2(\delta_\mu)}+\frac{1}{\delta_\mu^2}+v_\mu'.$$

Cela posé, considérons l'expression $\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}$. On a

$$(142)\qquad \sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}=\frac{1}{(2n+1)^2}.[R_0-R_1+R_2-R_3+\cdots$$
$$+(-1)^{\nu-1}R_{\nu-1}+(-1)^\nu(R_\nu-R_{\nu+1}+R_{\nu+2}-R_{\nu+3}+\cdots+(-1)^{n-\nu-1}R_{n-1})].$$

Supposons d'abord que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ ait pour limite une quantité finie, quelle que soit la valeur de μ. Alors, en remarquant que

$$\delta_{\mu+1} = \delta_\mu,$$

on aura

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu' - v'_{\mu+1},$$

donc

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2}(v_0' - v_1' + v_2' - v_3' + \cdots + v'_{k-2} - v'_{k-1}) + \frac{B}{(2n+1)^2},$$

où $k = n$ ou $n-1$, selon que n est pair ou impair. La quantité B a toujours pour limite une quantité finie, savoir $B = 0$ si n est pair, et $B = R_{n-1}$ si n est impair.

Maintenant on sait qu'une somme telle que

$$v_0' - v_1' + v_2' - \cdots + v'_{k-2} - v'_{k-1},$$

peut être mise sous la forme kv, v ayant zéro pour limite. Donc en substituant

$$\sum_0^{n-1} (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{kv + B}{(2n+1)^2};$$

or, k étant égal à n ou à $n-1$, et B fini, la limite de $\frac{kv+B}{2n+1}$ sera zéro, donc

(143) $$\sum_0^{n-1} (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Supposons maintenant que $\frac{m}{2n+1}$ ait zéro pour limite. Alors $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a également zéro pour limite, à moins qu'en même temps $\frac{\mu}{2n+1}$ n'ait pour limite une quantité finie. Soit dans ce cas ν le nombre entier immédiatement inférieur à $\sqrt{n}$, et considérons la somme

$$R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \cdots + (-1)^{\nu-1} R_{\nu-1}.$$

En supposant que μ soit un des nombres $0, 1, \ldots \nu$, il est clair que $\frac{\varepsilon_\mu}{(2n+1)} = \frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}$ a zéro pour limite; donc, selon ce qu'on a vu, R_μ sera une quantité finie, et par conséquent

$$R_0 - R_1 + R_2 - \cdots + (-1)^{\nu-1} R_{\nu-1} = \nu . R,$$

où R est également une quantité finie.

Considérons maintenant la somme

$$(-1)^\nu (R_\nu - R_{\nu+1} + R_{\nu+2} - \cdots + (-1)^{n-\nu-1} . R_{n-1}).$$

Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité différente de zéro, on a, comme on l'a vu,

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu' - v'_{\mu+1};$$

si au contraire $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite zéro, on a

$$R_\mu = r_\mu + v_\mu';$$

or, si en même temps $\mu > \sqrt{n}$, il est clair qu'en vertu de la valeur de R_μ,

$$r_\mu = B_\mu - C_\mu;$$

or il est clair que B_μ et C_μ, tous deux, ont pour limites des quantités indépendantes de μ, donc en nommant ces limites B et C, on aura

$$R_\mu = B - C + v_\mu,$$

et par suite, aussi dans ce cas,

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu - v_{\mu+1}.$$

Donc, comme dans le cas où $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ aurait une limite différente de zéro pour toutes les valeurs de μ, on démontrera que

$$\frac{(-1)^\nu}{(2n+1)^2}(R_\nu - R_{\nu+1} + \cdots + (-1)^{n-\nu-1} R_{n-1}) = \frac{v}{(2n+1)}.$$

Maintenant en combinant les équations ci-dessus, on en tirera

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \nu R + \frac{v}{2n+1};$$

or $\frac{\nu}{2n+1}$ a zéro pour limite, donc

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Donc cette formule a toujours lieu, et par conséquent la formule (137) deviendra

(144) $$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \psi(m,\mu) - \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = \frac{v}{2n+1}.$$

Cela posé, il s'agit de mettre $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu)$ sous la forme $P+\frac{v}{2n+1}$. Or c'est ce qu'on peut faire comme il suit. On a

$$(145)\quad \left\{\begin{aligned} &\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) - \overset{\infty}{\underset{n}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu), \\ &\overset{\infty}{\underset{n}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = (-1)^n [\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \theta(m,n+2) - \cdots]. \end{aligned}\right.$$

Or d'après une formule connue on a

$$\begin{aligned} &\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \theta(m,n+2) - \cdots \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}\theta(m,n) + A\frac{d\theta(m,n)}{dn} + B\frac{d^3\theta(m,n)}{dn^3} + \cdots, \end{aligned}$$

où A, B . . . sont des nombres; or

$$\theta(m,n) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

donc en substituant

$$\begin{aligned} &\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \cdots \\ &\qquad = \frac{\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i]^2} + \frac{4A\alpha\varpi i[(m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i]}{[\alpha^2 - ((m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i)^2]^2} + \cdots. \end{aligned}$$

De là il suit que

$$\theta(m,n) - \theta(m,n+1) + \cdots = \frac{\alpha}{\varpi^2 n^2} + \frac{v}{n^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Donc en vertu des équations (145)

$$\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \theta(m,\mu) + \frac{v}{2n+1},$$

et par conséquent

$$(146)\qquad \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \psi(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \theta(m,\mu) + \frac{v}{2n+1}.$$

26.

Ayant transformé de cette sorte la quantité $\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \psi(m,\mu)$, on tire de l'équation (146)

$$(147)\qquad \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_m \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^{m+\mu} \psi(m,\mu) = \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^m . \varrho_m + \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{v_m}{2n+1},$$

en faisant

$$(148)\qquad \varrho_m = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu . \theta(m,\mu);$$

or

$$\overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}} \frac{v_m}{2n+1} = \frac{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}}{2n+1} = \frac{nv}{2n+1} = \frac{v}{2},$$

v ayant zéro pour limite. Donc l'équation (147) donnera, en faisant n infini,

$$(149)\qquad \lim. \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_m \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^{m+\mu} \psi(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^m . \varrho_m.$$

De même, si l'on fait, pour abréger,

$$(150)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_1(m,\mu) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}, \\ &\varrho_m' = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \theta_1(m,\mu), \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(151)\qquad \lim. \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_m \overset{n-1}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^{m+\mu} \psi_1(m,\mu) = \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^m \varrho_m'.$$

Ayant trouvé les deux quantités dont l'expression de $\varphi\alpha$ est composée, on aura en substituant

$$\varphi\alpha = -\frac{i}{ec}\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^m \varrho_m + \frac{i}{ec}\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^m \varrho_m' = \frac{i}{ec} \cdot \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} (-1)^m (\varrho_m' - \varrho_m),$$

ou bien, en remettant les valeurs de ϱ_m' et ϱ_m,

$$(152)\quad \varphi\alpha = \frac{i}{ec}\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_m (-1)^m \left[\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu (-1)^\mu \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}\right)\right].$$

Maintenant

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega \pm (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} = \frac{1}{\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega \mp (\mu+\frac{1}{2})\varpi i} + \frac{1}{\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega \pm (\mu+\frac{1}{2})\varpi i},$$

donc

$$\begin{aligned} &\frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} \\ &\qquad = \frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}, \end{aligned}$$

donc l'expression de $\varphi\alpha$ prendra la forme réelle:

(153) $\varphi\alpha =$

$$\frac{1}{ec}\cdot\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\left(\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right),$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$(154)\qquad \begin{aligned}\varphi\alpha = {} & \frac{\tilde{\omega}}{ec}(\delta_0-\delta_1+\delta_2-\delta_3+\cdots+(-1)^m\delta_m\ldots)\\ & -\frac{\tilde{\omega}}{ec}(\delta_0'-\delta_1'+\delta_2'-\delta_3'+\cdots+(-1)^m\delta_m'\ldots),\end{aligned}$$

où

$$(155)\quad \begin{cases}\delta_m=\dfrac{1}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{\tilde{\omega}^2}{4}}-\dfrac{3}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{9\tilde{\omega}^2}{4}}+\dfrac{5}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{25\tilde{\omega}^2}{4}}-\cdots.\\[2ex] \delta_m'=\dfrac{1}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{\tilde{\omega}^2}{4}}-\dfrac{3}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{9\tilde{\omega}^2}{4}}+\dfrac{5}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+\frac{25\tilde{\omega}^2}{4}}-\cdots.\end{cases}$$

Si l'on commence la recherche de la limite de la fonction $\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu)$ par celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^m\psi(m,\mu)$ au lieu de celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^\mu\psi(m,\mu)$, comme nous l'avons fait, on trouvera, au lieu de la formule (153), la suivante

(156) $\varphi\alpha =$

$$\frac{1}{ec}\cdot\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\left(\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$(157)\qquad \begin{aligned}\varphi\alpha = {} & \frac{\tilde{\omega}}{ec}(\varepsilon_0-3\varepsilon_1+5\varepsilon_2-7\varepsilon_3+\cdots+(-1)^\mu(2\mu+1)\varepsilon_\mu+\ldots)\\ & -\frac{\tilde{\omega}}{ec}(\varepsilon_0'-3\varepsilon_1'+5\varepsilon_2'-7\varepsilon_3'+\cdots+(-1)^\mu(2\mu+1)\varepsilon_\mu'+\ldots),\end{aligned}$$

où

$$(158)\quad \begin{cases}\varepsilon_\mu=\dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}+\dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\cdots.\\[2ex] \varepsilon_\mu'=\dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}+\dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\cdots.\end{cases}$$

27.

Cherchons maintenant l'expression de $f\alpha$ au moyen de la deuxième des formules (126). En vertu de l'équation (131) le second membre prend la forme suivante:

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{2n+1}f\beta+\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m\left[f\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)+f\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)\right]\\ &\qquad+\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu\left[f\left(\beta+\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)+f\left(\beta-\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\right]\\ &\qquad+\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m\left[f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)+f\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\right]\\ &\qquad+\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m\left[f\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)+f\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\right].\end{aligned}$$

En y faisant $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$, et en remarquant qu'alors la limite des quantités contenues dans les deux premières lignes devient égale à zéro, on aura

$$(159)\qquad \begin{aligned}f\alpha = {} & \lim.(-1)^n\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m.\psi(n-m,\,n-\mu)\\ & +\lim.(-1)^n\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m.\psi_1(n-m,\,n-\mu),\end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\psi(n-m,\ n-\mu)=\frac{1}{2n+1}\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\right],$$

$$\psi_1(n-m,\ n-\mu)=\frac{1}{2n+1}\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)\right].$$

Maintenant on a

$$f(\beta+\varepsilon)+f(\beta-\varepsilon)=\frac{2f\beta.f\varepsilon}{1+e^2c^2\varphi^2\varepsilon.\varphi^2\beta}=\frac{f\varepsilon}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}\cdot\frac{2f\beta}{\varphi^2\beta+\frac{1}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}}.$$

Soit

$$\varepsilon=\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1},$$

on aura

$$\frac{1}{\varphi\varepsilon}=-iec.\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}}{2}i-\varepsilon\right)=-iec.\varphi\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\tilde{\omega}i}{2n+1}\right),$$

$$\frac{f\varepsilon}{\varphi\varepsilon}=-\frac{i\sqrt{e^2+c^2}}{F\left(\varepsilon-\frac{\varpi}{2}i\right)}=-i\sqrt{e^2+c^2}\cdot\frac{c}{\sqrt{e^2+c^2}}\cdot F\left(\varepsilon-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)$$

$$=-ci.F\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).$$

Donc on aura, en substituant et en mettant m et μ respectivement au lieu de $n-m$ et $n-\mu$,

$$\psi(m,\mu)=-\frac{1}{e}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left[\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)\right]}.$$

On aura la valeur de $\psi_1(m,\mu)$, en changeant seulement le signe de i. En faisant maintenant

$$\theta(m,\mu)=-\frac{(2m+1)\omega+(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}$$

et

$$\theta_1(m,\mu)=-\frac{(2m+1)\omega-(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

et en cherchant ensuite la limite de la fonction

$$\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^m.\psi(m,\mu),$$

de la même manière que précédemment, on trouvera

$$\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^m.\psi(m,\mu)=\frac{1}{e}\cdot\sum_0^{\infty}{}_\mu\left(\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m.\theta(m,\mu)\right)$$

et

$$\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^m.\psi_1(m,\mu)=\frac{1}{e}\cdot\sum_0^{\infty}{}_\mu\left(\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m.\theta_1(m,\mu)\right);$$

donc en substituant dans (159), et en remettant les valeurs de $\theta(m,\mu)$ et $\theta_1(m,\mu)$, on a

(160) $f\alpha=$

$$-\frac{1}{e}\cdot\sum_0^{\infty}{}_\mu\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m\left(\frac{(2m+1)\omega+(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}+\frac{(2m+1)\omega-(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}\right).$$

La quantité renfermée entre les crochets peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{2[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2},$$

donc on a aussi

(161) $f\alpha=$

$$\frac{1}{e}\cdot\sum_0^{\infty}{}_\mu\left(\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m\cdot\frac{2[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right).$$

On aura de la même manière

(162) $F\alpha=$

$$\frac{1}{c}\cdot\sum_0^{\infty}{}_m\left(\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu\cdot\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}+\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu\cdot\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right).$$

28.

Venons maintenant aux formules (130). Pour trouver la valeur du second membre, après avoir fait $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$, et supposé n infini, nous allons d'abord chercher la limite de l'expression suivante:

$$(163)\qquad t=\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}},$$

où k et l sont deux quantités indépendantes de n, m, μ.

En prenant le logarithme, et en faisant pour abréger

$$(164)\qquad \psi(m,\mu)=\log\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}},$$

on aura

$$(165)\qquad \log t=\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu\psi(m,\mu).$$

Considérons d'abord l'expression $\sum_1^n{}_\mu\psi(m,\mu)$. Soit

$$(166)\qquad \theta(m,\mu)=\log\frac{1-\dfrac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1-\dfrac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}},$$

on aura

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}\cdot\frac{1-\dfrac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}}\right\}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est pour toute valeur de m et μ de la forme

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Pour le démontrer, il faut distinguer deux cas, suivant que la limite de $\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ est une quantité différente de zéro, ou égale à zéro.

a) Dans le premier cas on aura, en nommant a la limite dont il s'agit,

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)=\varphi^2 a+v,$$

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)=\varphi^2 a+v',$$

$$\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)=\frac{a^2}{(2n+1)^2}+\frac{v''}{(2n+1)^2},$$

donc

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}=1-\frac{a^2}{(2n+1)^2\varphi^2 a}+\frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}=1-\frac{a^2}{(2n+1)^2\varphi^2 a}+\frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

On a de même

$$1-\frac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}=1-\frac{a^2}{(2n+1)^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]^2}=1-\frac{a^2}{(2n+1)^2a^2}+\frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1-\frac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}=1-\frac{a^3}{(2n+1)^2a^2}+\frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

En substituant ces valeurs, l'expression de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ prendra la forme:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\frac{v}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v'}{(2n+1)^2}}\cdot\frac{1-\frac{v_1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v_1'}{(2n+1)^2}}\right\},$$

les quantités v, v', v_1, v_1' ayant toutes zéro pour limite. On a

$$\log\left(1-\frac{v}{(2n+1)^2}\right)=\frac{v}{(2n+1)^2}\ \text{etc.};$$

par conséquent

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

b) Si la limite de la quantité $\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ est égale à zéro, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)=\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}{(2n+1)^2}+A.\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^4},$$

$$\varphi^2\left(\frac{a}{2n+1}\right)=\frac{a^2}{(2n+1)^2}+A'.\frac{a^4}{(2n+1)^4},$$

donc

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}=1-\frac{a^2+A'\frac{a^4}{(2n+1)^2}}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2+A\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^2}}.$$

Si maintenant $m\omega+\mu\varpi i$ ne va pas en augmentant indéfiniment avec n, on aura

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}=1-\frac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}+\frac{B}{(2n+1)^2};$$

de même

$$1-\frac{\varphi^2\left[\frac{a}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}=1-\frac{a^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}+\frac{C}{(2n+1)^2};$$

donc dans ce cas

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\frac{1-\frac{B'}{(2n+1)^2}}{1-\frac{C'}{(2n+1)^2}};$$

B' et C' ayant des limites finies, ou bien

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{D}{(2n+1)^2},$$

la limite de D étant également une quantité finie.

Si au contraire la quantité $m\omega+\mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, on a

$$\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}=1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{A-A'\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1+A\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]^2}\,\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}};$$

or les quantités $\dfrac{1}{m\omega+\mu\varpi i+k}$; $\dfrac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}$ ont zéro pour limite; donc la quantité précédente sera de la forme

$$1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\cdot A'',$$

A'' ayant une quantité finie pour limite. En changeant k en l, et désignant la valeur correspondante de A'' par A_1'', la valeur de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ deviendra

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\frac{1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A''}{1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A_1''}=\frac{\alpha^2(A''-A_1'')}{(2n+1)^2}+\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Maintenant la limite de A'' est la même que celle de A; or il est clair que cette dernière limite est indépendante de k, m, μ (elle est en effet égale au coefficient de α^4 dans le développement de $\varphi^2\alpha$). Donc on aura

$$A''=M+v,$$

et en changeant k en l,

$$A_1''=M+v',$$

d'où $A''-A_1''=v-v'=v$. Donc $A''-A_1''$ a zéro pour limite, et par conséquent on a

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Donc nous avons démontré, qu'en faisant

(167) $$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{A_{m,\mu}}{(2n+1)^2},$$

la limite de $A_{m,\mu}$ sera égale à zéro toutes les fois que $m\omega+\mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, et qu'elle sera égale à une quantité finie dans le cas contraire.

29.

Cela posé, considérons la quantité $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\psi(m,\mu)$. En substituant la valeur de $\psi(m,\mu)$, il viendra:

(168) $$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\psi(m,\mu)=\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)+\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,A_{m,\mu}.$$

Soit ν le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt{n}$, on peut faire

$$\begin{aligned}\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,A_{m,\mu}= &\ A_{m,1}+A_{m,2}+\cdots+A_{m,\nu}\\ &+A_{m,\nu+1}+A_{m,\nu+2}+\cdots+A_{m,n}.\end{aligned}$$

Or, d'après la nature des quantités $A_{m,\mu}$, la somme contenue dans la première ligne sera égale à $\nu.A_m$, et la seconde égale à $A_m'(n-\nu)$, où A_m est une quantité finie et A_m' une quantité qui a zéro pour limite, donc

$$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,A_{m,\mu}=\nu A_m+(n-\nu)A_m'=(2n+1)B_m,$$

où

$$B_m=\frac{\nu}{2n+1}A_m+\frac{n-\nu}{2n+1}A_m'.$$

Donc la quantité B_m a zéro pour limite, ν ne surpassant pas $\sqrt{n}$. Par là l'expression de $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\psi(m,\mu)$ se change en

(169) $$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\psi(m,\mu)=\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)+\frac{B_m}{2n+1}.$$

Pour avoir la limite de $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)$, j'écris

$$\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)=\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)-\overset{\infty}{\underset{n+1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)=\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu)-\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu+n).$$

Or on peut trouver la valeur de $\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}_\mu\,\theta(m,\mu+n)$ comme il suit. On a

$$\theta(m,\mu+n)=\log\frac{1-\frac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2}}$$

$$=\alpha^2\left(\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2}-\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\alpha^4\left(\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^4}-\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^4}\right)+\cdots$$

De là on tire

$$\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu+n)=\frac{\alpha^2}{n}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\,\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)+\frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\,\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right)+\cdots,$$

où

$$\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)=\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right]^2}-\frac{1}{\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right]^2},$$

$$\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right)=\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right]^4}-\frac{1}{\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right]^4},\ \text{etc.}$$

Or on sait que la limite de $\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{n}\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)$ est égale à $\int_0^x \theta x.dx$, donc

$$\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{n}\,\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)=\int_0^x\theta x.dx+v,$$

$$\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{n}\,\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right)=\int_0^x\theta_1 x.dx+v_1,\ \text{etc.},$$

et par conséquent en substituant

$$\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\theta(m,\mu+n)=\frac{\alpha^2}{n}\cdot\int_0^x\theta x.dx+\frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot\int_0^x\theta_1 x.dx+\cdots+\frac{v\alpha^2}{n}+\frac{v_1\alpha^4}{2n^3}+\cdots;$$

or

$$\theta x=\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right]^2}-\frac{1}{\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right]^2},\ \text{etc.}$$

donc on aura

$$\int_0^x\theta x.dx=$$

$$\frac{1}{\varpi i}\cdot\left\{\frac{1}{\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right]}-\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right]}\right\}-\frac{1}{\varpi i}\cdot\left\{\frac{1}{\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i\right]}-\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{\varpi i}\,\frac{l-k}{n}\,\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right]\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right]}-\frac{1}{\varpi i}\,\frac{l-k}{n}\,\frac{1}{\left[\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i\right]\left[\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i\right]}.$$

La limite de cette expression de $\int_0^x\theta x.dx$ est zéro pour une valeur quelconque de x. De même on trouvera que la limite de $\int_0^x\theta_1 x.dx$ est zéro, donc

$$\sum_1^{n}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu+n)=\frac{\alpha^2}{n}v+\frac{\alpha^4}{2n^3}v'+\frac{\alpha^6}{3n^5}v''+\cdots$$

$$=\frac{\alpha^2}{2n+1}\cdot\left(v+\frac{\alpha^2}{2n^2}v'+\frac{\alpha^4}{3n^4}v''+\cdots\right)\frac{2n+1}{n}=\frac{v}{2n+1},$$

donc aussi, en faisant $\mu=\infty$,

$$\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu+n)=\frac{v}{2n+1},$$

d'où

$$\sum_1^{n}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu)=\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu)-\frac{v}{2n+1},$$

et

(170) $$\sum_1^{n}{}_{\mu}\,\psi(m,\mu)=\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu)+\frac{v_m}{2n+1},$$

v_m ayant zéro pour limite. De là on tire

$$\sum_1^{n}{}_{m}\sum_1^{n}{}_{\mu}\,\psi(m,\mu)=\sum_1^{n}{}_{m}\left(\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu)\right)+\sum_1^{n}\frac{v_m}{2n+1}.$$

En prenant la limite des deux membres et remarquant que

$$\sum_1^{n}\frac{v_m}{2n+1}=\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{2n+1}=v,$$

on aura

(171) $$\lim.\sum_1^{n}{}_{m}\sum_1^{n}{}_{\mu}\,\psi(m,\mu)=\sum_1^{\infty}{}_{m}\left(\sum_1^{\infty}{}_{\mu}\,\theta(m,\mu)\right).$$

En remettant les valeurs de $\psi(m,\mu)$ et $\theta(m,\mu)$, et passant des logarithmes aux nombres, on en tire

(172) $$\lim.\prod_1^{n}{}_{m}\prod_1^{n}{}_{\mu}\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\frac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}}=\prod_1^{\infty}{}_{m}\left\{\prod_1^{\infty}{}_{\mu}\frac{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}}\right\}.$$

Par une analyse toute semblable à la précédente, mais plus simple, on trouvera de même

$$(173)\qquad \lim. \prod_{1}^{n}{}_{m} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+l}{2n+1}\right]}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+l)^2}},$$

$$(174)\qquad \lim. \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{\mu\varpi i+k}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\left[\dfrac{\alpha}{2n+1}\right]}{\varphi^2\left[\dfrac{\mu\varpi i+l}{2n+1}\right]}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+l)^2}}.$$

30.

Maintenant rien n'est plus facile que de trouver les valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Considérons d'abord la première formule (130). On a

$$e^2c^2\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -\frac{1}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}-\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right]} = -\frac{1}{\varphi^2\left[\dfrac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right]},$$

donc

$$\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]}}{1+e^2c^2\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]\varphi^2\beta} = \frac{\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\left\{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]}\right\}}{\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu}\left\{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right]}\right\}}$$

$$= \prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left[\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right]}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left\{\dfrac{\left[m\omega+\mu\varpi i-\dfrac{\omega}{2}-\dfrac{\varpi}{2}i\right]}{2n+1}\right\}}}.$$

Cela posé, si l'on fait $\beta=\dfrac{\alpha}{2n+1}$ et qu'on suppose n infini, il viendra,

en faisant usage des formules (172), (173), (174), et en remarquant que la limite de $(2n+1)\varphi\left(\dfrac{\alpha}{2n+1}\right)$ est égale à α,

$$(175)\qquad \varphi\alpha = \alpha\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m\omega)^2}\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu\varpi)^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left\{\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega-\mu\varpi i)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}\right\}.$$

Les deux formules (130′) donneront de la même manière, en faisant $\beta=\dfrac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant que $f(0)=1$, $F(0)=1$,

$$(176)\qquad f\alpha =$$
$$\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left\{\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+\mu\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}\cdot\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-\mu\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}\right\},$$

$$(177)\qquad F\alpha =$$
$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left\{\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}\cdot\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}\right\}.$$

On peut aussi donner une forme réelle aux expressions précédentes comme il suit,

$$(178)\qquad \varphi\alpha = \alpha.\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1+\frac{\alpha^2}{\mu^2\varpi^2}\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1+\dfrac{(\alpha+m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\dfrac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\frac{1+\dfrac{(\alpha-m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\dfrac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\left\{\frac{1+\dfrac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\dfrac{m^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}\right\}^2,$$

$$(179)\qquad f\alpha = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1+\dfrac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\dfrac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\frac{1+\dfrac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\dfrac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\left\{\frac{1+\dfrac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\dfrac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}\right\}^2,$$

$$(180)\qquad F\alpha = \prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right)$$
$$\times\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\mu}\frac{1+\dfrac{(\alpha+m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\dfrac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\frac{1+\dfrac{(\alpha-m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\dfrac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\left\{\frac{1+\dfrac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\dfrac{m^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\right\}^2.$$

Ces transformations s'opèrent aisément au moyen de la formule

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{(a-bi)^2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1+\frac{\alpha}{a-bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a-bi}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+a)^2+b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}=\left(1+\frac{(\alpha+a)^2}{b^2}\right)\left(1+\frac{(\alpha-a)^2}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{a^2}{b^2}\right]^2}.$$

31.

