XI.

SUR L'INTÉGRATION DE LA FORMULE DIFFÉRENTIELLE $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R ET ϱ ÉTANT DES FONCTIONS ENTIÈRES.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

1.

Si l'on différentie par rapport à x l'expression

$$z = \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}, \tag{1}$$

où p, q et R sont des fonctions entières d'une quantité variable x, on obtiendra

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p+q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p-q\sqrt{R}},$$

ou

$$dz = \frac{(p-q\sqrt{R})[dp + d(q\sqrt{R})] - (p+q\sqrt{R})[dp - d(q\sqrt{R})]}{p^2 - q^2 R},$$

c'est-à-dire,

$$dz = \frac{2p\,d(q\sqrt{R}) - 2dp \cdot q\sqrt{R}}{p^2 - q^2 R}.$$

Or

$$d(q\sqrt{R}) = dq\sqrt{R} + \tfrac{1}{2} q \frac{dR}{\sqrt{R}},$$

donc par substitution

$$dz = \frac{pq\,dR + 2(p\,dq - q\,dp)R}{(p^2 - q^2 R)\sqrt{R}},$$

par conséquent, en faisant

$$pq\frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)R = M, \tag{2}$$
$$p^2 - q^2 R = N,$$

on aura

$$dz = \frac{M\,dx}{N\sqrt{R}}, \tag{3}$$

où, comme on le voit aisément, M et N sont des fonctions entières de x.

Or, z étant égal à $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, on aura en intégrant

$$\int \frac{M\,dx}{N\sqrt{R}} = \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}. \tag{4}$$

Il s'ensuit que dans la différentielle $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$ on peut trouver une infinité de formes différentes pour la fonction rationnelle ϱ, qui rendent cette différentielle intégrable par des logarithmes, savoir par une expression de la forme $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$. La fonction ϱ contient, comme on le voit par les équations (2), outre R, encore deux fonctions indéterminées p et q; c'est par ces fonctions qu'elle sera déterminée.

On peut renverser la question et demander s'il est possible de supposer les fonctions p et q telles, que ϱ ou $\frac{M}{N}$ prenne une forme déterminée donnée. La solution de ce problème conduit à une foule de résultats intéressants, que l'on doit considérer comme autant de propriétés des fonctions de la forme $\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$. Dans ce mémoire je me bornerai au cas où $\frac{M}{N}$ est une fonction entière de x, en essayant de résoudre ce problème général:

„Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont „des fonctions entières de x, dont les intégrales puissent s'exprimer „par une fonction de la forme $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$.

2.

En différentiant l'équation

$$N = p^2 - q^2 R,$$

on obtient

$$dN = 2p\,dp - 2q\,dq\,.\,R - q^2 dR;$$

donc en multipliant par p,

$$p\,dN = 2p^2dp - 2pq\,dq\,.\,R - pq^2 dR,$$

c'est-à-dire, lorsqu'on remet à la place de p^2 sa valeur $N+q^2R$,

$$p\,dN = 2N dp + 2q^2 dp\,.\,R - 2pq\,dq\,.\,R - pq^2 dR,$$

ou

$$p\,dN = 2N dp - q[2(p\,dq - q\,dp)R + pq\,dR],$$

donc, puisque (2)

$$2(p\,dq - q\,dp)R + pq\,dR = M dx,$$

on a

$$p\,dN = 2N dp - qM dx,$$

ou bien

$$qM = 2N\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{dx},$$

donc

(5) $$\frac{M}{N} = \left(2\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{N dx}\right) : q.$$

Maintenant $\frac{M}{N}$ doit être une fonction entière de x; en désignant cette fonction par ϱ, on aura

$$q\varrho = 2\frac{dp}{dx} - p\frac{dN}{N dx}.$$

Il s'ensuit que $p\frac{dN}{Ndx}$ doit être une fonction entière de x. En faisant

$$N = (x+a)^m (x+a_1)^{m_1}\cdots(x+a_n)^{m_n},$$

on aura

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \cdots + \frac{m_n}{x+a_n},$$

donc l'expression

$$p\left(\frac{m}{x+a}+\frac{m_1}{x+a_1}+\cdots+\frac{m_n}{x+a_n}\right)$$

doit de même être une fonction entière, ce qui ne peut avoir lieu à moins que le produit $(x+a)\cdots(x+a_n)$ ne soit facteur de p. Il faut donc que

$$p = (x+a)\cdots(x+a_n)\,p_1,$$

p_1 étant une fonction entière. Or

$$N = p^2 - q^2R,$$

donc

$$(x+a)^m\cdots(x+a_n)^{m_n} = p_1^2(x+a)^2(x+a_1)^2\cdots(x+a_n)^2 - q^2R.$$

Comme R n'a pas de facteur de la forme $(x+a)^2$, et comme on peut toujours supposer que p et q n'ont pas de facteur commun, il est clair que

$$m = m_1 = \cdots = m_n = 1,$$

et que

$$R = (x+a)(x+a_1)\cdots(x+a_n)R_1,$$

R_1 étant une fonction entière. On a donc

$$N = (x+a)(x+a_1)\cdots(x+a_n),\quad R = NR_1,$$

c'est-à-dire que N doit être facteur de R. On a de même $p = Np_1$. En substituant ces valeurs de R et de p dans les équations (2), on trouvera les deux équations suivantes

(6) $$p_1^2N - q^2R_1 = 1,$$
$$\frac{M}{N} = p_1 q\frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right)R_1 = \varrho.$$

La première de ces équations détermine la forme des fonctions p_1, q, N et R_1; celles-ci étant déterminées, la seconde équation donnera ensuite la fonction ϱ. On peut aussi trouver cette dernière fonction par l'équation (5).

3.

Maintenant tout dépend de l'équation

(7) $$p_1^2 N - q^2 R_1 = 1.$$

Cette équation peut bien être résolue par la méthode ordinaire des coefficiens indéterminés, mais l'application de cette méthode serait ici extrêmement prolixe, et ne conduirait guère à un résultat général. Je vais donc prendre une autre route, semblable à celle qu'on emploie pour la résolution des équations indéterminées du second degré à deux inconnues. La seule différence est, qu'au lieu de nombres entiers, on aura à traiter des fonctions entières. Comme dans la suite nous aurons souvent besoin de parler du degré d'une fonction, je me servirai de la lettre δ pour désigner ce degré, en sorte que δP désignera le degré de la fonction P, par exemple,

$$\delta(x^m + ax^{m-1} + \cdots) = m,$$

$$\delta\left(\frac{x^5 + cx}{x^3 + e}\right) = 2,$$

$$\delta\left(\frac{x + e}{x^2 + k}\right) = -1, \text{ etc.}$$

D'ailleurs, il est clair que les équations suivantes auront lieu:

$$\delta(PQ) = \delta P + \delta Q,$$

$$\delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \delta P - \delta Q,$$

$$\delta(P^m) = m\delta P;$$

de plus

$$\delta(P + P') = \delta P,$$

si $\delta P'$ est moindre que δP. De même je désignerai, pour abréger, la partie entière d'une fonction rationnelle u par Eu, en sorte que

$$u = Eu + u',$$

où $\delta u'$ est négatif. Il est clair que

$$E(s + s') = Es + Es',$$

donc, lorsque $\delta s'$ est négatif,

$$E(s + s') = Es.$$

Relativement à ce signe, on aura le théorème suivant:

„Lorsque les trois fonctions rationnelles u, v et z ont la propriété que

$$u^2 = v^2 + z,$$

„on aura, si $\delta z < \delta v$,

$$Eu = \pm Ev.$$

En effet, on a par définition

$$u = Eu + u',$$
$$v = Ev + v',$$

$\delta u'$ et $\delta v'$ étant négatifs; donc en substituant ces valeurs dans l'équation $u^2 = v^2 + z$,

$$(Eu)^2 + 2u'Eu + u'^2 = (Ev)^2 + 2v'Ev + v'^2 + z.$$

Il s'ensuit

$$(Eu)^2 - (Ev)^2 = z + v'^2 - u'^2 + 2v'Ev - 2u'Eu = t,$$

ou bien,

$$(Eu + Ev)(Eu - Ev) = t.$$

On voit aisément que $\delta t < \delta v$; au contraire $\delta(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ est au moins égal à δv, si $(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ n'est pas égal à zéro. Il faut donc nécessairement que $(Eu + Ev)(Eu - Ev)$ soit nul, ce qui donne

$$Eu = \pm Ev \text{ c. q. f. d.}$$

Il est clair que l'équation (7) ne saurait subsister à moins qu'on n'ait

$$\delta(Np_1^2) = \delta(R_1 q^2),$$

c'est-à-dire,

$$\delta N + 2\delta p_1 = \delta R_1 + 2\delta q,$$

d'où

$$\delta(NR_1) = 2(\delta q - \delta p_1 + \delta R_1).$$

Le plus grand exposant de la fonction R doit donc être un nombre pair. Soit $\delta N = n - m$, $\delta R_1 = n + m$.

4.

Cela posé, au lieu de l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = 1,$$

je vais proposer la suivante

(8) $$p_1^2 N - q^2 R_1 = v,$$

où v est une fonction entière dont le degré est moindre que $\frac{\delta N + \delta R_1}{2}$. Cette équation, comme on le voit, est plus générale; elle peut être résolue par le même procédé.

Soit t la partie entière de la fonction fractionnaire $\frac{R_1}{N}$, et soit t' le reste; cela posé, on aura

$$R_1 = Nt + t', \tag{9}$$

et il est clair que t doit être du degré $2m$, lorsque $\delta N = n - m$ et $\delta R_1 = n + m$. En substituant cette expression de R_1 dans l'équation (8), on en tirera

$$(p_1^2 - q^2 t)\, N - q^2 t' = v. \tag{10}$$

Soit maintenant

$$t = t_1^2 + t_1', \tag{11}$$

on peut toujours déterminer t_1 de manière que le degré de t_1' soit moindre que m. A cet effet, faisons

$$\begin{aligned} t\; &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{2m} x^{2m}, \\ t_1 &= \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m, \\ t_1' &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{m-1} x^{m-1}; \end{aligned}$$

cela posé, l'équation (11) donnera

$$\begin{aligned} &\alpha_{2m} x^{2m} + \alpha_{2m-1} x^{2m-1} + \alpha_{2m-2} x^{2m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \\ &\quad = \beta_m^2 x^{2m} + 2\beta_m \beta_{m-1} x^{2m-1} + (\beta_{m-1}^2 + 2\beta_m \beta_{m-2})\, x^{2m-2} + \cdots \\ &\qquad + \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0. \end{aligned}$$

De cette équation on déduira, en comparant les coefficiens entre eux,

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} \; &= \beta_m^2, \\ \alpha_{2m-1} &= 2\beta_m \beta_{m-1}, \\ \alpha_{2m-2} &= 2\beta_m \beta_{m-2} + \beta_{m-1}^2, \\ \alpha_{2m-3} &= 2\beta_m \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-2}, \\ \alpha_{2m-4} &= 2\beta_m \beta_{m-4} + 2\beta_{m-1} \beta_{m-3} + \beta_{m-2}^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_m \; &= \; 2\beta_m \beta_0 \; + \; 2\beta_{m-1} \beta_1 \; + 2\beta_{m-2} \beta_2 + \cdots \\ \gamma_{m-1} &= \; \alpha_{m-1} \; - \; 2\beta_{m-1} \beta_0 - 2\beta_{m-2} \beta_1 - \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{m-2} &= \alpha_{m-2} - 2\beta_{m-2} \beta_0 - 2\beta_{m-3} \beta_1 - \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_2 &= \alpha_2 - 2\beta_2 \beta_0 - \beta_1^2, \\ \gamma_1 &= \alpha_1 - 2\beta_1 \beta_0, \\ \gamma_0 &= \alpha_0 - \beta_0^2. \end{aligned}$$

Les $m + 1$ premières équations donnent toujours, comme il est aisé de le voir, les valeurs des $m + 1$ quantités $\beta_m, \beta_{m-1} \cdots \beta_0$, et les m dernières équations donnent les valeurs de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_{m-1}$. L'équation supposée (11) est donc toujours possible.

Substituant dans l'équation (10), au lieu de t, sa valeur tirée de l'équation (11), on aura

$$(p_1^2 - q^2 t_1^2)\, N - q^2 (N t_1' + t') = v; \tag{12}$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = t_1^2 + t_1' + \frac{t'}{N} + \frac{v}{q^2 N}.$$

En remarquant que

$$\delta\left(t_1' + \frac{t'}{N} + \frac{v}{q^2 N}\right) < \delta t_1,$$

on aura, par ce qui précède,

$$E\left(\frac{p_1}{q}\right) \doteq \pm E t_1 = \pm t_1,$$

donc

$$p_1 = \pm t_1 q + \beta, \quad \text{où} \quad \delta\beta < \delta q,$$

ou bien, comme on peut prendre t_1 avec le signe qu'on voudra,

$$p_1 = t_1 q + \beta.$$

En substituant cette expression, au lieu de p_1 dans l'équation (12), elle se changera en

$$(\beta^2 + 2\beta t_1 q) N - q^2 s = v, \tag{13}$$

où, pour abréger, on a fait

$$N t_1' + t' = s.$$

De cette équation il est facile de tirer

$$\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)^2=\frac{N(t_1^2 N+s)}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2};$$

ou, puisque $t_1^2 N+s=R_1$ (car $R_1=tN+t'$, $s=Nt_1'+t'$, et $t=t_1^2+t_1'$),

$$\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)^2=\frac{R_1 N}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}.$$

Soit maintenant

$$R_1 N=r^2+r',\ \text{où}\ \delta r'<\delta r,$$

on aura

$$\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)^2=\left(\frac{r}{s}\right)^2+\frac{r'}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}.$$

Or, on voit aisément que

$$\delta\left(\frac{r'}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}\right)<\delta\left(\frac{r}{s}\right),$$

donc

$$E\left(\frac{q}{\beta}-\frac{t_1 N}{s}\right)=E\left(\frac{r}{s}\right),$$

et par suite

$$E\left(\frac{q}{\beta}\right)=E\left(\frac{r+t_1 N}{s}\right);$$

donc en faisant

$$E\left(\frac{r+t_1 N}{s}\right)=2\mu,$$

on aura

$$q=2\mu\beta+\beta_1,\ \text{où}\ \delta\beta_1<\delta\beta.$$

En substituant cette expression de q dans l'équation (13), on aura

$$\beta^2 N+2\beta t_1 N(2\mu\beta+\beta_1)-s(4\mu^2\beta^2+4\mu\beta_1\beta+\beta_1^2)=v,$$

c'est-à-dire,

$$\beta^2(N+4\mu t_1 N-4s\mu^2)+2(t_1 N-2\mu s)\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.$$

Faisant pour abréger

$$(14)\qquad \begin{aligned} s_1&=N+4\mu t_1 N-4s\mu^2,\\ t_1 N-2\mu s&=-r_1, \end{aligned}$$

on obtient

$$(15)\qquad s_1\beta^2-2r_1\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.$$

Puisque $E\left(\frac{r+t_1 N}{s}\right)=2\mu$, on a

$$r+t_1 N=2s\mu+\varepsilon,\ \text{où}\ \delta\varepsilon<\delta s,$$

par suite la dernière des équations (14) donnera

$$r_1=r-\varepsilon.$$

En multipliant l'expression de s_1 par s, on obtient

$$ss_1=Ns+4\mu t_1 Ns-4s^2\mu^2=Ns+t_1^2 N^2-(2s\mu-t_1 N)^2.$$

Or $2s\mu-t_1 N=r_1$, donc

$$ss_1=Ns+t_1^2 N^2-r_1^2,\ \text{et}\ r_1^2+ss_1=N(s+t_1^2 N);$$

de plus on a

$$s+t_1^2 N=R_1,$$

donc

$$(16)\qquad r_1^2+ss_1=NR_1=R.$$

D'après ce qui précède on a $R=r^2+r'$, donc

$$r^2-r_1^2=ss_1-r',\ (r+r_1)(r-r_1)=ss_1-r'.$$

Or puisque $\delta r'<\delta r$, il suit de cette équation que

$$\delta(ss_1)=\delta(r+r_1)(r-r_1),$$

c'est-à-dire, puisque $r-r_1=\varepsilon$, où $\delta\varepsilon<\delta r$,

$$\delta s+\delta s_1=\delta r+\delta\varepsilon.$$

Or $\delta s>\delta\varepsilon$, donc

$$\delta s_1<\delta r.$$

On a de plus $s=Nt_1'+t'$, où $\delta t'<\delta N$ et $\delta t_1'<\delta t_1$, donc

$$\delta s<\delta N+\delta t_1.$$

Mais $R=N(s+t_1^2 N)$, par conséquent,

$$\delta R=2\delta t_1+2\delta N,$$

et puisque $\delta R=2\delta r=2\delta r_1$, on aura

$$\delta t_1+\delta N=\delta r_1.$$

On en conclut

$$\delta s<\delta r_1.$$

L'équation $p_1^2 N - q^2 R_1 = v$ est donc transformée en celle-ci:

$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$

où

$$\delta r_1 = \tfrac{1}{2}\delta R = n,\quad \delta\beta_1 < \delta\beta,\quad \delta s < n,\quad \delta s_1 < n.$$

On obtient cette équation, comme on vient de le voir, en faisant

$$(17)\qquad \begin{aligned} p_1 &= t_1 q + \beta, \\ q &= 2\mu\beta + \beta_1, \end{aligned}$$

t_1 étant déterminé par l'équation

$$t = t_1^2 + t_1',\ \text{où}\ \delta t_1' < \delta t_1,\quad t = E\left(\frac{R_1}{N}\right),$$

et μ par l'équation,

$$2\mu = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right),$$

où

$$r^2 + r' = R_1 N,\quad s = N t_1' + R_1 - Nt.$$

De plus on a

$$(18)\qquad \begin{cases} r_1 = 2\mu s - t_1 N, \\ s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2, \\ r_1^2 + s s_1 = R_1 N = R. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de l'équation (15).

5.

Résolution de l'équation: $s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v$, *où* $\delta s < \delta r_1$, $\delta s_1 < \delta r_1$, $\delta v < \delta r_1$, $\delta\beta_1 < \delta\beta$.