Dans ce qui précède nous sommes parvenus à deux espèces d'expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; les unes donnent ces fonctions décomposées en fractions partielles, dont la totalité forme des séries infinies doubles, les autres donnent ces mêmes fonctions décomposées en un nombre infini de facteurs, dont chacun est à son tour composé d'une infinité de facteurs. Or on peut beaucoup simplifier les formules précédentes au moyen des fonctions exponentielles et circulaires. C'est ce que nous allons voir par ce qui suit.

Considérons d'abord les équations (178), (179), (180). En vertu de formules connues, on a

$$\frac{\sin y}{y}=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\left(1-\frac{y^2}{\mu^2\pi^2}\right);\quad \cos y=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\left(1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right);$$

donc

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\frac{\left[1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right]}{\left[1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right]}=\frac{\sin z}{z\cos y};\quad \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\left\{\frac{1-\frac{z^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}}{1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}}\right\}=\frac{\cos z}{\cos y}.$$

En vertu de ces formules il est clair que les expressions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ peuvent être mises sous la forme

$$\varphi\alpha=\frac{\varpi}{\pi}\frac{\sin\left[\alpha\frac{\pi i}{\varpi}\right]}{i}\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left\{\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}}{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\sin^2 m\omega\frac{\pi i}{\varpi}}\cdot\frac{\left[m\omega\frac{\pi i}{\varpi}\right]^2}{(\alpha+m\omega)(\alpha-m\omega)\frac{\pi^2 i^2}{\varpi^2}}\right\},$$

$$f\alpha=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$

$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\operatorname{tang}[\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\operatorname{tang}[\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right),$$

$$F\alpha=\cos\alpha\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\frac{\cos(\alpha+m\omega)\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos(\alpha-m\omega)\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}}{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos^2 m\omega\frac{\pi i}{\varpi}}.$$

On trouvera des expressions réelles, en substituant au lieu des fonctions circulaires leurs expressions en fonctions exponentielles. On a

$$\sin(a-b)\,.\,\sin(a+b)=\sin^2 a-\sin^2 b,$$

$$\cos(a+b)\,.\,\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b,$$

donc

$$\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi i}{\varpi}}{\sin^2 m\omega\frac{\pi i}{\varpi}}=-\left\{1-\frac{\sin^2\alpha\frac{\pi i}{\varpi}}{\sin^2 m\omega\frac{\pi i}{\varpi}}\right\},$$

$$\frac{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}}=1-\frac{\sin^2\alpha\frac{\pi i}{\varpi}}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}},$$

$$\operatorname{tang}[\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\cdot\operatorname{tang}[\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi i}{\varpi}\,.\,\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}$$

$$=-\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi i}{\varpi}}{\sin^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi i}{\varpi}}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi i}{\varpi}}}.$$

D'après cela, et en remarquant que

$$\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2-m^2\omega^2}=-\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}}\quad\text{et}\quad\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}=-\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}},$$

il est clair qu'on aura

$$(181)\qquad \varphi\alpha=\frac{\varpi}{\pi}\frac{\sin\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{i}\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}};$$

$$(182)\qquad f\alpha = \prod_0^\infty {}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2(m+\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m+\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}},$$

$$(183)\qquad F\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{\varpi}\pi i\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2 m\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}.$$

En substituant au lieu des cosinus et sinus d'arcs imaginaires leurs valeurs en quantités exponentielles, ces formules deviendront

$$(184)\qquad \varphi\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1-\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

$$(185)\qquad f\alpha = \prod_0^\infty {}_m \frac{1-\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

$$(186)\qquad F\alpha = \tfrac{1}{2}\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}+h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

où h est le nombre 2,718281...

On peut encore transformer ces formules de la manière suivante. Si l'on remplace α par αi, on aura les valeurs de $\varphi(\alpha i)$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$. En changeant maintenant ω en ϖ et ϖ en ω, les quantités

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ f(\alpha i),\ F(\alpha i)$$

se changeront respectivement en

$$\varpi,\ \omega,\quad i\varphi\alpha,\quad F\alpha,\quad f\alpha,$$

donc les formules précédentes donneront

$$(187)\qquad \varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi}\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\prod_1^\infty {}_m \frac{1+\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}}-h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right]^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}},$$

$$(188)\qquad F\alpha = \prod_0^\infty {}_m \frac{1+\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}-h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}},$$

$$(189)\qquad f\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)\prod_1^\infty {}_m \frac{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}}+h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right]^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left[\frac{\alpha\pi}{\omega}\right]}{\left[h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right]^2}}.$$

32.

Considérons maintenant les formules (160), (161), (162). On a

$$\sum_0^\infty {}_\mu (-1)^\mu \frac{(2\mu+1)\pi}{y^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\pi^2} = \frac{2}{h^y+h^{-y}},$$

donc, en faisant

$$y = [\alpha \pm (m+\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}:$$

$$\sum_0^\infty {}_\mu (-1)^\mu \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} = \frac{2\pi}{\varpi}\cdot\frac{1}{h^{(\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}.$$

En vertu de cette formule il est aisé de voir que les expressions (153), (162) de $\varphi\alpha$ et $F\alpha$ deviendront

(190) $\varphi\alpha =$

$$\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m(-1)^m \left\{\frac{1}{h^{(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}} - \frac{1}{h^{(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}\right\},$$

(191) $F\alpha =$

$$\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m \left\{\frac{1}{h^{(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}} + \frac{1}{h^{(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-(\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Les expressions précédentes de $\varphi\alpha$, $F\alpha$, peuvent être mises encore sous beaucoup d'autres formes; je vais rappeler les plus remarquables. D'abord en réunissant les termes du second membre, on trouvera

(192) $$\varphi\alpha = \frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m(-1)^m \frac{\left[h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right]\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right]}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}},$$

(193) $$F\alpha = \frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m \left\{\frac{\left[h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right]\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right]}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}}+h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}+h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Si, pour abréger, on suppose

(194) $$h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}} = \varepsilon \quad \text{et} \quad h^{\frac{\omega\pi}{\varpi}} = r^2,$$

ces formules, en développant le second membre, deviendront

(195) $\varphi\alpha =$

$$\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\left(\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\frac{r-\frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}} - \frac{r^3-\frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}} + \frac{r^5-\frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}} - \cdots\right\},$$

(196) $F\alpha =$

$$\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left\{\frac{r+\frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}} + \frac{r^3+\frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}} + \frac{r^5+\frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}} + \cdots\right\},$$

En mettant αi au lieu de α dans les formules (192), (193), en changeant ensuite c en e et e en c, et remarquant que les quantités

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ F(\alpha i),\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}}-h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},$$

se changeront respectivement en

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi(\alpha),\ f\alpha,\quad 2i.\sin\alpha\frac{\pi}{\omega},\quad 2\cos\alpha\frac{\pi}{\omega},$$

il viendra

(197) $$\varphi\alpha = \frac{4}{ec}\frac{\pi}{\omega}\sum_0^\infty {}_m(-1)^m\left\{\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right]}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}+2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega}+h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\},$$

(198) $$f\alpha = \frac{4}{e}\frac{\pi}{\omega}\sum_0^\infty {}_m\left\{\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\left[h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}+h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right]}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}+2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega}+h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\}.$$

En faisant pour abréger

(199) $$h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}} = \varrho,$$

et en développant, on obtiendra

(200) $\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right) =$

$$\frac{4}{ec}\frac{\pi}{\omega}\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{\varrho-\frac{1}{\varrho}}{\varrho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^2}} - \frac{\varrho^3-\frac{1}{\varrho^3}}{\varrho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^6}} + \frac{\varrho^5-\frac{1}{\varrho^5}}{\varrho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^{10}}} - \cdots\right\},$$

(201) $f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right) =$

$$\frac{4}{e}\frac{\pi}{\omega}\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\left\{\frac{\varrho+\frac{1}{\varrho}}{\varrho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^2}} + \frac{\varrho^3+\frac{1}{\varrho^3}}{\varrho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^6}} + \frac{\varrho^5+\frac{1}{\varrho^5}}{\varrho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\varrho^{10}}} + \cdots\right\}.$$

En substituant dans les formules (190), (191) au lieu de $h^{\alpha\frac{\pi}{\varpi}}$ et $h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}$ leurs valeurs ε et r, il viendra

(202) $$\varphi\alpha = \frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m(-1)^m\left(\frac{1}{\varepsilon r^{-(2m+1)}+\varepsilon^{-1}r^{2m+1}} - \frac{1}{\varepsilon r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}r^{-(2m+1)}}\right),$$

(203) $$F\alpha = \frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty {}_m\left(\frac{1}{\varepsilon r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}r^{2m+1}} + \frac{1}{\varepsilon r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}}\right).$$

En supposant maintenant $\alpha < \frac{\omega}{2}$, on aura

$$\frac{1}{\varepsilon r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}r^{2m+1}}=\frac{\varepsilon r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^2 r^{-4m-2}}=\varepsilon r^{-2m-1}-\varepsilon^3 r^{-6m-3}+\varepsilon^5 r^{-10m-5}-\cdots,$$

$$\frac{1}{\varepsilon r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}}=\frac{\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^{-2}r^{-4m-2}}=\varepsilon^{-1}r^{-2m-1}-\varepsilon^{-3}r^{-6m-3}+\varepsilon^{-5}r^{-10m-5}-\cdots,$$

donc

$$\varphi\alpha=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\left[(\varepsilon-\varepsilon^{-1})r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3})r^{-6m-3}+(\varepsilon^5-\varepsilon^{-5})r^{-10m-5}-\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\left[(\varepsilon-\varepsilon^{-1})\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3})\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-6m-3}+\cdots\right].$$

Or

$$\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-2m-1}=r^{-1}-r^{-3}+r^{-5}-\cdots=\frac{r^{-1}}{1+r^{-2}}=\frac{r}{r^2+1},$$

$$\sum_0^\infty{}_m(-1)^m r^{-6m-3}=r^{-3}-r^{-9}+r^{-15}-\cdots=\frac{r^{-3}}{1+r^{-6}}=\frac{r^3}{r^6+1},\ \text{etc.,}$$

donc

$$\varphi\alpha=\frac{2}{ec}\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}{r+r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3-\varepsilon^{-3}}{r^3+r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5-\varepsilon^{-5}}{r^5+r^{-5}}-\cdots\right). \tag{204}$$

De la même manière on trouvera

$$F\alpha=\frac{2}{c}\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon^{-1}}{r-r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}}{r^3-r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5+\varepsilon^{-5}}{r^5-r^{-5}}-\cdots\right). \tag{205}$$

En mettant $\alpha\frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, et changeant ensuite e en c et c en e,

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right),\ F\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right),\ r,\quad \varepsilon^m+\varepsilon^{-m},\qquad \varepsilon^m-\varepsilon^{-m}$$

se changent en

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi\left(\alpha\frac{\varpi}{2}\right),\ f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right),\ \varrho,\ 2\cos\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right),\ 2i\sin\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right);$$

donc

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{ec}\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho+\frac{1}{\varrho}}-\frac{\sin\left[3\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^3+\frac{1}{\varrho^3}}+\frac{\sin\left[5\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^5+\frac{1}{\varrho^5}}-\cdots\right\}, \tag{206}$$

$$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{e}\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{\cos\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho-\frac{1}{\varrho}}-\frac{\cos\left[3\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^3-\frac{1}{\varrho^3}}+\frac{\cos\left[5\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\varrho^5-\frac{1}{\varrho^5}}-\cdots\right\}. \tag{207}$$

Ces quatre dernières formules offrent des expressions très simples des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Par différentiation ou intégration on peut en déduire une foule d'autres plus ou moins remarquables.

33.

Dans le cas où $e=c$, les formules précédentes prennent une forme plus simple, à cause de la relation $\omega=\varpi$, qui a lieu dans ce cas. Soit pour plus de simplicité $e=c=1$. On a

$$r=h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}=h^{\frac{\pi}{2}},\quad \varrho=h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}}=h^{\frac{\pi}{2}},$$

donc, en substituant, et faisant dans (204), (205) $\alpha=\alpha\frac{\varpi}{2}$, il vient

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}+h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}+h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}+h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\cdots\right\},$$

$$F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}-h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}-h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}-h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\cdots\right\},$$

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{1+h^{\pi}}-\sin\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{3\frac{\pi}{2}}}{1+h^{3\pi}}+\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{5\frac{\pi}{2}}}{1+h^{5\pi}}-\cdots\right\}.$$

$$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\cos\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{3\frac{\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\cos\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\frac{h^{5\frac{\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\cdots\right\}.$$

Les fonctions φ, f, F sont déterminées par les équations

$$\alpha\frac{\omega}{2}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};\quad \frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$x=\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\ \sqrt{1-x^2}=f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\ \sqrt{1+x^2}=F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right).$$

Si dans les deux dernières formules on fait $\alpha=0$, et qu'on remarque qu'alors la valeur de $\frac{\varphi\left[\alpha\frac{\omega}{2}\right]}{\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}$ est égale à $\frac{\omega}{\pi}$, et celle de $\frac{\sin\left[m\alpha\frac{\pi}{2}\right]}{\sin\left[\alpha\frac{\pi}{2}\right]}$ égale à m, on trouvera

$$\frac{\omega}{2}=2\pi\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\cdots\right\}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$\frac{\omega^2}{4}=\pi^2\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}+1}-3\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}+1}+5\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}+1}-\cdots\right\}=\left(\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^2.$$

§ VIII.

Expression algébrique de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ dans le cas où $e=c=1$.

Application à la lemniscate).*

34.

Dans le cinquième paragraphe nous avons traité l'équation $P_n=0$, d'où dépend la détermination des fonctions $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$. Cette équation, prise dans toute sa généralité, ne paraît guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de e et c; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ en fonction de e et c. C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peut être exprimé rationnellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n=0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e=c=1$ et $n=4\nu+1$. Dans ce cas on aura

$$\alpha=\int_0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \text{ où } x=\varphi\alpha, \tag{208}$$
$$f\alpha=\sqrt{1-\varphi^2\alpha}, \quad F\alpha=\sqrt{1+\varphi^2\alpha}.$$

De même

$$\varphi(\alpha i)=i.\varphi\alpha, \tag{209}$$

ce qui se fait voir, en mettant xi au lieu de x. Cette formule donne ensuite

*) La première partie de ce mémoire contenant les sept premiers paragraphes a paru dans le deuxième tome du Journal für die reine und angewandte Mathematik, la seconde partie se trouve dans le troisième tome.

Note des éditeurs.

$$f(\alpha i)=F\alpha; \quad F(\alpha i)=f\alpha. \tag{210}$$

Les deux quantités e et c étant égales entre elles, il est clair qu'il en sera de même des deux quantités que nous avons désignées par ω et ϖ. En effet on aura

$$\frac{\omega}{2}=\frac{\varpi}{2}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{211}$$

35.

En posant dans les formules (10) βi au lieu de β, on en tirera, en ayant égard aux équations (209) et (210),

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi(\alpha+\beta i)&=\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta+i.\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta},\\
f(\alpha+\beta i)&=\frac{f\alpha.F\beta-i.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.f\beta}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta},\\
F(\alpha+\beta i)&=\frac{F\alpha.f\beta+i.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.F\beta}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}.
\end{aligned}\right. \tag{212}$$

Donc, pour trouver les fonctions φ, f, F pour une valeur imaginaire quelconque de la variable, il suffira d'en connaître les valeurs pour des valeurs réelles.

En supposant $\alpha=m\delta$, $\beta=\mu\delta$, on voit que $\varphi(m+\mu i)\delta$, $f(m+\mu i)\delta$, $F(m+\mu i)\delta$ pourront être exprimés rationnellement par les six fonctions suivantes:

$$\varphi(m\delta),\quad \varphi(\mu\delta),\quad f(m\delta),$$
$$f(\mu\delta),\quad F(m\delta),\quad F(\mu\delta),$$

et par suite aussi par des fonctions rationnelles des trois fonctions $\varphi\delta$, $f\delta$, $F\delta$, si m et μ sont des nombres entiers. En suivant ce développement, on voit également, et sans peine, que dans le cas où $m+\mu$ est un nombre impair, on aura

$$\varphi(m+\mu i)\delta=\varphi\delta.T,$$

où T est une fonction rationnelle de $(\varphi\delta)^2$, $(f\delta)^2$, $(F\delta)^2$, c'est-à-dire de $(\varphi\delta)^2$. Donc en faisant $\varphi\delta=x$, on aura

$$\varphi(m+\mu i)\delta=x.\psi(x^2).$$

En changeant δ en δi, $\varphi\delta$ se changera en $\varphi(\delta i) = i.\varphi\delta = ix$, et la fonction $\varphi(m+\mu i)\delta$ en $i\varphi(m+\mu i)\delta$, donc

$$\varphi(m+\mu i)\delta = x.\psi(-x^2);$$

par conséquent on doit avoir $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$, ce qui fait voir que la fonction $\psi(x^2)$ ne contient que des puissances de la forme x^{4n}. Donc on aura

$$(213) \qquad \varphi(m+\mu i)\delta = x.T,$$

où T est une fonction rationnelle de x^4.

Cherchons par exemple l'expression de $\varphi(2+i)\delta$ en x. On a d'après les formules (212), en faisant $\alpha = 2\delta$ et $\beta = \delta$,

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi(2\delta).f\delta.F\delta + i\varphi\delta.f(2\delta).F(2\delta)}{1-(\varphi 2\delta)^2.\varphi^2\delta}.$$

Or les formules (10) donnent

$$\varphi(2\delta) = \frac{2\varphi\delta.f\delta.F\delta}{1+(\varphi\delta)^4};\; f(2\delta) = \frac{(f\delta)^2-(\varphi\delta)^2.(F\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};\; F(2\delta) = \frac{(F\delta)^2+(\varphi\delta)^2.(f\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\varphi\delta = x$, $f\delta = \sqrt{1-x^2}$ et $F\delta = \sqrt{1+x^2}$,

$$\varphi(2\delta) = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4};\; f(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4};\; F(2\delta) = \frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

En substituant ces valeurs et en réduisant, il viendra

$$(215) \qquad \varphi(2+i)\delta = x\,\frac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi\,\frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}.$$

Expression algébrique de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

36.

On peut, comme on sait, décomposer le nombre $4\nu+1$ en deux carrés. Donc on peut supposer

$$\alpha^2+\beta^2 = 4\nu+1 = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i).$$

Nous chercherons d'abord la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$; car celle-ci étant trouvée, on en tirera facilement la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

La somme des deux carrés α^2 et β^2 étant impaire, l'un des nombres α et β sera pair et l'autre impair. Donc la somme $\alpha+\beta$ est impaire. Donc en vertu de la formule (213), on aura

$$(216) \qquad \varphi(\alpha+\beta i)\delta = x\frac{T}{S},$$

où T et S sont des fonctions entières de $x^4 = (\varphi\delta)^4$. En supposant $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$, le premier membre de l'équation (216) se réduit à zéro, et par conséquent $x = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ sera une racine de l'équation

$$(217) \qquad T = 0.$$

Donc on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ au moyen de la résolution de cette équation.

D'abord on peut trouver toutes les racines de l'équation $T=0$ à l'aide de la fonction φ de la manière suivante. Si $T=0$, on doit avoir

$$\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (27),

$$(\alpha+\beta i)\delta = m\omega + \mu\varpi i = (m+\mu i)\omega,$$

et de là

$$\delta = \frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega$$

et

$$(218) \qquad x = \varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right).$$

Dans cette expression sont conséquemment contenues toutes les racines de l'équation $T=0$. On les trouvera en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or je dis que les valeurs de x qui sont différentes entre elles peuvent être représentées par la formule

$$(218') \qquad x = \varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

où ϱ a toutes les valeurs entières depuis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ jusqu'à $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$. Pour le démontrer, soient λ et λ' deux nombres entiers qui satisfont à l'équation indéterminée

$$\alpha.\lambda' - \beta.\lambda = 1;$$

soit de plus t un nombre entier indéterminé, et faisons

$$k=\mu\lambda+t\alpha,\quad k'=-\mu\lambda'-t\beta;$$

on en déduira sans peine

$$\mu+\beta k+\alpha k'=0,$$

et si l'on fait

$$\varrho=m+\alpha k-\beta k',$$

on vérifiera aisément l'équation

$$\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}=\frac{\varrho}{\alpha+\beta i}-k-k'i.$$

De là on tire

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right)=\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}-k\omega-k'\omega i\right)$$

or d'après la relation (22) le second membre se réduit à

$$(-1)^{-k-k'}\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right);$$

donc

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right)=(-1)^{-k-k'}\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right)=\varphi\left(\frac{\pm\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Maintenant l'expression de ϱ deviendra, en y substituant les valeurs de k et k',

$$\varrho=m+\mu(\lambda\alpha+\lambda'\beta)+t(\alpha^2+\beta^2),$$

d'où l'on voit qu'on peut prendre t tel que la valeur de ϱ, positive ou négative, soit inférieure à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Donc etc.

Toutes les racines de l'équation $T=0$ seront représentées par la formule (218'); or toutes ces racines sont différentes entre elles. En effet si l'on avait par exemple

$$\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right)=\varphi\left(\frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

on aurait d'après la formule (31), (en remarquant que $\varpi=\omega$)

$$\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}=(-1)^{m+n}\frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i}+(m+ni)\omega,$$

d'où l'on tire

$$\alpha n+\beta m=0;\quad \varrho=(-1)^{m+n}\varrho'+\alpha m-\beta n.$$

La première de ces équations donne $n=-\beta t$; $m=\alpha t$, où t est un entier indéterminé. En vertu de ces relations, l'expression de ϱ deviendrait

$$\varrho=(-1)^{m+n}\varrho'+(\alpha^2+\beta^2)t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varrho\pm\varrho'}{\alpha^2+\beta^2}=t,$$

ce qui est impossible, car on remarquera que ϱ, ϱ' sont tous deux inférieurs à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Donc les racines différentes entre elles de l'équation $T=0$ sont au nombre de $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$. Il faut voir encore, si l'équation en question a des racines égales. En différentiant l'équation (216) on en tirera, en remarquant que $d\varphi\alpha=d\alpha.f\alpha.F\alpha$,

$$(\alpha+\beta i).f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i)\delta.S+\left(\frac{dS}{d\delta}\right)\cdot\varphi(\alpha+\beta i)\delta$$
$$=x\frac{dT}{dx}\cdot f\delta.F\delta+T.f\delta.F\delta.$$

Si maintenant T a des facteurs égaux, il faut que T et $\frac{dT}{dx}$ soient égaux à zéro en même temps; donc l'équation précédente donnera

$$S.f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i)\delta=0;$$

or on a $\varphi(\alpha+\beta i)\delta=0$, donc $f(\alpha+\beta i)\delta=\pm1=F(\alpha+\beta i)\delta$, et par conséquent

$$S=0,$$

ce qui est impossible, car nous supposons, ce qui est permis, que T et S n'aient point de facteurs communs. Par là on voit que l'équation

$$T=0$$

est du degré $\alpha^2+\beta^2-1$ par rapport à x, et aura pour racines les quantités:

$$\pm\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \pm\varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right)\cdots\pm\varphi\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\cdot\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

En faisant $x^2=r$, on aura une équation

(219) $$R=0$$

du degré $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}=2\nu$, dont les racines seront

$$(220) \qquad \varphi^2(\delta),\ \varphi^2(2\delta),\ \varphi^2(3\delta)\dots\varphi^2(2\nu\delta),$$

où pour abréger on a supposé $\delta=\frac{\omega}{\alpha+\beta i}$

Cela posé, on peut aisément résoudre l'équation $R=0$, à l'aide de la méthode de M. *Gauss*.