En divisant l'équation

$$(19)\qquad s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$

par $s_1\beta_1^2$, on obtient

$$\frac{\beta^2}{\beta_1^2} - 2\frac{r_1}{s_1}\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{s}{s_1} = \frac{v}{s_1\beta_1^2},$$

donc

$$\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 + \frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}.$$

On tire de là, en remarquant que $\delta\left(\frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}\right) < \delta\left(\frac{r_1}{s_1}\right)$,

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right) = \pm E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)\cdot(1 \pm 1),$$

où l'on doit prendre le signe $+$, car l'autre signe donnerait $E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = 0$; donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = 2E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

par conséquent, en faisant

$$E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1,$$

on aura

$$\beta = 2\beta_1\mu_1 + \beta_2,\ \text{où}\ \delta\beta_2 < \delta\beta_1.$$

Substituant cette valeur de β dans l'équation proposée, on a

$$s_1(\beta_2^2 + 4\beta_1\beta_2\mu_1 + 4\mu_1^2\beta_1^2) - 2r_1\beta_1(\beta_2 + 2\mu_1\beta_1) - s\beta_1^2 = v,$$

ou bien

$$(20)\qquad s_2\beta_1^2 - 2r_2\beta_1\beta_2 - s_1\beta_2^2 = -v,$$

où

$$r_2 = 2\mu_1 s_1 - r_1,\quad s_2 = s + 4r_1\mu_1 - 4s_1\mu_1^2.$$

L'équation $E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = \mu_1$ donne

$$r_1 = \mu_1 s_1 + \varepsilon_1,\ \text{où}\ \delta\varepsilon_1 < \delta s_1.$$

On obtient par là,

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - 2\varepsilon_1, \\ s_2 &= s + 4\varepsilon_1\mu_1, \end{aligned}$$

donc, comme il est facile de le voir,

$$\delta r_2 = \delta r_1,\quad \delta s_2 < \delta r_2.$$

L'équation (19) a par conséquent la même forme que l'équation (20); on peut donc appliquer à celle-ci la même opération, c'est-à-dire en faisant

$$\mu_2 = E\left(\frac{r_2}{s_2}\right),\quad r_2 = s_2\mu_2 + \varepsilon_2,\quad \beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3,$$

on aura

$$s_3\beta_2^2 - 2r_3\beta_2\beta_3 - s_2\beta_3^2 = v,$$

où

$$r_3 = 2\mu_2 s_2 - r_2 = r_2 - 2\varepsilon_2,$$

$$s_3 = s_1 + 4r_2\mu_2 - 4s_2\mu_2^2 = s_1 + 4\varepsilon_2\mu_2,$$

$$\delta\beta_3 < \delta\beta_2.$$

En continuant ce procédé, on obtiendra, après $n-1$ transformations, cette équation:

(21) $$s_n\beta_{n-1}^2 - 2r_n\beta_{n-1}\beta_n - s_{n-1}\beta_n^2 = (-1)^{n-1}v,$$

$$\text{où}\quad \delta\beta_n < \delta\beta_{n-1}.$$

Les quantités s_n, r_n, β_n, sont déterminées par les équations suivantes:

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1},$$
$$\mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),$$
$$r_n = 2\mu_{n-1}s_{n-1} - r_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4r_{n-1}\mu_{n-1} - 4s_{n-1}\mu_{n-1}^2.$$

A ces équations on peut ajouter celles-ci:

$$r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n,$$
$$r_n = r_{n-1} - 2\varepsilon_{n-1},$$
$$s_n = s_{n-2} + 4\varepsilon_{n-1}\mu_{n-1}.$$

Or, les nombres $\delta\beta$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2 \ldots \delta\beta_n$, etc. formant une série décroissante, on doit nécessairement, après un certain nombre de transformations, trouver un β_n égal à zéro. Soit donc

$$\beta_m = 0,$$

l'équation (21) donnera, en posant $n = m$,

(22) $$s_m\beta_{m-1}^2 = (-1)^{m-1}v.$$

Voilà l'équation générale de condition pour la résolubilité de l'équation (19); s_m dépend des fonctions s, s_1, r_1, et β_{m-1} doit être pris de manière à satisfaire à la condition

$$\delta s_m + 2\delta\beta_{m-1} < \delta r.$$

L'équation (22) fait voir, que pour tous les s, s_1 et r_1, on peut trouver une infinité de valeurs de v, qui satisfont à l'équation (19).

En substituant dans l'équation proposée, au lieu de v, sa valeur $(-1)^{m-1}s_m\beta_{m-1}^2$, on obtiendra

$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = (-1)^{m-1}s_m\beta_{m-1}^2,$$

équation toujours résoluble. On voit aisément que β et β_1 ont le facteur commun β_{m-1}. Donc, si l'on suppose que β et β_1 n'ont pas de facteur commun, β_{m-1} sera indépendant de x. On peut donc faire $\beta_{m-1} = 1$, d'où résulte cette équation,

$$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = (-1)^{m-1}s_m.$$

Les fonctions β, β_1, $\beta_2 \ldots$ sont déterminées par l'équation

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1},$$

en posant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots m-1$ et en remarquant que $\beta_m = 0$. On obtient par là

$$\beta_{m-2} = 2\mu_{m-1}\beta_{m-1},$$
$$\beta_{m-3} = 2\mu_{m-2}\beta_{m-2} + \beta_{m-1},$$
$$\beta_{m-4} = 2\mu_{m-3}\beta_{m-3} + \beta_{m-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_3 = 2\mu_4\beta_4 + \beta_5,$$
$$\beta_2 = 2\mu_3\beta_3 + \beta_4,$$
$$\beta_1 = 2\mu_2\beta_2 + \beta_3,$$
$$\beta\ = 2\mu_1\beta_1 + \beta_2.$$

Ces équations donnent

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{\frac{\beta_1}{\beta_2}},$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2\mu_2 + \frac{1}{\frac{\beta_2}{\beta_3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\beta_{m-3}}{\beta_{m-2}} = 2\mu_{m-2} + \frac{1}{\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}}},$$

$$\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}} = 2\mu_{m-1}.$$

On en tire par des substitutions successives:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \frac{1}{2\mu_3 + \cdots \cdot + \frac{1}{2\mu_{m-2} + \frac{1}{2\mu_{m-1}}}}}.$$

On aura donc les valeurs de β et de β_1 en transformant cette fraction continue en fraction ordinaire.

6.

En substituant dans l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = v$$

pour v sa valeur $(-1)^{m-1} s_m$, on aura

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

où

$$q = 2\mu\beta + \beta_1,$$
$$p_1 = t_1 q + \beta,$$

donc

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{\beta}{q} = t_1 + \frac{1}{\frac{q}{\beta}};$$

or

$$\frac{q}{\beta} = 2\mu + \frac{\beta_1}{\beta};$$

par conséquent,

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \cdots \cdot + \frac{1}{2\mu_{m-1}}}}}.$$

L'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = v$$

donne

$$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 N},$$

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 N}};$$

donc en supposant m infini

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N}};$$

donc

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \frac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

On trouve donc les valeurs de p_1 et de q par la transformation de la fonction $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$ en fraction continue.*)

7

Soit maintenant $v = a$, l'on aura

$$s_m = (-1)^{m-1} a.$$

Donc si l'équation

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = a,$$

est résoluble, il faut qu'au moins une des quantités,

$$s, s_1, s_2 \ldots s_m, \text{ etc.},$$

soit indépendante de x.

D'autre part, lorsqu'une de ces quantités est indépendante de x, il est toujours possible de trouver deux fonctions entières p_1 et q qui satisfassent à cette équation. En effet, lorsque $s_m = a$, on aura les valeurs de p_1 et de q en transformant la fraction continue

*) L'équation ci-dessus n'exprime pas une égalité absolue. Elle indique seulement d'une manière abrégée, comment on peut trouver les quantités $t_1, \mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ Si toutefois la fraction continue a une valeur, celle-ci sera toujours égale à $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$.

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} + \cdots + \frac{1}{2\mu_{m-1}}$$

en fraction ordinaire. Les fonctions s, s_1, s_2, etc., sont en général, comme il est aisé de le voir, du degré $n-1$, lorsque NR_1 est du degré $2n$. L'équation de condition

$$s_m = a,$$

donnera donc $n-1$ équations entre les coefficiens des fonctions N et R_1; il n'y a donc que $n+1$ de ces coefficiens qu'on puisse prendre arbitrairement, les autres sont déterminés par les équations de condition.

8.

De ce qui précède, il s'ensuit qu'on trouve toutes les valeurs de R_1 et de N, qui rendent la différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}}$ intégrable par une expression de la forme

$$\log \frac{p + q\sqrt{R_1 N}}{p - q\sqrt{R_1 N}},$$

en faisant successivement les quantités s, s_1, $s_2 \ldots s_m$, indépendantes de x.

Puisque $p = p_1 N$, on a de même,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}};$$

ou bien

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{y\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{y\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}, \\ \text{où} \\ \displaystyle y = t_1 + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} + \cdots + \frac{1}{2\mu_{m-1}}, \end{array}\right.$$

en supposant s_m égal à une constante.

Les quantités R_1, N, p_1 et q étant ainsi déterminées, on trouve ϱ

par l'équation (5). Cette équation donne, en mettant $p_1 N$ au lieu de p, et ϱ au lieu de $\frac{M}{N}$,

$$\varrho = \left(p_1 \frac{dN}{dx} + 2N\frac{dp_1}{dx}\right) : q.$$

Il s'ensuit que

$$\delta\varrho = \delta p_1 + \delta N - 1 - \delta q = \delta p - \delta q - 1.$$

Or on a vu que $\delta p - \delta q = n$, donc

$$\delta\varrho = n - 1.$$

Donc si la fonction R ou $R_1 N$ est du degré $2n$, la fonction ϱ sera nécessairement du degré $n-1$.

9.

Nous avons vu plus haut que

$$R = R_1 N;$$

mais on peut toujours supposer que la fonction N est constante. En effet on a

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log \frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}},$$

et par conséquent,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\log \frac{p_1^2 N + q^2 R_1 + 2p_1 q\sqrt{R_1 N}}{p_1^2 N + q^2 R_1 - 2p_1 q\sqrt{R_1 N}};$$

ou, en faisant $p_1^2 N + q^2 R_1 = p'$ et $2p_1 q = q'$,

$$\int \frac{2\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}.$$

Il est clair que p' et q' n'ont pas de facteur commun; on peut donc toujours poser

$$N = 1.$$

Au lieu de l'équation $p_1^2 N - q_2 R_1 = 1$, on a alors celle-ci,

$$p'^2 - q'^2 R = 1,$$

dont on obtient la solution en faisant $N=1$ et mettant R au lieu de R_1.

Ayant $N=1$, on voit aisément que

$$t=R;\ \ t_1=r;\ \ R=r^2+s;$$

donc

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{p'}{q'}=r+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\cfrac{1}{2\mu_2+\cdots+\cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}, \\
R=r^2+s, \\
\mu=E\left(\frac{r}{s}\right),\quad r=s\mu+\varepsilon, \\
r_1=r-2\varepsilon,\quad s_1=1+4\varepsilon\mu, \\
\mu_1=E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),\quad r_1=s_1\mu_1+\varepsilon_1, \\
r_2=r_1-2\varepsilon_1,\quad s_2=s+4\varepsilon_1\mu_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_n=E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),\quad r_n=\mu_n s_n+\varepsilon_n, \\
r_{n+1}=r_n-2\varepsilon_n,\quad s_{n+1}=s_{n-1}+4\varepsilon_n\mu_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_{m-1}=E\left(\frac{r_{m-1}}{s_{m-1}}\right),\quad r_{m-1}=\mu_{m-1}s_{m-1}+\varepsilon_{m-1}, \\
r_m=r_{m-1}-2\varepsilon_{m-1},\quad s_m=s_{m-2}+4\varepsilon_{m-1}\mu_{m-1}=a.
\end{array}\right.$$

Ayant déterminé les quantités R, r, μ, $\mu_1 \ldots \mu_{m-1}$ par ces équations, on aura

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}=\log\frac{p'+q'\sqrt{R}}{p'-q'\sqrt{R}}, \\
\text{où} \\
\varrho=\dfrac{2}{q'}\dfrac{dp'}{dx},
\end{array}\right.$$

ce qui résulte de l'équation (5) en y posant $N=1$.

10.

On peut donner à l'expression $\log\dfrac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}$ une forme plus simple, savoir,

$$\log\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}=\log\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}$$
$$+\log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}+\log\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}+\cdots+\log\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}},$$

ce qu'on peut démontrer comme il suit. Soit

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m}=t_1+\cfrac{1}{2\mu+\cfrac{1}{2\mu_1+\cdots+\cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}},$$

on a par la théorie des fractions continues,

$$\text{(a)}\qquad \alpha_m=\alpha_{m-2}+2\mu_{m-1}\alpha_{m-1},$$
$$\text{(b)}\qquad \beta_m=\beta_{m-2}+2\mu_{m-1}\beta_{m-1}.$$

De ces équations on tire, en éliminant μ_{m-1},

$$\alpha_m\beta_{m-1}-\beta_m\alpha_{m-1}=-(\alpha_{m-1}\beta_{m-2}-\beta_{m-1}\alpha_{m-2}),$$

donc

$$\alpha_m\beta_{m-1}-\beta_m\alpha_{m-1}=(-1)^{m-1},$$

ce qui est connu.

Les deux équations (a) et (b) donnent encore

$$\alpha_m^2=\alpha_{m-2}^2+4\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}\mu_{m-1}+4\mu_{m-1}^2\alpha_{m-1}^2,$$
$$\beta_m^2=\beta_{m-2}^2+4\beta_{m-1}\beta_{m-2}\mu_{m-1}+4\mu_{m-1}^2\beta_{m-1}^2.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha_m^2N-\beta_m^2R_1=\alpha_{m-2}^2N-\beta_{m-2}^2R_1$$
$$+4\mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N-\beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1)+4\mu_{m-1}^2(\alpha_{m-1}^2N-\beta_{m-1}^2R_1).$$

Or on a

$$\alpha_m^2N-\beta_m^2R_1=(-1)^{m-1}s_m,$$
$$\alpha_{m-1}^2N-\beta_{m-1}^2R_1=(-1)^{m-2}s_{m-1},$$
$$\alpha_{m-2}^2N-\beta_{m-2}^2R_1=(-1)^{m-3}s_{m-2},$$

donc, en substituant,

$$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^{m-1}\mu_{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1) - 4\mu^2_{m-1}s_{m-1}.$$

Mais, d'après ce qui précède, on a

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1}r_{m-1} - 4s_{m-1}\mu^2_{m-1},$$

donc

$$r_{m-1} = (-1)^{m-1}(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}N - \beta_{m-1}\beta_{m-2}R_1).$$

Soit

$$z_m = \alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}, \quad \text{et} \quad z_m' = \alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1},$$

on aura en multipliant,

$$z_m z'_{m-1} = \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 - (\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m)\sqrt{NR_1};$$

mais on vient de voir qu'on a

$$\alpha_m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1}\beta_m = (-1)^{m-1}, \quad \alpha_m\alpha_{m-1}N - \beta_m\beta_{m-1}R_1 = (-1)^m r_m;$$

on tire de là

$$z_m z'_{m-1} = (-1)^m(r_m + \sqrt{R}),$$

et de la même manière,

$$z_m' z_{m-1} = (-1)^m(r_m - \sqrt{R});$$

on en tire en divisant,

$$\frac{z_m}{z_m'}\frac{z'_{m-1}}{z_{m-1}} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}};$$

ou, en multipliant par $\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}$,

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}},$$

En faisant successivement $m = 1, 2, 3 \ldots m$, on aura,

$$\frac{z_1}{z_1'} = \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\frac{z_0}{z_0'}$$

$$\frac{z_2}{z_2'} = \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\frac{z_1}{z_1'}$$

. . . .

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}},$$

d'où l'on tire,

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{z_0}{z_0'}\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\frac{r_3 + \sqrt{R}}{r_3 - \sqrt{R}} \cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Or on a

$$z_0 = \alpha_0\sqrt{N} + \beta_0\sqrt{R_1} = t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1},$$

$$z_0' = \alpha_0\sqrt{N} - \beta_0\sqrt{R_1} = t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1},$$

et

$$\frac{z_m}{z_m'} = \frac{\alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1}},$$

donc

$$\frac{\alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1}} = \frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}} \cdot \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} \cdot \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} \cdots \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

et en prenant les logarithmes,

(26) $$\log\frac{\alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1}}$$

$$= \log\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \log\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

11.

En différentiant l'expression $z = \log\frac{\alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1}}$, on aura, après les réductions convenables,

$$dz = \frac{2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m)NR_1 - \alpha_m\beta_m(R_1 dN - N dR_1)}{(\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1)\sqrt{NR_1}}.$$

Or on a

$$\alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1}s_m,$$

donc en faisant

(27) $$(-1)^{m-1}\varrho_m = 2\left(\alpha_m\frac{d\beta_m}{dx} - \beta_m\frac{d\alpha_m}{dx}\right)NR_1 - \alpha_m\beta_m\left(\frac{R_1 dN - N dR_1}{dx}\right),$$

on aura

$$dz = \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}},$$

et

$$z = \int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}},$$

donc

$$\int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}} = \log \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}},$$

ou bien

$$(28) \quad \int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Dans cette expression s_m est tout au plus du degré $(n-1)$ et ϱ_m est nécessairement du degré $(n-1+\delta s_m)$, ce dont on peut se convaincre de la manière suivante. En différentiant l'équation

$$(29) \quad \alpha_m^2 N - \beta_m^2 R_1 = (-1)^{m-1} s_m,$$

on trouvera la suivante

$$2\alpha_m d\alpha_m N + \alpha_m^2 dN - 2\beta_m d\beta_m . R_1 - \beta_m^2 dR_1 = (-1)^{m-1} ds_m,$$

ou, en multipliant par $\alpha_m N$,

$$\alpha_m^2 N(2N d\alpha_m + \alpha_m dN) - 2\alpha_m \beta_m d\beta_m NR_1 - \beta_m^2 \alpha_m N dR_1 = (-1)^{m-1} \alpha_m N ds_m.$$

Mettant ici à la place de $\alpha_m^2 N$, sa valeur tirée de l'équation (29), on aura

$$(-1)^{m-1} s_m (2N d\alpha_m + \alpha_m dN) + \beta_m [2NR_1 \beta_m d\alpha_m + \alpha_m \beta_m R_1 dN - 2\alpha_m d\beta_m NR_1 \\ - \beta_m \alpha_m N dR_1] = (-1)^{m-1} \alpha_m N ds_m,$$

c'est-à-dire,

$$\beta_m [2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m) NR_1 - \alpha_m \beta_m (R_1 dN - N dR_1)] \\ = (-1)^{m-1} [s_m (2N d\alpha_m + \alpha_m dN) - \alpha_m N ds_m].$$

En vertu de l'équation (27) le premier membre de cette équation est égal à $\beta_m (-1)^{m-1} \varrho_m dx$; donc on aura

$$(30) \quad \beta_m \varrho_m = s_m \left(\frac{2N d\alpha_m}{dx} + \frac{\alpha_m dN}{dx} \right) - \alpha_m \frac{N ds_m}{dx}.$$

Puisque $\delta s_m < n$, le second membre de cette équation sera nécessairement du degré $(\delta s_m + \delta N + \delta \alpha_m - 1)$, comme il est facile de le voir; donc

$$\delta \varrho_m = \delta s_m + \delta N + \delta \alpha_m - \delta \beta_m - 1.$$

Or de l'équation (29) il suit que

$$2\delta \alpha_m + \delta N = 2\delta \beta_m + \delta R_1,$$

donc

$$\delta \varrho_m = \delta s_m + \frac{\delta N + \delta R_1}{2} - 1;$$

ou, puisque $\delta N + \delta R_1 = 2n$,

$$\delta \varrho_m = \delta s_m + n - 1,$$

c'est-à-dire que ϱ_m est nécessairement du degré $(\delta s_m + n - 1)$. Il suit de là que la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est du degré $(n-1)$.