Soit ε une racine primitive de $\alpha^2+\beta^2$, je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit:

$$(221) \qquad \varphi^2(\delta),\ \varphi^2(\varepsilon\delta),\ \varphi^2(\varepsilon^2\delta),\ \varphi^2(\varepsilon^3\delta)\dots\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta).$$

En effet, en faisant

$$(222) \qquad \varepsilon^m=\pm a_m+t(\alpha^2+\beta^2),$$

où a_m est moindre que $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, on aura

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\varphi\left(\pm a_m\delta+\frac{t(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha+\beta i}\omega\right)=\varphi[\pm a_m\delta+t(\alpha-\beta i)\omega],$$

ou, en vertu de la formule (22),

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\pm\varphi(a_m\delta),$$

et par suite

$$\varphi^2(\varepsilon^m\delta)=\varphi^2(a_m\delta).$$

Je dis maintenant que tous les nombres $1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\dots a_{2\nu-1}$ sont inégaux entre eux. En effet soit par exemple $a_m=a_n$, on aura

$$(223) \qquad \varepsilon^n=\pm a_m+t'(\alpha^2+\beta^2).$$

Des deux équations (222) et (223) on tire, en éliminant a_m,

$$\frac{\varepsilon^m\pm\varepsilon^n}{\alpha^2+\beta^2}=\text{un nombre entier.}$$

Donc en multipliant par $\varepsilon^m\mp\varepsilon^n$, on trouve que $\frac{\varepsilon^{2m}-\varepsilon^{2n}}{\alpha^2+\beta^2}$ est entier, et par suite $\frac{\varepsilon^{2m-2n}-1}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui est impossible, car ε est une racine primitive de $\alpha^2+\beta^2$, et $2m-2n$ est moindre que $\alpha^2+\beta^2-1$. Donc les 2ν nombres $1,\ a$, etc. sont différens entre eux, et par conséquent, pris dans un ordre différent, ils sont les mêmes que les suivans:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\dots 2\nu-1.$$

On voit par la formule $\varphi^2(\varepsilon^m\delta)=\varphi^2(a_m\delta)$, que les quantités (220) et (221) coïncident, mais dans un ordre différent.

Maintenant on pourra résoudre l'équation $R=0$ exactement de la même manière que l'équation (106). On trouvera (116)

$$(224) \qquad \varphi^2(\varepsilon^m\delta)=\frac{1}{2\nu}\left(+A+\theta^{-m}.v^{\frac{1}{2\nu}}+s_2\theta^{-2m}.v^{\frac{2}{2\nu}}+\cdots\right.$$
$$\left.+s_{2\nu-1}\theta^{-(2\nu-1)m}.v^{\frac{2\nu-1}{2\nu}}\right),$$

où θ est une racine imaginaire de l'équation $\theta^{2\nu}-1=0$, et $v,\ s_2,\ s_3,\dots s_{2\nu-1},\ A$ seront déterminés par les expressions

$$v=[\varphi^2(\delta)+\theta.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^2.\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)]^{2\nu},$$
$$s_k=\frac{\varphi^2(\delta)+\theta^k.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^{2k}.\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\theta^{(2\nu-1)k}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)}{[\varphi^2(\delta)+\theta.\varphi^2(\varepsilon\delta)+\theta^2\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)]^k}.$$
$$A=\varphi^2(\delta)+\varphi^2(\varepsilon\delta)+\varphi^2(\varepsilon^2\delta)+\cdots+\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta),$$

qui, par le procédé p. 312, 313, 314, peuvent être exprimées *rationnellement* par les coefficiens de l'équation $R=0$, qui seront de la forme $A+Bi$, où A et B sont des nombres rationnels. Donc la formule (224) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation $R=0$, et par conséquent les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right),\dots\varphi\left(\frac{(2\nu-1)\omega}{\alpha+\beta i}\right),\ \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

37.

Ayant trouvé par ce qui précède la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on en tirera celle de la fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right),$$

comme il suit. La valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ donnera celle de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ en changeant seulement i en $-i$. De là on tire la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ par la formule (10), savoir

$$(226) \qquad \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$$
$$=\frac{\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)}+\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)\cdot\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)}}{1+\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)};$$

or

$$\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}=\frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1},$$

donc on aura la valeur de la fonction

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right).$$

Maintenant pour avoir la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, où n a une valeur déterminée quelconque, il suffit de déterminer m et t de la manière que

$$n=2m\alpha-(4\nu+1)t,$$

ce qui est toujours possible, en remarquant que les deux nombres 2α et $4\nu+1$ sont premiers entre eux; car alors on obtiendra

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}+t\omega\right)=(-1)^t\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right).$$

En posant par exemple $n=1$, on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

38.

Le cas, où $4\nu+1$ a la forme $1+2^n$, est le plus remarquable; car alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ ne contient que des racines carrées. En effet on a dans ce cas $2\nu=2^{n-1}$, et par suite la formule (224) fait voir qu'on peut déduire $\varphi(\varepsilon^m\delta)$ de θ et v, en extrayant seulement des racines carrées. Or v est une fonction rationnelle de θ et de $\sqrt{-1}$, et θ est déterminée par l'équation $\theta^{2^{n-1}}=1$, d'où l'on tire θ par des racines carrées; donc on trouve aussi v et la fonction

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\varphi\left(\frac{\alpha_m\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Connaissant de cette manière $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on aura de même $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ et de là, par la formule (226) la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, en extrayant des racines carrées.

39.

Un autre cas, où la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être déterminée par des racines carrées est celui où n est une puissance de 2, comme nous l'avons vu n° 13. Donc on connaît la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right)$, et l'on connaît de même la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right)$ si $1+2^n$ est un nombre premier.

Soient maintenant $1+2^n$, $1+2^{n_1}$, $1+2^{n_2}$, ... $1+2^{n_\mu}$ plusieurs nombres premiers, on connaît les fonctions

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right),\ \varphi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right),\ \dots\ \varphi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right),$$

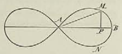
et par suite la fonction

$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}+\frac{m_1}{1+2^{n_1}}+\frac{m_2}{1+2^{n_2}}+\cdots+\frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right)\omega$$
$$=\varphi\left(\frac{m'\omega}{2^n(1+2^{n_1})(1+2^{n_2})\cdots(1+2^{n_\mu})}\right),$$

où m' est un nombre entier, qui, à cause des indéterminées $m, m_1, m_2, \dots m_\mu$ peut avoir une valeur quelconque. On peut donc établir le théorème suivant: "La valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être exprimée par *des racines* "*carrées* toutes les fois que n est un nombre de la forme 2^n ou un nombre "premier de la forme $1+2^n$, ou même un produit de plusieurs nombres de "ces deux formes."

40.

En appliquant ce qui précède à la lemniscate, on parviendra au théorème énoncé n° 22.



Soit l'arc $AM=\alpha$, la corde $AM=x$ et l'angle $MAP=\theta$, on aura

$$d\alpha=\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

En effet, l'équation polaire de la lemniscate est

$$x = \sqrt{\cos 2\theta},$$

d'où

$$d\theta = -\frac{dx \, . \sqrt{\cos 2\theta}}{\sin 2\theta}$$

et

$$d\alpha^2 = dx^2 + x^2 \, d\theta^2,$$

donc

$$d\alpha^2 = dx^2 \left(1 + \frac{x^2 \cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2}\right);$$

mais de l'équation $x = \sqrt{\cos 2\theta}$ on tire $\cos 2\theta = x^2$, $\cos^2 2\theta = x^4$, $1 - \cos^2 2\theta = 1 - x^4 = (\sin 2\theta)^2$, donc

$$d\alpha^2 = dx^2 \left(1 + \frac{x^4}{1 - x^4}\right) = \frac{dx^2}{1 - x^4},$$

et par suite

$$d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$$

et

$$x = \varphi\alpha.$$

Si l'on suppose $x = 1$, on aura $\alpha = AMB = \frac{\omega}{2}$. Donc la circonférence $AMBN = \omega$. Supposons maintenant qu'il s'agisse de diviser cette circonférence en n parties égales, et soit l'arc $AM = \frac{m}{n} \cdot AMBN = \frac{m}{n}\omega$, on aura

$$AM = \varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right).$$

Donc on aura la corde, et par suite le $m^{\text{ème}}$ point de division, si l'on connaît la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$; or c'est ce qui a toujours lieu lorsque n est décomposable en nombres premiers de la forme 2 et $1 + 2^n$, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent. Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient au même, par l'intersection de lignes droites et de cercles.

§ IX.

Usage des fonctions φ, f, F dans la transformation des fonctions elliptiques.

41.

M. *Legendre* a fait voir dans ses Exercices de calc. int., comment l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}$, qui, en faisant $\sin\varphi = x$, se change en $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - c^2x^2)}}$, peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme, avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant:

Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m + \mu)\omega + (m - \mu)\varpi i}{2n + 1}$, où l'un au moins des deux nombres entiers m et μ est premier avec $2n + 1$, on aura

$$(227) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}}, \\ & \text{où} \\ & y = f \, . \, x \, . \frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2) \cdots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha \, . \, x^2)(1 + e^2c^2\varphi^2 2\alpha \, . \, x^2) \cdots (1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha \, . \, x^2)}, \\ & \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) . \, \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \ldots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)\right]^2, \\ & \frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\varpi i}{2} + \alpha\right) . \, \varphi\left(\frac{\varpi i}{2} + 2\alpha\right) \ldots \varphi\left(\frac{\varpi i}{2} + n\alpha\right)\right]^2, \\ & a = f \, . \, (\varphi\alpha \, . \, \varphi 2\alpha \, . \, \varphi 3\alpha \ldots \varphi n\alpha)^2, \end{aligned} \right.$$

f étant une indéterminée, de sorte qu'il n'existe qu'une seule relation entre les quantités c_1, e_1, c, e. Les quantités e^2 et c^2 pourront être positives ou négatives.

Par ce théorème on peut trouver une infinité de transformations différentes entre elles et de celles de M. *Legendre*.

42.

Soient m et μ deux nombres entiers, et faisons pour abréger

$$(228) \qquad \alpha = \frac{(m + \mu)\omega + (m - \mu)\varpi i}{2n + 1},$$

où l'on suppose que l'un des deux nombres m, μ soit premier avec $2n+1$.

En désignant par θ une quantité quelconque, il viendra, en vertu de la formule (22)

$$\varphi[\theta+(2n+1)\alpha]=\varphi\theta. \tag{229}$$

En mettant $\theta-n\alpha$ au lieu de θ, on obtiendra

$$\varphi[\theta+(n+1)\alpha]=\varphi(\theta-n\alpha). \tag{230}$$

Cela posé, considérons l'expression suivante

$$\varphi_1\theta=\varphi\theta+\varphi(\theta+\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+n\alpha)+\cdots+\varphi(\theta+2n\alpha). \tag{231}$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra à cause de l'équation (229)

$$\varphi_1(\theta+\alpha)=\varphi_1\theta, \tag{232}$$

donc si m désigne un nombre entier quelconque,

$$\varphi_1(\theta+m\alpha)=\varphi_1\theta. \tag{233}$$

En vertu de l'équation (230) on peut écrire l'expression de $\varphi_1\theta$, comme il suit:

$$\begin{aligned}\varphi_1\theta=\varphi\theta+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta-\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\varphi(\theta-2\alpha)+\cdots\\ +\varphi(\theta+n\alpha)+\varphi(\theta-n\alpha),\end{aligned} \tag{234}$$

ou, en vertu de la formule

$$\varphi(\theta+\nu\alpha)+\varphi(\theta-\nu\alpha)=\frac{2\varphi\theta.f(\nu\alpha)F(\nu\alpha)}{1+e^2c^2(\varphi\theta)^2(\varphi\nu\alpha)^2}:$$

$$\begin{aligned}\varphi_1\theta=\varphi\theta\\ +\frac{2\varphi\theta.f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\theta}+\frac{2\varphi\theta.f2\alpha.F2\alpha}{1+e^2c^2\varphi^22\alpha.\varphi^2\theta}+\cdots+\frac{2\varphi\theta.fn\alpha.Fn\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.\varphi^2\theta}.\end{aligned} \tag{235}$$

En faisant $\varphi\theta=x$, $\varphi_1\theta$ devient une fonction rationnelle de x. En la désignant par ψx, on aura

$$\psi x=x.\left(1+\frac{2f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2}+\cdots+\frac{2fn\alpha.Fn\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2}\right). \tag{236}$$

43.

Maintenant soit ε une quantité quelconque, je dis qu'on aura

$$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}=\frac{\left(1-\frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+\alpha)}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2\alpha)}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^22\alpha.x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2)}. \tag{237}$$

En effet il est clair que la fonction

$$R=\left(1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}\right)(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)\ldots(1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2) \tag{238}$$

sera entière et du degré $2n+1$; mais en faisant $x=\varphi\varepsilon$, ψx deviendra $=\varphi_1\varepsilon$, et par suite R se réduira à zéro pour cette valeur de x. De même en faisant $x=\varphi(\varepsilon+m\alpha)$, où m est entier, on aura $\psi x=\varphi_1(\varepsilon+m\alpha)$, ou, en vertu de l'équation (233), $\psi x=\varphi_1\varepsilon$. Donc $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}=0$, et par conséquent $x=\varphi(\varepsilon+m\alpha)$ sera une racine de l'équation $R=0$, quel que soit le nombre entier m. Or généralement toutes les quantités

$$\varphi\varepsilon,\ \varphi(\varepsilon+\alpha),\ \varphi(\varepsilon+2\alpha),\ \ldots\ \varphi(\varepsilon+2n\alpha) \tag{239}$$

sont différentes entre elles. En effet si l'on avait

$$\varphi(\varepsilon+m'\alpha)=\varphi(\varepsilon+\mu'\alpha),$$

il s'ensuivrait en vertu de la formule (31)

$$\varepsilon+m'\alpha=(-1)^{k+k'}(\varepsilon+\mu'\alpha)+k\omega+k'\varpi i,$$

d'où

$$k+k'=2k'',$$
$$k=k''+l,\ k'=k''-l,$$
$$(m'-\mu')\alpha=(k''+l)\omega+(k''-l)\varpi i.$$

De là, en substituant la valeur de $\alpha=\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, on tire

$$(m'-\mu')(m+\mu)=(2n+1)(k''+l),$$
$$(m'-\mu')(m-\mu)=(2n+1)(k''-l)$$

et

$$m'-\mu'=(2n+1)\frac{k''}{m}=(2n+1)\frac{l}{\mu},$$

équation contradictoire, parce que nous avons supposé que l'un des deux nombres m et μ soit premier avec $2n+1$, et que $m'-\mu'$ est toujours moindre que $2n+1$. Maintenant les $2n+1$ quantités (239) étant différentes entre elles, elles sont précisément les $2n+1$ racines de l'équation $R=0$. Donc on a

$$(240)\qquad R = A\left(1-\frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+\alpha)}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}\right),$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en attribuant à x une valeur particulière; par exemple en faisant $x=0$, on a $R=A$; or l'équation (238) donne pour $x=0$: $R=1$, donc $A=1$, et par conséquent l'équation (237) a lieu.

En multipliant cette équation par $\varphi\varepsilon$ et faisant ensuite $\varepsilon=0$, il viendra

$$(241)\qquad \psi(x) = g\,x\,\frac{\left(1-\frac{x}{\varphi\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\varphi 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varphi 2n\alpha}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\,.\,x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha\,.\,x^2)},$$

où g est la valeur de $\frac{\varphi_1\varepsilon}{\varphi\varepsilon}$ pour $\varepsilon=0$. En faisant, dans la formule (235), $\theta=0$, après avoir divisé par $\varphi\theta$, on trouve l'expression suivante de cette constante

$$(242)\qquad g = 1+2f\alpha\,.\,F\alpha+2f2\alpha\,.\,F2\alpha+\cdots+2fn\alpha\,.\,Fn\alpha.$$

En faisant dans la formule (230) $\theta=n\alpha-(m'+1)\alpha$, on trouve

$$\varphi(2n\alpha-m'\alpha)=\varphi[-(m'+1)\alpha]=-\varphi(m'+1)\alpha.$$

Donc on peut écrire l'expression de ψx comme il suit:

$$(243)\qquad \psi x = g\,x\,\frac{\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\,.\,x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha\,.\,x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha\,.\,x^2)}.$$

44.

Maintenant faisons dans l'expression de $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{\omega}{2}\cdot$ En supposant pour abréger

$$(244)\qquad \varrho=(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\,.\,x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha\,.\,x^2)\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha\,.\,x^2),$$

on aura

$$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}=\left\{1-\frac{x}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right\}\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right)}\right\}\cdot\frac{1}{\varrho};$$

or, en faisant dans la formule (230)

$$\theta=\frac{\omega}{2}+(n-m'-1)\alpha,$$

on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}-(m'+1)\alpha\right),$$

donc en vertu de la formule (17),

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right),$$

il viendra

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}+(m'+1)\alpha\right).$$

Cette équation fait voir qu'on peut écrire l'expression de $1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}$ comme il suit:

$$(245)\qquad 1-\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}$$
$$=(1-cx)\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}^2\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}^2\cdots\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\}^2\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

En mettant $-x$ au lieu de $+x$, on aura semblablement

$$(246)\qquad 1+\frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}}$$
$$=(1+cx)\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}^2\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}^2\cdots\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\}^2\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Donc si l'on fait

$$(247)\qquad y=k\,.\,\psi x,\quad c_1=\frac{1}{k\,.\,\varphi_1\frac{\omega}{2}},$$

où k est indéterminé, et

$$(248)\qquad \left\{\begin{aligned} t&=\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\},\\ t_1&=\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\},\end{aligned}\right.$$

on aura

$$1-e_1y=(1-cx)\frac{t^2}{\varrho};\quad 1+e_1y=(1+cx)\frac{t_1^2}{\varrho}. \tag{249}$$

De la même manière, en faisant

$$\left\{\begin{aligned} s&=\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right\},\\ s_1&=\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1+\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right\},\end{aligned}\right. \tag{250}$$

et

$$e_1=\pm\frac{i}{k.\varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right)}, \tag{251}$$

on trouvera ces deux équations:

$$1\mp e_1iy=(1-eix)\frac{s_1^2}{\varrho};\quad 1\pm e_1iy=(1+eix)\frac{s^2}{\varrho}. \tag{252}$$

Les équations (249) et (252) donneront

$$(1-e_1^2y^2)=(1-e^2x^2)\frac{t^2t_1^2}{\varrho^2};\quad (1+e_1^2y^2)=(1+e^2x^2)\frac{s^2s_1^2}{\varrho^2}$$

et par conséquent

$$\sqrt{(1-e_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}=\pm\frac{tt_1ss_1}{\varrho^2}\sqrt{(1-e^2x^2)(1+e^2x^2)}. \tag{253}$$

Maintenant l'expression de y donne $dy=\frac{P}{\varrho^2}dx$, où P sera une fonction entière de x du degrè $4n$, donc

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-e_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=+\frac{P}{tt_1ss_1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Or je dis que la fonction $\frac{P}{tt_1ss_1}$ se réduira à une quantité constante. En effet on a

$$1-e_1y=(1-cx)\frac{t^2}{\varrho};$$

en différentiant, et mettant pour dy sa valeur $\frac{Pdx}{\varrho^2}$, on aura

$$P=\frac{t}{e_1}\left[ct\varrho-(1-cx)\left(2\varrho\frac{dt}{dx}-t\frac{d\varrho}{dx}\right)\right].$$

On voit de là que P est divisible par t. De la même manière on prouvera que P est divisible par les trois fonctions t_1, s, s_1. Donc si deux quelconques des quatre fonctions t, t_1, s, s_1 n'ont point de facteur commun, P sera divisible par leur produit. Or c'est ce qu'on peut voir aisément à l'aide des expressions de ces fonctions. Donc $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une fonction entière de x. Or P est du degré $4n$, et chacune des fonctions t, t_1, s, s_1 est du degré n. Donc il est prouvé que $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une quantité constante. En la désignant par a, il viendra

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-e_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+e^2x^2)}}. \tag{254}$$

Pour déterminer a il suffit d'attribuer à x une valeur particulière. En faisant par exemple $x=0$, on aura

$$t=t_1=s=s_1=1;\quad P=\varrho^2\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}=k\psi'x.$$

Or en différentiant l'expression de ψx, et faisant ensuite $x=0$, il viendra $\psi'x=g$, donc

$$a=kg. \tag{255}$$

On peut donner aux expressions de e_1, e_1, g, a d'autres formes plus simples, et qui mettront en évidence plusieurs propriétés remarquables de ces quantités.

Par la formule (240) on voit que le coefficient de x^{2n+1} dans la fonction R est $-\frac{A}{\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}$; or d'après les équations (238) et (243) le même coefficient sera

$$-\frac{(-1)^n}{\varphi_1\varepsilon}\cdot\frac{g}{(\varphi\alpha.\varphi2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2},$$

donc, puisque $A=1$,

$$\varphi_1(\varepsilon)=\frac{(-1)^ng}{(\varphi\alpha.\varphi2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2}\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha).$$

En faisant dans les équations (236), (243) $x=\frac{1}{0}$, après avoir divisé par x, on obtiendra deux valeurs de $\frac{\psi x}{x}$, savoir

$$1 \text{ et } \frac{g(-1)^n}{(ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^4},$$

donc, en les égalant,

(256) $$g=(-1)^n(ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^4,$$

et par conséquent

(257) $$\begin{aligned}\varphi_1(\varepsilon) &= (ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)\\ &= \varphi(\varepsilon)+\varphi(\varepsilon+\alpha)+\varphi(\varepsilon+2\alpha)+\cdots+\varphi(\varepsilon+2n\alpha).\end{aligned}$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction φ. En y posant $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$ et $\varepsilon=\frac{\varpi}{2}i$, on obtiendra

(258) $$\begin{cases}\varphi_1\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{ke_1}=(ec)^{2n}\delta^2.\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right),\\ \varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{\pm i}{ke_1}=(ec)^{2n}\delta^2.\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2n\alpha\right),\end{cases}$$

où l'on a fait pour abréger

(259) $$\delta=\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.\varphi 3\alpha\ldots\varphi n\alpha.$$

En remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+(2n-m')\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}+(m'+1)\alpha\right)$$

et

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+(2n-m')\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+(m'+1)\alpha\right),$$

et en faisant

(260) $$k(e^2c^2)^n\delta^2=f,$$

on tire de ces équations

(261) $$\begin{cases}\frac{1}{c_1}=\frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2,\\ \frac{1}{e_1}=\pm\frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right]^2,\end{cases}$$

Multipliant et remarquant qu'on a (18)

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\frac{i}{ec},$$

on obtiendra

$$\pm\frac{1}{c_1e_1}=\frac{(-1)^nf^2}{(ec)^{2n+1}},$$

d'où

(262) $$c_1e_1=\pm\frac{(-1)^n.(ec)^{2n+1}}{f^2}.$$

De même en divisant on obtiendra

(263) $$\begin{cases}\pm\frac{e_1}{c_1}=(-1)^n\frac{e}{c}(ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4,\\ \pm\frac{c_1}{e_1}=(-1)^n\frac{c}{e}(ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right]^4.\end{cases}$$

Précédemment nous avons trouvé $a=kg$, et $g=(-1)^n(ec)^{2n}\delta^4$, donc

(264) $$a=(-1)^nf.\delta^2.$$

Également nous avons $y=k.\psi x$, donc en vertu de l'équation (243)

(265) $$y=(-1)^nf.x\frac{(\varphi^2\alpha-x^2)(\varphi^2 2\alpha-x^2)(\varphi^2 3\alpha-x^2)\ldots(\varphi^2 n\alpha-x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\ldots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

Donc les valeurs précédentes de c_1, e_1, a et y donneront

(266) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\pm\frac{a\,dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}},$$

d'où

(267) $$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\pm a\int\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

45.

Les formules (261) donnent les valeurs des quantités c_1 et e_1, exprimées en c et e à l'aide de la fonction φ. Or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet on a

$$\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\right]^2=\frac{1}{c^2}\left(\frac{f\alpha}{F\alpha}\right)^2=\frac{1}{c^2}.\frac{1-c^2\varphi^2\alpha}{1+e^2\varphi^2\alpha}$$

et

$$\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]^2=-\frac{1}{e^2}\left(\frac{F\alpha}{f\alpha}\right)^2=-\frac{1}{e^2}.\frac{1+e^2\varphi^2\alpha}{1-c^2\varphi^2\alpha};$$

donc il est clair que les valeurs de c_1 et e_1 pourront être exprimées en fonctions rationnelles et symétriques des quantités $\varphi\alpha, \varphi 2\alpha, \ldots \varphi n\alpha$. Donc si $2n+1$ est un nombre premier, on peut, en vertu de ce qu'on a vu (§ V), déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation algébrique du $(2n+2)^{\text{ème}}$ degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où $2n+1$ est un nombre composé. Alors on peut même déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation d'un degré moindre que $2n+2$.

Donc on aura un certain nombre de transformations correspondantes à chaque valeur de $2n+1$.

46.

On a supposé dans ce qui précède que e et c soient des quantités réelles et positives; mais ayant exprimé c_1 et e_1 en e et c par des équations algébriques, il est clair que la formule (266) aura lieu également en donnant à e et c des valeurs réelles et imaginaires quelconques. Dans le cas où e^2, c^2 sont réelles, on peut même se servir des expressions (261), (265). Mais alors ω et ϖ ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une des quantités c_1 et e_1, à cause de l'indéterminée f, peut être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

47.