Faisant dans la formule (28) $N = 1$, on aura $t_1 = r$, et par conséquent

$$(31) \quad \int \frac{\varrho_m dx}{s_m \sqrt{R}} = \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

où, suivant l'équation (30),

$$\beta_m \varrho_m = 2 s_m \frac{d\alpha_m}{dx} - \alpha_m \frac{ds_m}{dx}.$$

L'équation (28) donne, en faisant $s_m = a$,

$$(32) \quad \int \frac{\varrho_m dx}{a \sqrt{R}} = \log \frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}$$

$$\text{où} \quad \beta_m \varrho_m = a \left(2N \frac{d\alpha_m}{dx} + \alpha_m \frac{dN}{dx} \right),$$

et lorsque $N = 1$,

$$(33) \quad \int \frac{\varrho_m dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

$$\text{où} \quad \varrho_m = \frac{2}{\beta_m} \frac{d\alpha_m}{dx}.$$

D'après ce qui précède, cette formule a la même généralité que la formule (32), et donne toutes les intégrales de la forme $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des fonctions entières, qui sont exprimables par une fonction logarithmique de la forme $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$.

12.

Dans l'équation (28) la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est donnée par l'équation (30). Mais on peut exprimer cette fonction d'une manière plus commode à l'aide des quantités t_1, r_1, r_2, etc. μ, μ_1, μ_2, etc. En effet, soit

$$z_m = \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

on aura en différentiant,

$$dz_m = \frac{dr_m + \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m + \sqrt{R}} - \frac{dr_m - \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ou en réduisant,

(33′) $$dz_m = \frac{r_m\, dR - 2R\, dr_m}{r_m^2 - R}\, \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} r_{m-1} - 4 s_{m-1} \mu_{m-1}^2,$$

donc en multipliant par s_{m-1},

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + 4\mu_{m-1} s_{m-1} r_{m-1} - 4 s_{m-1}^2 \mu_{m-1}^2,$$

c'est-à-dire,

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + r_{m-1}^2 - (2 s_{m-1}\mu_{m-1} - r_{m-1})^2.$$

Mais on a

$$r_m = 2 s_{m-1} \mu_{m-1} - r_{m-1},$$

donc en substituant cette quantité,

$$s_m s_{m-1} = s_{m-1} s_{m-2} + r_{m-1}^2 - r_m^2,$$

d'où l'on déduit par transposition,

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_{m-1}^2 + s_{m-1} s_{m-2}.$$

Il suit de cette équation que $r_m^2 + s_m s_{m-1}$ a la même valeur pour tous les m et par conséquent que

$$r_m^2 + s_m s_{m-1} = r_1^2 + s s_1;$$

or nous avons vu plus haut que $r_1^2 + s s_1 = R$, et par suite,

(34) $$R = r_m^2 + s_m s_{m-1}.$$

Substituant cette expression pour R dans l'équation (33′), on aura après les réductions convenables

$$dz_m = \frac{2dr_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_m}{\sqrt{R}};$$

mais puisque $r_m = 2s_{m-1}\mu_{m-1} - r_{m-1}$, le terme $-\frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme en $-2\mu_{m-1}\frac{ds_{m-1}}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}$. On obtient donc

$$dz_m = (2dr_m - 2\mu_{m-1} ds_{m-1})\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$$

et en intégrant

(35) $$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -z_m + \int (2dr_m - 2\mu_{m-1} ds_{m-1})\frac{1}{\sqrt{R}} + \int \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}}\frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}.$$

Cette expression est, comme on le voit, une formule de réduction pour les intégrales de la forme $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$. Car elle donne l'intégrale $\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ par une autre intégrale de la même forme et par une intégrale de la forme $\int \frac{t dx}{\sqrt{R}}$ où t est une fonction entière. Mettant dans cette formule à la place de m successivement m, $m-1$, $m-2 \ldots 3, 2, 1$, on obtiendra m équations semblables, dont la somme donnera la formule suivante (en remarquant que $r_0 = 2s\mu - r_1 = t_1 N$ en vertu de l'équation $r_1 + t_1 N = 2s\mu$)

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_m) + \int \frac{ds}{s}\frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$$
$$+ \int 2(dr_1 + dr_2 + \cdots + dr_m - \mu\, ds - \mu_1\, ds_1 - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1})\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

On peut encore réduire l'intégrale $\int \frac{ds}{s}\frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$. En différentiant l'expression

$$z = \log \frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}},$$

on aura après quelques réductions,

$$dz = \frac{-2dt_1 NR_1 - t_1(R_1 dN - NdR_1)}{(t_1^2 N - R_1)\sqrt{R}}.$$

Or on a

$$R_1 = t_1^2 N + s;$$

substituant donc cette valeur de R_1 dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$dz = (2Ndt_1 + t_1 dN)\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds}{s}\,\frac{t_1 N}{\sqrt{R}},$$

donc en intégrant

$$\int \frac{ds}{s}\,\frac{t_1 N}{\sqrt{R}} = -z + \int (2Ndt_1 + t_1 dN)\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

L'expression de $\int \frac{ds_m}{s_m}\,\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme par là en celle-ci,

$$\int \frac{ds_m}{s_m}\,\frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z + z_1 + z_2 + \cdots + z_m)$$
$$+ \int \frac{2}{\sqrt{R}}(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1}),$$

ou, en mettant à la place des quantités $z, z_1, z_2 \ldots$ leurs valeurs,

$$(36) \qquad \int \frac{ds_m}{s_m}\,\frac{r_m}{\sqrt{R}}$$
$$= \int \frac{2}{\sqrt{R}}(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1})$$
$$- \log \frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}} - \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} - \log \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} - \cdots - \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Cette formule est entièrement la même que la formule (28); elle donne

$$(37) \qquad \frac{\varrho_m}{s_m}dx = -\frac{r_m ds_m}{s_m}$$
$$+ 2(Ndt_1 + \tfrac{1}{2}t_1 dN + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1}).$$

Mais l'expression ci-dessus dispense du calcul des fonctions α_m et β_m.

Si maintenant s_m est indépendant de x, l'intégrale $\int \frac{ds_m}{s_m}\,\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ disparaît et l'on obtient la formule suivante:

$$(38) \qquad \int \frac{2}{\sqrt{R}}(\tfrac{1}{2}t_1 dN + Ndt_1 + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1})$$
$$= \log \frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \log \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Si dans l'expression (36) on fait $N = 1$, on a $t_1 = r$, et par suite

$$(39) \qquad \int \frac{ds_m}{s_m}\,\frac{r_m}{\sqrt{R}} = \int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1})$$
$$- \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} - \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} - \cdots - \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}},$$

et si l'on fait $s_m = a$:

$$(40) \qquad \int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + dr_1 + \cdots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{m-1} ds_{m-1})$$
$$= \log \frac{r + \sqrt{R}}{r - \sqrt{R}} + \log \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} + \cdots + \log \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

En vertu de ce qui précède, cette formule a la même généralité que (38); elle donne par conséquent toutes les intégrales de la forme $\int \frac{t\,dx}{\sqrt{R}}$, où t est une fonction entière, qui peuvent être exprimées par une fonction de la forme $\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$.

13.

Nous avons vu ci-dessus que

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \cdots}}}}$$

donc, lorsque $N = 1$,

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \frac{1}{2\mu_3 + \cdots}}}}$$

En général les quantités μ, μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots$ sont différentes entre elles. Mais lorsqu'une des quantités s, s_1, $s_2 \ldots$ est indépendante de x, la fraction continue devient *périodique*. On peut le démontrer comme il suit.

On a

$$r_{m+1}^2 + s_m s_{m+1} = R = r^2 + s,$$

donc, lorsque $s_m = a$,

$$r_{m+1}^2 - r^2 = s - a s_{m+1} = (r_{m+1} + r)(r_{m+1} - r).$$

Or $\delta r_{m+1} = \delta r$, $\delta s < \delta r$, $\delta s_{m+1} < \delta r$, donc cette équation ne peut subsister à moins qu'on n'ait en même temps,

$$r_{m+1} = r, \quad s_{m+1} = \frac{s}{a}.$$

Or, puisque $\mu_{m+1} = E\left(\frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}\right)$ on a de même

$$\mu_{m+1} = a\,E\left(\frac{r}{s}\right);$$

mais $E\left(\frac{r}{s}\right) = \mu$, donc

$$\mu_{m+1} = a\mu.$$

On a de plus

$$s_{m+2} = s_m + 4\mu_{m+1} r_{m+1} - 4\mu_{m+1}^2 s_{m+1},$$

donc ayant $s_m = a$, $r_{m+1} = r$, $\mu_{m+1} = a\mu$, on en conclut

$$s_{m+2} = a(1 + 4\mu r - 4\mu^2 s);$$

or $s_1 = 1 + 4\mu r - 4\mu^2 s$, donc

$$s_{m+2} = a s_1.$$

On a de même

$$r_{m+2} = 2\mu_{m+1} s_{m+1} - r_{m+1} = 2\mu s - r,$$

donc, puisque $r_1 = 2\mu s - r$,

$$r_{m+2} = r_1,$$

d'où l'on tire

$$\mu_{m+2} = E\left(\frac{r_{m+2}}{s_{m+2}}\right) = \frac{1}{a} E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc

$$\mu_{m+2} = \frac{\mu_1}{a}.$$

En continuant ce procédé on voit sans peine qu'on aura en général

$$(41) \qquad \begin{cases} r_{m+n} = r_{n-1}, \quad s_{m+n} = a^{\pm 1} s_{n-1}, \\ \mu_{m+n} = a^{\mp 1} \mu_{n-1}. \end{cases}$$

Le signe supérieur doit être pris lorsque n est pair et le signe inférieur dans le cas contraire.

Mettant dans l'équation

$$r_m^2 + s_{m-1} s_m = r^2 + s$$

a à la place de s_m, on aura

$$(r_m - r)(r_m + r) = s - a s_{m-1}.$$

Il s'ensuit que

$$r_m = r, \quad s_{m-1} = \frac{s}{a}.$$

Or on a $\mu_m = E\left(\frac{r_m}{s_m}\right)$, donc

$$\mu_m = \frac{1}{a} E r;$$

c'est-à-dire

$$\mu_m = \frac{1}{a} r.$$

On a de plus

$$r_m + r_{m-1} = 2 s_{m-1} \mu_{m-1},$$

c'est-à-dire, puisque $r_m = r$, $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$r + r_{m-1} = \frac{2s}{a} \mu_{m-1}.$$

Mais $r + r_1 = 2s\mu$, donc

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu).$$

On a

$$r_{m-1}^2 + s_{m-1}s_{m-2} = r_1^2 + ss_1,$$

c'est-à-dire, puisque $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$(r_{m-1}+r_1)(r_{m-1}-r_1) = \frac{s}{a}(as_1 - s_{m-2}).$$

Or nous avons vu que

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a}(\mu_{m-1} - a\mu),$$

donc en substituant,

$$2(r_{m-1}+r_1)(\mu_{m-1}-a\mu) = as_1 - s_{m-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta(r_{m-1}+r_1) > \delta(as_1 - s_{m-2})$,

$$\mu_{m-1} = a\mu, \quad s_{m-2} = as_1,$$

et par conséquent

$$r_{m-1} = r_1.$$

Par un procédé semblable on trouvera aisément,

$$r_{m-2} = r_2, \quad s_{m-3} = \frac{1}{a}s_2, \quad \mu_{m-2} = \frac{\mu_1}{a},$$

et en général

(42) $$\begin{cases} r_{m-n} = r_n, \quad s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1}, \\ \mu_{m-n} = a^{\mp 1}\mu_{n-1}. \end{cases}$$

14.

A. Soit m un nombre pair, $2k$.

Dans ce cas on voit aisément, en vertu des équations (41) et (42), que les quantités $r, r_1, r_2 \ldots s, s_1, s_2 \ldots \mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ forment les séries suivantes:

0	1	..	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	$2k+2$	..	$4k-1$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	etc.
r	r_1	..	r_2	r_1	r	r	r_1	..	r_2	r_1	r	r	r_1	etc.
s	s_1	..	as_1	$\frac{s}{a}$	a	$\frac{s}{a}$	as_1	..	s_1	s	1	s	s_1	etc.
μ	μ_1	..	$\frac{\mu_1}{a}$	$a\mu$	$\frac{r}{a}$	$a\mu$	$\frac{\mu_1}{a}$	..	μ_1	μ	r	μ	μ_1	etc.

B. Soit m un nombre impair, $2k-1$.

Dans ce cas l'équation

$$s_{m-n} = a^{\pm 1} s_{n-1} \quad \text{ou} \quad s_{2k-n-1} = a^{\pm 1} s_{n-1}$$

donne, pour $n = k$,

$$s_{k-1} = a^{\pm 1} s_{k-1}, \quad \text{donc} \quad a = 1.$$

Les quantités r, r_1 etc. s, s_1 etc. μ, μ_1 etc. forment les séries suivantes:

0	1	..	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	..	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	etc.
r	r_1	..	r_{k-2}	r_{k-1}	r_{k-1}	r_{k-2}	..	r_1	r	r	r_1	etc.
s	s_1	..	s_{k-2}	s_{k-1}	s_{k-2}	s_{k-3}	..	s	1	s	s_1	etc.
μ	μ_1	..	μ_{k-2}	μ_{k-1}	μ_{k-2}	μ_{k-3}	..	μ	r	μ	μ_1	etc.

On voit par là que, lorsqu'une des quantités s, s_1, $s_2 \ldots$ est indépendante de x, la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ est toujours périodique et de la forme suivante, lorsque $s_m = a$:

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \cdots + \frac{1}{\frac{2\mu_1}{a}} + \frac{1}{2a\mu} + \frac{1}{\frac{2r}{a}} + \frac{1}{2a\mu} + \frac{1}{\frac{2\mu_1}{a}} + \cdots + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2\mu} + \cdots$$

Lorsque m est impair, on a de plus $a = 1$, et par suite

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \cdots + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \cdots$$

La réciproque a également lieu; c'est-à-dire que, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a la forme ci-dessus, s_m sera indépendant de x. En effet, soit

$$\mu_m = \frac{r}{a},$$

on tire de l'équation $r_m = s_m \mu_m + \varepsilon_m$,

$$r_m = \frac{r}{a} s_m + \varepsilon_m.$$

Or, puisque $r_m = r_{m-1} - 2\varepsilon_{m-1}$, où $\delta\varepsilon_{m-1} < \delta r$, il est clair que

$$r_m = r + \gamma_m, \quad \text{où} \quad \delta\gamma_m < \delta r.$$

On en tire

$$r\left(1 - \frac{s_m}{a}\right) = \varepsilon_m - \gamma_m,$$

et par conséquent $s_m = a$, ce qu'il fallait démontrer. En combinant cela avec ce qui précède, on trouve la proposition suivante:

"Lorsqu'il est possible de trouver pour ϱ une fonction entière telle, que

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}},$$

"la fraction continue résultant de. $\sqrt{R}$ est périodique, et a la forme suivante:

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \cdots + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2r + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

"et réciproquement, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a cette "forme, il est toujours possible de trouver pour ϱ une fonction entière qui "satisfasse à l'équation,

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}.$$

"La fonction y est donnée par l'expression suivante:

$$y = r + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \cdots + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2r}}}}}.$$

Dans cette proposition est contenue la solution complète du problème proposé au commencement de ce mémoire.

15.

Nous venons de voir que, lorsque s_{2k-1} est indépendant de x, on aura toujours $s_k = s_{k-2}$, et lorsque s_{2k} est indépendant de x, on aura $s_k = c s_{k-1}$, où c est constant. La réciproque a également lieu, ce qu'on peut démontrer comme il suit.

I. Soit d'abord $s_k = s_{k-2}$, on a

$$r_{k-1}^2 + s_{k-1} s_{k-2} = r_k^2 + s_k s_{k-1};$$

or $s_k = s_{k-2}$, donc

$$r_k = r_{k-1}.$$

De plus

$$r_k = \mu_k s_k + \varepsilon_k,$$

$$r_{k-2} = \mu_{k-2} s_{k-2} + \varepsilon_{k-2},$$

donc

$$r_k - r_{k-2} = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}.$$

Mais

$$r_k = r_{k-1}, \quad r_{k-2} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

donc, en substituant, on trouve

$$0 = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta\varepsilon_k < \delta s_k$, $\delta\varepsilon_{k-2} < \delta s_{k-2}$,

$$\mu_k = \mu_{k-2}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-2}.$$

Or $r_{k+1} = r_k - 2\varepsilon_k$, donc, en vertu de la dernière équation,

$$r_{k+1} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

et, puisque $r_{k-1} = r_{k-2} - 2\varepsilon_{k-2}$, on en conclut

$$r_{k+1} = r_{k-2}.$$

On a

$$r_{k+1}^2 + s_k s_{k+1} = r_{k-2}^2 + s_{k-2} s_{k-3},$$

donc, puisque $r_{k+1} = r_{k-2}$, $s_k = s_{k-2}$, on a aussi

$$s_{k+1} = s_{k-3}.$$

En combinant cette équation avec celles-ci,

$$r_{k+1} = \mu_{k+1} s_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \quad r_{k-3} = \mu_{k-3} s_{k-3} + \varepsilon_{k-3},$$

on obtiendra

$$r_{k+1} - r_{k-3} = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-3}.$$

Or on a $r_{k+1} = r_{k-2}$, et $r_{k-2} = r_{k-3} - 2\varepsilon_{k-3}$, par conséquent

$$0 = s_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-3}.$$

Il s'ensuit que

$$\mu_{k+1} = \mu_{k-3}, \quad \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_{k-3}.$$

En continuant de cette manière, on voit aisément qu'on aura en général

$$r_{k+n} = r_{k-n-1}, \quad \mu_{k+n} = \mu_{k-n-2}, \quad s_{k+n} = s_{k-n-2}.$$

En posant dans la dernière équation $n = k - 1$, on trouvera

$$s_{2k-1} = s_{-1}.$$

Or il est clair que s_{-1} est la même chose que 1; car on a en général

$$R = r_m^2 + s_m s_{m-1},$$

donc en faisant $m = 0$,

$$R = r^2 + s s_{-1};$$

mais $R = r^2 + s$, donc $s_{-1} = 1$, et par conséquent

$$s_{2k-1} = 1.$$

II. Soit en second lieu $s_k = c s_{k-1}$, on a

$$r_k = \mu_k s_k + \varepsilon_k,$$
$$r_{k-1} = \mu_{k-1} s_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$

donc

$$r_k - r_{k-1} = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$

Or $r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}$, donc

$$0 = s_{k-1}(c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

Cette équation donne

$$\mu_k = \frac{1}{c}\mu_{k-1}, \quad \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-1}.$$

Donc des équations

$$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1}, \quad r_{k+1} - r_k = -2\varepsilon_k,$$

on déduit en ajoutant

$$r_{k+1} = r_{k-1}.$$

On a de plus

$$r_{k+1}^2 + s_k s_{k+1} = r_{k-1}^2 + s_{k-1} s_{k-2},$$

et, puisque $r_{k+1} = r_{k-1}$ et $s_k = c s_{k-1}$, on en conclut

$$s_{k+1} = \frac{1}{c} s_{k-2}.$$

En continuant de cette manière, on aura,

$$s_{2k} = c^{\pm 1},$$

c'est-à-dire que s_{2k} est indépendant de x.

Cette propriété des quantités s, s_1, s_2 etc. fait voir que l'équation $s_{2k} = a$ est identique avec l'équation $s_k = a^{\pm 1} s_{k-1}$ et que l'équation $s_{2k-1} = 1$ est identique avec l'équation $s_k = s_{k-2}$. Il s'ensuit que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k} = a$, on peut au lieu de cette équation poser $s_k = a^{\pm 1} s_{k-1}$, et que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k-1} = 1$, il suffit de faire $s_k = s_{k-2}$, ce qui abrége beaucoup le calcul.

16.

En vertu des équations (41) et (42) on peut donner à l'expression (40) une forme plus simple.

a) Lorsque m est pair et égal à $2k$, on a

$$(43)\quad \begin{cases} \int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + dr_1 + \cdots + dr_{k-1} + \tfrac{1}{2}dr_k - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{k-1}ds_{k-1}) \\ = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}} + \tfrac{1}{2}\log\frac{r_k+\sqrt{R}}{r_k-\sqrt{R}}. \end{cases}$$

b) Lorsque m est impair et égal à $2k-1$, on a

$$(44)\quad \begin{cases} \int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + dr_1 + \cdots + dr_{k-1} - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \cdots - \mu_{k-2}ds_{k-2} - \tfrac{1}{2}\mu_{k-1}ds_{k-1}) \\ = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}} + \cdots + \log\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}. \end{cases}$$

17.

Pour appliquer ce qui précède à un exemple, prenons l'intégrale

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}.$$

On a ici $\delta R = 4$, donc les fonctions $s, s_1, s_2, s_3 \ldots$ sont du premier degré, et par suite l'équation $s_m = \text{const.}$ ne donne qu'une seule équation de condition entre les quantités, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Faisant

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + ax + b)^2 + c + ex,$$

on aura

$$r = x^2 + ax + b, \quad s = c + ex.$$

Pour abréger le calcul, nous ferons $c = 0$. Dans ce cas on a $s = ex$, et par conséquent,

$$\mu = E\left(\frac{r}{s}\right) = E\left(\frac{x^2+ax+b}{ex}\right);$$

c'est-à-dire

$$\mu = \frac{x}{e} + \frac{a}{e}, \quad \varepsilon = b.$$

De plus

$$r_1 = r - 2\varepsilon = x^2 + ax + b - 2b = x^2 + ax - b,$$

$$s_1 = 1 + 4\varepsilon\mu = 1 + 4b\frac{x+a}{e} = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$\mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = E\frac{x^2+ax-b}{\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1} = \frac{e}{4b}x - \frac{e^2}{16b^2},$$

$$\varepsilon_1 = r_1 - \mu_1 s_1 = \frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b,$$

$$s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1 = \left(\frac{ae^2}{4b^2} + \frac{e^3}{16b^3}\right)x - \frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b\right).$$

Soit maintenant en premier lieu s_1 constant. Alors l'équation

$$s_1 = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1$$

donne

$$b = 0,$$

par conséquent,

$$r = x^2 + ax,$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr - \tfrac{1}{2}\mu ds) = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}},$$

ou, puisque $\mu = \frac{x+a}{e}$, $s = ex$,

$$\int \frac{(3x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax)^2+ex}} = \log\frac{x^2+ax+\sqrt{R}}{x^2+ax-\sqrt{R}}.$$

Cette intégrale se trouve aussi facilement en divisant le numérateur et le dénominateur de la différentielle par $\sqrt{x}$.

Soit en deuxième lieu s_2 constant. Dans ce cas la formule (43) donne, k étant égal à l'unité,

$$\int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + \tfrac{1}{2}dr_1 - \mu ds) = \log\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}} + \tfrac{1}{2}\log\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}.$$

Or l'équation $s_2 = \text{const.}$ donne $s_1 = es$, donc

$$\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1 = cex.$$

L'équation de condition sera donc $\frac{4ab}{e}+1=0$, c'est-à-dire

$$e=-4ab,$$

donc

$$R=(x^2+ax+b)^2-4abx.$$

De plus, ayant $\mu=\frac{x+a}{e}$, $r=x^2+ax+b$, $r_1=x^2+ax-b$, on aura la formule,

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}=\log\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}+\tfrac{1}{2}\log\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}.$$

Soit en troisième lieu s_3 constant. Cette équation donne $s=s_2$, c'est-à-dire

$$\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b=0.$$

On en tire

$$e=-2b(a\pm\sqrt{a^2+4b}).$$

La formule (44) donne par conséquent, puisque $k=2$,

$$\int\frac{(5x+\frac{3}{2}a\mp\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b})\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-2bx(a\pm\sqrt{a^2+4b})}}$$
$$=\log\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}+\log\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}.$$

Si par exemple $a=0$, $b=1$, on aura cette intégrale:

$$\int\frac{(5x-1)\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}=\log\frac{x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}{x^2+1-\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}+\log\frac{x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}{x^2-1-\sqrt{(x^2+1)^2-4x}}.$$

Soit en quatrième lieu s_4 constant. Cela donne $s_2=cs_1$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{ae^2}{4b^2}+\frac{e^3}{16b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right)=\frac{4cb}{e}x+\left(\frac{4ab}{e}+1\right)c.$$

On en tire, en comparant les coefficiens et éliminant ensuite c,

$$\frac{e}{16b^3}(e+4ab)^2=-\frac{e}{b}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right),$$

$$(e+4ab)^2=16b^3-e(e+4ab),$$
$$e^2+6abe=8b^3-8a^2b^2,$$
$$e=-3ab\mp\sqrt{8b^3+a^2b^2}=-b(3a\pm\sqrt{a^2+8b}).$$

En vertu de cette expression la formule (43) donne,

$$\int\frac{(6x+\frac{5}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b})\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-b(3a+\sqrt{a^2+8b})x}}=\log\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}$$
$$+\log\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}+\tfrac{1}{2}\log\frac{x^2+ax+\frac{1}{4}a(a-\sqrt{a^2+8b})+\sqrt{R}}{x^2+ax+\frac{1}{4}a(a-\sqrt{a^2+8b})-\sqrt{R}}.$$

Si l'on fait par exemple $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, on obtiendra

$$\int\frac{(x+\frac{1}{6})\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}=\tfrac{1}{6}\log\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}$$
$$+\tfrac{1}{6}\log\frac{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}+\tfrac{1}{12}\log\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}{x^2-\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}.$$

On peut continuer de cette manière et trouver un plus grand nombre d'intégrales. Ainsi par exemple l'intégrale

$$\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{14}\right)dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2x}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes.

Nous avons ici cherché les intégrales de la forme $\int\frac{\varrho\,dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par une fonction logarithmique de la forme $\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$. On pourrait rendre le problème encore plus général, et chercher en général toutes les intégrales de la forme ci-dessus qui pourraient s'exprimer d'une manière quelconque par des logarithmes; mais on ne trouverait pas d'intégrales nouvelles. On a en effet ce théorème remarquable:

„Lorsqu'une intégrale de la forme $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des „fonctions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut „toujours l'exprimer de la manière suivante:

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

„où A est constant, et p et q des fonctions entièrés de x."

Je démontrerai ce théorème dans une autre occasion.

XII.

MÉMOIRE SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CLASSE TRÈS-ÉTENDUE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Présenté à l'Académie des sciences à Paris le 30 Octobre 1826. Mémoires présentés par divers savants t. VII, Paris 1841.

Les fonctions transcendantes considérées jusqu'à présent par les géomètres sont en très-petit nombre. Presque toute la théorie des fonctions transcendantes se réduit à celle des fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, fonctions qui, dans le fond, ne forment qu'une seule espèce. Ce n'est que dans les derniers temps qu'on a aussi commencé à considérer quelques autres fonctions. Parmi celles-ci, les transcendantes elliptiques, dont M. Legendre a developpé tant de propriétés remarquables et élégantes, tiennent le premier rang. L'auteur a considéré, dans le mémoire qu'il a l'honneur de présenter à l'Académie, une classe très-étendue de fonctions, savoir: toutes celles dont les dérivées peuvent être exprimées au moyen d'équations algébriques, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, et il a trouvé pour ces fonctions des propriétés analogues à celles des fonctions logarithmiques et elliptiques.

Une fonction dont la dérivée est rationnelle a, comme on le sait, la propriété qu'on peut exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, quelles que soient d'ailleurs les variables de ces fonctions. De même une fonction elliptique quelconque, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée ne contient d'autres irrationnalités qu'un radical du second degré, sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, aura encore la propriété qu'on peut exprimer une somme quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables de ces fonctions une certaine relation algébrique. Cette analogie entre les propriétés de ces fonctions a conduit l'auteur à chercher s'il ne serait pas possible de trouver des propriétés analogues de fonctions plus générales, et il est parvenu au théorème suivant:

„Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines „d'une *même équation algébrique*, dont tous les coefficients sont des fonctions „*rationnelles* d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un „nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction *algébrique* et „*logarithmique*, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en „question un certain nombre de relations *algébriques*.“

Le nombre de ces relations ne dépend nullement du nombre des fonctions, mais seulement de la nature des fonctions particulières qu'on considère. Ainsi, par exemple, pour une fonction elliptique ce nombre est 1; pour une fonction dont la dérivée ne contient d'autres irrationnalités qu'un radical du second degré, sous lequel la variable ne passe pas le cinquième ou sixième degré, le nombre des relations nécessaires est 2, et ainsi de suite.

Le même théorème subsiste encore lorsqu'on suppose les fonctions multipliées par des nombres rationnels quelconques positifs ou négatifs.

On en déduit encore le théorème suivant:

„On peut toujours exprimer la somme d'un nombre *donné* de fonctions, „qui sont multipliées chacune par un nombre rationnel, et dont les variables „sont arbitraires, par une somme semblable en nombre *déterminé* de fonctions, „dont les variables sont des fonctions *algébriques* des variables des fonctions „données.“

A la fin du mémoire on donne l'application de la théorie à une classe particulière de fonctions, savoir, à celles qui sont exprimées comme intégrales de formules différentielles, qui ne contiennent d'autres irrationnalités qu'un radical quelconque.

1.

Soit

$$(1) \qquad 0 = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \cdots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = \chi y$$

une équation algébrique quelconque, dont tous les coefficients sont des fonc-

tions rationnelles et entières d'une même quantité variable x. Cette équation, supposée irréductible, donne pour la fonction y un nombre n de formes différentes; nous les désignerons par $y', y'' \ldots y^{(n)}$, en conservant la lettre y pour indiquer l'une quelconque d'entre elles.

Soit de même

$$(2) \qquad \theta y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1}$$

une fonction rationnelle entière de y et x, en sorte que les coefficients q_0, $q_1, q_2 \ldots q_{n-1}$, soient des fonctions entières de x. Un certain nombre des coefficients des diverses puissances de x dans ces fonctions seront supposés indéterminés; nous les désignerons par a, a', a'', etc.

Cela posé, si l'on met dans la fonction θy, au lieu de y, successivement $y', y'' \ldots y^{(n)}$, et si l'on désigne par r le produit de toutes les fonctions ainsi formées, c'est-à-dire si l'on fait

$$(3) \qquad r = \theta y' . \theta y'' \ldots . \theta y^{(n)},$$

la quantité r sera, comme on sait par la théorie des équations algébriques, une fonction rationnelle et entière de x et des quantités a, a', a'', etc.

Supposons que l'on ait

$$(4) \qquad r = F_0 x . Fx,$$

$F_0 x$ et Fx étant deux fonctions entières de x, dont la première, $F_0 x$, est indépendante des quantités a, a', a'', etc.; et soit

$$(5) \qquad Fx = 0.$$

Cette équation, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités a, a', a'', etc., donnera x en fonction de ces quantités, et on aura, pour cette fonction, autant de formes que l'équation $Fx = 0$ a de racines. Désignons ces racines par $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, et par x, l'une quelconque d'entre elles.

L'équation $Fx = 0$, que nous venons de former, entraîne nécessairement la suivante $r = 0$, et celle-ci en amène une autre de la forme

$$(6) \qquad \theta y = 0.$$

En mettant dans cette dernière, au lieu de x, successivement $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, et désignant les valeurs correspondantes de y par $y_1, y_2 \dots y_\mu$, on aura les μ équations suivantes:

$$\theta y_1 = 0,\ \theta y_2 = 0 \dots \theta y_\mu = 0. \tag{7}$$

2.

Cela posé, je dis que si l'on désigne par $f(x, y)$ une fonction quelconque rationnelle de x et y, et si l'on fait

$$dv = f(x_1, y_1)dx_1 + f(x_2, y_2)dx_2 + \cdots + f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu, \tag{8}$$

la différentielle dv sera une fonction *rationnelle* des quantités a, a', a'', etc.

En effet, en combinant les équations $\theta y = 0$ et $\chi y = 0$, on en peut tirer la valeur de y, exprimée en fonction rationnelle de x et des quantités a, etc.; en désignant cette fonction par ϱ, on aura donc

$$y = \varrho \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(x, \varrho). \tag{9}$$

Mais en différentiant l'équation $Fx = 0$, on aura

$$F'x \, . \, dx + \delta Fx = 0,$$

en désignant, pour abréger, par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x seul, et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités a, a', a'', etc. De là on tire

$$dx = -\frac{\delta Fx}{F'x}; \tag{10}$$

et par conséquent

$$f(x, y)dx = -\frac{f(x, \varrho)}{F'x}\delta Fx = \varphi_2 x, \tag{11}$$

où il est clair que $\varphi_2 x$ est une fonction rationnelle de x, a, a', a'', etc. Au moyen de cette expression de la différentielle $f(x, y)dx$, la valeur de dv deviendra

$$dv = \varphi_2 x_1 + \varphi_2 x_2 + \cdots + \varphi_2 x_\mu.$$

Or, le second membre de cette équation est une fonction rationnelle des

quantités a, a', $a'' \dots x_1, x_2 \dots x_\mu$, et en outre symétrique par rapport à $x_1, x_2 \dots x_\mu$; donc dv peut s'exprimer par une fonction *rationnelle* de a, a', $a'' \dots$ et des coefficients de l'équation $Fx = 0$; mais ces coefficients sont eux-mêmes des fonctions *rationnelles* de a, a', etc.; donc dv le sera de même, comme on vient de le dire.

Si maintenant dv est une fonction différentielle rationnelle des quantités a, a' $a'' \dots$ son intégrale ou la quantité v sera une fonction algébrique et logarithmique de a, a', $a'' \dots$. L'équation (8) donnera donc, en intégrant entre certaines limites des quantités a, a', $a'' \dots$

$$\int f(x_1, y_1)dx_1 + \int f(x_2, y_2)dx_2 + \cdots + \int f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu = v, \tag{12}$$

ou bien, en faisant

$$\int f(x_1, y_1)dx_1 = \psi_1 x_1;\ \int f(x_2, y_2)dx_2 = \psi_2 x_2 \dots \int f(x_\mu, y_\mu)dx_\mu = \psi_\mu x_\mu, \tag{13}$$

$$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \psi_3 x_3 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = v. \tag{14}$$

Voilà la propriété générale des fonctions $\psi_1 x_1$, $\psi_2 x_2$, etc., que nous avons énoncée au commencement de ce mémoire.

3.

Les formes des fonctions $\psi_1 x_1$, $\psi_2 x_2$, etc., dépendent, en vertu des équations (13), de celles des fonctions $y_1, y_2 \dots y_\mu$. Ces dernières ne peuvent être choisies arbitrairement parmi celles qui satisfont à l'équation $\chi y = 0$; elles doivent en outre satisfaire aux équations (7); mais comme on a plusieurs variables indépendantes, a, a', $a'' \dots$ il est clair qu'on peut établir entre les formes des fonctions $y_1, y_2 \dots y_\mu$, un nombre de relations égal à celui de ces variables. On peut donc choisir arbitrairement les formes d'un certain nombre de fonctions $y_1, y_2 \dots y_\mu$; mais alors celles des autres fonctions dépendront, en vertu des équations (7), de celles-ci et de la grandeur des quantités a, a', ... Il se peut donc que la quantité constante d'intégration contenue dans la fonction v change de valeur pour des valeurs différentes des quantités a, a', $a'' \dots$; mais par la nature de cette quantité, elle doit rester la même pour des valeurs de a, a', $a'' \dots$ contenues entre certaines limites.

Les fonctions $x_1, x_2 \dots x_\mu$, sont déterminées par l'équation $Fx = 0$;

cette équation dépend de la forme de la fonction θy; mais comme on peut varier celle-ci d'une infinité de manières, il s'ensuit que l'équation (14) est susceptible d'une infinité de formes différentes pour la même espèce de fonctions. Les fonctions $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, ont encore cela de très-remarquable que les mêmes valeurs répondent à une infinité de fonctions différentes. En effet la forme de la fonction $f(x, y)$, de laquelle ces quantités sont entièrement indépendantes, est assujettie à la seule condition d'être une fonction rationnelle de x et y.

4.