Si l'on suppose c et e réels et $2n+1$ premier, les valeurs de c_1 et e_1 seront imaginaires, excepté deux d'entre elles, dont l'une répond à

$$\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}$$

et l'autre à

$$\alpha = \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}.$$

A. Supposons d'abord

$$\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}.$$

Dans ce cas on aura (261)

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2m\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right]^2.$$

Soit $\mu . 2m = (2n+1)t \pm a_\mu$, où t est entier, et a_μ entier positif et moindre que $\frac{2n+1}{2}$, on aura

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \mu\frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_\mu \omega}{2n+1} + t\omega\right) = (-1)^t \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_\mu\omega}{2n+1}\right)$$
$$= \pm\varphi\left(\frac{2n+1-2a_\mu}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right).$$

Or les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ seront les mêmes que les suivans 1, 2, 3, ... n, mais dans un ordre différent; donc l'expression de $\frac{1}{c_1}$ pourra être mise sous la forme

$$(268)\qquad \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2.$$

De même l'équation (263) donnera

$$(269)\qquad \frac{e_1}{c_1} = \pm(-1)^n\frac{e}{c}(ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^4.$$

Soit maintenant $c=1$, $c_1=1$, on aura, en posant $\pm(-1)^n = 1$,

$$(269')\qquad e_1 = e^{2n+1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^4,$$

$$(270)\qquad \int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} + \text{Const.}$$

$$(271)\qquad y = (-1)^n f . x\frac{\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]\left[\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]\cdots\left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2.\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]},$$

$$f = \frac{e^{n+1}}{\sqrt{e_1}},$$

$$(272)\qquad a = (-1)^n f.\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]^2,$$

ou bien

$$(273)\qquad a = (-1)^n\left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2.$$

Si l'on suppose e moindre que l'unité ou égal à l'unité, e_1 sera toujours moindre que e, et lorsque $2n+1$ est un très grand nombre, e_1 sera extrèmement petit.

48.

Le signe du second membre de l'équation (270) dépend de la grandeur de x. Il pourra être jugé aisément comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}=\pm\frac{tt_1ss_1}{\varrho^2}\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}.$$

En supposant x réel, ϱ^2 sera toujours fini et positif, de même que $\sqrt{1+e_1^2y^2}$ et $\sqrt{1+e^2x^2}$. Donc le signe du second membre de l'équation est le même que celui de la quantité

$$tt_1ss_1\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}};$$

maintenant on a

$$ss_1=\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right\};$$

or $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\frac{i}{e}\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha}$ etc., donc

$$ss_1=\left[1+\left(\frac{ef\alpha.x}{F\alpha}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{efn\alpha.x}{Fn\alpha}\right)^2\right];$$

donc, en remarquant que α est réel dans le cas que nous considérons, on voit que ss_1 sera toujours une quantité positive; or tt_1 est réel, donc la quantité $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$ sera positive également, et par conséquent le signe dont il s'agit sera le même que celui de la quantité tt_1. Il n'est pas difficile de voir qu'en se servant de la formule (248) et en mettant pour α sa valeur $\frac{2m\omega}{2n+1}$, on aura

$$tt_1=\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\},$$

quantité qui est positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$, négative

depuis $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$, positive depuis $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{5}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ etc.

Si x est plus grand que l'unité tt_1 aura toujours le même signe, savoir $(-1)^n$. Donc, dans ce cas, l'équation (270) donnera, en intégrant à partir de $x=1$,

$$\int_1^y\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1+e_1^2y^2)}}=a\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+e^2x^2)}}. \tag{274}$$

Si la valeur de x est moindre que l'unité, on aura

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}}=a\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}+\text{Const.} \tag{275}$$

entre les limites $x=\varphi\left(\frac{4m-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et $x=\varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$, et

$$-\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}}=a\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}+\text{Const.} \tag{276}$$

entre les limites $x=\varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et $x=\varphi\left(\frac{4m+3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$.

Si par exemple on suppose x renfermé entre les limites

$$-\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } +\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$$

on aura, en intégrant à partir de $x=0$,

$$\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}}=a\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}. \tag{277}$$

En faisant $x=\varphi\left(\frac{\omega}{(2n+1).2}\right)$, on aura $y=(-1)^n$, et par suite

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}}=\frac{a\omega}{2(2n+1)}(-1)^n,$$

d'où

$$(-1)^n a=\frac{4n+2}{\omega}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}}. \tag{278}$$

Cette expression de a est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre e_1^2, on obtiendra

(279) $$(-1)^n a = (2n+1)\frac{\pi}{\omega}.$$

En substituant et négligeant toujours e_1^2, la formule (277) donnera

(280) $$\left\{\begin{aligned} &\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} = \frac{(-1)^n\omega}{(2n+1)\pi}\,\text{arc.}\sin(y), \\ &y = (-1)^n(2n+1)\frac{\pi}{\omega}\,x\,\frac{\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}\right\}}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]}. \end{aligned}\right.$$

B. Dans le cas où $\alpha = \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}$, on trouvera de la même manière la formule suivante

(281) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}} = a'\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e_1^2y^2)}},$$

où

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n-1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\varpi i}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\varpi i}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\varpi i}{2}\right)\right]^4},$$

$$a' = \frac{1}{e^{2n}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\cdot\varphi\left(\frac{2}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n}{2n+1}\frac{\varpi}{2}i\right)\right]^2},$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}}\,x\,\frac{\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)\right]\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)\right]\cdots\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]}.$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

49.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudrait connaître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer qu'on les obtient toutes, en combinant celle de M. *Legendre* avec celles contenues dans la formule ci-dessus, *même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.*

Ce théorème, dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions.

§ X.

Sur l'intégration de l'équation séparée

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu x^2)}}.$$

50.

On peut toujours, comme on sait, présenter l'intégrale complète de cette équation sous une forme algébrique, lorsque la quantité constante a est un *nombre rationnel*, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de μ. Mais si a n'est pas un nombre rationnel, cela n'a pas lieu. A cet égard je suis parvenu aux théorèmes suivants:

Théorème I. En supposant a réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationnel.

Théorème II. En supposant a *imaginaire*, et l'équation intégrable *algébriquement*, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1}.\sqrt{n}$, où m et n sont des nombres rationnels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.

La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques dont je m'occupe actuellement, et qui paraîtra aussitôt qu'il me sera possible. Je me borne ici à considérer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules du paragraphe précédent.

Si dans la formule (270) on pose

$$e_1 = \frac{1}{e},$$

et si l'on remplace y par $\frac{ey}{i}$, il viendra

(282) $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}} = a\sqrt{-1}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où

$$(283)\qquad y=\pm\sqrt{-1}\,.\,e^{n}x\,\frac{\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]\cdots\left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]};$$

e est déterminé par l'équation (269′), qui deviendra

$$(284)\quad\left\{\begin{aligned}&1=e^{n+1}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2,\\&\text{et } a \text{ par}\\&a=\pm\frac{1}{e}\left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2.\end{aligned}\right.$$

Donc on connaît une intégrale particulière de l'équation (282) et par conséquent on en pourra trouver l'intégrale complète.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de a est $\sqrt{2n+1}$, ce qu'on démontrera aisément comme il suit:

En mettant dans l'équation (282) $y=z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right)$, il viendra

$$\frac{\varpi}{2}=\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-e^2z^2)}}=a\,\frac{\omega}{4n+2},$$

en remarquant que les limites de z seront zéro et $\frac{1}{e}$. En faisant de même $x\sqrt{-1}=z$, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{1}{e}$, on trouvera que les limites de y seront zéro et l'unité et par conséquent

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}}=\frac{\omega}{2}=a\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-e^2z^2)}}=a\,\frac{\varpi}{2}.$$

Donc on a

$$\frac{\varpi}{2}=\frac{a}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2}=a\,\frac{\varpi}{2},$$

d'où l'on tire

$$(285)\qquad a=\sqrt{2n+1},$$

$$(286)\qquad \frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{2n+1}.$$

Donc l'équation différentielle deviendra

$$(287)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}}=\sqrt{-1}\,.\,\sqrt{2n+1}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

51.

Pour donner un exemple, considérons le cas où $n=1$ et $n=2$.

A. Si $n=1$, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}}=\sqrt{-3}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

$$y=\sqrt{-1}\,.\,ex\,\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)-x^2}{1+e^2\,.\,\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right).\,x^2},$$

e est déterminée par l'équation

$$1=e^2\left[\varphi\left(\frac{1}{3}\,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{6}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{3}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{F\left(\frac{\omega}{3}\right)}=\frac{\sqrt{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}}{\sqrt{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}},$$

donc

$$1=e^2\,\frac{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}=\frac{e^2-e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)},$$

$$a=\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{6}\right)}\cdot\frac{1}{e}.$$

Maintenant on trouvera, en combinant ces équations et remettant pour a sa valeur $\sqrt{3}$,

$$\sqrt{3}=e\,\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

donc

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{e},$$

et par suite

$$1=\frac{e^2-e\sqrt{3}}{1+e\sqrt{3}},$$

d'où

$$e^2-2\sqrt{3}\,.\,e=1,$$

et

$$e=\sqrt{3}+2.$$

Ayant trouvé e, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3.$$

Donc on aura l'équation différentielle

$$(288)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)[1+(2+\sqrt{3})^2y^2]}}=\sqrt{-3}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1+(2+\sqrt{3})^2x^2]}},$$

qui sera satisfaite par l'intégrale algébrique

$$y=\sqrt{-1}\,.\,x\,\frac{\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})x^2}{1+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})x^2}.$$

Si l'on pose $x\sqrt{2-\sqrt{3}}$ au lieu de x, et $y\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.\,\sqrt{-1}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation

$$(289)\qquad \frac{dy}{\sqrt{1-2\sqrt{3}\,.\,y^2-y^4}}=\sqrt{3}\,\frac{dx}{\sqrt{1+2\sqrt{3}\,.\,x^2-x^4}},$$

qui sera satisfaite par

$$y=x\,\frac{\sqrt{3}-x^2}{1+\sqrt{3}\,.\,x^2}.$$

B. Si $n=2$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+e^2y^2)}}=\sqrt{-5}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}},$$

où

$$y=\sqrt{-1}\,.\,e^2x\,\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)-x^2}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).x^2}\cdot\frac{\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)-x^2}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).x^2},$$

$$(290)\qquad 1=e^3\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right)\varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right);\quad \sqrt{5}=e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).$$

On a

$$(291)\qquad \begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right)=\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{2\omega}{5}\right)=\dfrac{f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}, \\[2ex] \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)=\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{5}\right)=\dfrac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)-\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)+e^2\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)+\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)-e^2\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

En multipliant ces valeurs de $\dfrac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}$ et $\dfrac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$ entre elles, et remarquant que

$$f\left(\frac{3\omega}{5}\right)=-f\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{3\omega}{5}\right)=\quad F\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

on obtiendra

$$-P=\frac{P^2-\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1-e^4.\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).P^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$P=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

Cela posé les équations (290, 291) donneront

$$1=e^3P^2,\quad \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{e^2},$$

donc, en substituant,

$$-\frac{1}{e\sqrt{e}}=\frac{\frac{1}{e^3}-\frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1-\frac{\sqrt{5}}{e}}=\frac{1}{e^2}\,\frac{1-e\sqrt{5}}{e-\sqrt{5}};$$

d'où

$$-\sqrt{e}=\frac{1-e\sqrt{5}}{e-\sqrt{5}},$$

$$e^3-1-(5+2\sqrt{5})\,e(e-1)=0.$$

Les racines de cette équation sont

$$e=1,\ e=2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}},\ e=2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

La dernière de ces racines,

$$e=2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right]^2,$$

répond à la question, car l'équation

$$1=e^3\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right)\varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)$$

fait voir que e doit être plus grand que l'unité. Connaissant e, on trouve la valeur des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ comme il suit.

Nous avons

$$1=e^3P^2=e^3\frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)};$$

or en faisant $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)=\alpha$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)=\beta$, on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)=1-\alpha^2,\quad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=1-\beta^2,$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)=1+e^2\alpha^2,\ F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=1+e^2\beta^2,$$

donc

$$(1+e^2\alpha^2)(1+e^2\beta^2)=e^3(1-\alpha^2)(1-\beta^2),$$

$$1+e^2(\alpha^2+\beta^2)+e^4\alpha^2\beta^2=e^3-e^3(\alpha^2+\beta^2)+e^3\alpha^2\beta^2,$$

$$e^3-1-e^3(e-1)\alpha^2\beta^2=e^2(e+1)(\alpha^2+\beta^2);$$

or nous avons trouvé plus haut, $\alpha^2\beta^2=\frac{\sqrt{5}}{e^2}$, donc

$$e^3-1-e(e-1)\sqrt{5}=e^2(e+1)(\alpha^2+\beta^2).$$

Donc on connaît $\alpha^2\beta^2$ et $\alpha^2+\beta^2$, et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y, qui satisfait à l'équation

(292)
$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)[1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2y^2]}}$$
$$=\sqrt{-5}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)[1+(2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2x^2]}}.$$

Si l'on pose $\frac{x}{\sqrt{e}}$ au lieu de x, et $\frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{e}}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation

(293)
$$\frac{dy}{\sqrt{1-4\sqrt{2+\sqrt{5}}\,.\,y^2-y^4}}=\sqrt{5}\,\frac{dx}{\sqrt{1+4\sqrt{2+\sqrt{5}}\,.\,x^2-x^4}},$$

où

$$y=x\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10+10\sqrt{5}}\,.\,x^2+x^4}{1+\sqrt{10+10\sqrt{5}}\,.\,x^2+\sqrt{5}\,.\,x^4}.$$

52.

Dans les deux cas que nous venons de considérer, il n'était pas difficile de trouver la valeur de la quantité e, mais la valeur de n étant plus grande, on parviendra à des équations algébriques, qui peut-être ne seront pas résolubles algébriquement.

Néanmoins on peut dans tous les cas exprimer la valeur de e par des séries, et comme leur forme est très remarquable, je vais les rapporter ici.

En faisant dans la formule (206) $\alpha=1$, on aura, en remarquant que $c=1$, $\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{c}$,

(294)
$$e\omega=4\pi\left(\frac{\varrho}{\varrho^2+1}+\frac{\varrho^3}{\varrho^6+1}+\frac{\varrho^5}{\varrho^{10}+1}+\cdots\right),$$

où

$$\varrho=h^{\frac{\varpi}{\omega}\frac{\pi}{2}}.$$

En faisant de même dans la formule (204) $\alpha=\frac{\varpi}{2}i$, on aura $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{i}{e}$; $\varepsilon=h^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$, donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2}{e}\,\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{i-i^{-1}}{r+r^{-1}} - \frac{i^3-i^{-3}}{r^3+r^{-3}} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$\varpi = 4\pi\left(\frac{r}{r^2+1} + \frac{r^3}{r^6+1} + \frac{r^5}{r^{10}+1} + \cdots\right),$$

où

$$r = h^{\frac{\omega}{\varpi}\frac{\pi}{2}}.$$

Maintenant dans le cas que nous considérons, on a

$$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{2n+1},$$

et par conséquent

(295) $$\omega = 4\pi\sqrt{2n+1}\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\sqrt{2n+1}}}{h^{\pi\sqrt{2n+1}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{2n+1}}}{h^{3\pi\sqrt{2n+1}}+1} + \cdots\right\}.$$

Cette formule donne la valeur de

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}.$$

Ensuite on aura la valeur de e par la formule (294) qui donne, en substituant pour ϱ sa valeur $h^{\frac{\varpi}{\omega}\frac{\pi}{2}} = h^{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\frac{\pi}{2}}$,

(296) $$e = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}}{h^{\frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}}{h^{\frac{3\pi}{\sqrt{2n+1}}}+1} + \cdots\right\},$$

h est le nombre 2,7182818 ....

Addition au mémoire précédent.

Ayant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par M. *C. G. J. Jacobi*, inserée dans le nº 123, année 1827, du recueil de M. *Schumacher* qui a pour titre "*Astronomische Nachrichten*", m'est venue sous les yeux. M. *Jacobi* donne le théorème suivant:

Soit p un nombre impair et θ' un angle tel qu'on ait, en désignant l'intégrale $\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, prise de 0 jusqu'à θ, par $F(k,\theta)$,

$$F(k,\theta') = \frac{1}{p}F(k,90^\circ),$$

et en général $\theta^{(m)}$ un angle tel qu'on ait

$$F(k,\theta^{(m)}) = \frac{m}{p}F(k,90^\circ);$$

soit déterminé encore l'angle ψ par l'équation

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''+\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta'''-\theta)}\cdots\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)}\pm\theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)}\mp\theta)}\operatorname{tang}(45^\circ\mp\tfrac{1}{2}\theta);$$

on aura

$$F(k,\theta) = \mu\,.\,F(\lambda,\psi).$$

Il faut admettre le signe supérieur si p est de la forme $4n+1$, et le signe inférieur, si p est de la forme $4n-1$. ψ doit être pris entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$. Les constantes μ et λ se déterminent de différentes manières. On a par exemple

$$\mu = \frac{1}{2(\operatorname{cosec}\theta' - \operatorname{cosec}\theta''' + \cdots \mp \operatorname{cosec}\theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})},$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin\theta' - \sin\theta''' + \cdots \mp \sin\theta^{(p-2)} \pm \tfrac{1}{2}).$$

Ce théorème élégant que M. *Jacobi* donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270). Nous allons le démontrer.

En faisant dans l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$x = \sin\theta$, on aura

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};$$

mais

$$x = \varphi\alpha,$$

donc

$$\alpha = F(k, \theta) \text{ donne } \sin\theta = \varphi\alpha.$$

Si $\theta = 90^\circ$, on a $x = 1$, donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^\circ).$$

Donc en faisant $\theta = \theta^{(m)}$, on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p}\,\frac{\omega}{2} \quad\text{et}\quad \sin\theta^{(m)} = \varphi\left(\frac{m}{p}\,\frac{\omega}{2}\right).$$

Cela posé, faisons dans les formules (269′) et (270),

$$e_1^2 = -\lambda^2,\quad e^2 = -k^2,\quad \mu = \frac{(-1)^n}{a},$$

$$x = (-1)^n \sin\theta,\quad y = \sin\psi,\quad 2n+1 = p,$$

il viendra

$$(1)\qquad \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \pm\mu \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}} + C,$$

où les quantités μ, λ, ψ sont déterminées par les équations

$$\lambda = k^{2n+1}(\sin\theta' . \sin\theta''' \ldots \sin\theta^{(2n-1)})^4,$$

$$\mu = \left(\frac{\sin\theta' . \sin\theta''' \ldots \sin\theta^{(2n-1)}}{\sin\theta'' . \sin\theta'''' \ldots \sin\theta^{(2n)}}\right)^2,$$

(2) $\sin\psi$

$$= \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \sin\theta \frac{(\sin^2\theta'' - \sin^2\theta)(\sin^2\theta'''' - \sin^2\theta)\ldots(\sin^2\theta^{(2n)} - \sin^2\theta)}{(1-k^2\sin^2\theta''\sin^2\theta)(1-k^2\sin^2\theta''''\sin^2\theta)\ldots(1-k^2\sin^2\theta^{(2n)}\sin^2\theta)}.$$

Nous supposons k moindre que l'unité, car dans le cas contraire ω serait une quantité imaginaire.

Cela posé, considérons les équations (249). En remarquant que $e_1 = e = 1$, on en tire

$$\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \frac{t}{t_1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

où

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) + x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right) + x} \cdots \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right) + x},$$

ou, en faisant $\alpha = \frac{2m\omega}{2n+1}$ et $m = -1$,

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) + x}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) - x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) - x}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) + x} \cdots \frac{(-1)^n\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) - x}{(-1)^n\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) + x}.$$

Maintenant on a

$$x = (-1)^n \sin\theta, \quad\text{et}\quad \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\,\frac{\omega}{2}\right) = \sin\theta^{(m)},$$

donc en substituant:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}} = \sqrt{\frac{1-(-1)^n\sin\theta}{1+(-1)^n\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta' - \sin\theta}{\sin\theta' + \sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta''' + \sin\theta}{\sin\theta''' - \sin\theta} \cdots \frac{\sin\theta^{(2n-1)} + (-1)^n\sin\theta}{\sin\theta^{(2n-1)} - (-1)^n\sin\theta}},$$

et de là

$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi)$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta''' + \theta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\theta''' - \theta)} \cdots \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}[\theta^{(2n-1)} + (-1)^n\theta]}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}[\theta^{(2n-1)} - (-1)^n\theta]} \operatorname{tang}[45^\circ - (-1)^n\tfrac{1}{2}\theta].$$

C'est précisément la formule de M. *Jacobi*.

Dans la formule (1), on peut toujours supposer le second membre positif. En effet, en différentiant, on aura

$$\pm\mu\, d\psi = \frac{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \cdot d\theta.$$

En supposant θ toujours croissant, le second membre sera toujours positif. Donc en déterminant la valeur ψ de sorte qu'elle soit croissante et décroissante en même temps que θ, on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \mu \int_0 \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}},$$

ou bien

$$F(k, \theta) = \mu F(\lambda, \psi).$$

En remarquant que ψ doit être croissant et décroissant en même temps que θ, et en ayant égard à la formule (2), on tirera aisément la conséquence que ψ doit tomber entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$.

Quant aux quantités λ et μ, il est évident qu'elles ont nécessairement les mêmes valeurs que celles de M. *Jacobi*. Mais les expressions que j'ai données seront plus commodes pour l'application, et font voir clairement que λ est extrêmement petit, si n est un peu grand. Au reste on peut sans difficulté démontrer leur identité à l'aide de la formule (257).

XVII.

SUR LES FONCTIONS QUI SATISFONT A L'ÉQUATION $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 2, Berlin 1827.

L'équation

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

est satisfaite lorsque

$$fy = \tfrac{1}{2}y \quad \text{et} \quad \varphi x = \psi x = \log x;$$

car cela donne

$$\log x + \log y = \log xy;$$

de même lorsque

$$fy = \sqrt{1-y^2} \quad \text{et} \quad \varphi x = \psi x = \text{arc}\sin x,$$

ce qui donne

$$\text{arc}\sin x + \text{arc}\sin y = \text{arc}\sin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Il serait possible qu'on pût encore satisfaire à la même équation d'autres manières. C'est ce que nous allons examiner. Soit pour abréger

$$xfy + yfx = r,$$

l'équation de condition devient

$$\varphi x + \varphi y = \psi r. \tag{1}$$

En différentiant cette équation par rapport à x et à y, on aura, en faisant usage de la notation de Lagrange,

$$\varphi' x = \psi' r \frac{dr}{dx} \quad \text{et} \quad \varphi' y = \psi' r \frac{dr}{dy}.$$

De ces équations on tire, en éliminant la fonction $\psi' r$,

$$\varphi' x \frac{dr}{dy} = \varphi' y \frac{dr}{dx}.$$

Or l'expression de r donne

(2) $$\frac{dr}{dx} = fy + yf'x \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dy} = fx + xf'y$$

donc en substituant,

(3) $$\varphi' y (fy + yf'x) = \varphi' x (fx + xf'y).$$

En donnant maintenant à la quantité variable y la valeur particulière zéro, ce qui est permis parce que x et y sont des quantités indépendantes entre elles, et en faisant pour abréger

$$\varphi'(0) = a, \; f(0) = \alpha, \; f'(0) = \alpha',$$

l'équation (3) prendra la forme

$$a\alpha - \varphi' x (fx + \alpha' x) = 0;$$

d'où l'on tire, en écrivant y au lieu de x,

$$a\alpha - \varphi' y (fy + \alpha' y) = 0.$$

Ces deux équations donnent

(4) $$\varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x} \quad \text{et} \quad \varphi' y = \frac{a\alpha}{fy + \alpha' y};$$

donc en intégrant,

(5) $$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha' x}.$$

De cette manière la fonction φx est déterminée par fx. Il s'agit donc de trouver la fonction fx. En substituant dans l'équation (3) les expressions (4) des fonctions $\varphi' x$ et $\varphi' y$, et réduisant, on trouvera

(6) $$(fx + \alpha' x)(fy + yf'x) = (fy + \alpha' y)(fx + xf'y)$$

d'où l'on tire, en développant,

(7) $$\begin{aligned} & fx.fy + \alpha' x fy + yfx.f'x + \alpha' xyf'x \\ & \qquad - fx.fy - \alpha' y fx - xfy.f'y - \alpha' xyf'y = 0, \end{aligned}$$

ou bien

(8) $$x(\alpha' fy - fy.f'y - \alpha' yf'y) - y(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' xf'x) = 0,$$

ou en divisant par xy

(9) $$\frac{1}{y}(\alpha' fy - fy.f'y - \alpha' yf'y) - \frac{1}{x}(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' xf'x) = 0.$$

Les quantités x et y étant indépendantes entre elles, cette équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$\frac{1}{y}(\alpha' fy - fy.f'y - \alpha' yf'y) = \frac{1}{x}(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' xf'x) = \text{Const.}$$

Soit donc

(10) $$\frac{1}{x}(\alpha' fx - fx.f'x - \alpha' xf'x) = m;$$

on aura

(11) $$f'x(fx + \alpha'' x) + (mx - \alpha' fx) = 0.$$

Par cette équation la fonction fx est déterminée. On peut l'intégrer en faisant

$$fx = xz;$$

car alors on a

$$f'x.dx = z\,dx + x\,dz,$$

d'où l'on tire en substituant,

$$(z\,dx + x\,dz)(xz + \alpha' x) + (mx - \alpha' xz)\,dx = 0,$$

ce qui donne, en divisant par x,

$$(z\,dx + x\,dz)(z + \alpha') + (m - \alpha' z)\,dx = 0,$$

ou

$$[z(z + \alpha') + m - \alpha' z]\,dx + x\,dz(z + \alpha') = 0,$$

ou bien

$$(z^2 + m)\,dx + x\,dz(z + \alpha') = 0,$$

ou en divisant par $x(z^2 + m)$,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz(z + \alpha')}{z^2 + m},$$

donc en intégrant,

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z\,dz}{z^2 + m} - \alpha' \int \frac{dz}{z^2 + m}.$$

Soit $m=-n^2$, on aura

$$\int\frac{dx}{x}=\log x,\ \int\frac{zdz}{z^2-n^2}=\tfrac{1}{2}\log(z^2-n^2),\ \int\frac{dz}{z^2-n^2}=\frac{1}{2n}\log\frac{z-n}{z+n},$$

donc en substituant et en ajoutant une constante c,

$$\log c-\log x=\tfrac{1}{2}\log(z^2-n^2)+\frac{\alpha'}{2n}\log\frac{z-n}{z+n},$$

ou

$$\log\frac{c}{x}=\log\left\{(z^2-n^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}\right\}$$

d'où

$$\frac{c}{x}=(z^2-n^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}.$$

Mais on avait $fx=xz$; donc $z=\frac{fx}{x}$, et par suite en substituant,

$$\frac{c}{x}=\frac{[(fx)^2-n^2x^2]^{\frac{1}{2}}}{x}\left(\frac{fx-nx}{fx+nx}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}},$$

ou bien

$$c=(fx-nx)^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha'}{2n}}(fx+nx)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha'}{2n}},$$

ou en élevant à la $2n^{\text{ième}}$ puissance,

$$c^{2n}=(fx-nx)^{n+\alpha'}(fx+nx)^{n-\alpha'};\tag{12}$$

$x=0$ donne $c=\alpha$, à cause de $f(0)=\alpha$.