Nous avons montré dans ce qui précède comment on peut toujours former la différentielle rationnelle dv; mais comme la méthode indiquée sera en général très-longue, et pour des fonctions un peu composées, presque impraticable, je vais en donner une autre, par laquelle on obtiendra immédiatement l'expression de la fonction v dans tous les cas possibles.

On a par l'équation (3)

$$r = \theta y' . \theta y'' \ldots \theta y^{(n)},$$

donc, en différentiant par rapport aux quantités a, a', a'', etc., on obtiendra

$$\delta r = \frac{r}{\theta y'} \delta \theta y' + \frac{r}{\theta y''} \delta \theta y'' + \cdots + \frac{r}{\theta y^{(n)}} \delta \theta y^{(n)};$$

or, on a $\theta y = 0$, donc le second membre de l'équation précédente se réduira à $\frac{r}{\theta y} \delta \theta y$, et l'on aura par conséquent

$$\delta r = \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

Maintenant on a

$$r = F_0 x . F x,$$

où $F_0 x$ est indépendante de a, a', a'', etc.; donc, en différentiant, on obtiendra

$$\delta r = F_0 x . \delta F x$$

et, par conséquent, en substituant et divisant par $F_0 x$, on trouvera

$$\delta F x = \frac{r . \delta \theta y}{F_0 x . \theta y}.$$

Par là, la valeur de

$$dx = -\frac{\delta F x}{F' x}$$

deviendra

$$dx = -\frac{1}{F_0 x . F' x} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y,$$

et en multipliant par $f(x, y)$

$$f(x, y)\, dx = -\frac{1}{F_0 x . F' x} f(x, y) \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

En remarquant maintenant que $\frac{r}{\theta y^{(k)}}$ s'évanouit, car autrement on aurait $y^{(k)} = y$, il est clair que l'expression de $f(x, y)\, dx$ peut s'écrire comme il suit:

$$f(x, y)\, dx =$$
$$-\frac{1}{F_0 x . F' x} \left\{ f(x, y') \frac{r}{\theta y'} \delta \theta y' + f(x, y'') \frac{r}{\theta y''} \delta \theta y'' + \cdots + f(x, y^{(n)}) \frac{r}{\theta y^{(n)}} \delta \theta y^{(n)} \right\}.$$

Pour abréger, nous désignerons dans la suite par $\Sigma F_1 y$ toute fonction de la forme

$$F_1 y' + F_1 y'' + F_1 y''' + \cdots + F_1 y^{(n)};$$

et par là la valeur précédente de $f(x, y)\, dx$ deviendra

$$(15) \qquad f(x, y)\, dx = -\frac{1}{F_0 x . F' x} \Sigma f(x, y) \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

Cela posé, soit $\chi' y$ la dérivée de χy prise par rapport à y seul, le produit $f(x, y)\, \chi' y$ sera une fonction rationnelle de x et y. On peut donc faire

$$f(x, y)\, \chi' y = \frac{P_1 y}{P y},$$

où P et P_1 sont deux fonctions entières de x et y. Mais si l'on désigne par T le produit $Py' . Py'' \ldots Py^{(n)}$, on aura

$$\frac{P_1 y}{P y} = \frac{1}{T} P_1 y \frac{T}{P y},$$

or $\frac{T}{Py}$ peut toujours s'exprimer par une fonction entière de x et y, et T par une fonction entière de x, donc on aura

$$\frac{P_1 y}{P y} = \frac{T_1}{T},$$

où T_1 est une fonction entière de x et y; mais toute fonction entière de x et y peut se mettre sous la forme

$$(16) \qquad t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \cdots + t_{n-1} y^{n-1} = f_1(x, y),$$

où $t_0, t_1 \ldots t_{n-1}$, sont des fonctions entières de x seul. On peut donc supposer

$$f(x, y)\, \chi' y = \frac{f_1(x, y)}{f_2 x},$$

$f_2 x$ étant une fonction entière de x sans y.

De là on tire

$$(17) \qquad f(x, y) = \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y}.$$

En substituant maintenant cette valeur de $f(x, y)$ dans l'expression de $f(x, y)\, dx$ trouvée plus haut, il viendra

$$(18) \qquad \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y}\, dx = -\frac{1}{F_0 x \,.\, F' x \,.\, f_2 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y.$$

Dans le second membre de cette équation la quantité $f_1(x, y) \frac{r}{\theta y}$ est une fonction entière par rapport à x et y; on peut donc supposer

$$f_1(x, y) \frac{r}{\theta y} \delta \theta y = R^{(1)} y + R x \,.\, y^{n-1},$$

où $R^{(1)} y$ est une fonction entière de x et y, dans laquelle les puissances de y ne montent qu'au $(n-2)^e$ degré; Rx étant une fonction entière de x sans y. On aura donc

$$\Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y = \Sigma \frac{R^{(1)} y}{\chi' y} + R x \,.\, \Sigma \frac{y^{n-1}}{\chi' y}.$$

Or, on a

$$\chi' y' = (y' - y'')(y' - y''') \cdots (y' - y^{(n)}),$$
$$\chi' y'' = (y'' - y')(y'' - y''') \cdots (y'' - y^{(n)}), \text{ etc.};$$

donc, d'après des formules connues,

$$\Sigma \frac{R^{(1)} y}{\chi' y} = 0; \quad \Sigma \frac{y^{n-1}}{\chi' y} = 1.$$

Par conséquent

$$(19) \qquad \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y = R x.$$

La fonction $\Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta \theta y$ peut donc s'exprimer par une fonction *entière* de x seul sans y. Les quantités a, a', a'' etc. d'ailleurs y entrent rationnellement.

Par là l'équation (18) donnera

$$(20) \qquad \frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y}\, dx = -\frac{R x}{f_2 x \,.\, F_0 x \,.\, F' x}.$$

En mettant dans cette équation au lieu de x successivement $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, on obtiendra μ équations qui, ajoutées ensemble, donneront la suivante:

$$(21) \qquad dv = \frac{f_1(x_1, y_1) dx_1}{f_2 x_1 \cdot \chi' y_1} + \frac{f_1(x_2, y_2) dx_2}{f_2 x_2 \cdot \chi' y_2} + \cdots + \frac{f_1(x_\mu, y_\mu) dx_\mu}{f_2 x_\mu \cdot \chi' y_\mu} =$$
$$-\frac{R x_1}{f_2 x_1 \,.\, F_0 x_1 \,.\, F' x_1} - \frac{R x_2}{f_2 x_2 \,.\, F_0 x_2 \,.\, F' x_2} - \cdots - \frac{R x_\mu}{f_2 x_\mu \,.\, F_0 x_\mu \,.\, F' x_\mu}.$$

Si donc on désigne par $\Sigma F_1 x$ une somme de la forme

$$F_1 x_1 + F_1 x_2 + F_1 x_3 + \cdots + F_1 x_\mu,$$

l'expression de dv pourra s'écrire comme il suit:

$$(22) \qquad dv = -\Sigma \frac{R x}{f_2 x \,.\, F_0 x \,.\, F' x}.$$

Cela posé, soient

$$(23) \qquad \begin{cases} F_0 x = (x - \beta_1)^{\mu_1} (x - \beta_2)^{\mu_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{\mu_\alpha}, \\ f_2 x = (x - \beta_1)^{m_1} (x - \beta_2)^{m_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{m_\alpha} A, \\ R x = (x - \beta_1)^{k_1} (x - \beta_2)^{k_2} \ldots (x - \beta_\alpha)^{k_\alpha} R_1 x, \end{cases}$$

$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\alpha$, étant des quantités indépendantes de $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc.; $\mu_1, \mu_2 \ldots m_1, m_2 \ldots k_1, k_2$, etc., étant des nombres entiers, zéro y compris; et $R_1 x$ étant une fonction entière de x.

En substituant ces valeurs de $F_0 x$, $f_2 x$, Rx dans l'expression de dv, elle deviendra

$$dv = -\Sigma \frac{R_1 x}{AF'x.(x-\beta_1)^{\mu_1+m_1-k_1}(x-\beta_2)^{\mu_2+m_2-k_2}\ldots(x-\beta_\alpha)^{\mu_\alpha+m_\alpha-k_\alpha}},$$

ou bien en faisant, pour abréger,

(24) $$\mu_1 + m_1 - k_1 = \nu_1,\ \mu_2 + m_2 - k_2 = \nu_2, \ldots \mu_\alpha + m_\alpha - k_\alpha = \nu_\alpha,$$

(25) $$A(x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\cdots(x-\beta_\alpha)^{\nu_\alpha} = \theta_1 x:$$

(26) $$dv = -\Sigma \frac{R_1 x}{\theta_1 x . F'x}.$$

Maintenant on peut toujours supposer

$$\frac{R_1 x}{\theta_1 x} = R_2 x + \frac{R_3 x}{\theta_1 x},$$

où $R_2 x$ et $R_3 x$ sont deux fonctions entières de x, le degré de la dernière étant plus petit que celui de la fonction $\theta_1 x$; en substituant, il viendra donc

(27) $$dv = -\Sigma \frac{R_2 x}{F'x} - \Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F'x}.$$

La fonction $-\Sigma \frac{R_2 x}{F'x}$ peut se trouver de la manière suivante.

Puisque $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ sont les racines de l'équation $Fx = 0$, on aura, en désignant par α une quantité indéterminée quelconque,

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha - x_1}\,\frac{1}{F'x_1} + \frac{1}{\alpha - x_2}\,\frac{1}{F'x_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha - x_\mu}\,\frac{1}{F'x_\mu},$$

c'est-à-dire

(28) $$\frac{1}{F\alpha} = \Sigma \frac{1}{\alpha - x}\,\frac{1}{F'x},$$

d'où l'on tire, en développant $\frac{1}{\alpha - x}$ suivant les puissances descendantes de α,

$$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Sigma\frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2}\Sigma\frac{x}{F'x} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{m+1}}\Sigma\frac{x^m}{F'x} + \cdots,$$

d'où il suit que $\Sigma\frac{x^m}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{m+1}}$ dans le développement de la fonction $\frac{1}{F\alpha}$, ou, ce qui revient au même, à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^m}{F\alpha}$. En désignant donc par $\Pi F_1 x$ le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement d'une fonction quelconque $F_1 x$, suivant les puissances descendantes de x, on aura

$$\Sigma\frac{x^m}{F'x} = \Pi\frac{x^m}{Fx}.$$

De là il suit que

$$\Sigma\frac{F_1 x}{F'x} = \Pi\frac{F_1 x}{Fx},$$

en désignant par $F_1 x$ une fonction quelconque entière de x. On aura donc, en mettant $R_2 x$,

(29) $$\Sigma\frac{R_2 x}{F'x} = \Pi\frac{R_2 x}{Fx};$$

mais ayant

$$\frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx} = \frac{R_3 x}{\theta_1 x . Fx} + \frac{R_2 x}{Fx},$$

on aura aussi

$$\Pi\frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx} = \Pi\frac{R_3 x}{\theta_1 x . Fx} + \Pi\frac{R_2 x}{Fx}.$$

Or, le degré de $R_3 x$ étant moindre que celui de $\theta_1 x$, il est clair qu'on aura

$$\Pi\frac{R_3 x}{\theta_1 x . Fx} = 0,$$

donc

$$\Sigma\frac{R_2 x}{F'x} = \Pi\frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx}.$$

Le second terme du second membré de l'équation (27), savoir la quantité $\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x}$, se trouve comme il suit:

Soit

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\beta_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-\beta_1)^2} + \cdots + \frac{A_1^{(\nu_1)}}{(x-\beta_1)^{\nu_1}}$$
$$+ \frac{A_2^{(1)}}{x-\beta_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-\beta_2)^2} + \cdots + \frac{A_2^{(\nu_2)}}{(x-\beta_2)^{\nu_2}} + \text{etc.};$$

ou bien, pour abréger,

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \left\{ \frac{A_1}{x-\beta} + \frac{A_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{A_\nu}{(x-\beta)^\nu} \right\},$$

on aura

$$A_1 = \frac{d^{\nu-1} p}{\Gamma \nu \,.\, d\beta^{\nu-1}}, \quad A_2 = \frac{d^{\nu-2} p}{\Gamma(\nu-1) d\beta^{\nu-2}}, \; \cdots \; A_\nu = p,$$

où

$$p = \frac{(x-\beta)^\nu R_3 x}{\theta_1 x}$$

pour $x=\beta$; c'est-à-dire

$$p = \frac{\Gamma(\nu+1) R_3 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta},$$

en désignant par $\theta_1^{(\nu)} x$ la ν^e dérivée de la fonction $\theta_1 x$ par rapport à x, et par $\Gamma(\nu+1)$ le produit $1.\,2.\,3 \ldots (\nu-1).\nu$.

En substituant ces valeurs des quantités $A_1, A_2 \ldots A_\nu$, il viendra

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\nu-1} p}{(x-\beta) d\beta^{\nu-1}} + (\nu-1) \frac{d^{\nu-2} p}{(x-\beta)^2 d\beta^{\nu-2}} \\ + (\nu-1)(\nu-2) \frac{d^{\nu-3} p}{(x-\beta)^3 d\beta^{\nu-3}} + \text{etc.} \end{array} \right\} \frac{1}{\Gamma \nu}.$$

Maintenant on a, en désignant $\frac{1}{x-\beta}$ par q,

$$\frac{1}{(x-\beta)^2} = \frac{dq}{d\beta}, \quad \frac{1}{(x-\beta)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2 q}{d\beta^2}, \; \cdots \; \frac{1}{(x-\beta)^\nu} = \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1} q}{d\beta^{\nu-1}};$$

donc l'expression de $\frac{R_3 x}{\theta_1 x}$ peut s'écrire comme il suit:

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \frac{1}{\Gamma \nu} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\nu-1} p}{d\beta^{\nu-1}} q + \frac{\nu-1}{1} \frac{d^{\nu-2} p}{d\beta^{\nu-2}} \frac{dq}{d\beta} \\ + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2} \frac{d^{\nu-3} p}{d\beta^{\nu-3}} \frac{d^2 q}{d\beta^2} + \cdots + p \frac{d^{\nu-1} q}{d\beta^{\nu-1}} \end{array} \right\}.$$

Or la quantité entre les accolades est égale à $\frac{d^{\nu-1}(pq)}{d\beta^{\nu-1}}$, donc

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1}(pq)}{d\beta^{\nu-1}},$$

d'où l'on tirera, en substituant les valeurs de p et q, et remarquant que $\Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma \nu$,

$$\frac{R_3 x}{\theta_1 x} = \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_3 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta \,.\, (x-\beta)} \right\}.$$

En substituant cette expression au lieu de $\frac{R_3 x}{\theta_1 x}$ dans la fonction $\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x}$, il viendra

$$(30) \qquad \Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x} = \Sigma \frac{1}{F'x} \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_3 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta \,.\, (x-\beta)} \right\};$$

ou bien

$$(31) \qquad \Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x} = \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_3 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta} \Sigma \frac{1}{(x-\beta) F'x} \right\}.$$

Or, comme nous avons vu plus haut (28),

$$\Sigma \frac{1}{(x-\beta) F'x} = -\frac{1}{F\beta},$$

donc

$$\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x \,.\, F'x} = -\Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_3 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta \,.\, F\beta} \right\};$$

mais l'équation

$$\frac{R_1 x}{\theta_1 x} = R_2 x + \frac{R_3 x}{\theta_1 x}$$

donne, si l'on multiplie les deux membres par $(x-\beta)^\nu$, et qu'on fasse ensuite $x=\beta$,

$$\frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta} = \frac{R_3\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta},$$

donc, en substituant,

$$(32) \qquad \Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F'x} = -\Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta . F\beta} \right\}.$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs de $\Sigma \frac{R_2 x}{F'x}$ et $\Sigma \frac{R_3 x}{\theta_1 x . F'x}$, l'équation (27) donnera, pour la différentielle dv, l'expression suivante,

$$(33) \qquad dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx} + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta . F\beta} \right\},$$

ou bien

$$(34) \qquad dv = -\Pi \frac{R_1 x}{\theta_1 x . Fx} + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{R_1 x}{\theta_1^{(\nu)} x . Fx} \right\}$$

$$(x = \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\alpha).$$

Maintenant on a (19)

$$Rx = \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{r}{\theta y} \delta\theta y = F_0 x . Fx . \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y}$$

et (23)

$$R_1 x = Rx . (x-\beta_1)^{-k_1} (x-\beta_2)^{-k_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{-k_\alpha};$$

donc en faisant, pour abréger,

$$(35) \qquad \begin{aligned} &F_0 x . (x-\beta_1)^{-k_1} (x-\beta_2)^{-k_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{-k_\alpha} \\ &\qquad = (x-\beta_1)^{\mu_1-k_1} (x-\beta_2)^{\mu_2-k_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{\mu_\alpha-k_\alpha} = F_2 x: \end{aligned}$$

$$R_1 x = F_2 x . Fx . \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y},$$

et en substituant cette valeur de $R_1 x$ dans l'expression précédente de dv, on obtiendra

$$(36) \quad dv = -\Pi \frac{F_2 x}{\theta_1 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y} + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \frac{\delta\theta y}{\theta y} \right\}.$$

Sous cette forme la valeur de dv est immédiatement intégrable, car $F_2 x$, $\theta_1 x$, $f_1(x, y)$ et $\chi' y$ sont toutes indépendantes des quantités $a, a', a'' \ldots$, auxquelles la différentiation se rapporte. On aura donc, en intégrant, pour v l'expression suivante:

$$(37) \quad v = C - \Pi \frac{F_2 x}{\theta_1 x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}} \left\{ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y \right\}$$

$$(x = \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\alpha);$$

ou bien en faisant, pour abréger,

$$(38) \qquad \begin{aligned} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{f_2 x . \chi' y} \log \theta y &= \varphi x, \\ \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_1(x, y)}{\chi' y} \log \theta y &= \varphi_1 x, \end{aligned}$$

et remarquant que d'après (23), (24), (25) et (35),

$$F_2 x = \frac{\theta_1 x}{f_2 x}:$$

$$(39) \qquad v = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}};$$

voilà l'expression de la fonction v dans tous les cas possibles. Elle contient, comme on le voit, en général, des fonctions logarithmiques; mais dans des cas particuliers elle peut aussi devenir seulement algébrique et même constante.

En substituant cette valeur au lieu de v dans la formule (14), il viendra

$$(40) \qquad \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = C - \Pi \varphi x + \Sigma' \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}},$$

ou bien pour abréger:

$$(41) \qquad \Sigma \psi x = C - \Pi \varphi x + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1} \varphi_1 x}{dx^{\nu-1}}$$

lorsqu'on fait

$$(42) \qquad \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\mu x_\mu = \Sigma \psi x \quad \text{et} \quad \Sigma' = \Sigma.$$

5.

Nous avons supposé dans ce qui précède que la fonction r aurait pour facteur la fonction

$$F_0 x = (x-\beta_1)^{\mu_1} (x-\beta_2)^{\mu_2} \ldots (x-\beta_\alpha)^{\mu_\alpha}.$$

Sinon tous les exposants $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_\alpha$ sont égaux à zéro, il en résultera nécessairement certaines relations entre les coefficients des fonctions q_0, q_1, q_2 $\ldots q_{n-1}$, relations qui peuvent toujours s'exprimer par des équations linéaires entre ces coefficients; car si $r=0$ pour $x=\beta$, il faut aussi qu'on ait une équation de la forme $\theta y=0$ pour la même valeur de x; mais cette équation est linéaire. En général donc la fonction r n'aura pas de facteur comme $F_0 x$, c'est-à-dire indépendant des quantités a, a', $a'' \ldots$. Ce cas mérite d'être remarqué:

Ayant (19)

$$Rx=\Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\frac{r}{\theta y}\delta\theta y,$$

on aura en général, si $F_0 x=1$, $k_1=k_2=k_3=\cdots=k_\alpha=0$ (on peut faire la même supposition dans tous les cas); on aura donc en vertu de (35) et (25)

$$F_2 x=1,\ \ \theta_1 x=F_2 x.f_2 x=f_2 x,$$

la valeur (38) de $\varphi_1 x$ deviendra donc (en remarquant que $\nu_1=m_1$, $\nu_2=m_2$, etc., et désignant ν par m)

$$\varphi_1 x=\frac{1}{f_2^{(m)}x}\Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y,$$

et par conséquent la formule (41) (en désignant par B la valeur de y pour $x=\beta$)

$$(43)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{f_2 x.\chi' y}=\begin{cases} C-\Pi\Sigma\dfrac{f_1(x,y)}{f_2 x.\chi' y}\log\theta y \\ +\Sigma m\dfrac{d^{m-1}}{d\beta^{m-1}}\left(\dfrac{1}{f_2^{(m)}\beta}\Sigma\dfrac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}\log\theta B\right).\end{cases}$$

Pour le cas particulier où $f_2 x=(x-\beta)^m$, on aura $f_2^{(m)}\beta=1.2\ldots m$, donc en substituant

$$(44)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{(x-\beta)^m\chi' y}=\begin{cases} C-\Pi\Sigma\dfrac{f_1(x,y)}{(x-\beta)^m\chi' y}\log\theta y \\ +\dfrac{1}{1.2\ldots(m-1)}\dfrac{d^{m-1}}{d\beta^{m-1}}\left(\Sigma\dfrac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}\log\theta B\right).\end{cases}$$

Si $m=1$, il vient

$$(45)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{(x-\beta)\chi' y}=C-\Sigma\Pi\frac{f_1(x,y)}{(x-\beta)\chi' y}\log\theta y+\Sigma\frac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}\log\theta B,$$

et si $m=0$,

$$(46)\qquad \Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{\chi' y}=C-\Sigma\Pi\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y.$$

Dans la formule (43), le second membre est en général une fonction des quantités a, a', a'', etc. Si on le suppose égal à une constante, il en résultera donc en général certaines relations entre ces quantités; mais il y a aussi certains cas pour lesquels le second membre se réduit à une constante, quelles que soient d'ailleurs les valeurs des quantités a, a' a'', etc. Cherchons ces cas:

D'abord il est évident que la fonction $f_2 x$ doit être constante, car dans le cas contraire le second membre contiendrait nécessairement les quantités a, a', $a'' \ldots$, vu les valeurs arbitraires de ces quantités.

En faisant donc $f_2 x=1$, il viendra

$$\Sigma\int\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}dx=C-\Sigma\Pi\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y.$$

Or, en observant que ces quantités a, a', a'', ... sont toutes arbitraires, il est clair que la fonction $\Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y$, développée suivant les puissances descèndantes de x, aura la forme suivante:

$$R\log x+A_0 x^{\mu_0}+A_1 x^{\mu_0-1}+\cdots+A_{\mu_0}+\frac{A_{\mu_0+1}}{x}+\frac{A_{\mu_0+2}}{x^2}+\cdots,$$

R étant une fonction de x indépendante de a, a', a'', etc., μ_0 un nombre entier, et A_0, A_1, ... A_{μ_0}, A_{μ_0+1}, etc., des fonctions de a, a', a'', etc.; donc pour que la fonction dont il s'agit soit constante, il faut que μ_0 soit moindre que -1; et par conséquent la plus grande valeur de ce nombre est -2.

Cela posé, en désignant par le symbole hR le plus haut exposant de x dans le développement d'une fonction quelconque R de cette quantité, suivant les puissances descendantes, il est clair que μ_0 sera égal au nombre entier le plus grand contenu dans les nombres:

$$h\frac{f_1(x,y')}{\chi' y'},\ \ h\frac{f_1(x,y'')}{\chi' y''},\ \ \ldots h\frac{f_1(x,y^{(n)})}{\chi' y^{(n)}};$$

il faut donc que tous ces nombres soient inférieurs à l'unité prise négativement.

Or, si $\frac{R}{R_1}$ est une fonction de x, on aura, comme il est aisé de le voir,

$$h\frac{R}{R_1}=hR-hR_1,$$

par conséquent

$$(47)\qquad hf_1(x,y')<h\chi'y'-1,\ hf_1(x,y'')<h\chi'y''-1,\ \dots hf_1(x,y^{(n)})<h\chi'y^{(n)}-1.$$

De ces inégalités on déduira facilement dans chaque cas particulier la forme la plus générale de la fonction $f_1(x, y)$.

Comme on a

$$\chi'y'=(y'-y'')(y'-y''')\cdots(y'-y^{(n)})$$
$$\chi'y''=(y''-y')(y''-y''')\cdots(y''-y^{(n)}),\ \text{etc.},$$

il s'ensuit que

$$(48)\qquad \begin{aligned} h\chi'y'&=h(y'-y'')+h(y'-y''')+\cdots+h(y'-y^{(n)})\\ h\chi'y''&=h(y''-y')+h(y''-y''')+\cdots+h(y''-y^{(n)}),\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Supposons, ce qui est permis, que l'on ait

$$(49)\qquad hy'\geqq hy'',\ hy''\geqq hy''',\ hy'''\geqq hy'''',\ \dots hy^{(n-1)}\geqq hy^{(n)},$$

de sorte que les quantités hy', hy'', hy''', ... suivent l'ordre de leurs grandeurs en commençant par la plus grande. Alors on aura, en général, excepté quelques cas particuliers que je me dispense de considérer:

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} &h(y'-y'')=hy',\ h(y'-y''')=hy',\ h(y'-y'''')=hy'\ \dots h(y'-y^{(n)})=hy',\\ &h(y''-y')=hy',\ h(y''-y''')=hy'',\ h(y''-y'''')=hy''\ \dots h(y''-y^{(n)})=hy'',\\ &h(y'''-y')=hy',\ h(y'''-y'')=hy'',\ h(y'''-y'''')=hy'''\ \dots h(y'''-y^{(n)})=hy''',\\ &\text{etc., etc.}\end{aligned}\right.$$

Si ces équations ont lieu, on se convaincra sans peine, en supposant

$$(51)\qquad f_1(x,y)=t_0+t_1y+t_2y^2+\cdots+t_{n-1}y^{n-1},$$

que les inégalités (47) entraînent nécessairement les suivantes:

$$(52)\qquad h(t_my'^m)<h\chi'y'-1,\ h(t_my''^m)<h\chi'y''-1,\ h(t_my'''^m)<h\chi'y'''-1,\ \dots$$

m étant l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ... $n-1$.

D'où l'on tire, en remarquant que

$$h(t_my^m)=ht_m+hy^m=ht_m+mhy,$$

les inégalités

$$ht_m<h\chi'y'-mhy'-1,\ ht_m<h\chi'y''-mhy''-1,\ \dots ht_m<h\chi'y^{(n)}-mhy^{(n)}-1.$$

Or, au moyen des équations (48) et (50), on aura

$$\begin{aligned}
h\chi'y'-mhy'-1&=(n-m-1)hy'-1,\\
h\chi'y''-mhy''-1&=(n-m-2)hy''+hy'-1,\\
h\chi'y'''-mhy'''-1&=(n-m-3)hy'''+hy'+hy''-1,\\
&\text{etc.,}\\
h\chi'y^{(n-m-1)}-mhy^{(n-m-1)}-1&=hy^{(n-m-1)}+hy'+hy''+\cdots+hy^{(n-m-2)}-1,\\
h\chi'y^{(n-m)}-mhy^{(n-m)}-1&=hy'+hy''+\cdots+hy^{(n-m-1)}-1,\\
h\chi'y^{(n-m+1)}-mhy^{(n-m+1)}-1&=-hy^{(n-m+1)}+hy'+hy''+\cdots+hy^{(n-m)}-1,\\
&\text{etc.,}\\
h\chi'y^{(n)}-mhy^{(n)}-1&=-mhy^{(n)}+hy'+hy''+\cdots+hy^{(n-1)}-1.
\end{aligned}$$

En remarquant donc que les quantités hy', hy'', ... suivent l'ordre de leurs grandeurs, il est clair que le plus petit des nombres

$$h\chi'y'-mhy'-1,\ h\chi'y''-mhy''-1,\ \text{etc.},\ h\chi'y^{(n)}-mhy^{(n)}-1$$

est égal à

$$hy'+hy''+hy'''+\cdots+hy^{(n-m-1)}-1.$$

Donc la plus grande valeur de ht_m est égale au nombre entier immédiatement inférieur à cette quantité, et on aura

$$(53)\qquad ht_m=hy'+hy''+\cdots+hy^{(n-m-1)}-2+\varepsilon_{n-m-1},$$

où ε_{n-m-1} est le nombre positif moindre que l'unité qui rend possible cette équation.

Cela posé, soit $hy'=\frac{m'}{\mu'}$, m' et μ' étant deux nombres entiers et la fraction $\frac{m'}{\mu'}$ réduite à sa plus simple expression, alors il faudra que l'on ait

$$hy'=hy''=hy'''=\cdots=hy^{(n)}=\frac{m'}{\mu'}.$$

Car si une équation de la forme $\chi y = 0$ est satisfaite par une fonction de la forme

$$y = Ax^{\frac{m'}{\mu'}} + \text{etc.},$$

cette même équation est aussi satisfaite par les μ' valeurs de y qu'on obtiendra en mettant au lieu de $x^{\frac{1}{\mu'}}$,

$$\alpha_1 x^{\frac{1}{\mu'}},\ \alpha_2 x^{\frac{1}{\mu'}},\ \ldots\ \alpha_{\mu'-1} x^{\frac{1}{\mu'}},$$

$1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu'-1}$ étant les μ' racines de l'équation $a^{\mu'} - 1 = 0$.

Parmi les quantités $hy', hy'', \ldots hy^{(n)}$, il y en a donc μ' qui sont égales entre elles. De même le nombre total des exposants qui sont égaux à une fraction réduite doit être un multiple du dénominateur.

On peut donc supposer

$$(54)\quad \begin{cases} hy' = hy'' = \cdots = hy^{(k')} = \dfrac{m'}{\mu'}, \\ hy^{(k'+1)} = hy^{(k'+2)} = \cdots = hy^{(k'')} = \dfrac{m''}{\mu''}, \\ hy^{(k''+1)} = hy^{(k''+2)} = \cdots = hy^{(k''')} = \dfrac{m'''}{\mu'''}, \\ \quad \text{etc.,} \\ hy^{(k^{(\varepsilon-1)}+1)} = hy^{(k^{(\varepsilon-1)}+2)} = \cdots = hy^{(n)} = \dfrac{m^{(\varepsilon)}}{\mu^{(\varepsilon)}}, \end{cases}$$

où

$$(55)\quad \begin{cases} k' = n'\mu';\ k'' = n'\mu' + n''\mu'';\ k''' = n'\mu' + n''\mu'' + n'''\mu''';\ \text{etc.} \\ n = n'\mu' + n''\mu'' + n'''\mu''' + \cdots + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}; \end{cases}$$

les fractions $\frac{m'}{\mu'}, \frac{m''}{\mu''}, \ldots \frac{m^{(\varepsilon)}}{\mu^{(\varepsilon)}}$ sont réduites à leur plus simple expression, et $n', n'', n''', \ldots n^{(\varepsilon)}$ sont des nombres entiers.

Supposons maintenant dans l'expression de ht_m, que $m = n - k^{(\alpha)} - \beta - 1$, β étant un nombre moindre que $k^{(\alpha+1)} - k^{(\alpha)}$, c'est-à-dire moindre que $n^{(\alpha+1)}\mu^{(\alpha+1)}$, il viendra alors

$$ht_{n-k^{(\alpha)}-\beta-1} = \begin{cases} \quad hy' + hy'' + \cdots + hy^{(k')} \\ + hy^{(k'+1)} + hy^{(k'+2)} + \cdots + hy^{(k'')} \\ + \text{etc.} \\ + hy^{(k^{(\alpha-1)}+1)} + hy^{(k^{(\alpha-1)}+2)} + \cdots + hy^{(k^{(\alpha)})} \\ + hy^{(k^{(\alpha)}+1)} + hy^{(k^{(\alpha)}+2)} + \cdots + hy^{(k^{(\alpha)}+\beta)} \\ + \varepsilon_{(k^{(\alpha)}+\beta)} - 2; \end{cases}$$

or, les équations (54) et (55) donnent

$$hy' + hy'' + \cdots + hy^{(k')} = k'\frac{m'}{\mu'} = n'm',$$

$$hy^{(k'+1)} + hy^{(k'+2)} + \cdots + hy^{(k'')} = (k'' - k')\frac{m''}{\mu''} = n''m'',$$

etc.,

$$hy^{(k^{(\alpha)}+1)} + \cdots + hy^{(k^{(\alpha)}+\beta)} = \beta\frac{m^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}},$$

donc, en substituant

$$(56)\quad ht_{n-k^{(\alpha)}-\beta-1} = \begin{cases} n'm' + n''m'' + n'''m''' + \cdots + n^{(\alpha)}m^{(\alpha)} \\ \quad + \beta\dfrac{m^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}} + \varepsilon_{k^{(\alpha)}+\beta} - 2. \end{cases}$$

Quant à la valeur de $\varepsilon_{k^{(\alpha)}+\beta}$, il est clair qu'en faisant

$$\mu^{(\alpha+1)} . \varepsilon_{k^{(\alpha)}+\beta} = A_\beta^{(\alpha+1)},$$

cette quantité $A_\beta^{(\alpha+1)}$ sera le plus petit nombre entier positif, qui rend le nombre $\beta m^{(\alpha+1)} + A_\beta^{(\alpha+1)}$ divisible par $\mu^{(\alpha+1)}$; on aura donc

$$(57)\quad ht_{n-k^{(\alpha)}-\beta-1} = \begin{cases} -2 + n'm' + n''m'' + n'''m''' + \cdots + n^{(\alpha)}m^{(\alpha)} \\ + \dfrac{\beta m^{(\alpha+1)} + A_\beta^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}}. \end{cases}$$

En faisant dans cette équation $\alpha = 0$, il viendra

$$ht_{n-\beta-1} = -2 + \frac{\beta m' + A'_\beta}{\mu'};$$

donc si $\frac{\beta m' + A'_\beta}{\mu'} < 2$, $ht_{n-\beta-1}$ est négatif, et par conséquent il faut faire $t_{n-\beta-1} = 0$; car, pour toute fonction entière t, ht est nécessairement positif, zéro y compris. Or, en faisant $\beta = 0$, on a toujours $\frac{\beta m' + A'_\beta}{\mu'} < 2$; donc

t_{n-1} est toujours égal à zéro, c'est-à-dire que la fonction $f_1(x, y)$ doit être de la forme

$$(58) \qquad f_1(x, y) = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \cdots + t_{n-\beta'-1} y^{n-\beta'-1},$$

où β', étant plus grand que zéro, est déterminé par l'équation

$$\frac{\beta' m' + A'_{\beta'}}{\mu'} = 2,$$

d'où il suit que β' est égal au plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{\mu'}{m'} + 1$.

Une fonction telle que $f_1(x, y)$ existe donc toujours à moins que β' ne surpasse $n-1$. Pour que cela puisse avoir lieu, il faut que

$$\frac{\mu'}{m'} + 1 = n + \varepsilon,$$

où ε est une quantité positive, zéro y compris; de là il suit

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n - 1 + \varepsilon}.$$

Or, la plus grande valeur de μ' est n, donc cette équation donne

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n-1} \quad \text{ou} \quad \frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n}.$$

Or, je dis que dans ces deux cas l'intégrale $\int f(x, y)\, dx$ peut s'exprimer au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques. En effet, pour que $\frac{m'}{\mu'}$, qui est le plus grand des exposants hy', hy'', ... $hy^{(n)}$, ait une des deux valeurs $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n}$, il faut que l'équation $\chi y = 0$, qui donne la fonction y, ne contienne la variable x que sous une forme linéaire. On aura donc

$$\chi y = P + xQ,$$

où P et Q sont des fonctions entières de y; de là il suit

$$x = -\frac{P}{Q}, \quad dx = \frac{PdQ - QdP}{Q^2},$$

et

$$f(x, y)\, dx = f\left(-\frac{P}{Q}, y\right) \frac{PdQ - QdP}{Q^2} = R\, dy,$$

où il est clair que R est une fonction rationnelle de y; par conséquent l'intégrale $\int R\, dy$, et par suite $\int f(x, y)\, dx$, peut être exprimée au moyen de fonctions logarithmiques et algébriques.

Excepté ce cas donc, la fonction $f_1(x, y)$ existe toujours; en la substituant dans l'équation (46), elle deviendra

$$(59) \qquad \Sigma \int \frac{(t_0 + t_1 y + \cdots + t_{n-\beta'-1} y^{(n-\beta'-1)})\, dx}{\chi' y} = C.$$

Un cas particulier de cette équation est le suivant:

$$(60) \qquad \Sigma \int \frac{x^k y^m\, dx}{\chi' y} = C.$$

où k et m sont deux nombres entiers et positifs, tels que

$$(61) \qquad m < n - \frac{\mu'}{m'} - 1;$$

$$k < -1 + n'm' + n''m'' + \cdots + n^{(\alpha)} m^{(\alpha)} + \frac{\beta\, m^{(\alpha+1)}}{\mu^{(\alpha+1)}};$$

$$m = n - k^{(\alpha)} - \beta - 1; \quad \beta < \mu^{(\alpha+1)} n^{(\alpha+1)};$$

et il est clair que cette formule peut remplacer la formule (59) dans toute sa généralité.