Voilà l'équation de laquelle dépend la fonction fx. Elle n'est pas en général résoluble, parce que n et α' sont deux quantités indéterminées, qui peuvent même être imaginaires. L'équation (12) contient la forme la plus générale de la fonction fx, et on peut démontrer qu'elle satisfait à l'équation de condition donnée dans toute sa généralité. En effet la fonction fx satisfait à l'équation (11), et on voit par la forme de l'équation (9) qu'elle satisfait aussi à cette équation. Or l'équation (6) est l'équation (9) sous une forme différente. Donc la fonction fx satisfait aussi à l'équation (6). De l'équation (6) on tire l'équation (3) en faisant $\varphi'x=\frac{a\alpha}{fx+\alpha'x}$, et l'équation (3) donne, en faisant $xfy+yfx=r$,

$$\varphi'x\frac{dr}{dy}-\varphi'y\frac{dr}{dx}=0.$$

En intégrant cette équation différentielle partielle par les règles connues, on trouvera

$$r=F(\varphi x+\varphi y),$$

d'où

$$\varphi x+\varphi y=\psi r,$$

ou bien

$$\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx),$$

ce qui est l'équation de condition donnée.

Il reste encore à trouver la fonction ψ. A cet effet soit $y=0$, on aura, en remarquant que $f(0)=\alpha$,

$$\varphi x=\psi(\alpha x)-\varphi(0),$$

ou, en mettant $\frac{x}{\alpha}$ au lieu de x,

$$\psi x=\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\varphi(0).$$

On trouve donc, en résumant, que les formes les plus générales des fonctions satisfaisant à l'équation de condition

$$\varphi x+\varphi y=\psi(xfy+yfx)$$

sont les suivantes:

$$\varphi x=a\alpha\int\frac{dx}{fx+\alpha'x}$$

et

$$\psi x=\varphi(0)+\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=a\alpha\int\frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\alpha'x}+\varphi(0),$$

où fx dépend de l'équation

$$\alpha^{2n}=(fx-nx)^{n+\alpha'}(fx+nx)^{n-\alpha'}.$$

Soit par exemple

$$n=\alpha'=\tfrac{1}{2},$$

on aura

$$\alpha=fx-\tfrac{1}{2}x;$$

donc

$$fx=\alpha+\tfrac{1}{2}x,$$

et par suite

$$\varphi x=a\alpha\int\frac{dx}{\alpha+x}=a\alpha\log(\alpha+x)+k,$$

$$\psi x=\varphi(0)+\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=2k+a\alpha\log\alpha+a\alpha\log\left(\alpha+\frac{x}{\alpha}\right),$$

ou

$$\psi x = 2k + a\alpha \log(\alpha^2 + x).$$

L'équation de condition devient donc

$$k + a\alpha \log(\alpha + x) + k + a\alpha \log(\alpha + y)$$
$$= 2k + a\alpha \log[\alpha^2 + x(\alpha + \tfrac{1}{2}y) + y(\alpha + \tfrac{1}{2}x)];$$

ce qui a effectivement lieu, car les deux membres de cette équation se réduisent à

$$2k + a\alpha \log(\alpha^2 + \alpha x + \alpha y + xy).$$

La fonction φx est trouvée ci-dessus sous forme d'intégrale. On peut aussi trouver une forme finie pour cette fonction par des logarithmes, en supposant la fonction fx connue. Soit

$$fx + nx = v \quad \text{et} \quad fx - nx = t,$$

l'équation (12) donne

$$\alpha^{2n} = v^{n-\alpha'} t^{n+\alpha'},$$

donc

$$t^{n+\alpha'} = \alpha^{2n} v^{\alpha'-n},$$

d'où

$$t = \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Or $fx = \frac{1}{2}(v + t)$ et $nx = \frac{1}{2}(v - t)$, donc

$$fx = \tfrac{1}{2}\left(v + \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}\right),$$

et

$$x = \frac{1}{2n} v - \frac{1}{2n} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$dx = \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{\alpha' - n}{2n(\alpha' + n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{-2n}{\alpha'+n}} \right\} dv.$$

On trouve de même

$$fx + \alpha' x = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}\right) v + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}\right) \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}};$$

ou bien

$$fx + \alpha' x = (n + \alpha') \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{\alpha' - n}{2n(\alpha' + n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}} \right\} v;$$

donc

$$\frac{dx}{fx + \alpha' x} = \frac{dv}{(n + \alpha')v},$$

ce qui donne en intégrant,

$$\int \frac{dx}{fx + \alpha' x} = \frac{1}{n + \alpha'} \log cv = \frac{\varphi x}{a\alpha};$$

où c est une constante arbitraire. En mettant donc pour v sa valeur $fx + nx$, on aura

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{n + \alpha'} \log(cnx + cfx). \tag{13}$$

Dans les deux cas $\alpha' = \infty$, et $n = 0$, la fonction fx prend une valeur particulière. Pour la trouver, il faut recourir à l'équation différentielle (11).

Soit d'abord $n = 0$, l'équation (11) donne, à cause de $m = -n^2$,

$$f'x(fx + \alpha' x) - \alpha' fx = 0.$$

Soit

$$fx = zx,$$

on trouvera

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz(z + \alpha')}{z^2} = -\frac{dz}{z} - \frac{\alpha' dz}{z^2},$$

et en intégrant

$$\log c' + \log x = -\log z + \frac{\alpha'}{z}, \quad \text{ou} \quad \log(c'xz) = \frac{\alpha'}{z},$$

ou, puisque $z = \frac{fx}{x}$,

$$\log(c'fx) = \frac{\alpha' x}{fx}, \quad \text{ou} \quad \alpha' x = fx \, . \log(c'fx).$$

Pour $x = 0$, on a $0 = \alpha \log c'\alpha$, donc $c'\alpha = 1$ et $c' = \frac{1}{\alpha}$, donc

$$\alpha' x = fx \, . \log\left(\frac{fx}{\alpha}\right), \tag{14}$$

où

$$e^{\alpha' x} = \left(\frac{fx}{\alpha}\right)^{fx}.$$

Cette équation détermine donc la fonction fx dans le cas où $n = 0$. L'équation (13) donne dans ce cas

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log(cfx) = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log(c\alpha) + \frac{a\alpha}{\alpha'} \log\left(\frac{fx}{\alpha}\right);$$

en vertu de (14) on a

$$\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right) = \frac{\alpha' x}{fx},$$

donc

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha x}{fx}. \tag{15}$$

De plus

$$\psi x = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{2a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{ax}{f\left(\frac{x}{\alpha}\right)}. \tag{16}$$

L'équation de condition devient donc

$$\frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha x}{fx} + \frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha y}{fy} = \frac{2a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a(xfy + yfx)}{f\left(\frac{xfy + yfx}{\alpha}\right)},$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$\alpha f\left(\frac{xfy + yfx}{\alpha}\right) = fx \,.\, fy. \tag{17}$$

Pour examiner cette équation, nous mettrons au lieu de x et de y leurs valeurs $\frac{fx}{\alpha'} \log \frac{fx}{\alpha}$ et $\frac{fy}{\alpha'} \log \frac{fy}{\alpha}$ tirées de l'équation (14), ce qui donne

$$\alpha f \left\{ \frac{fx \,.\, fy \log \frac{fx \,.\, fy}{\alpha^2}}{\alpha\alpha'} \right\} = fy \,.\, fx = \alpha fr, \tag{18}$$

en faisant pour abréger

$$\frac{fx \,.\, fy \,.\, \log \frac{fx \,.\, fy}{\alpha^2}}{\alpha\alpha'} = r. \tag{19}$$

Il s'ensuit

$$2 \log \alpha + \log \frac{fr}{\alpha} = \log (fx \,.\, fy).$$

Or en vertu de l'équation (14) on a $\log \frac{fr}{\alpha} = \frac{\alpha' r}{fr}$, donc en substituant,

$$2 \log \alpha + \frac{\alpha' r}{fr} = \log (fx \,.\, fy). \tag{20}$$

Mais puisque $fr = \frac{fx \,.\, fy}{\alpha}$ (18), on a en vertu de (19) $\frac{fr \,.\, \log\left(\frac{fx \,.\, fy}{\alpha^2}\right)}{\alpha'} = r$, donc $\frac{\alpha' r}{fr} = \log\left(\frac{fx \,.\, fy}{\alpha^2}\right)$, et par conséquent: $2 \log \alpha + \log\left(\frac{fx \,.\, fy}{\alpha^2}\right) = \log (fx \,.\, fy)$, ce qui a effectivement lieu comme on le voit aisément.

Soit ensuite $\alpha' = \infty$. En mettant dans ce cas l'équation (11) sous la forme

$$\frac{fx \,.\, f'x}{\alpha'} + xf'x + \frac{mx}{\alpha'} - fx = 0,$$

il est clair qu'on doit avoir $xf'x - fx = 0$, lorsque m est fini. Il faut donc que

$$\frac{f'x \,.\, dx}{fx} = \frac{dx}{x}, \text{ ou } fx = cx.$$

Si

$$m = -p\alpha'$$

on a

$$xf'x - px - fx = 0.$$

Soit

$$fx = xz,$$

on aura

$$x(x\,dz + z\,dx) - (px + xz)\,dx = 0,$$

ou

$$x\,dz = p\,dx;$$

donc

$$z = p \log cx = \frac{fx}{x},$$

et par suite

$$fx = px \log cx.$$

Pour trouver φx, on substituera la valeur de la fonction fx dans l'équation (3); on aura, à cause de $f'x = p \log cx + p$,

$$\varphi' y (py \log cy + yp \log cx + py) - \varphi' x (px \log cx + xp \log cy + px) = 0;$$

donc, en divisant par $p(\log c^2 xy + 1)$,

$$y\varphi' y - x\varphi' x = 0,$$

donc

$$x\varphi' x = k \text{ et } d\varphi x = \frac{k\,dx}{x},$$

d'où

$$\varphi x = k \log mx.$$

L'équation de condition donnée deviendra donc

$$k \log mx + k \log my = \psi(xpy \log cy + ypx \log cx),$$

ou

$$k \log m^2 xy = \psi(pxy \log c^2 xy),$$

ou, en faisant $pxy \log c^2 xy = r$ et $xy = v$,

$$\psi r = k \log m^2 v.$$

Par le même procédé, qui a donné ci-dessus les fonctions qui satisfont à l'équation

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

on peut trouver les fonctions inconnues dans toute autre équation à deux quantités variables. En effet, on peut, par des différentiations successives par rapport aux deux quantités variables, trouver autant d'équations qu'il est nécessaire pour éliminer des fonctions quelconques, de sorte qu'on parviendra à une équation qui ne contient qu'une seule de ces fonctions, et qui sera en général une équation différentielle d'un certain ordre. On peut donc en général trouver chacune de ces fonctions par une seule équation. Il s'ensuit qu'une telle équation n'est que très rarement possible. Car, comme la forme d'une fonction quelconque contenue dans l'équation de condition donnée, en vertu de l'équation même, doit être indépendante des formes des autres fonctions, il est évident qu'en général on ne peut considérer aucune de ces fonctions comme donnée. Ainsi par exemple l'équation ci-dessus ne pourrait plus être satisfaite, si la fonction fx avait eu une forme différente de celle qu'on vient de trouver.

XVIII.

NOTE SUR UN MÉMOIRE DE M. *L. OLIVIER*, AYANT POUR TITRE "REMARQUES SUR LES SÉRIES INFINIES ET LEUR CONVERGENCE."

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 3, Berlin 1828.

On trouve p. 34 de ce mémoire le théorème suivant pour reconnaître si une série est convergente ou divergente:

"Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du $n^{\text{ième}}$ terme, ou "du $n^{\text{ième}}$ des groupes de termes qui conservent le même signe, par n, est "zéro pour $n = \infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une "marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne peut "pas être convergente si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n = \infty$."

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots$$

est divergente, quoique $na_n = \frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n = \infty$. En effet les logarithmes hyperboliques, dont il est question, sont toujours moindres que leurs nombres moins 1, c'est-à-dire, qu'on a toujours $\log(1+x) < x$. Si $x > 1$ cela est évident. Si $x < 1$ on a

$$\log(1+x) = x - x^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}x) - x^4(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}x) - \cdots,$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x) < x$, puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x$ ... sont tous positifs. En faisant $x = \frac{1}{n}$, cela donne

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{ou bien} \quad \log\frac{1+n}{n} < \frac{1}{n},$$

ou

$$\log(1+n) < \frac{1}{n} + \log n = \left(1+\frac{1}{n\log n}\right)\log n;$$

donc

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right).$$

Mais puisque $\log(1+x) < x$, on a $\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right) < \frac{1}{n\log n}$, donc, en vertu de l'expression précédente,

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \frac{1}{n\log n}.$$

En faisant successivement $n=2, 3, 4, \ldots$, on trouve

$$\log\log 3 < \log\log 2 + \frac{1}{2\log 2},$$

$$\log\log 4 < \log\log 3 + \frac{1}{3\log 3},$$

$$\log\log 5 < \log\log 4 + \frac{1}{4\log 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\log(1+n) < \log\log n + \frac{1}{n\log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log\log(1+n) < \log\log 2 + \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n}.$$

Mais $\log\log(1+n) = \infty$ pour $n=\infty$, donc la somme de la série proposée $\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots + \frac{1}{n\log n} + \cdots$ est infiniment grande, et par conséquent cette série est divergente. Le théorème énoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle qu'une série quelconque $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente si $\varphi n . a_n$ est zéro pour $n=\infty$, et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant:

Si la série $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0+a_1} + \frac{a_3}{a_0+a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}} + \cdots$$

le sera aussi.

En effet, en remarquant que les quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont positives, on a en vertu du théorème $\log(1+x) < x$, démontré ci-dessus,

$$\log(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n) - \log(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$\log\left(1+\frac{a_n}{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}\right) < \frac{a_n}{a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}},$$

donc, en faisant successivement $n=1, 2, 3, \ldots$,

$$\log(a_0+a_1) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0},$$

$$\log(a_0+a_1+a_2) - \log(a_0+a_1) < \frac{a_2}{a_0+a_1},$$

$$\log(a_0+a_1+a_2+a_3) - \log(a_0+a_1+a_2) < \frac{a_3}{a_0+a_1+a_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log(a_0+a_1+\cdots+a_n) - \log(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}) < \frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0+a_1+\cdots+a_n) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ est divergente, sa somme est infinie, et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme de la série $\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0+a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}} + \cdots$ est aussi infiniment grande, et cette série est par conséquent divergente, si la série $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ l'est. Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n, telle que la série $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n . a_n$ est zéro ou non pour $n=\infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \frac{1}{\varphi(3)} + \frac{1}{\varphi(4)} + \cdots + \frac{1}{\varphi n} + \cdots$$

sera divergente, et la série

$$\frac{1}{\varphi(2)\cdot\frac{1}{\varphi(1)}}+\frac{1}{\varphi(3)\left(\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}\right)}+\frac{1}{\varphi(4)\left(\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\frac{1}{\varphi(3)}\right)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\varphi n\left(\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\frac{1}{\varphi(3)}+\cdots+\frac{1}{\varphi(n-1)}\right)}+\cdots$$

convergente; car dans la première on a $a_n\varphi n=1$ et dans la seconde $a_n\varphi n=0$ pour $n=\infty$. Or, selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente en même temps que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n=n$, les deux séries en question deviendront

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

et

$$\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3(1+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}+\cdots+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}+\cdots,$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.

XIX.

SOLUTION D'UN PROBLÈME GÉNÉRAL CONCERNANT LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von *Schumacher*, Bd. 6, Nr. 138. Altona 1828.

Dans le n° 127 de ce journal M. *Jacobi* démontre un théorème très élégant relatif à la transformation des fonctions elliptiques. Ce théorème est un cas particulier d'un autre plus général, auquel je suis parvenu depuis longtemps sans connaître le mémoire de M. *Jacobi*. On en trouve la démonstration dans un mémoire inséré dans le journal de M. *Crelle*, et qui a pour titre "Recherches sur les fonctions elliptiques." Mais on peut envisager cette théorie sous un point de vue beaucoup plus général, en se proposant comme un problème d'analyse indéterminée de trouver toutes les transformations possibles d'une fonction elliptique qui peuvent s'effectuer d'une certaine manière. Je suis parvenu à résoudre complètement un grand nombre de problèmes de cette espèce. Parmi eux est le suivant, qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques:

"Trouver tous les cas possibles dans lesquels on pourra satisfaire à l'é-
"quation différentielle:

$$(1)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-e_1^2y^2)(1-c_1^2y^2)}}=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)}},$$

"en mettant pour y une fonction algébrique de x, rationnelle ou irra-
"tionnelle."

Ce problème, vu la généralité de la fonction y, paraît au premier coup d'oeil bien difficile, mais on peut le ramener au cas où l'on suppose y rationnelle. En effet on peut démontrer que si l'équation (1) a lieu pour une valeur irrationnelle de y, on en pourra toujours déduire une autre de la même forme, dans laquelle y est rationnelle, en changeant convenablement le coefficient a, les quantités c_1, e_1, c, e restant les mêmes. La méthode qui s'offre d'abord pour résoudre le problème dans le cas où y est rationnelle est celle des coefficiens indéterminés; or on serait bientôt fatigué à cause de l'extrême complication des équations à satisfaire. Je crois donc que le procédé suivant, qui conduit de la manière la plus simple à une solution complète, doit peut-être mériter l'attention des géomètres.

En faisant

$$\theta = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}, \tag{2}$$

la quantité x sera une certaine fonction de θ; nous la désignerons par $\lambda\theta$. De même nous désignerons par $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega'}{2}$ les valeurs de θ qui répondent respectivement à $x=\frac{1}{c}$ et à $x=\frac{1}{e}$, et par $\Delta\theta$ la fonction $\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}$. Cela posé, on pourra démontrer les théorèmes suivans:

Théorème I. En désignant par θ et θ' deux quantités quelconques, on aura toujours

$$\lambda(\theta \pm \theta') = \frac{\lambda\theta \,.\, \Delta\theta' \pm \lambda\theta' \,.\, \Delta\theta}{1-c^2e^2\lambda^2\theta \,.\, \lambda^2\theta'} \tag{3}$$

(Voy. Exercices de calcul int., t. I, p. 23).

Théorème II. On satisfait de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta' = \lambda\theta$$

en prenant

$$\theta' = (-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega',$$

où m et m' sont des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs. On aura donc

$$\lambda[(-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega'] = \lambda\theta. \tag{4}$$

Ce théorème a lieu généralement, quelles que soient les quantités e et c, réelles ou imaginaires. Je l'ai démontré pour le cas où e^2 est négatif et c^2 positif dans le mémoire cité plus haut (*Crelle's* Journal für die reine und

angewandte Mathematik, Bd. 2, p. 114). Les quantités ω, ω' sont toujours dans un rapport imaginaire. Elles jouent d'ailleurs dans la théorie des fonctions elliptiques le même rôle que le nombre π dans celle des fonctions circulaires.

Nous allons voir comment à l'aide de ces deux théorèmes on pourra déterminer facilement l'expression générale de y, et les valeurs qui en résulteront pour c_1 et e_1.

Soit

$$y = \psi(x) \tag{5}$$

la fonction rationnelle cherchée. Si l'on considère x comme fonction de y, sa valeur sera déterminée par l'équation (5), qui aura un certain nombre de racines. Or il existe entre ces racines des relations qui nous conduiront à l'expression de $\psi(x)$.

Si l'équation (5) passe le premier degré par rapport à x, désignons par x_1 une autre racine, et par θ_1 la valeur correspondante de θ, de sorte que $x_1 = \lambda\theta_1$, $y = \psi(x) = \psi(x_1)$.

En vertu de la formule (2), l'équation (1) deviendra, en désignant le radical du premier membre par $\sqrt{R}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{R}} = \pm a\, d\theta.$$

En changeant x en x_1, ou, ce qui revient au même, θ en θ_1, la valeur de y reste la même, et par conséquent $\frac{dy}{\sqrt{R}}$ reste le même, ou se change en $-\frac{dy}{\sqrt{R}}$. On aura donc

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{R}} = \pm a\, d\theta_1,$$

et par suite $d\theta_1 = \pm d\theta$, d'où l'on tire en intégrant $\theta_1 = \alpha \pm \theta$, α étant une quantité indépendante de θ. On aura par conséquent $x_1 = \lambda(\alpha \pm \theta)$. Il suffit de prendre θ avec le signe $+$; car on a, d'après la formule (4), en y faisant $m=1$, $m'=0$, $\lambda\theta = \lambda(\omega - \theta)$ et par conséquent $\lambda(\alpha - \theta) = \lambda(\omega - \alpha + \theta)$, où $\omega - \alpha$ est une nouvelle constante. On pourra donc faire $x_1 = \lambda(\theta + \alpha)$. On a ainsi établi ce théorème.

Théorème III. „Si une racine de l'équation $y = \psi(x)$ est représentée „par $\lambda\theta$, une autre racine quelconque sera de la forme $\lambda(\theta + \alpha)$, où α est „une quantité constante.“

Si l'on pouvait parvenir à trouver toutes les valeurs de α, rien ne serait plus facile que de déterminer ensuite celle de y. Or c'est ce que nous allons faire à l'aide du Théorème II. Les quantités $\lambda\theta$ et $\lambda(\theta+\alpha)$ étant des racines, on aura à la fois:

$$y=\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+\alpha)],$$

équation qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de θ. On en tire, en mettant au lieu de θ successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, $\ldots$ $\theta+k\alpha$,

$$\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+\alpha)]=\psi[\lambda(\theta+2\alpha)]=\cdots=\psi[\lambda(\theta+k\alpha)],$$

donc on aura

$$y=\psi[\lambda(\theta+k\alpha)],$$

k désignant un nombre entier quelconque. On voit par là que, non seulement $\lambda(\theta+\alpha)$, mais toute quantité de la forme $\lambda(\theta+k\alpha)$ sera une racine de l'équation $y=\psi(x)$. Or, k pouvant avoir une infinité de valeurs différentes, il faut nécessairement que plusieurs des quantités $\lambda(\theta+k\alpha)$ soient égales pour des valeurs différentes de k, car l'équation $y=\psi(x)$ n'a qu'un nombre limité de racines.

Soit donc $\lambda(\theta+k\alpha)=\lambda(\theta+k'\alpha)$, où nous supposons k plus grand que k'. En mettant $\theta-k'\alpha$ au lieu de θ, il viendra: $\lambda[\theta+(k-k')\alpha]=\lambda\theta$, ou bien, en faisant $k-k'=n$,

$$\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta. \tag{6}$$

Cette équation détermine la valeur de α, car en vertu du théorème II on en tire

$$\theta+n\alpha=(-1)^{m+m'}\theta+m\omega+m'\omega',$$

ce qui donne, en remarquant que θ est variable, $(-1)^{m+m'}=1$ et $n\alpha=m\omega+m'\omega'$; $m+m'$ doit donc être un nombre pair, et alors on aura

$$\alpha=\frac{m}{n}\omega+\frac{m'}{n}\omega', \tag{7}$$

$\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n}$ pouvant désigner des quantités rationnelles quelconques; on voit donc que, pour que la quantité $\lambda(\theta+\alpha)$ puisse être racine de l'équation $y=\psi(x)$ en même temps que $\lambda\theta$, il faut que la constante α ait la forme

$$\alpha=\mu\omega+\mu'\omega', \tag{8}$$

où μ et μ' sont des quantités rationnelles positives ou négatives. La quantité α ayant une telle valeur, l'expression $\lambda(\theta+k\alpha)$ n'aura qu'un nombre limité de valeurs différentes, car ayant $\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta$, on aura de même $\lambda[\theta+(n+1)\alpha]=\lambda(\theta+\alpha)$; $\lambda[\theta+(n+2)\alpha]=\lambda(\theta+2\alpha)$ etc.