Puisque le degré de la fonction entière t_m est égal à ht_m, cette même fonction contiendra un nombre de constantes arbitraires égal à $ht_m + 1$. La fonction $f_1(x, y)$ en contiendra donc un nombre exprimé par

$$ht_0 + ht_1 + \cdots + ht_{n-\beta'-1} + n - \beta',$$

ou bien, comme il est aisé de le voir,

$$ht_0 + ht_1 + \cdots + ht_{n-\beta'-1} + \cdots + ht_{n-2} + n - 1.$$

En désignant ce nombre par γ, on trouvera aisément, en vertu de l'équation qui donne la valeur générale de ht_m,

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0'}{\mu'} + \frac{m' + A_1'}{\mu'} + \frac{2m' + A_2'}{\mu'} + \cdots + \frac{(n'\mu' - 1)m' + A'_{n'\mu'-1}}{\mu'} \\ + \frac{A_0''}{\mu''} + \frac{m'' + A_1''}{\mu''} + \frac{2m'' + A_2''}{\mu''} + \cdots + \frac{(n''\mu'' - 1)m'' + A''_{n''\mu''-1}}{\mu''} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + n'm'n''\mu'' \\ + \frac{A_0'''}{\mu'''} + \frac{m''' + A_1'''}{\mu'''} + \frac{2m''' + A_2'''}{\mu'''} + \cdots + \frac{(n'''\mu''' - 1)m''' + A'''_{n'''\mu'''-1}}{\mu'''} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + (n'm' + n''m'')n'''\mu''' \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - n + 1; \end{array} \right.$$

or, en remarquant que m' et μ' sont premiers entre eux, on sait par la théorie des nombres que la suite $A_0', A_1', A_2', A_3' \ldots A'_{n'\mu'-1}$, contiendra n' fois la suite des nombres naturels $0, 1, 2, 3, \ldots \mu'-1$, donc

$$\begin{aligned} A_0'+A_1'+A_2'+\cdots+A'_{n'\mu'-1} &= n'(0+1+2+\cdots+\mu'-1) \\ &= n'\frac{\mu'(\mu'-1)}{2}; \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} A_0''+A_1''+A_2''+\cdots+A''_{n''\mu''-1} &= n''(0+1+2+\cdots+\mu''-1) \\ &= n''\frac{\mu''(\mu''-1)}{2}, \end{aligned}$$

etc.

En substituant ces valeurs et réduisant, la valeur de γ deviendra

$$\gamma = \left\{ \begin{aligned} & -n+1+\tfrac{1}{2}m'n'(n'\mu'-1)+\tfrac{1}{2}n'(\mu'-1)+\tfrac{1}{2}m''n''(n''\mu''-1) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{2}n''(\mu''-1) \\ & +\cdots+\tfrac{1}{2}n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)}(n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}-1)+\tfrac{1}{2}n^{(\varepsilon)}(\mu^{(\varepsilon)}-1)+\cdots \\ & +n'm'n''\mu''+(n'm'+n''m'')n'''\mu'''+(n'm'+n''m''+n'''m''')n''''\mu'''' \\ & +\cdots+(n'm'+n''m''+\cdots+n^{(\varepsilon-1)}m^{(\varepsilon-1)})n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}; \end{aligned} \right.$$

ou bien en remarquant que

$$n = n'\mu'+n''\mu''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)},$$

(62)

$$\gamma = \left\{ \begin{aligned} & n'\mu'\left(\frac{m'n'-1}{2}\right)+n''\mu''\left(m'n'+\frac{m''n''-1}{2}\right)+n'''\mu'''\left(m'n'+m''n''+\frac{m'''n'''-1}{2}\right) \\ & +\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\left(m'n'+m''n''+\cdots+m^{(\varepsilon-1)}n^{(\varepsilon-1)}+\frac{m^{(\varepsilon)}n^{(\varepsilon)}-1}{2}\right) \\ & -\frac{n'(m'+1)}{2}-\frac{n''(m''+1)}{2}-\frac{n'''(m'''+1)}{2}-\cdots-\frac{n^{(\varepsilon)}(m^{(\varepsilon)}+1)}{2}+1. \end{aligned} \right.$$

Comme cas particuliers on doit remarquer les deux suivants:

1. Lorsque

$$hy' = hy'' = \cdots = hy^{(n)} = \frac{m'}{\mu'}.$$

Dans ce cas $\varepsilon = 1$, et par conséquent

(63) $$\gamma = n'\mu'\frac{n'm'-1}{2} - n'\frac{m'+1}{2}+1.$$

Si en outre $\mu' = n$, on aura $n' = 1$, et

(64) $$\gamma = (n-1)\frac{m'-1}{2}.$$

2. Lorsque toutes les quantités $hy', hy'', \cdots hy^{(n)}$ sont des nombres entiers. Alors on aura

$$\mu' = \mu'' = \mu''' = \cdots = \mu^{(\varepsilon)} = 1;$$

et si l'on fait de plus

$$n' = n'' = \cdots = n^{(\varepsilon)} = 1,$$

on aura $\varepsilon = n$, et par conséquent en substituant,

(65) $$\begin{aligned} \gamma = {} & (n-1)m'+(n-2)m''+(n-3)m'''+\cdots \\ & +2m^{(n-2)}+m^{(n-1)}-n+1; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remarquant que $m' = hy'$, $m'' = hy''$, etc.

(66) $$\begin{aligned} \gamma = {} & (n-1)hy'+(n-2)hy''+(n-3)hy'''+\cdots \\ & +2hy^{(n-2)}+hy^{(n-1)}-n+1. \end{aligned}$$

Dans le cas où tous les nombres $hy', hy'', \ldots hy^{(n-1)}$ sont égaux entre eux, la valeur de γ deviendra

(67) $$\gamma = \frac{n(n-1)}{2}hy'-n+1 = (n-1)\left(\frac{n\,hy'}{2}-1\right).$$

La formule (59) a généralement lieu pour des valeurs quelconques des quantités $a, a', a'', \ldots$ toutes les fois que la fonction r n'a pas un facteur de la forme $F_0 x$; mais dans ce cas elle a encore lieu, sinon $F_0 x$ et $\frac{\chi' y}{f_1(x,y)}$ s'évanouissent pour une même valeur de x. Alors la formule dont il s'agit cesse d'avoir lieu, et on aura au lieu d'elle la formule (40), qui deviendra, en faisant $f_2 x = 1$,

(68) $$\Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{\chi' y} = \left\{ \begin{aligned} & C - \Pi\Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y \\ & \quad +\Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left(\frac{\theta_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta}\,\Sigma\frac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}\log\theta B\right), \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire, en remarquant que

$$\Pi\Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\log\theta y = 0,$$

(69) $$\Sigma\int\frac{f_1(x,y)\,dx}{\chi' y} = C+\Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left(\frac{\theta_1\beta}{\theta_1^{(\nu)}\beta}\,\Sigma\frac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}\log\theta B\right).$$

Maintenant on a (19).

$$Rx = \Sigma\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}\frac{r}{\theta y}\,\delta\theta y,$$

d'où il suit que si $\frac{f_1(x,y)}{\chi' y}$ conserve une valeur finie pour $x=\beta_1$, la fonction entière Rx aura $(x-\beta_1)^{\mu_1}$ pour facteur, donc

$$k_1=\mu_1 \quad \text{et} \quad \nu_1=\mu_1-k_1=0.$$

Par là on voit que, dans le second membre de l'équation précédente, tous les termes relatifs à des valeurs de β, qui ne rendent point infinie la valeur de $\frac{f_1(\beta,B)}{\chi' B}$, s'évanouiront; par conséquent ledit nombre se réduit à une constante, si $F_0 x$ n'a pas de facteur commun avec $\frac{\chi' y}{f_1(x,y)}$.

6.

Reprenons maintenant la formule générale (14), et considérons les fonctions $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$. Ces quantités sont données, par l'équation $Fx=0$, en fonctions des quantités indépendantes a, a', a'', etc.; soient

$$x_1=f_1(a,a',a'',\ldots);\ x_2=f_2(a,a',a'',\ldots);\ \ldots x_\mu=f_\mu(a,a',a'',\ldots).$$

Si maintenant on désigne par α le nombre des quantités $a, a', a'', \ldots$ on peut en général tirer de ces équations les valeurs de $a, a', a'', \ldots$ en fonctions d'un nombre α des quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$; par exemple, en fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$. En substituant les valeurs de $a, a', a'', \ldots$ ainsi déterminées, dans les expressions de $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots x_\mu$, ces dernières quantités deviendront des fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$; et alors celles-ci seront indéterminées. La formule (14) deviendra donc

$$(70)\qquad v=\left\{\begin{array}{l}\psi_1 x_1+\psi_2 x_2+\cdots+\psi_\alpha x_\alpha\\ \qquad\qquad +\psi_{\alpha+1}x_{\alpha+1}+\psi_{\alpha+2}x_{\alpha+2}+\ldots+\psi_\mu x_\mu,\end{array}\right.$$

où $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$ sont des quantités quelconques, $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots x_\mu$ des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$, et v une fonction algébrique et logarithmique des mêmes quantités.

Les quantités $a, a', a'', \ldots$ et $x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots x_\mu$ se trouvent de la manière suivante. Les équations (7) donnent les suivantes:

$$(71)\qquad \theta y_1=0,\ \theta y_2=0,\ \ldots \theta y_\alpha=0,$$

qui toutes sont linéaires par rapport aux quantités $a, a', a'', \ldots$. Elles donneront donc ces quantités en fonctions rationnelles de $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;$

$\ldots x_\alpha, y_\alpha$. Maintenant si l'on substitue ces fonctions au lieu de $a, a', a'', \ldots$ dans l'équation $Fx=0$, la fonction Fx deviendra divisible par le produit $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)$; car on a

$$Fx=B(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)(x-x_{\alpha+1})\cdots(x-x_\mu).$$

En désignant donc le quotient $\frac{Fx}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}$ par $F^{(1)}x$, l'équation

$$(72)\qquad F^{(1)}x=0$$

sera du degré $\mu-\alpha$, et aura pour racines les quantités $x_{\alpha+1}, \ldots x_\mu$. Quant aux coefficients de cette équation, il est aisé de voir qu'ils seront des fonctions rationnelles des quantités

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots x_\alpha, y_\alpha.$$

De cette manière donc les $\mu-\alpha$ quantités $x_{\alpha+1}, \ldots x_\mu$ sont déterminées en fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$ par une même équation du $(\mu-\alpha)^e$ degré.

Les équations (71) sont en général en nombre suffisant pour déterminer les α quantités $a, a', a'', \ldots$, mais il y a un cas où plusieurs d'entre elles deviendront identiques. C'est ce qui arrive lorsqu'on a à la fois

$$x_1=x_2=\cdots=x_k;\ y_1=y_2=\cdots=y_k;$$

car alors

$$\theta y_1=\theta y_2=\cdots=\theta y_k.$$

Or dans ce cas on aura, d'après les principes du calcul différentiel, au lieu des k équations identiques,

$$\theta y_1=0,\ \theta y_2=0,\ \ldots,\ \theta y_k=0,$$

les suivantes

$$(73)\qquad \theta y_1=0,\ \frac{d\theta y_1}{dx_1}=0,\ \frac{d^2\theta y_1}{dx_1^2}=0,\ \cdots \frac{d^k\theta y_1}{dx_1^k}=0,$$

qui, jointes aux équations

$$\theta y_{k+1}=0,\ \ldots\ \theta y_\alpha=0,$$

détermineront les valeurs de $a, a', \ldots a^{(\alpha-1)}$.

La formule (70) montre qu'on peut exprimer une somme quelconque de la forme

$$\psi_1 x_1+\psi_2 x_2+\cdots+\psi_\alpha x_\alpha$$

par une fonction connue v et une somme semblable d'autres fonctions; en effet elle donnera

(74) $$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha = v - (\psi_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \cdots + \psi_\mu x_\mu).$$

7.

Dans cette formule le nombre des fonctions $\psi_{\alpha+1}x_{\alpha+1}, \psi_{\alpha+2}x_{\alpha+2}, \ldots \psi_\mu x_\mu$ est très-remarquable. Plus il est petit, plus la formule est simple. Nous allons, dans ce qui suit, chercher la moindre valeur dont ce nombre, qui est exprimé par $\mu - \alpha$, est susceptible.

Si la fonction $F_0 x$ se réduit à l'unité, tous les coefficients dans les fonctions $q_0, q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ seront arbitraires; dans ce cas donc on aura (en remarquant que, d'après la forme des équations (71), un des coefficients dans les fonctions $q_0, q_1, \ldots$ peut être pris à volonté sans nuire à la généralité),

$$\alpha = hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1.$$

Si $F_0 x$ n'est pas égal à l'unité, il faut en général un nombre $hF_0 x$ de conditions différentes pour que l'équation

$$F_0 x . Fx = r$$

soit satisfaite; mais la forme particulière de la fonction y pourrait rendre moindre ce nombre de conditions nécessaires. Supposons donc qu'il soit égal à

(75) $$hF_0 x - A,$$

le nombre des quantités indéterminées $a, a', a'', \ldots$ deviendra

(76) $$\alpha = hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1 - hF_0 x + A;$$

maintenant on a

$$hr = hF_0 x + hFx = hF_0 x + \mu,$$

donc

(77) $$\mu = hr - hF_0 x,$$

et par conséquent

(78) $$\mu - \alpha = hr - (hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1}) - n + 1 - A.$$

Mais comme on a (3)

$$r = \theta y' . \theta y'' \ldots \theta y^{(n)},$$

il est clair que

(79) $$hr = h\theta y' + h\theta y'' + \cdots + h\theta y^{(n)};$$

donc

(80) $$\mu - \alpha = h\theta y' + h\theta y'' + \cdots + h\theta y^{(n)} - (hq_0 + hq_1 + \cdots + hq_{n-1}) - n + 1 - A.$$

Ayant maintenant (2)

$$\theta y = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1},$$

on aura nécessairement, pour toutes les valeurs de m,

$$h\theta y > h(q_m y^m),$$

où le signe $>$ n'exclut pas l'égalité.

Donc en faisant

$$y = y', y'', y''', \ldots y^{(n)},$$

et remarquant que

$$h(q_m y^m) = hq_m + mhy,$$

on aura aussi

(81) $$h\theta y' > hq_m + mhy'; \; h\theta y'' > hq_m + mhy'', \ldots h\theta y^{(n)} > hq_m + mhy^{(n)}.$$

Cela posé, désignons par $n', m', \mu', k'; n'', m'', \mu'', k''$; etc. les mêmes choses que plus haut dans le numéro (5), et supposons que $h(q_{\varrho_1} y'^{\varrho_1})$ soit la plus grande des $n'\mu'$ quantités

$$h(q_{n-1} y'^{n-1}); \; h(q_{n-2} y'^{n-2}); \ldots h(q_{n-k'} y'^{n-k'}),$$

en sorte que

(82) $$hq_{\varrho_1} + \varrho_1 hy' > hq_{n-\beta-1} + (n - \beta - 1) hy'.$$

En désignant, pour abréger, hq_m par fm, et mettant $\frac{m'}{\mu'}$ au lieu de hy', il est clair que cette formule donne

(83) $$f\varrho_1 - f(n - \beta - 1) = (n - \beta - 1 - \varrho_1)\frac{m'}{\mu'} + \varepsilon'_\beta + A'_\beta$$

(depuis $\beta = 0$, jusqu'à $\beta = k' - 1$),

où A_β' est un nombre positif moindre que l'unité, et ε'_β un nombre entier positif, zéro y compris.

Soient de même

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned}
&f\varrho_2-f(n-\beta-1)=(n-\beta-1-\varrho_2)\frac{m''}{\mu''}+\varepsilon_\beta''+A_\beta''\\
&\qquad\qquad\text{(depuis } \beta=k', \text{ jusqu'à } \beta=k''-1),\\
&f\varrho_3-f(n-\beta-1)=(n-\beta-1-\varrho_3)\frac{m'''}{\mu'''}+\varepsilon_\beta'''+A_\beta'''\\
&\qquad\qquad\text{(depuis } \beta=k'', \text{ jusqu'à } \beta=k'''-1),\\
&\qquad\text{etc.},\\
&f\varrho_m-f(n-\beta-1)=(n-\beta-1-\varrho_m)\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}+\varepsilon_\beta^{(m)}+A_\beta^{(m)}\\
&\qquad\qquad\text{(depuis } \beta=k^{(m-1)}, \text{ jusqu'à } \beta=k^{(m)}-1),\\
&\qquad\text{etc.},\\
&f\varrho_\epsilon-f(n-\beta-1)=(n-\beta-1-\varrho_\epsilon)\frac{m^{(\epsilon)}}{\mu^{(\epsilon)}}+\varepsilon_\beta^{(\epsilon)}+A_\beta^{(\epsilon)}\\
&\qquad\qquad\text{(depuis } \beta=k^{(\epsilon-1)}, \text{ jusqu'à } \beta=n-1).
\end{aligned}\right.$$

A_β'', A_β''', ... $A_\beta^{(\epsilon)}$ étant des nombres positifs et moindres que l'unité, et ε_β'', ε_β''', etc. des nombres entiers positifs, en y comprenant zéro.