Cela posé, si le degré de l'équation $y=\psi(x)$ surpasse le nombre des valeurs inégales de $\lambda(\theta+k\alpha)$, soit $\lambda(\theta+\alpha_1)$ une nouvelle racine, différente des racines $\lambda(\theta+k\alpha)$; on doit avoir de la même manière: $\alpha_1=\mu_1\omega+\mu_1'\omega'$ et $\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+k_1\alpha_1)]$. En mettant $\theta+k\alpha$ au lieu de θ, il viendra, en remarquant que $\psi[\lambda(\theta+k\alpha)]=\psi(\lambda\theta)=y$,

$$y=\psi[\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1)],$$

donc $\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1)$ sera une racine quels que soient les nombres entiers k et k_1. Si maintenant le degré de l'équation $y=\psi(x)$ surpasse le nombre des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1)$, soit $\lambda(\theta+\alpha_2)$ une nouvelle racine; on doit avoir $\alpha_2=\mu_2\omega+\mu_2'\omega'$ et $\psi(\lambda\theta)=\psi[\lambda(\theta+k_2\alpha_2)]$, d'où l'on tire, en mettant $\theta+k\alpha+k_1\alpha_1$ au lieu de θ,

$$y=\psi[\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)],$$

et par conséquent toutes les quantités contenues dans l'expression $\lambda(\theta+k\alpha+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)$ seront des racines, quels que soient les nombres entiers k, k_1, k_2. En continuant ce raisonnement jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines de l'équation $y=\psi(x)$, on aura le théorème suivant:

Théorème IV. Toutes les racines de l'équation $y=\psi(x)$ pourront être représentées par les valeurs inégales de l'expression:

$$\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_\nu\alpha_\nu),$$

en donnant à k_1, k_2, $\ldots$ k_ν toutes les valeurs entières, et les quantités α_1, α_2, $\ldots$ α_ν étant de la forme

$$\mu\omega+\mu'\omega',$$

où μ et μ' sont des quantités rationnelles.

Cela posé, désignons ces valeurs de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_\nu\alpha_\nu)$ par $\lambda(\theta)$, $\lambda(\theta+\alpha_1)$, $\lambda(\theta+\alpha_2)$, $\ldots$ $\lambda(\theta+\alpha_{m-1})$, et faisons $\psi(x)=\frac{p}{q}$, p et q étant des fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura

$$p-qy=A(x-\lambda\theta)[x-\lambda(\theta+\alpha_1)][x-\lambda(\theta+\alpha_2)]\ldots[x-\lambda(\theta+\alpha_{m-1})],$$

équation qui a lieu pour une valeur quelconque de x. A est le coefficient de x^m dans $p-qy$, il est donc de la forme $f-gy$, où f et g sont des constantes. On aura par conséquent

(9) $p-qy=(f-gy)[x-\lambda\theta][x-\lambda(\theta+\alpha_1)]\ldots[x-\lambda(\theta+\alpha_{m-1})].$

De là on déduira une expression de y en θ, en attribuant à x une valeur particulière, ou bien en comparant les coefficiens d'une même puissance de x dans les deux membres. Une telle expression de y contiendra trois quantités constantes inconnues, et le problème se réduit maintenant à trouver tous les cas dans lesquels ces trois quantités pourront être déterminées de telle sorte que l'équation proposée soit satisfaite. Or nous allons voir tout-à-l'heure que cela sera toujours possible, quelles que soient les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, en déterminant convenablement deux des quantités a, e_1, c_1. Mais avant de considérer le cas général nous allons commencer par celui où p et q sont du premier degré, car un théorème qui en résulte nous sera utile pour parvenir à la solution du problème général.

Soit donc

$$y=\frac{f'+fx}{g'+gx},$$

on en tire

$$1\pm c_1y=\frac{g'\pm c_1f'+(g\pm c_1f)x}{g'+gx},\quad 1\pm e_1y=\frac{g'\pm e_1f'+(g\pm e_1f)x}{g'+gx},$$

$$dy=\frac{fg'-f'g}{(g'+gx)^2}\,dx.$$

Par là l'équation (1) deviendra, en substituant,

$$\frac{fg'-f'g}{\sqrt{(g'^2-c_1^2f'^2)(g'^2-e_1^2f'^2)}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left(1+\frac{g+c_1f}{g'+c_1f'}x\right)\left(1+\frac{g-c_1f}{g'-c_1f'}x\right)\left(1+\frac{g+e_1f}{g'+e_1f'}x\right)\left(1+\frac{g-e_1f}{g'-e_1f'}x\right)}}$$
$$=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

On trouve aisement que cette formule ne peut être satisfaite que de l'une des manières suivantes:

(10) $$y=ax,\qquad c_1^2=\frac{c^2}{a^2},\quad e_1^2=\frac{e^2}{a^2},$$

(11) $$y=\frac{a}{ec}\cdot\frac{1}{x},\quad c_1^2=\frac{c^2}{a^2},\quad e_1^2=\frac{e^2}{a^2};$$

(12) $$\left\{\begin{aligned} &y=m\frac{1-x\sqrt{ec}}{1+x\sqrt{ec}},\quad c_1=\frac{1}{m}\frac{\sqrt{c}-\sqrt{e}}{\sqrt{c}+\sqrt{e}},\\ &e_1=\frac{1}{m}\frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}},\quad a=\frac{m\sqrt{-1}}{2}(c-e).\end{aligned}\right.$$

On peut prendre les quantités c, e, $\sqrt{c}$, $\sqrt{e}$ avec le signe qu'on voudra.

Cela posé, reprenons l'équation (9). En désignant par f' et g' les coefficiens de x^{m-1} dans p et q, on aura

$$f'-g'y=-(f-gy)[\lambda\theta+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\cdots+\lambda(\theta+\alpha_{m-1})],$$

d'où l'on tire, en faisant pour abréger

(13) $$\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\cdots+\lambda(\theta+\alpha_{m-1}),$$

(14) $$y=\frac{f'+f.\varphi\theta}{g'+g.\varphi\theta},$$

équation qui pourra servir à déterminer la fonction y, excepté dans le cas où $\varphi\theta$ se réduit à une quantité constante.

Selon l'hypothèse, y doit être une fonction rationnelle de x, donc la fonction $\varphi\theta$ doit l'être de même. Il faut donc examiner d'abord dans quels cas cela pourra avoir lieu.

Soit $\lambda(\theta+\alpha)$ une quelconque des quantités $\lambda(\theta+\alpha_1)$, $\lambda(\theta+\alpha_2)$, ..., il suit de ce qui précède que $\lambda(\theta+k\alpha)$ sera de même égale à l'une d'entre elles. Or soit $\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta$, ce qui a toujours lieu en déterminant convenablement le nombre entier n, on aura, en mettant $\theta-\alpha$ au lieu de θ, $\lambda[\theta+(n-1)\alpha]=\lambda(\theta-\alpha)$; donc $\lambda(\theta-\alpha)$ sera encore contenue parmi les quantités dont il s'agit. Il suit de là que si $\lambda(\theta-\alpha_1)$ est différente de $\lambda(\theta+\alpha_1)$, la quantité $\lambda(\theta-\alpha_1)$ sera égale à l'une des quantités $\lambda(\theta+\alpha_2)$, $\lambda(\theta+\alpha_3)$, ... Cherchons donc d'abord les valeurs de α qui donneront $\lambda(\theta-\alpha)=\lambda(\theta+\alpha)$; c'est-à-dire $\lambda(\theta+2\alpha)=\lambda\theta$. D'après l'équation (7) on aura

$$\alpha=\frac{m}{2}\,\omega+\frac{m'}{2}\,\omega',$$

où $m+m'$ est un nombre pair. En donnant à m et m' à partir de zéro toutes les valeurs entières telles que $m+m'$ soit pair, $\lambda(\theta+\alpha)$ prendra les valeurs suivantes:

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\omega),\ \lambda(\theta+\omega'),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$
$$\lambda(\theta+\omega+\omega'),\ \text{etc.},$$

mais, d'après le théorème II, il est clair que les seules de ces valeurs qui soient différentes entre elles sont celles-ci

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\omega),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

donc, puisque $\lambda(\theta+\alpha)$ doit être différent de $\lambda\theta$, $\lambda(\theta+\alpha)$ ne pourra avoir que l'une de ces trois valeurs

$$\lambda(\theta+\omega),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right).$$

En exceptant ces quantités, il répond donc toujours à $\lambda(\theta+\alpha)$ un autre terme $\lambda(\theta-\alpha)$. De là il suit qu'on pourra écrire l'expression de $\varphi\theta$ comme il suit:

(15) $$\varphi\theta=\lambda\theta+k.\lambda(\theta+\omega)+k'.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+k''.\lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\lambda(\theta-\alpha_2)+\cdots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n),$$

où k, k', k'' sont égaux à zéro ou à l'unité.

Pour avoir maintenant l'expression de $\varphi\theta$ en x, il faut recourir à la formule (3). En y faisant d'abord $\theta'=\frac{\omega}{2}$, on aura $\lambda\theta'=\frac{1}{c}$, donc $\Delta(\theta')=0$, et par conséquent

$$\lambda\left(\theta\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\frac{1}{c}\cdot\frac{\Delta\theta}{1-e^2\lambda^2\theta};$$

or $\Delta\theta=\sqrt{(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)}$, donc

$$\lambda\left(\theta\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-c^2x^2}}.$$

On aura de la même manière, en faisant $\theta'=\frac{\omega'}{2}$,

$$\lambda\left(\theta+\frac{\omega'}{2}\right)=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-c^2x^2}{1-e^2x^2}}.$$

La première formule donne

(16) $$\lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right)=-\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right),$$

donc, en mettant $\theta+\frac{\omega}{2}$ au lieu de θ,

(17) $$\lambda(\theta+\omega)=-\lambda\theta=-x.$$

En multipliant $\lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right)$ par $\lambda\left(\theta+\frac{\omega'}{2}\right)$, on aura

(18) $$\lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right).\lambda\left(\theta+\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{1}{ec},$$

d'où l'on tire, en mettant $\theta+\frac{\omega}{2}$ et $\theta+\frac{3\omega}{2}$ au lieu de θ,

(19) $$\begin{cases}\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{\lambda\theta}=-\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{x},\\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{\lambda(\theta+\omega)}=\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{x}.\end{cases}$$

La formule (3) donne encore, en faisant $\theta'=\alpha$,

(20) $$\lambda(\theta+\alpha)+\lambda(\theta-\alpha)=\frac{2x.\Delta\alpha}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}.$$

On voit par là que l'expression de $\varphi\theta$ sera toujours une fonction rationnelle de x, savoir

(21) $$\varphi\theta=(1-k)x+\frac{k''-k'}{ec}\cdot\frac{1}{x}+\Sigma\frac{2x.\Delta\alpha}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2},$$

en employant pour abréger le signe de sommation Σ.

Cela posé, il faut considérer plusieurs cas, selon les valeurs différentes de k, k', k''.

Premier cas. Si $k=k'=k''=0$.

Si les trois quantités k, k', k'', sont égales à zéro, l'expression de $\varphi\theta$ deviendra

(22) $$\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\lambda(\theta-\alpha_2)+\cdots$$
$$+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n)$$

et

(23) $$\varphi\theta=x+2x\Sigma\frac{\Delta\alpha}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}.$$

Donc la première condition, que y soit rationnelle en x, est remplie. Il faut maintenant substituer son expression dans l'équation proposée et voir si elle pourra être satisfaite.

On tire d'abord de l'équation (14)

$$1 \pm c_1 y = \frac{g' \pm c_1 f' + (g \pm c_1 f)\varphi\theta}{g' + g\varphi\theta},$$

$$1 \pm e_1 y = \frac{g' \pm e_1 f' + (g \pm e_1 f)\varphi\theta}{g' + g\varphi\theta}.$$

Cela posé, désignons par δ, δ', ε, ε' des valeurs de θ qui répondent respectivement à $y = +\frac{1}{c_1}$, $y = -\frac{1}{c_1}$, $y = +\frac{1}{e_1}$, $y = -\frac{1}{e_1}$, on doit avoir

$$(24)\quad \begin{cases} g' - c_1 f' + (g - c_1 f)\varphi\delta = 0, & g' + c_1 f' + (g + c_1 f)\varphi\delta' = 0, \\ g' - e_1 f' + (g - e_1 f)\varphi\varepsilon = 0, & g' + e_1 f' + (g + e_1 f)\varphi\varepsilon' = 0. \end{cases}$$

En vertu de ces équations les valeurs de $1 - c_1 y$, $1 + c_1 y$, $1 - e_1 y$, $1 + e_1 y$ deviendront, en faisant pour abréger

$$(25)\qquad g' + g\varphi\theta = r:$$

$$(26)\quad \begin{cases} 1 - c_1 y = \dfrac{g' - c_1 f'}{r}\left(1 - \dfrac{\varphi\theta}{\varphi\delta}\right), \\ 1 + c_1 y = \dfrac{g' + c_1 f'}{r}\left(1 - \dfrac{\varphi\theta}{\varphi\delta'}\right), \\ 1 - e_1 y = \dfrac{g' - e_1 f'}{r}\left(1 - \dfrac{\varphi\theta}{\varphi\varepsilon}\right), \\ 1 + e_1 y = \dfrac{g' + e_1 f'}{r}\left(1 - \dfrac{\varphi\theta}{\varphi\varepsilon'}\right). \end{cases}$$

En substituant dans $1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}$ l'expression de $\varphi\theta$ en x, on obtiendra un résultat de la forme

$$1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta} = \frac{1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{2n+1} x^{2n+1}}{(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_1 x^2)(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_2 x^2)\cdots(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_n x^2)}.$$

En faisant $\theta = \delta$ le second membre s'évanouira, mais il est clair par ce qui précède que $\varphi(\theta)$ ne change pas de valeur si l'on met au lieu de θ l'une quelconque des quantités $\theta \pm \alpha_1$, $\theta \pm \alpha_2 \ldots \theta \pm \alpha_n$. Donc le numérateur du second membre doit s'évanouir toutes les fois que x a l'une des valeurs $\lambda\delta$, $\lambda(\delta \pm \alpha_1)$, $\lambda(\delta \pm \alpha_2)$, $\ldots\ \lambda(\delta \pm \alpha_n)$. Donc, puisque le nombre de

ces valeurs, en général toutes différentes entre elles, est $2n+1$, il s'ensuit que

$$1 + A_1 x + \cdots + A_{2n+1} x^{2n+1} = \left(1 - \frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta + \alpha_1)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta - \alpha_1)}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta + \alpha_n)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta - \alpha_n)}\right);$$

donc en substituant et faisant pour abréger,

$$(27)\qquad \varrho = (1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_1 x^2)(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_2 x^2) \ldots (1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_n x^2),$$

il viendra

$$(28)\quad 1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta} = \frac{1}{\varrho}\cdot\left(1 - \frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta + \alpha_1)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta - \alpha_1)}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta + \alpha_n)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta - \alpha_n)}\right),$$

formule qui a lieu pour des valeurs quelconques de δ et θ.

A l'aide de cette formule il sera facile de trouver les cas dans lesquels on pourra satisfaire à l'équation proposée. On peut écrire cette équation comme il suit:

$$(29)\qquad \sqrt{(1 - c_1^2 y^2)(1 - e_1^2 y^2)} = \frac{1}{a}\frac{dy}{dx}\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 - e^2x^2)},$$

ce qui nous fait voir que l'une des quatre fonctions $1 \pm c_1 y$, $1 \pm e_1 y$ doit s'évanouir en attribuant à x une des quatre valeurs $\pm\frac{1}{c}$, $\pm\frac{1}{e}$, c'est-à-dire à θ une des valeurs $\pm\frac{\omega}{2}$, $\pm\frac{\omega'}{2}$.

Supposons d'abord $1 - c_1 y = 0$ pour $\theta = \frac{\omega}{2}$, $1 + c_1 y = 0$ pour $\theta = -\frac{\omega}{2}$, $1 - e_1 y = 0$ pour $\theta = \frac{\omega'}{2}$, $1 + e_1 y = 0$ pour $\theta = -\frac{\omega'}{2}$, on pourra prendre $\delta = \frac{\omega}{2}$, $\delta' = -\frac{\omega}{2}$, $\varepsilon = \frac{\omega'}{2}$, $\varepsilon' = -\frac{\omega'}{2}$. En substituant ces valeurs dans les équations (24) et remarquant que $\varphi\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\omega'}{2}\right) = -\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, on en tire

$$g' = c_1 f \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 f \cdot \varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right);\quad f' = \frac{g}{c_1}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{g}{e_1}\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right).$$

On satisfait à ces équations en prenant

$$(30)\qquad g=f'=0,\quad \frac{f}{g'}=\frac{1}{k},\quad c_1=\frac{k}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)},\quad e_1=\frac{k}{\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)},$$

où k est arbitraire.

La valeur de y deviendra

$$(31)\qquad y=\frac{1}{k}\varphi\theta$$

et l'on aura ensuite

$$1\pm c_1 y=1\pm\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)},\quad 1\pm e_1 y=1\pm\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Cela posé, faisons dans la formule (28) $\delta=\pm\frac{\omega}{2}, \pm\frac{\omega'}{2}$, on obtiendra

$$(32)\qquad 1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{1}{\varrho}\left\{1-\frac{x}{\lambda\frac{\omega}{2}}\right\}\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha_1\right)}\right\}\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\cdots$$
$$\cdots\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha_n\right)}\right\}\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\};$$

or $\lambda\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{c}$, et d'après la formule (16) on aura $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right)$, donc

$$(33)\qquad 1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{1}{\varrho}(1-cx)\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}^2\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}^2\cdots$$
$$\cdots\left\{1-\frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}^2.$$

On aura des expressions analogues pour $1+\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}$, $1\pm\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)}$ en faisant $\delta=-\frac{\omega}{2}$, $\delta=\pm\frac{\omega'}{2}$.

En faisant donc pour abréger

$$(34)\qquad \begin{cases} t=\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}, \\ t'=\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_n\right)}\right\}, \end{cases}$$

on trouvera

$$(35)\qquad 1-c_1^2y^2=(1-c^2x^2)\frac{t^2}{\varrho^2},\quad 1-e_1^2y^2=(1-e^2x^2)\frac{t'^2}{\varrho^2},$$

et de là

$$(36)\qquad \sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}=\pm\frac{tt'}{\varrho^2}\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}.$$

Maintenant les deux équations (35) nous montrent que $\varrho^2\frac{dy}{dx}$ est une fonction entière de x, qui est divisible par les deux fonctions entières t et t'; donc, puisque ces fonctions n'ont point de diviseur commun, il en résulte que $\varrho^2\frac{dy}{dx}$ sera divisible par leur produit; mais le degré de la fonction $\varrho^2\frac{dy}{dx}$ est précisément le même que celui de la fonction tt', savoir $4n$. Donc l'expression $\frac{\varrho^2\frac{dy}{dx}}{tt'}$ se réduit à une constante. En la désignant par a, on aura donc

$$(37)\qquad dy=a\frac{tt'}{\varrho^2}dx,$$

et par suite l'équation (36) donnera

$$(38)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}}=\pm a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

c'est-à-dire l'équation proposée.

Pour déterminer le coefficient a faisons dans (37) x infini, on obtiendra, d'après les valeurs des fonctions ϱ, t, t';

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{(-e^2c^2)^{2n}.\lambda^4\alpha_1\ldots\lambda^4\alpha_n.\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right).\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_1\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_n\right)};$$

mais d'après la formule (18) on a $\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right).\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{e^2c^2}$, donc

$$(39)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{\lambda^4\alpha_1.\lambda^4\alpha_2\ldots\lambda^4\alpha_n}\cdot\frac{1}{(e^2c^2)^n};$$

or, en différentiant l'équation

$$(40)\qquad y=\frac{1}{k}\varphi\theta=\frac{1}{k}\left(x+2x\Sigma\frac{\varDelta(\alpha)}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}\right)$$

et en faisant ensuite $x = \frac{1}{0}$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{k}$. En égalant cette valeur à la précédente on en tire

$$(41) \qquad a = (e^2c^2)^n \frac{1}{k} \lambda^4\alpha_1 . \lambda^4\alpha_2 \ldots \lambda^4\alpha_n .$$

On pourra donner à l'expression de y une autre forme plus simple à quelques égards. En multipliant les deux membres de l'équation (28) par $\varphi\delta$ et faisant ensuite $\delta = 0$, il viendra

$$\varphi\theta = \frac{Ax}{\varrho}\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_n}\right),$$

où A est une quantité constante. En attribuant à x la valeur $\frac{1}{0}$, après avoir divisé par x, on trouvera

$$(42) \qquad A = (e^2c^2)^n . \lambda^4\alpha_1 . \lambda^4\alpha_2 \ldots \lambda^4\alpha_n = ak.$$

L'expression de y deviendra donc

$$(43) \qquad y = a\frac{x\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_n}\right)}{(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_1 x^2)(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_2 x^2)\ldots(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_n x^2)}.$$

Il y a encore une autre manière d'exprimer y qui est très simple. En faisant dans (28) $x = \frac{1}{0}$, après avoir divisé les deux membres par x, on trouvera

$$(44) \quad \varphi\delta = (e^2c^2)^n \lambda^2\alpha_1 . \lambda^2\alpha_2 \ldots \lambda^2\alpha_n . \lambda\delta . \lambda(\alpha_1 + \delta)\lambda(\alpha_1 - \delta) \ldots \lambda(\alpha_n + \delta)\lambda(\alpha_n - \delta)$$
$$= \lambda\delta + \lambda(\delta + \alpha_1) + \lambda(\delta - \alpha_1) + \cdots + \lambda(\delta + \alpha_n) + \lambda(\delta - \alpha_n),$$

formule qui a lieu pour une valeur quelconque de δ.

En mettant donc θ au lieu de δ et multipliant par $\frac{1}{k}$, on aura y exprimé comme il suit:

$$(45) \quad y = \frac{1}{k}(ec)^{2n} b . \lambda\theta . \lambda(\alpha_1 + \theta) . \lambda(\alpha_1 - \theta) \ldots \lambda(\alpha_n + \theta) . \lambda(\alpha_n - \theta),$$

où l'on a fait pour abréger

$$(46) \qquad b = \lambda^2\alpha_1 . \lambda^2\alpha_2 . \lambda^2\alpha_3 \ldots \lambda^2\alpha_n .$$

En faisant $\theta = +\frac{\omega}{2}$, $\theta = +\frac{\omega'}{2}$, les valeurs correspondantes de y seront $\frac{1}{c_1}$ et $\frac{1}{e_1}$, donc:

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{1}{c_1} = (-1)^n \frac{b}{k} e^{2n} . c^{2n-1} . \left[\lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right) . \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_2\right) \ldots \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_n\right)\right]^2 \\ \frac{1}{e_1} = (-1)^n \frac{b}{k} e^{2n-1} . c^{2n} . \left[\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - \alpha_1\right) . \lambda\left(\frac{\omega'}{2} - \alpha_2\right) \ldots \lambda\left(\frac{\omega'}{2} - \alpha_n\right)\right]^2 . \end{cases}$$

Si donc les quantités c_1, e_1, a, y ont les valeurs exprimées par les équations (41), (43), (45), (47), l'équation (1) sera satisfaite en déterminant convenablement le signe du second membre. Il faut remarquer que ce signe n'est pas le même pour toutes les valeurs de x; mais il sera toujours le même pour des valeurs de x comprises entre certaines limites. On doit prendre le signe $+$ si x est très petit; et alors on doit conserver le même signe jusqu'à une certaine limite. Dans tous les cas le signe qu'il faut prendre se détermine par l'équation (36).

Le théorème de M. *Jacobi* est contenu comme cas particulier dans ce qui précède. En effet on l'obtiendra en faisant $\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1}$, $c = 1$, $c_1 = 1$. Alors on trouvera $\alpha_2 = \frac{4\omega}{2n+1}$, $\alpha_3 = \frac{6\omega}{2n+1}$, $\ldots$ $\alpha_n = \frac{2n\omega}{2n+1}$,

$$(48) \quad \begin{cases} k = b . e^{2n}\left[\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) . \lambda\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \cdots \lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2, \\ e_1 = e^{2n+1} . \left[\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) . \lambda\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \cdots \lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^4, \\ a = \left\{\frac{\lambda\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) . \lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) . \lambda\left(\frac{3\omega}{2n+1}\right) \cdots \lambda\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) . \lambda\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \cdots \lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2, \\ y = \frac{\lambda\theta . \lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1} + \theta\right) . \lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1} - \theta\right) \cdots \lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1} + \theta\right) . \lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1} - \theta\right)}{\left[\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) . \lambda\left(\frac{3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right) \cdots \lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2}, \\ \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - e_1^2 y^2)}} = \pm a\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - e^2x^2)}} = \pm a\,d\theta. \end{cases}$$

Il faut prendre le signe supérieur si x est compris entre les limites

$+\lambda\left(\frac{4m+1}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et $+\lambda\left(\frac{4m+3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et le signe inférieur si x est compris entre les limites $\lambda\left(\frac{4m+3}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$ et $\lambda\left(\frac{4m+5}{2n+1}\frac{\omega}{2}\right)$.

En faisant dans notre formule générale $\alpha_1 = \frac{m\omega + m'\omega'}{2n+1}$, où $m + m'$ est un nombre pair et où les trois nombres m, m', $2n+1$ ne sont pas divisibles par un même facteur, on aura une formule plus générale que celle de M. *Jacobi*, savoir celle que j'ai demontrée dans les „Recherches sur les fonctions elliptiques.“ On aura dans ce cas, en faisant $\alpha = \frac{m\omega + m'\omega'}{2n+1}$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 3\alpha$, $\ldots$ $\alpha_n = n\alpha$, ce qui suffit pour déterminer les quantités c_1, e_1, a et y.

Dans ce qui précède nous avons démontré qu'on aura une valeur convenable de la fonction y, en prenant, dans l'expression générale de cette fonction $y = \frac{f' + f.\varphi\theta}{g' + g.\varphi\theta}$, $f' = g = 0$. On peut aisément trouver toutes les autres solutions possibles à l'aide des formules (10), (11), (12). Soit

$$y_1 = \frac{f' + f.\varphi\theta}{g' + g.\varphi\theta}, \tag{49}$$

et désignons par c_2, e_2, les valeurs correspondantes de c_1 et e_1, on doit avoir

$$\frac{dy_1}{\sqrt{(1 - c_2^2 y_1^2)(1 - e_2^2 y_1^2)}} = \pm a_1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - e^2x^2)(1 - c^2x^2)}}, \tag{50}$$

mais en faisant $y = \frac{1}{k}\varphi\theta$, le second membre sera, d'après ce qui précède, égal à $\pm\frac{a_1}{a}\frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1^2y^2)(1 - e_1^2y^2)}}$, donc on doit avoir

$$\frac{dy_1}{\sqrt{(1 - c_2^2 y_1^2)(1 - e_2^2 y_1^2)}} = \pm\frac{a_1}{a}\frac{dy}{\sqrt{(1 - c_1^2y^2)(1 - e_1^2y^2)}}, \tag{51}$$

où

$$y_1 = \frac{f' + fy}{g' + gy}.$$

D'après les équations (10), (11), (12) on satisfait de la manière la plus générale à ces équations en prenant

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned}
&\text{a.}\quad y_1 = \pm\frac{a_1}{a}y, \quad c_2^2 = \frac{c_1^2a^2}{a_1^2}, \quad e_2^2 = \frac{e_1^2a^2}{a_1^2},\\
&\text{b.}\quad y_1 = \pm\frac{a_1}{ae_1c_1}\frac{1}{y}, \quad c_2^2 = \frac{c_1^2a^2}{a_1^2}, \quad e_2^2 = \frac{e_1^2a^2}{a_1^2},\\
&\text{c.}\quad y_1 = m\frac{1 - y\sqrt{\pm e_1c_1}}{1 + y\sqrt{\pm e_1c_1}}, \quad c_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{\pm e_1}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{\pm e_1}}\right)^2,\\
&\qquad \frac{a_1}{a} = \frac{m\sqrt{-1}}{2}(c_1 \mp e_1), \quad e_2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{\pm e_1}}{\sqrt{c_1} - \sqrt{\pm e_1}}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

Ces trois formules, en y faisant $y = \frac{1}{k}\varphi\theta$, contiendront donc toutes les manières possibles de satisfaire à l'équation (50).

On peut sans nuire à la généralité faire $k = 1$. La première de ces formules est la même que celle qui résulte de $y = \frac{1}{k}\varphi\theta$. La seconde en résulte en mettant $\frac{1}{e_1c_1}\frac{1}{y}$ au lieu de y. Les modules restent par cette substitution les mêmes. La troisième est en général différente des deux premières.

Deuxième cas. Si k est égal à zéro, et l'une des quantités k', k'' égale à l'unité.

Si, k étant égal à zéro, l'une des quantités k', k'' est égale à l'unité, il faut nécessairement que l'autre soit égale à zéro. En effet si l'on avait $k' = k'' = 1$, les racines $\lambda\left(\theta + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)$, $\lambda\left(\theta + \frac{3\omega + \omega'}{2}\right)$ donneraient celle-ci $\lambda\left(\theta + \frac{3\omega + \omega'}{2} - \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \lambda(\theta + \omega)$, donc k ne serait pas égal à zéro comme nous l'avons supposé. Désignons donc par β l'une des quantités $\frac{\omega + \omega'}{2}$, $\frac{3\omega + \omega'}{2}$, l'expression de $\varphi\theta$ deviendra

$$\begin{aligned}\varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \beta) + \lambda(\theta + \alpha_1) + \lambda(\theta - \alpha_1) + \cdots\\ + \lambda(\theta + \alpha_n) + \lambda(\theta - \alpha_n),\end{aligned} \tag{53}$$

ou, en l'exprimant en fonction de x,

$$\varphi\theta = x \pm \frac{1}{ec}\frac{1}{x} + 2x\Sigma\frac{\Delta(\alpha)}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}. \tag{54}$$

Soit comme dans le premier cas $1 - c_1y = 0$ pour $x = \frac{1}{c}$, on aura

$$1 \pm c_1 y = \frac{g' \pm c_1 f'}{r}\left(1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right),$$

$$1 - c_1^2 y^2 = \frac{g'^2 - c_1^2 f'^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2\right]. \tag{55}$$

Maintenant, de la même manière qu'on a démontré précédemment la formule (28), on établira la suivante:

$$1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\delta} = -\frac{1}{\varphi\delta.\varrho}\cdot\left(1 - \frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta+\beta)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1 - \frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right), \tag{56}$$

où l'on a fait pour abréger:

$$\varrho = \pm ecx(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_1 . x^2)(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_2 . x^2)\ldots(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_n . x^2). \tag{57}$$

En faisant $\delta = \pm\frac{\omega}{2}$, on aura les valeurs de $1 + \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ et $1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}$, qui multipliées entre elles donneront celle de $1 - \left(\frac{\varphi\theta}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2$. Cette valeur substituée dans l'expression de $1 - c_1^2 y^2$ (55) donnera

$$1 - c_1^2 y^2 = \frac{c_1^2 f'^2 - g'^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot r^2\varrho^2}(1 - c^2x^2)(1 - e^2x^2)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right)}\right)^2\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_n\right)}\right)^2,$$

et par conséquent, si l'on fait

$$t = \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right)}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_2\right)}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_n\right)}\right), \tag{58}$$

on aura

$$\sqrt{1 - c_1^2 y^2} = \frac{\sqrt{c_1^2 f'^2 - g'^2}}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot r\varrho}\, t\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 - e^2x^2)}. \tag{59}$$

Cette valeur, mise dans l'équation (29), donne

$$\sqrt{1 - e_1^2 y^2} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{a\sqrt{c_1^2 f'^2 - g'^2}}\,\frac{r\varrho}{t}\,\frac{dy}{dx}. \tag{60}$$

On voit donc que $\sqrt{1 - e_1^2 y^2}$ doit être une fonction rationnelle de x.

Il n'est pas difficile de démontrer qu'on satisfera à cette condition, en supposant que $1 - e_1^2 y^2$ s'évanouit pour $x = \pm\lambda\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$; on aura alors

$$\sqrt{1 - e_1^2 y^2} = \frac{\sqrt{e_1^2 f'^2 - g'^2}}{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\cdot r\varrho}\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2} - \alpha_1\right)}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2} - \alpha_n\right)}\right). \tag{61}$$

Les équations (24) donneront dans ce cas

$$g' = c_1 f\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 f\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right),$$

$$f' = \frac{g}{c_1}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{g}{e_1}\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right),$$

auxquelles on satisfera en prenant

$$f = g' = 0,$$

$$\frac{f'}{g} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{c_1} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}{e_1}.$$

De là il résulte:

$$c_1 = k.\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right);\quad e_1 = k.\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) \tag{62}$$

$$y = \frac{1}{k\varphi\theta}, \qquad a = \pm\frac{ec}{k}.$$

Connaissant ainsi une solution de l'équation proposée, on aura toutes les autres à l'aide des formules (10), (11), (12). Le cas le plus simple est celui où $n = 0$. Alors on aura, en faisant $c_1 = c = 1$, $\beta = \frac{3\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}$,

$$\varphi\theta = \lambda\theta + \lambda(\theta + \beta) = x + \frac{1}{ex},$$

$$\left\{\begin{aligned} & y = (1+e)\frac{x}{1+ex^2}, \quad e_1 = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}, \\ & \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}} = (1+e)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Troisième cas. Si $k=1$.

Dans ce cas l'expression (15) de $\varphi\theta$ deviendra,

$$\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\omega)+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\cdots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n).$$

Or cette quantité se réduit à zéro pour une valeur quelconque de θ, ce dont on pourra se convaincre aisément, en remarquant que $\varphi\theta$ doit rester le même en changeant θ en $\theta+\omega$.

La fonction $\varphi\theta$ étant égale à zéro, si l'on désigne par $\frac{1}{2}(f'-g'y)$ le coefficient de x^{m-2} dans le premier membre de l'équation (9), on aura, en faisant pour abréger

$$F\theta=\lambda^2\theta+\lambda^2(\theta+\alpha)+\cdots+\lambda^2(\theta+\alpha_{m-1}):$$

$$f'-g'y=-(f-gy)F\theta,$$

d'où l'on tire,

(64) $$y=\frac{f'+f.F\theta}{g'+g.F\theta}.$$

Maintenant il n'est pas difficile de trouver toutes les solutions relatives à ce troisième cas en se servant de l'expression (64). Je ne m'arrêterai pas ici à développer les formules mêmes; je vais seulement faire connaître un théorème plus général que celui exprimé par les formules (48).

Théorème. On aura

(65) $$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}}=\pm\dfrac{a\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}=\pm a\,d\theta, \\
\text{où} \\
a=k.\lambda\dfrac{\omega}{n}\cdot\lambda\dfrac{2\omega}{n}\cdots\lambda\dfrac{(n-1)\omega}{n},\quad e_1=e^n\left(\lambda\dfrac{\omega}{2n}\cdot\lambda\dfrac{3\omega}{2n}\cdots\lambda(n-\tfrac{1}{2})\dfrac{\omega}{n}\right)^2, \\
1=k.\lambda\dfrac{\omega}{2n}\cdot\lambda\dfrac{3\omega}{2n}\cdots\lambda(n-\tfrac{1}{2})\dfrac{\omega}{n}, \\
y=k.\lambda\theta.\lambda\left(\theta+\dfrac{\omega}{n}\right)\lambda\left(\theta+\dfrac{2\omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(\theta+\dfrac{(n-1)\omega}{n}\right), \\
n \text{ étant un nombre entier quelconque, } \dfrac{\omega}{2}=\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}.
\end{array}\right.$$

En supposant n impair, la formule (65) est la même que celle que nous avons trouvée (48).

Si l'on fait $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$, on obtiendra

(66) $$\frac{d\psi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\psi}}=a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

où l'on pourra exprimer la quantité ψ comme il suit:

(67) $$\begin{aligned}\psi=\varphi&+\operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)}\right\} \\
&+\operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{2\omega}{n}\right)}\right\} \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)}\right\}.\end{aligned}$$

En supposant $n=2$ on aura

$$\psi=\varphi+\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2}),$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(\psi-\varphi)=\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2}.$$

(Voyez *Legendre* Exercices t. I, p. 84).

Si l'on suppose n très grand, on aura à peu près $e_1=0$, donc

$$\psi=a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\sum_0^{n-1}{}_m\operatorname{arc\,tang}\left\{\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2\left(\frac{m\omega}{n}\right)}\right\}.$$

Soit $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on aura $\psi=n\frac{\pi}{2}$, donc $n\frac{\pi}{2}=a\frac{\omega}{2}$, donc $\frac{1}{a}=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{n}$. De là il résulte, en faisant n infini,

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega}\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\varphi.\sqrt{1-e^2\lambda^2x})\,dx.$$

Nous avons vu précédemment que le nombre des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_\nu\alpha_\nu)$ est toujours fini. On peut dans tous les cas trouver ces valeurs comme il suit.

Soient

(68) $$\left\{\begin{array}{l}
\lambda(\theta+n_1\alpha_1)=\lambda\theta, \\
\lambda(\theta+n_2\alpha_2)=\lambda(\theta+m_1\alpha_1), \\
\lambda(\theta+n_3\alpha_3)=\lambda(\theta+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda(\theta+n_\nu\alpha_\nu)=\lambda(\theta+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_{\nu-1}\alpha_{\nu-1}),
\end{array}\right.$$

où $n_1, n_2, n_3, \ldots n_\nu$ sont les nombres entiers les plus petits possibles qui puissent satisfaire à des équations de cette forme, $m_1, m_2, \ldots m_{\nu-1}$ étant des nombres entiers, qui pourront être différens dans les différentes équations. Cela posé, je dis qu'on aura toutes les valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu)$. en attribuant à $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ toutes les valeurs entières et positives respectivement moindres que $n_1, n_2, \ldots n_\nu$. En effet, si l'on avait

$$\lambda(\theta + k_1'\alpha_1 + k_2'\alpha_2 + \cdots + k_\nu'\alpha_\nu) = \lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu),$$

sans avoir à la fois

$$k_1' = k_1,\ \ k_2' = k_2, \ldots k_\nu' = k_\nu,$$

en mettant $\theta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \cdots - k_{m-1}\alpha_{m-1} - k_m'\alpha_m - k_{m+1}\alpha_{m+1} - \cdots - k_\nu\alpha_\nu$ au lieu de θ, on en tirera

$$\lambda[\theta + (k_m - k_m')\alpha_m] = \lambda[\theta + (k_1' - k_1)\alpha_1 + \cdots + (k'_{m-1} - k_{m-1})\alpha_{m-1}],$$

où l'on a supposé que $k_m - k_m'$ est la première des quantités $k_\nu - k_\nu'$, $k_{\nu-1} - k'_{\nu-1}, \ldots$ qui soit différente de zéro. Or en supposant, ce qui est permis, que $k_m - k_m'$ soit positif, ce nombre sera en même temps moindre que n_m, ce qui est contre l'hypothèse. Le nombre total des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_\nu\alpha_\nu)$ sera donc égal à

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_\nu,$$

car il est clair qu'on n'aura pas de valeurs nouvelles, en attribuant à k_1, $k_2, \ldots k_\nu$ des valeurs respectivement plus grandes que $n_1, n_2, \ldots n_\nu$.

Le degré de l'équation $p - qy = 0$ est donc

$$m = n_1 n_2 n_3 \ldots n_\nu.$$

Si donc ce degré doit être un nombre premier, on doit avoir $\nu = 1$ et $m = n_1$. Les racines de l'équation $p - qy = 0$ deviendront donc dans ce cas

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta + \alpha),\ \lambda(\theta + 2\alpha), \ldots \lambda[\theta + (n-1)\alpha],$$

$$\lambda(\theta + n\alpha) = \lambda\theta, \ \text{ et } \ \alpha = \frac{m\omega + m'\omega'}{n},$$

m et m' étant deux nombres entiers dont la somme est un nombre pair et qui n'ont pas un même diviseur commun avec n.

On doit remarquer qu'à la même valeur de m répondent toujours plusieurs solutions différentes du problème général. Le nombre total de ces solutions est en général égal à $3m$.

On peut de ce qui précède déduire un grand nombre de théorèmes remarquables sur les fonctions elliptiques. Parmi ceux-ci on doit distinguer les suivans.

a. Si l'èquation (1) peut être satisfaite en supposant $y = \psi(x) = \frac{p}{q}$ où le degré des fonctions entières p et q est égal à un nombre composé mn, on pourra toujours trouver des fonctions rationnelles φ et f telles qu'en faisant

$$(69)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi x = \dfrac{p'}{q'}, \ \text{ on ait } \ y = f(x_1) = \dfrac{p_1}{q_1}, \\[2ex] \dfrac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2x_1^2)(1-e_2^2x_1^2)}} = a_1 \dfrac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}, \\[2ex] \dfrac{dy_1}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}} = a_2 \dfrac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2x_1^2)(1-e_2^2x_1^2)}}, \end{cases}$$

le degré des fonctions entières p' et q' étant égal à l'un des facteurs m, n, et le degré de p_1 et q_1 étant égal à l'autre.

b. Quel que soit le degré de l'équation $p - qy = 0$, on en pourra toujours tirer la valeur de x en y à l'aide d'opérations algébriques. Voilà donc une classe d'équations qui sont résolubles algébriquement. Les racines auront la forme suivante:

$$(70)\qquad x = \text{fonct. ration.}\left(y,\ r_1^{\frac{1}{n_1}},\ r_2^{\frac{1}{n_2}},\ r_3^{\frac{1}{n_3}} \ldots r_\nu^{\frac{1}{n_\nu}}\right),$$

$n_1, n_2, \ldots n_\nu$ étant des nombres premiers entre eux dont le produit est égal au degré de l'équation en question, et les $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ étant de la forme

$$(71)\qquad \zeta + t\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)},$$

où ζ et t sont des fonctions entières de y.

c. Il y a un cas remarquable du problème général; c'est celui où l'on demande toutes les solutions possibles de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

On aura à cet égard le théorème suivant:

Si l'équation précédente admet une solution *algébrique* en x et y, y étant rationnel en x ou non, la quantité constante a doit nécessairement avoir la forme

$$\mu' + \sqrt{-\mu},$$

où μ' et μ désignent deux nombres rationnels, le dernier étant essentiellement *positif*. Si l'on attribue à a une telle valeur on pourra trouver une infinité de valeurs différentes pour e et c, qui rendent le problème possible. Toutes ces valeurs sont exprimables par des *radicaux*.

Si donc on suppose que a soit une quantité réelle il faut qu'elle soit en même temps rationnelle. Dans ce cas on sait d'ailleurs qu'on pourra satisfaire à l'équation différentielle dont il s'agit, quelles que soient les valeurs des quantités c et e.

d. Du théorème précédent, on peut par un simple changement de variables déduire celui-ci:

Si l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-b^2y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

où $b^2 = 1 - c^2$, admet une solution algébrique entre x et y, le coefficient a doit avoir la forme suivante:

$$\sqrt{\mu} + \mu'\sqrt{-1}$$

μ' et μ ayant la même signification que précédemment. Si donc on veut que a soit réel il faut qu'il soit égal à la racine carrée d'une quantité rationnelle. Cette condition remplie, le problème a une infinité de solutions. Comme cas particulier on en déduit ce théorème:

Si en supposant φ et ψ réels et le module c moindre que l'unité, l'équation

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}} = a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}, \tag{72}$$

a une intégrale algébrique en $\sin\varphi$ et $\sin\psi$, il faut nécessairement que a soit égal à la racine carrée d'une quantité rationnelle et positive.

Ainsi par exemple, si dans la formule (65) on suppose $e_1^2 = 1 - e^2$, on aura $a = \sqrt{n}$ comme nous allons voir. En faisant $\theta = \frac{\omega}{2n}$ dans l'ex-

pression de y, on trouvera, en vertu de la valeur de k, $y = 1$, donc

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}} = a\int_0^{\lambda\left(\frac{\omega}{2n}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} = \frac{a\omega}{2n}, \tag{73}$$

en remarquant qu'on doit, dans le second membre de l'équation (65), prendre le signe supérieur depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \lambda\left(\frac{\omega}{2n}\right)$. Cela posé, en remarquant que $\lambda\left(\theta + \frac{m\omega}{n}\right) = \lambda\left(\frac{(n-m)\omega}{n} - \theta\right)$, il est clair qu'on aura

$$y = k\,.\,\lambda\theta\,.\,\lambda\left(\frac{\omega}{n} - \theta\right).\lambda\left(\frac{2\omega}{n} - \theta\right)\dots\lambda\left(\frac{(n-1)\omega}{n} - \theta\right);$$

en multipliant cette valeur par celle que donne la formule (65), on aura, en faisant usage de la formule

$$\lambda(\alpha+\theta)\,.\,\lambda(\alpha-\theta) = \frac{\lambda^2\alpha - \lambda^2\theta}{1 - e^2\lambda^2\alpha\,.\,\lambda^2\theta} = \frac{\lambda^2\alpha - x^2}{1 - e^2\lambda^2\alpha\,.\,x^2},$$

qu'on obtiendra à l'aide du théorème 1:

$$y^2 = k^2x^2\frac{\lambda^2\frac{\omega}{n} - x^2}{1 - e^2\lambda^2\frac{\omega}{n}\cdot x^2}\cdots\frac{\lambda^2\frac{(n-1)\omega}{n} - x^2}{1 - e^2\lambda^2\frac{(n-1)\omega}{n}\cdot x^2}.$$

En faisant maintenant $x = p\sqrt{-1}$, $y = z\sqrt{-1}$, on aura, en supposant p réel, pour toutes les valeurs de cette quantité,

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+e_1^2z^2)}} = a\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)(1+e^2p^2)}},$$

mais si l'on fait $p = \frac{1}{0}$, on aura de même $z = \frac{1}{0}$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+e_1^2z^2)}} = a\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)(1+e^2p^2)}}.$$

Le premier membre de cette équation est la même chose que $\frac{\omega}{2}$, et le second la même chose que $a\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2y^2)}}$, ce qui est facile à prouver, donc

$$\frac{\omega}{2} = a\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-e_1^2 y^2)}}.$$

Cette équation combinée avec (73) donne

$$\frac{\omega}{2} = a\frac{a\omega}{2n},$$

c'est-à-dire

$$a = \sqrt{n}.$$

Christiania le 27 mai 1828.

XX.

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von *Schumacher*, Bd. 7, nº 147. Altona 1829.

Dans le numéro 138 de ce journal j'ai fait voir comment on pourra trouver toutes les transformations possibles, réelles ou imaginaires, d'une fonction elliptique proposée. Les modules c, e, c_1, e_1 pourront être des quantités quelconques. Le cas le plus remarquable est celui où l'on suppose les modules réels. Dans ce cas le problème général pourra se résoudre par une méthode particulière, entièrement différente de celle que nous avons donnée dans le mémoire cité. Puisque cette nouvelle méthode est remarquable par sa grande simplicité je vais l'indiquer ici en peu de mots.

Le problème général que nous allons complètement résoudre est le suivant:

„Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation „différentielle:

$$(1)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

„par une *équation algébrique* entre les variables x et y, en supposant „les modules c et c_1 moindres que l'unité et le coefficient a réel ou „imaginaire."

En désignant par $\lambda\theta$ la fonction inverse de celle-ci:

$$\theta = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

de sorte que $x = \lambda\theta$, on aura, en vertu de la formule (4) du numéro 138,

$$\lambda[(-1)^{m+m'}\theta + m\omega + m'\omega'] = \lambda\theta,$$

où les quantités constantes ω, ω' sont déterminées par les formules

$$(2) \qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Dans le cas que nous considérons, la quantité ω est réelle, mais ω' est imaginaire. On aura en effet

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} + \int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\omega'}{2} = \frac{\omega}{2} + \sqrt{-1}\,.\int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}},$$

où il est clair que le coefficient de $\sqrt{-1}$ est une quantité réelle. En faisant $x = \frac{1}{\sqrt{1-b^2y^2}}$, où $b = \sqrt{1-c^2}$, on trouve

$$\frac{\omega'}{2} = \frac{\omega}{2} + \sqrt{-1}\cdot\frac{\varpi}{2},$$

où

$$(3) \qquad \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}}.$$

Le théorème II du numéro 138 donnera donc celui-ci:

„On satisfera de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta' = \lambda\theta$$

„en prenant

$$(4) \qquad \theta' = (-1)^m\theta + m\omega + m'\varpi\sqrt{-1},$$

„où m et m' sont des nombres entiers quelconques, et ω et ϖ deux „quantités réelles données par les formules (2) et (3)."

Cela posé, soit

$$(5) \qquad f(y, x) = 0$$

l'équation algébrique entre y et x qui doit satisfaire à l'équation différentielle

(1). Si l'on fait $x = \lambda\theta$ et $y = \lambda_1\theta'$, où θ et θ' sont deux nouvelles variables, et λ_1 la fonction elliptique qui répond au module c_1, de sorte que

$$(6) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = d\theta' \text{ pour } y = \lambda_1\theta',$$

l'équation (1) deviendra

$$d\theta' = \pm a\,d\theta,$$

d'où l'on tire en intégrant: $\theta' = \varepsilon \pm a\theta$, où ε est une constante. On a donc

$$y = \lambda_1(\varepsilon \pm a\theta),$$

ou bien, en mettant $+a$ pour $\pm a$,

$$(7) \qquad y = \lambda_1(\varepsilon + a\theta).$$

L'équation (5) entre x et y donnera donc celle-ci

$$(8) \qquad f[\lambda_1(\varepsilon + a\theta),\ \lambda\theta] = 0$$

qui ne contient que la seule variable θ, et qui aura lieu quelle que soit la valeur de cette quantité.

Il ne serait pas difficile à l'aide de la formule (8) de trouver la fonction $f(y, x)$; mais pour notre objet il suffit de connaître le coefficient a et une certaine relation entre les fonctions complètes. Voici comment on y parviendra. En mettant $\theta + 2m\omega$ au lieu de θ, et en remarquant qu'en vertu de l'équation (4)

$$\lambda(\theta + 2m\omega) = \lambda\theta,$$

on obtiendra cette autre équation

$$(9) \qquad f[\lambda_1(\varepsilon + 2ma\omega + a\theta),\ \lambda\theta] = 0.$$

On aura de même, en mettant $\theta + m\varpi i$ pour θ, où $i = \sqrt{-1}$,

$$(10) \qquad f[\lambda_1(\varepsilon + ma\varpi i + a\theta),\ \lambda\theta] = 0.$$

Dans ces deux équations m pourra être un nombre entier quelconque. En faisant $x = \lambda\theta$ on voit donc que l'équation algébrique

$$f(y, x) = 0$$

est satisfaite en mettant pour y une quantité quelconque de l'une des deux formes:

$$\lambda_1(\varepsilon + 2ma\omega + a\theta),\ \lambda_1(\varepsilon + ma\varpi i + a\theta);$$

mais m peut avoir une infinité de valeurs, tandis que l'équation dont il s'agit n'a qu'un nombre limité de racines; il faut donc qu'on puisse trouver deux nombres entiers k et k' tels que

$$\lambda_1(\varepsilon + 2k'a\omega + a\theta) = \lambda_1(\varepsilon + 2ka\omega + a\theta), \tag{11}$$

et deux autres ν et ν' tels que

$$\lambda_1(\varepsilon + \nu' a\varpi i + a\theta) = \lambda_1(\varepsilon + \nu a\varpi i + a\theta). \tag{12}$$

En vertu de la formule (4) ces deux équations donneront respectivement

$$\left\{\begin{aligned} 2k'a\omega &= 2ka\omega + 2m\omega_1 + m'\varpi_1\sqrt{-1},\\ \nu' a\varpi i &= \nu a\varpi i + 2\mu\omega_1 + \mu'\varpi_1\sqrt{-1},\end{aligned}\right. \tag{13}$$

où ω_1 et ϖ_1 désignent les valeurs de ω et ϖ qui répondent au module c_1, c'est-à-dire qu'on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\omega_1}{2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c_1^2x^2)}}\\ \frac{\varpi_1}{2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b_1^2x^2)}}, \quad \text{où } b_1 = \sqrt{1-c_1^2}.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Cela posé, les équations (13) donneront, en y mettant ν pour $k'-k$ et ν' pour $\nu'-\nu$,

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{m}{\nu}\frac{\omega_1}{\omega} + \frac{m'}{2\nu}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1},\\ a &= \frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\varpi} - \frac{2\mu}{\nu'}\frac{\omega_1}{\varpi}\sqrt{-1},\end{aligned}\right. \tag{15}$$

d'où, en comparant les parties réelles et imaginaires,

$$\frac{m}{\nu}\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\varpi}; \quad \frac{m'}{2\nu}\frac{\varpi_1}{\omega} = -\frac{2\mu}{\nu'}\frac{\omega_1}{\varpi}. \tag{16}$$

Ces deux équations donneront celles-ci:

$$\frac{\omega^2}{\varpi^2} = -\frac{1}{4}\frac{mm'}{\mu\mu'}\frac{\nu'^2}{\nu^2}, \quad \frac{\omega_1^2}{\varpi_1^2} = -\frac{1}{4}\frac{m'\mu'}{m\mu}. \tag{17}$$

Maintenant $\frac{\omega^2}{\varpi^2}$ est une fonction continue de c, donc les équations (17) ne sauraient avoir lieu que pour des valeurs particulières des modules c et c_1. Si donc on suppose c indéterminé il faut que l'une des équations

$$m' = \mu = 0, \tag{18}$$

$$m = \mu' = 0 \tag{19}$$

ait lieu. Les équations (15) et (16) se réduiront dans le premier cas à

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{m}{\nu}\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\varpi},\\ \frac{\omega_1}{\varpi_1} &= \frac{\nu\mu'}{\nu' m}\frac{\omega}{\varpi},\end{aligned}\right. \tag{20}$$

et dans le second cas à

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{m'}{2\nu}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1} = -\frac{2\mu}{\nu'}\frac{\omega_1}{\varpi}\sqrt{-1}\\ \frac{\omega_1}{\varpi_1} &= -\frac{1}{4}\frac{m'\nu'}{\mu\nu}\frac{\varpi}{\omega}.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Mais si la valeur du module c est telle que la première des équations (17) ait lieu, on doit avoir en même temps

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu}\sqrt{-\frac{mm'}{\mu\mu'}}, \quad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m'\mu'}{m\mu}}, \tag{22}$$

et alors a est donné par l'une des équations (15).

Quant aux nombres m, m', μ, μ', ν, ν' il faut les prendre tels que ω, ω_1, ϖ, ϖ_1 soient, selon leur nature, des quantités positives. Si donc on suppose, ce qui est permis, ν et ν' positifs, il faut que m et μ' soient de même signe et m' et μ de signe contraire. On pourra d'ailleurs sans diminuer la généralité supposer m', m et μ' positifs et μ négatif.

De ce qu'on vient de voir on déduit immédiatement ce théorème:

Théorème I. Pour que l'équation (1) ait une intégrale algébrique en x et y, il faut nécessairement que les modules c_1 et c soient liés entre eux de telle sorte que l'une des deux quantités $\frac{\omega_1}{\varpi_1}$ et $\frac{\varpi_1}{\omega_1}$ soit dans un rapport *rationnel* avec $\frac{\omega}{\varpi}$; c'est-à-dire qu'on doit avoir l'une des équations

$$\frac{\omega_1}{\varpi_1} = k\frac{\omega}{\varpi}; \quad \frac{\varpi_1}{\omega_1} = k'\frac{\omega}{\varpi} \tag{23}$$

où k et k' sont des nombres rationnels. Si la première de ces équations a lieu, mais non la seconde, on aura en même temps

$$a = \delta\frac{\omega_1}{\omega}, \tag{24}$$

où δ est un nombre rationnel. Si la seconde équation a lieu mais non la première, on aura en même temps

$$a = \delta \frac{\varpi_1}{\omega} \sqrt{-1}. \tag{25}$$

Enfin si les deux équations (23) ont lieu en même temps, les modules c et c_1 seront tous deux déterminés, savoir respectivement par les équations

$$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{kk'}, \quad \frac{\varpi_1}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k'}{k}}, \tag{26}$$

et alors le coefficient a doit avoir la forme

$$a = \delta \frac{\omega_1}{\omega} + \delta' \frac{\varpi_1}{\omega} \sqrt{-1}, \tag{27}$$

où δ et δ' sont des nombres rationnels.

Les conditions indiquées dans ce théorème doivent donc nécessairement être remplies pour que l'équation (1) ait une intégrale algébrique. Il reste encore le point le plus important, savoir de déterminer si ces conditions sont suffisantes. Or c'est ce que nous allons faire voir à l'aide de la formule (65) du numéro 138. Cette formule peut facilement être démontrée en faisant effectivement la substitution de y; mais il existe une autre démonstration, tirée de considérations entièrement différentes et que nous allons donner ici, en nous servant d'une formule démontrée dans les „*Recherches sur les fonctions elliptiques.*“ Il s'agit de la formule (185) de ce mémoire (*Crelle's* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 2, p. 176), savoir

$$f\alpha = \prod_0^\infty{}_m \frac{1-\left(\dfrac{\varrho-\varrho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}}-r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\varrho-\varrho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}}+r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}, \tag{28}$$

où

$$\varrho = e^{\frac{\alpha\pi}{\varpi'}}, \quad r = e^{\frac{\omega'\pi}{\varpi'}}, \tag{29}$$

les quantités ω' et ϖ' étant données par les équations

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}, \tag{30}$$

$$\frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1+x^2)}}.$$

On a de plus

$$f\alpha = \sqrt{1-x^2} \tag{31}$$

où x est lié à α par l'équation

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+e^2x^2)}}. \tag{32}$$

Si l'on fait $e = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{c}{b}$, $x = \sqrt{1-y^2}$, on trouvera

$$\frac{\omega'}{2} = b\frac{\omega}{2}; \quad \frac{\varpi'}{2} = b\frac{\varpi}{2}; \quad \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi},$$

$$d\alpha = -b\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}},$$

d'où

$$y = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b}\right);$$

maintenant l'équation $x = \sqrt{1-y^2}$ donne $y = \sqrt{1-x^2} = f\alpha$, donc

$$f\alpha = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b}\right),$$

d'où, en mettant $b\frac{\omega}{2} - b\alpha$ à la place de α,

$$\lambda\alpha = f\left(b\frac{\omega}{2} - b\alpha\right). \tag{33}$$

Cela posé, si l'on pose dans la formule (28) $b\frac{\omega}{2} - b\alpha$ au lieu de α, on trouvera, après quelques réductions faciles,

$$\lambda\alpha = A\frac{(1-t^2)(1-t^2r^2)(1-t^{-2}r^2)(1-t^2r^4)(1-t^{-2}r^4)\ldots}{(1+t^2)(1+t^2r^2)(1+t^{-2}r^2)(1+t^2r^4)(1+t^{-2}r^4)\ldots}, \tag{34}$$

où

$$t = e^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}, \quad r = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi} \tag{35}$$

et A une quantité indépendante de α. Si l'on fait pour abréger

$$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \psi(x), \tag{35'}$$

on aura donc

$$\lambda\alpha = A\,.\,\psi\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}\right)\cdot\psi(\omega+\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(\omega-\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(2\omega+\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(2\omega-\alpha)\frac{\pi}{\varpi}\cdots \tag{36}$$

Si l'on fait maintenant successivement

$$\alpha = \theta,\ \theta + \frac{\omega}{n},\ \theta + \frac{2\omega}{n},\ \cdots \theta + \frac{n-1}{n}\omega,$$

on aura les valeurs de $\lambda\theta$, $\lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \cdots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$, qui multipliées ensemble donneront sur le champ

$$(37) \quad \lambda\theta \, . \, \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \cdot \lambda\left(\theta + \frac{2\omega}{n}\right) \cdots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right)$$
$$= A^n \, . \, \psi\delta\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 + \delta)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 - \delta)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(2\omega_1 + \delta)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdots,$$

où l'on a fait pour abréger

$$(38) \qquad \delta = \frac{\varpi_1}{\varpi}\theta, \quad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi};$$

or si l'on pose dans la formule (36) le module c_1 au lieu de c, et si l'on désigne les valeurs correspondantes de

$$\lambda\theta,\ \omega,\ \varpi,\ A$$

respectivement par

$$\lambda_1\theta,\ \omega_1,\ \varpi_1,\ A_1$$

il viendra

$$\lambda_1\alpha = A_1 \, . \, \psi\alpha\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 + \alpha)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdot \psi(\omega_1 - \alpha)\frac{\pi}{\varpi_1} \cdots.$$

Le second membre de la formule (37) est donc la même chose que $\frac{A^n}{A_1}\lambda_1\delta = \frac{A^n}{A_1}\lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right)$, et par conséquent on aura la formule suivante:

$$(39) \quad \lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right) = \frac{A_1}{A^n} \cdot \lambda\theta \, . \, \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) . \, \lambda\left(\theta + \frac{2\omega}{n}\right) \ldots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right),$$

cette équation a donc toujours lieu si le module c_1 est tel que

$$(40) \qquad \frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi},$$

quel que soit d'ailleurs le nombre entier n.

Si l'on fait $\lambda\theta = x$, $\lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right) = y$, on aura l'équation

$$(41) \qquad \frac{\varpi\, dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\varpi_1\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \varpi_1 d\theta,$$

qui par conséquent est satisfaite par l'expression algébrique

$$(42) \qquad y = \frac{A_1}{A^n} . \lambda\theta \, . \, \lambda\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right) \ldots \lambda\left(\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right).$$

La valeur de y est toujours une fonction algébrique de x. En effet, si n est un nombre impair, on a

$$(43) \qquad y = \frac{A_1}{A^n} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2 . \lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) . x^2} \cdots \frac{\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\frac{\omega}{n}\right) \cdot x^2},$$

et si n est un nombre pair

$$(44) \quad y = \frac{A_1}{A^n} \cdot x \cdot \frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)x^2} \cdots \frac{\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}\frac{\omega}{n}\right) - x^2}{1 - c^2\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}\frac{\omega}{n}\right)x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-c^2x^2}}.$$

Considérons maintenant les trois cas de notre problème général.

Premier cas. Si a est réel.

Dans ce cas on doit avoir, comme nous l'avons vu, $\alpha = \delta\frac{\varpi_1}{\varpi} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi}$, où μ et ν sont des nombres entiers; l'équation proposée deviendra

$$(45) \qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

On doit avoir de plus $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = k\frac{\omega}{\varpi} = \frac{m}{n}\frac{\omega}{\varpi}$, m et n étant entiers. Si l'on fait $x = \lambda(\nu\varpi\theta)$ et $y = \lambda_1(\mu\varpi_1\theta)$, θ étant une nouvelle variable, l'équation (45) sera satisfaite, car les deux membres se réduiront à $\mu\varpi_1 d\theta$. Pour avoir une intégrale en x et y il faut donc éliminer θ des deux équations

$$(46) \qquad x = \lambda(\nu\varpi\theta); \quad y = \lambda_1(\mu\varpi_1\theta).$$

Nous allons voir que le résultat de l'élimination sera une équation algébrique en x et y.

Soit c' un nouveau module et désignons par

$$\lambda'\theta,\ \omega',\ \varpi',\ A'$$

les valeurs correspondantes de

$$\lambda\theta,\ \omega,\ \varpi,\ A.$$

Cela posé, si l'on suppose le module c' tel que $\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi}$, on aura en vertu de la formule (39), en mettant $\mu\nu\theta\varpi$ au lieu de θ

$$(47)\quad \lambda'(\mu\nu\varpi'\theta) = \frac{A'}{A^n}\lambda(\mu\nu\varpi\theta).\lambda\left(\mu\nu\varpi\theta + \frac{\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\mu\nu\varpi\theta + \frac{n-1}{n}\omega\right);$$

maintenant, ayant $\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{1}{n}\frac{\omega}{\varpi}$ et $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{m}{n}\frac{\omega}{\varpi}$, on en tire $\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{1}{m}\frac{\omega_1}{\varpi_1}$; donc la même formule donnera

$$(48)\quad \lambda'(\mu\nu\varpi'\theta) = \frac{A'}{A_1^m}\lambda_1(\mu\nu\varpi_1\theta).\lambda_1\left(\mu\nu\varpi_1\theta + \frac{\omega_1}{m}\right)\ldots\lambda_1\left(\mu\nu\varpi_1\theta + \frac{m-1}{m}\omega_1\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions de $\lambda'(\mu\nu\varpi'\theta)$ et faisant pour abréger

$$(49)\quad \nu\varpi\theta = \delta,\ \ \mu\varpi_1\theta = \delta_1,$$

il viendra

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{A^n}\lambda(\mu\delta).\lambda\left(\mu\delta + \frac{\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\mu\delta + \frac{n-1}{n}\omega\right) \\ = \frac{1}{A_1^m}\lambda_1(\nu\delta_1).\lambda_1\left(\nu\delta_1 + \frac{\omega_1}{m}\right)\ldots\lambda_1\left(\nu\delta_1 + \frac{m-1}{m}\omega_1\right). \end{array}\right.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction algébrique de $\lambda(\mu\delta)$ et le second une fonction algébrique de $\lambda_1(\nu\delta_1)$; mais $\lambda(\mu\delta)$ est à son tour une fonction algébrique de $\lambda\delta = x$, et $\lambda_1(\nu\delta_1)$ une fonction algébrique de $\lambda_1\delta_1 = y$. Donc enfin les deux membres de l'équation (50) sont respectivement des fonctions algébriques de x et de y. Donc cette équation exprime l'intégrale cherchée en x et y de l'équation différentielle (45). Pour en avoir l'intégrale complète il suffit d'ajouter à δ ou à δ_1 une quantité constante arbitraire. Quant aux quantités A et A_1 on doit remarquer qu'on a

$$(51)\quad A = \frac{1}{\sqrt{c}},\ \ A_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}.$$

Pour donner un exemple, supposons qu'on démande une intégrale algébrique de l'équation,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{2}{3}\frac{\omega}{\varpi}$. On aura alors $\mu = \nu = 1$, $m = 2$, $n = 3$. L'équation (50) deviendra donc

$$c\sqrt{c}.\lambda\delta.\lambda\left(\delta + \frac{\omega}{3}\right).\lambda\left(\delta + \frac{2\omega}{3}\right) = c_1.\lambda_1\delta_1.\lambda_1\left(\delta_1 + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

c'est-à-dire:

$$y\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-c_1^2y^2}} = \frac{c\sqrt{c}}{c_1}x\frac{\lambda^2\frac{\omega}{3} - x^2}{1 - c^2\lambda^2\frac{\omega}{3}.x^2}.$$

Second cas. Si $a\sqrt{-1}$ est réel.

Dans ce cas on doit avoir, d'après l'équation (25), $a = \frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}$, μ et ν étant entiers. On doit avoir de même $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{m}{n}\frac{\varpi}{\omega}$. L'équation proposée (1) deviendra

$$(52)\quad \frac{\nu}{\mu}\frac{\omega}{\varpi_1}\sqrt{-1}.\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Pour réduire ce cas au précédent, il suffit de faire $x = \frac{z\sqrt{-1}}{\sqrt{1-z^2}}$, z étant une nouvelle variable; on aura alors $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \sqrt{-1}.\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-b^2z^2)}}$, b étant égal à $\sqrt{1-c^2}$, et par suite l'équation (52) deviendra

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\omega}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-b^2z^2)}},$$

dont l'intégrale algébrique est exprimé par la formule (50) en y faisant $z = \lambda\delta = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ et mettant ϖ au lieu de ω.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de trouver une intégrale algébrique de l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = \frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = 2.\frac{\varpi}{\omega}$. Ayant $\mu = \nu = 1$ et $m = 2$, $n = 1$, l'équation (50) deviendra

$$\sqrt{b}.\lambda\delta = c_1.\lambda_1(\delta_1).\lambda_1\left(\delta_1 + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

ou, en remettant les valeurs de $\lambda\delta$ et $\lambda_1\delta_1$,

$$y\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-c_1^2y^2}} = \frac{\sqrt{b}}{c_1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Troisième cas. Si $\frac{\varpi}{\omega}=\sqrt{kk'}$, $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=\sqrt{\frac{k}{k'}}$.

Dans ce cas on doit avoir, en vertu du théorème I, $a=\frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi}+\frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}$, μ, ν, μ', ν' étant des nombres entiers. L'équation proposée deviendra donc

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=\left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi}+\frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}, \tag{53}$$

et cette équation sera toujours intégrable algébriquement. En effet comme on a

$$\frac{\omega_1}{\varpi_1}=k\frac{\omega}{\varpi} \text{ et } \frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{1}{k'}\frac{\varpi}{\omega},$$

k' et k étant des nombres rationnels, on pourra, en vertu de ce que nous venons de voir dans les deux premiers cas, satisfaire algébriquement aux équations

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-c_1^2z^2)}}=\frac{\mu}{\nu}\frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-c_1^2v^2)}}=\frac{\mu'}{\nu'}\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}.$$

Par là l'équation (53) deviendra

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}}=\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-c_1^2z^2)}}+\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-c_1^2v^2)}};$$

on y satisfera, comme on sait, en prenant

$$y=\frac{z\sqrt{(1-v^2)(1-c_1^2v^2)}+v\sqrt{(1-z^2)(1-c_1^2z^2)}}{1-c_1^2z^2v^2}. \tag{54}$$

En substituant les valeurs de v et z en x, on aura une intégrale de l'équation, algébrique en x et y.

Nous avons ainsi démontré que les conditions nécessaires exposées dans le théorème I sont en même temps suffisantes.

D'après ce qui a été exposé dans le premier cas, on a immédiatement ce théorème:

Pour que deux fonctions elliptiques réelles $F(c',\theta')$, $F(c,\theta)$ puissent être réduites l'une à l'autre, il est nécessaire et il suffit qu'on ait entre les fonctions complètes $F^1(c)$, $F^1(b)$, $F^1(c')$, $F^1(b')$ cette relation:

$$n.F^1(c').F^1(b)=m.F^1(b').F^1(c), \tag{55}$$

où m et n sont des nombres entiers. Si cette condition est remplie, on pourra établir une relation algébrique entre $\sin\theta'$ et $\sin\theta$ telle que

$$F(c',\theta')=k\frac{F^1(b')}{F^1(b)}F(c,\theta), \tag{56}$$

où k est un nombre rationnel. On pourra ajouter que dans le cas où $k=1$, θ' est lié à θ par l'équation:

$$\left\{\begin{aligned} &\theta'+\text{arc tang}\,(a_1'\,\text{tang}\,\theta')+\cdots+\text{arc tang}\,(a'_{m-1}\,\text{tang}\,\theta') \\ &=\theta+\text{arc tang}\,(a_1\,\text{tang}\,\theta)+\cdots+\text{arc tang}\,(a_{n-1}\,\text{tang}\,\theta), \end{aligned}\right. \tag{57}$$

où $a_1, a_2 \ldots a_1', a_2' \ldots$ sont des quantités constantes données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} a_\mu&=\sqrt{1-c^2\sin^2\theta_\mu}, \\ a_\mu'&=\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta_\mu'}, \end{aligned}\right. \tag{58}$$

après avoir déterminé θ_μ et θ_μ' de telle sorte que

$$\left\{\begin{aligned} F(c,\theta_\mu)&=\frac{2\mu}{n}F^1(c)=\frac{\mu}{n}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}, \\ F(c',\theta_\mu')&=\frac{2\mu}{m}F^1(c')=\frac{\mu}{m}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta}}. \end{aligned}\right. \tag{59}$$

En prenant $n=1$ on aura la formule (67) du numéro 138.

Il y a un cas du problème général qui mérite d'être remarqué; c'est celui où l'on suppose les deux modules égaux entre eux, en d'autres termes, où l'on demande tous les cas dans lesquels il sera possible d'intégrer algébriquement l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}}=a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}. \tag{60}$$

On a dans ce cas $\omega'=\omega$, $\varpi'=\varpi$, et par conséquent les équations (15) deviendront

$$a=\frac{m}{\nu}+\frac{m'}{2\nu}\frac{\varpi}{\omega}\sqrt{-1}=\frac{\mu'}{\nu'}-\frac{2\mu}{\nu'}\frac{\omega}{\varpi}\sqrt{-1},$$

et de là

$$\frac{m}{\nu}=\frac{\mu'}{\nu'},\quad \frac{m'}{2\nu}\cdot\frac{\varpi}{\omega}=-\frac{2\mu}{\nu'}\cdot\frac{\omega}{\varpi}.$$

Si l'on veut que a soit réel, on a $a = \frac{m}{\nu}$, $m' = \mu = 0$; dans ce cas on n'aura aucune condition pour la valeur de c, qui peut être quelconque, mais on voit que a doit être un nombre rationnel. Si au contraire on admet des valeurs imaginaires de a, le module c doit être tel que $\frac{m'}{2\nu} \cdot \frac{\varpi}{\omega} = -\frac{2\mu}{\nu'} \cdot \frac{\omega}{\varpi}$; on tire de là

$$\frac{\omega}{\varpi} = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{m'\nu'}{\mu\nu}}.$$

En vertu de cette expression la valeur de a deviendra

$$a = \frac{\mu'}{\nu'} - \frac{\mu}{\nu'}\sqrt{-\frac{m'\nu'}{\mu\nu}} \cdot \sqrt{-1}.$$

Soit $\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{k}$, on aura

$$a = \delta + \delta' \sqrt{k} . \sqrt{-1},$$

k, δ, δ' pouvant désigner des nombres rationnels quelconques. On voit que pour que l'équation (60) soit intégrable algébriquement en supposant a imaginaire, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

$$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{k}, \quad a = \delta + \delta' \sqrt{k} . \sqrt{-1};$$

k est essentiellement positif.

On pourra exprimer le module c en produits infinis comme il suit:

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1 - e^{-\pi\sqrt{k}}}{1 + e^{-\pi\sqrt{k}}} \cdot \frac{1 - e^{-3\pi\sqrt{k}}}{1 + e^{-3\pi\sqrt{k}}} \cdot \frac{1 - e^{-5\pi\sqrt{k}}}{1 + e^{-5\pi\sqrt{k}}} \cdots$$

On tire cette expression de la formule (34), en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et remarquant que $\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{k}$, et $A = \frac{1}{\sqrt{c}}$. On aura en même temps le module b par cette formule

$$\sqrt[4]{b} = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}}{1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}}{1 + e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}{1 + e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}} \cdots$$

Il suit encore de ce qui précède que si le module c a la valeur ci-dessus, l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-b^2y^2)}} = k'\sqrt{k}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

sera toujours intégrable algébriquement, quels que soient les nombres rationnels k et k', pourvu que k soit positif.

Il y a encore beaucoup de choses à dire sur la transformation des fonctions elliptiques. On trouvera des développemens ultérieurs sur cette matière, ainsi que sur la théorie des fonctions elliptiques en général, dans un mémoire qui va paraître dans le Journal de M. *Crelle*.

Christiania le 25 septembre 1828.