Considérons l'une quelconque de ces équations, par exemple la $(m-1)^e$; en donnant à β les $k^{(m)}-k^{(m-1)}$ valeurs,

$$\beta=k^{(m-1)},\ k^{(m-1)}+1,\ k^{(m-1)}+2, \ldots k^{(m)}-1,$$

on obtiendra un nombre $k^{(m)}-k^{(m-1)}$ d'équations semblables; et en les ajoutant il viendra

$$(k^{(m)}-k^{(m-1)})\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)=\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)(k^{(m)}-k^{(m-1)})\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\\
&+A_0^{(m)}+A_1^{(m)}+\cdots+A^{(m)}_{k^{(m)}-k^{(m-1)}-1}\\
&+\varepsilon_0^{(m)}+\varepsilon_1^{(m)}+\cdots+\varepsilon^{(m)}_{k^{(m)}-k^{(m-1)}-1}\\
&+f(n-1-k^{(m-1)})+f(n-2-k^{(m-1)})+\cdots\\
&\qquad+f(n-k^{(m)}).
\end{aligned}\right.$$

Or

$$k^{(m)}-k^{(m-1)}=n^{(m)}\mu^{(m)},$$

donc en substituant,

$$n^{(m)}\mu^{(m)}\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)=\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)n^{(m)}m^{(m)}\\
&\quad+A_0^{(m)}+A_1^{(m)}+\cdots+A^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1}\\
&\quad+\varepsilon_0^{(m)}+\varepsilon_1^{(m)}+\cdots+\varepsilon^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1}\\
&\quad+f(n-1-k^{(m-1)})+\cdots+f(n-k^{(m)}).
\end{aligned}\right.$$

Or, en remarquant que $A_\beta^{(m)}$ est le nombre, moindre que l'unité, qui, ajouté à $(n-\beta-1-\varrho_m)\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}$, rend cette quantité égale à un nombre entier, on voit sans peine que la suite

$$A_0^{(m)}+A_1^{(m)}+\cdots\cdot+A^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1},$$

qui est composée de $n^{(m)}\mu^{(m)}$ termes, contiendra $n^{(m)}$ fois la suite des nombres

$$\frac{0}{\mu^{(m)}},\ \frac{1}{\mu^{(m)}},\ \frac{2}{\mu^{(m)}},\ \ldots\ \frac{\mu^{(m)}-1}{\mu^{(m)}};$$

donc

$$(85)\quad A_0^{(m)}+A_1^{(m)}+\cdots+A^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1}=\frac{n^{(m)}(0+1+\cdots+\mu^{(m)}-1)}{\mu^{(m)}}$$
$$=\frac{n^{(m)}\mu^{(m)}(\mu^{(m)}-1)}{2\mu^{(m)}}=\tfrac{1}{2}n^{(m)}(\mu^{(m)}-1).$$

En substituant cette valeur, et faisant pour abréger,

$$\varepsilon_0^{(m)}+\varepsilon_1^{(m)}+\cdots+\varepsilon^{(m)}_{n^{(m)}\mu^{(m)}-1}=C_m,$$

il viendra

$$(86)\quad n^{(m)}\mu^{(m)}\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)=\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)n^{(m)}m^{(m)}\\
&+\tfrac{1}{2}n^{(m)}(\mu^{(m)}-1)+C_m\\
&+f(n-k^{(m-1)}-1)+\cdots+f(n-k^{(m)}).
\end{aligned}\right.$$

Maintenant on a, en désignant $h\theta y^{(m)}$ par φm,

$$(87)\quad \varphi(k^{(m-1)}+1)=\varphi(k^{(m-1)}+2)=\varphi(k^{(m-1)}+3)=\cdots=\varphi(k^{(m)});$$

en remarquant que $hy^{(m)}$ conserve la même valeur pour toutes les valeurs de m, de $k^{(m-1)}+1$ à $k^{(m)}$. Les inégalités (81) donneront donc

$$\varphi(k^{(m-1)}+1)+\varphi(k^{(m-1)}+2)+\varphi(k^{(m-1)}+3)+\cdots+\varphi(k^{(m)})$$
$$>\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right)(k^{(m)}-k^{(m-1)})>n^{(m)}\mu^{(m)}\left(f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right),$$

donc on aura, en vertu de l'équation précédente,

$$\varphi(k^{(m-1)}+1)+(\varphi(k^{(m-1)}+2)+\varphi(k^{(m-1)}+3)+\cdots+\varphi(k^{(m)})$$
$$>\left\{\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}n^{(m)}m^{(m)}(2n-k^{(m)}-k^{(m-1)}-1)+\tfrac{1}{2}n^{(m)}(\mu^{(m)}-1)+C_m\\
&+f(n-k^{(m-1)}-1)+f(n-k^{(m-1)}-2)+\cdots+f(n-k^{(m)}).
\end{aligned}\right.$$

En faisant dans cette formule successivement $m=1, 2, 3, \ldots.$ et puis ajoutant les équations qu'on obtiendra, il viendra

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$$
$$>\begin{cases} f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)+\cdots+f(1)+f(0) \\ +\tfrac{1}{2}n'm'(2n-k'-1)+\tfrac{1}{2}n'(\mu'-1)+C_1 \\ +\tfrac{1}{2}n''m''(2n-k''-k'-1)+\tfrac{1}{2}n''(\mu''-1)+C_2 \\ +\tfrac{1}{2}n'''m'''(2n-k'''-k''-1)+\tfrac{1}{2}n'''(\mu'''-1)+C_3 \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\tfrac{1}{2}n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)}(2n-k^{(\varepsilon)}-k^{(\varepsilon-1)}-1)+\tfrac{1}{2}n^{(\varepsilon)}(\mu^{(\varepsilon)}-1)+C_\varepsilon. \end{cases}$$

En substituant les valeurs des quantités k', k'', k''', ... savoir,

$$k'=n'\mu';\ k''=n'\mu'+n''\mu'';\ k'''=n'\mu'+n''\mu''+n'''\mu''',\ \text{etc.},$$

et pour n sa valeur (55)

$$n=n'\mu'+n''\mu''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)},$$

on obtiendra

$$h\theta y'+h\theta y''+h\theta y'''+\cdots+h\theta y^{(\alpha)}-(hq_0+hq_1+hq_2+\cdots+hq_{n-1})$$
$$>\gamma'+C_1+C_2+\cdots+C_\varepsilon,$$

où l'on a fait pour abréger

$$(88)\quad \gamma'=\begin{cases} n'm'\left(\frac{n'\mu'-1}{2}+n''\mu''+n'''\mu'''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right)+n'\frac{\mu'-1}{2} \\ +n''m''\left(\frac{n''\mu''-1}{2}+n'''\mu'''+n''''\mu''''+\cdots+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right)+n''\frac{\mu''-1}{2} \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +n^{(\varepsilon-1)}m^{(\varepsilon-1)}\left(\frac{n^{(\varepsilon-1)}\mu^{(\varepsilon-1)}-1}{2}+n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}\right)+n^{(\varepsilon-1)}\left(\frac{\mu^{(\varepsilon-1)}-1}{2}\right) \\ +n^{(\varepsilon)}m^{(\varepsilon)}\frac{n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}-1}{2}+n^{(\varepsilon)}\frac{\mu^{(\varepsilon)}-1}{2}. \end{cases}$$

De cette formule combinée avec l'équation (80) on déduira

$$(89)\qquad \mu-\alpha>\gamma'-n+1-A+C_1+C_2+\cdots+C_\varepsilon.$$

Or, je remarque que le nombre $\gamma'-n+1$ est précisément égal à celui que nous avons désigné précédemment par γ, équation (62), donc

$$(90)\qquad \mu-\alpha>\gamma-A+C_1+C_2+\cdots+C_\varepsilon.$$

Cette formule nous montre que $\mu-\alpha$ ne peut être moindre que $\gamma-A$, or je dis qu'il peut être précisément égal à ce nombre.

En effet c'est ce qui arrive lorsqu'on a

$$(91)\qquad \begin{cases} \varphi k^{(m)}=f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}, \\ \text{et}\quad C_1+C_2+C_3+\cdots+C_\varepsilon=0; \end{cases}$$

or on peut démontrer de la manière suivante que ces équations pourront avoir lieu.

En se rappelant la valeur de C_m, il est clair que l'équation (91) entraîne la suivante:

$$\varepsilon_\beta^{(m)}=0\ (\text{depuis } \beta=k^{(m-1)},\ \text{jusqu'à } \beta=k^{(m)}-1);$$

donc en vertu des équations (83) et (84)

$$(92)\qquad f(n-\beta-1)=f\varrho_m-(n-\beta-1-\varrho_m)\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}-A_\beta^{(m)},$$
$$(\text{depuis } \beta=k^{(m-1)},\ \text{jusqu'à } \beta=k^{(m)}-1).$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $f\varrho_m$.

Or l'équation (91) donne

$$(93)\qquad f\varrho_m+\varrho_m\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}>f\varrho_\alpha+\varrho_\alpha\frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}}$$

pour toutes les valeurs de m et de α.

De là on tire, en désignant pour abréger

$$(94)\qquad \frac{m^{(\alpha)}}{\mu^{(\alpha)}}\ \text{par } \sigma_\alpha,$$

$$(95)\qquad f\varrho_m-f\varrho_\alpha>(\varrho_\alpha-\varrho_m)\sigma_m.$$

En faisant $m=\alpha-1$, et changeant ensuite α en m, de même que α en $m-1$, on obtiendra les deux formules

$$(96)\qquad \begin{cases} f\varrho_m-f\varrho_{m-1}<(\varrho_{m-1}-\varrho_m)\sigma_{m-1}, \\ f\varrho_m-f\varrho_{m-1}>(\varrho_{m-1}-\varrho_m)\sigma_m. \end{cases}$$

Par là on voit que la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de $f\varrho_m-f\varrho_{m-1}$ ne peut surpasser $(\varrho_{m-1}-\varrho_m)(\sigma_{m-1}-\sigma_m)$. Par conséquent on doit avoir

$$f\varrho_m-f\varrho_{m-1}=(\varrho_{m-1}-\varrho_m)\sigma_m+\theta_{m-1}(\varrho_{m-1}-\varrho_m)(\sigma_{m-1}-\sigma_m),$$

où θ_{m-1} est une quantité positive qui ne peut surpasser l'unité.

Cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$(97)\qquad f\varrho_m-f\varrho_{m-1}=(\varrho_{m-1}-\varrho_m)[\theta_{m-1}\sigma_{m-1}+(1-\theta_{m-1})\sigma_m].$$

De là on tire sans peine

$$(98)\qquad f\varrho_m = \begin{cases} f\varrho_1 + (\varrho_1 - \varrho_2)[\theta_1\sigma_1 + (1-\theta_1)\sigma_2] \\ + (\varrho_2 - \varrho_3)[\theta_2\sigma_2 + (1-\theta_2)\sigma_3] + \cdots \\ \cdots + (\varrho_{m-1} - \varrho_m)[\theta_{m-1}\sigma_{m-1} + (1-\theta_{m-1})\sigma_m]. \end{cases}$$

Si $f\varrho_m$ a cette valeur, il n'est pas difficile de voir que la condition

$$f\varrho_m - f\varrho_\alpha > (\varrho_\alpha - \varrho_m)\sigma_m$$

est satisfaite pour toute valeur de α et m, quelle que soit la valeur de $f\varrho_1$ et celles des quantités $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_{m-1}$, pourvu qu'elles ne surpassent pas l'unité.

Connaissant ainsi la valeur de $f\varrho_m$, on aura celle de $f(n-\beta-1)$ par l'équation (92).

Après avoir de cette manière déterminé les valeurs de toutes les quantités $f(0), f(1), f(2), \ldots f(n-1)$, voyons à présent si elles satisfont en effet à l'équation (91)

$$\varphi k^{(m)} = f\varrho_m + \varrho_m \frac{m^{(m)}}{\mu^{(m)}} = f\varrho_m + \varrho_m\sigma_m.$$

Pour que cette équation ait lieu, il est nécessaire et il suffit que l'équation

$$(99)\qquad f\varrho_m + \varrho_m\sigma_m > f\alpha + \alpha\sigma_m$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de α et m. Il faut donc que

$$(100)\qquad P_m^{(\delta)} = f\varrho_m - f\alpha_\delta + (\varrho_m - \alpha_\delta)\sigma_m > 0.$$

Soit $\alpha_\delta = n - \beta - 1$, où β a une valeur quelconque comprise entre $k^{(\delta-1)}$ et $k^{(\delta)} - 1$ inclusivement, l'équation (92) donnera

$$f\alpha_\delta = f\varrho_\delta - (\alpha_\delta - \varrho_\delta)\sigma_\delta - A_\beta^{(\delta)};$$

et par conséquent

$$(101)\qquad P_m^{(\delta)} = f\varrho_m - f\varrho_\delta + (\varrho_m - \alpha_\delta)\sigma_m + (\alpha_\delta - \varrho_\delta)\sigma_\delta + A_\beta^{(\delta)}.$$

En mettant $m+1$ au lieu de m, il viendra

$$P_{m+1}^{(\delta)} - P_m^{(\delta)} = f\varrho_{m+1} - f\varrho_m + \varrho_{m+1}\sigma_{m+1} - \varrho_m\sigma_m + \alpha_\delta(\sigma_m - \sigma_{m+1}).$$

On a par l'équation (97)

$$f\varrho_{m+1} - f\varrho_m = (\varrho_m - \varrho_{m+1})[\theta_m\sigma_m + (1-\theta_m)\sigma_{m+1}];$$

donc, en substituant et réduisant,

$$(102)\qquad P_{m+1}^{(\delta)} - P_m^{(\delta)} = \Big(\alpha_\delta - [\varrho_m(1-\theta_m) + \varrho_{m+1}\theta_m]\Big)(\sigma_m - \sigma_{m+1});$$

or, en remarquant que α_δ est compris entre $n-1-k^{(\delta-1)}$ et $n-k^{(\delta)}$, que $\varrho_m(1-\theta_m) + \varrho_{m+1}\theta_m$ l'est entre ϱ_m et ϱ_{m+1}, c'est-à-dire entre $n-k^{(m-1)}-1$ et $n-k^{(m+1)}$, il est clair que le second membre de cette équation sera toujours positif si $m \lesseqgtr \delta+1$, et toujours négatif si $m \gtreqless \delta - 2$.

De là il suit: 1° que $P_{m+1+\delta} > 0$ si $P_{\delta+1} > 0$; 2° que $P_{\delta-1-m} > 0$ si $P_{\delta-1} > 0$. Donc pour que $P_m^{(\delta)}$ soit positif pour toutes les valeurs de m, il suffit qu'il le soit pour $m = \delta+1, \delta, \delta-1$.

Or, en faisant dans l'équation (102) $m=\delta$, $m=\delta-1$, il viendra

$$P_{\delta+1}^{(\delta)} - P_\delta^{(\delta)} = \Big(\alpha_\delta - [\varrho_\delta(1-\theta_\delta) + \varrho_{\delta+1}\theta_\delta]\Big)(\sigma_\delta - \sigma_{\delta+1}),$$

$$P_\delta^{(\delta)} - P_{\delta-1}^{(\delta)} = \Big(\alpha_\delta - [\varrho_{\delta-1}(1-\theta_{\delta-1}) + \varrho_\delta\theta_{\delta-1}]\Big)(\sigma_{\delta-1} - \sigma_\delta).$$

Mais l'équation (101) donne pour $m=\delta$,

$$P_\delta^{(\delta)} = A_\beta^{(\delta)},$$

donc $P_\delta^{(\delta)}$ est toujours positif, et en substituant cette valeur, les deux équations précédentes donneront, en mettant $\delta+1$ au lieu de δ dans la dernière,

$$P_{\delta+1}^{(\delta)} = [\alpha_\delta - \varrho_\delta + \theta_\delta(\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1})](\sigma_\delta - \sigma_{\delta+1}) + A_\beta^{(\delta)},$$
$$P_\delta^{(\delta+1)} = [\varrho_\delta - \alpha_{\delta+1} - \theta_\delta(\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1})](\sigma_\delta - \sigma_{\delta+1}) + A_\beta^{(\delta+1)}.$$

De ces équations on tire (en remarquant qu'on doit avoir pour $P_{\delta+1}^{(\delta)}$ et $P_\delta^{(\delta+1)}$ des valeurs positives),

$$(103)\qquad \begin{cases} \theta_\delta > \dfrac{\varrho_\delta - \alpha_\delta}{\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1}} - \dfrac{A_\beta^{(\delta)}}{(\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1})(\sigma_\delta - \sigma_{\delta+1})} = B_\delta, \\ \theta_\delta < \dfrac{\varrho_\delta - \alpha_{\delta+1}}{\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1}} + \dfrac{A_\beta^{(\delta+1)}}{(\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1})(\sigma_\delta - \sigma_{\delta+1})} = C_\delta, \end{cases}$$

Maintenant θ_δ est compris entre 0 et 1; par conséquent il faut que B_δ ne surpasse pas l'unité, et que C_δ soit positif. Or c'est ce qui a toujours lieu. En effet on trouve

$$1 - B_\delta = \frac{\alpha_\delta - \varrho_{\delta+1}}{\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1}} + \frac{A_\beta^{(\delta)}}{(\varrho_\delta - \varrho_{\delta+1})(\sigma_\delta - \sigma_{\delta+1})};$$

donc $1 - B_\delta$ est toujours positif en remarquant que $\alpha_\delta > \varrho_{\delta+1}$; par conséquent B_δ ne peut surpasser l'unité. De même $\varrho_\delta > \alpha_{\delta+1}$; donc C_δ est toujours positif.

La condition

$$P_m^{(\delta)} > 0$$

est donc satisfaite pour toute valeur de δ et m; d'où résulte l'équation

$$\varphi k^{(\delta)} = f\varrho_\delta + \varrho_\delta \frac{m^{(\delta)}}{\mu^{(\delta)}}.$$

On aura donc, comme on vient de le dire,

$$\mu - \alpha = \gamma - A, \tag{104}$$

qui est la moindre valeur que peut avoir $\mu - \alpha$.

Si l'on suppose que tous les coefficients dans les fonctions $q_0, q_1, \dots q_{n-1}$, soient des quantités indéterminées, alors $F_0x = 1$, et par suite $A = 0$; donc dans ce cas

$$\mu - \alpha = \gamma. \tag{105}$$

C'est ce qui a lieu généralement, car c'est seulement pour des fonctions d'une forme particulière que le nombre A a une valeur plus grande que zéro.

Dans ce qui précède nous avons supposé que tous les coefficients dans $q_0, q_1, \dots q_{n-1}$, étaient indéterminés, excepté ceux qui sont déterminés par la condition que r ait pour diviseur la fonction F_0x. Dans ce cas on a toujours, comme nous l'avons supposé plus haut (87),

$$\varphi(k^{(m-1)} + 1) = \varphi(k^{(m-1)} + 2) = \dots = \varphi(k^{(m)}) = f\varrho_m + \varrho_m \sigma_m,$$

et par suite

$$hr = \left\{ \begin{array}{l} n'\mu'(f\varrho_1 + \varrho_1\sigma_1) + n''\mu''(f\varrho_2 + \varrho_2\sigma_2) + \dots \\ \qquad\qquad + n^{(\varepsilon)}\mu^{(\varepsilon)}(f\varrho_\varepsilon + \varrho_\varepsilon\sigma_\varepsilon). \end{array} \right. \tag{106}$$

C'est la valeur de hr en général. Supposons maintenant que les quantités $a, a', a'', \dots$ ne soient pas toutes indéterminées, mais qu'un certain nombre d'elles soient déterminées par la condition que la valeur de hr soit de A' unités moindre que la valeur précédente. En général, un nombre A' des quantités $a, a', a'', \dots$ sera déterminé par cette condition, et alors $\mu - \alpha$ ne change pas de valeur; mais il est possible que, pour les fonctions d'une forme particulière, la condition dont il s'agit n'entraîne qu'un nombre moindre d'équations différentes entre $a, a', a'', \dots$ Soit donc ce nombre $A' - B$, la valeur de $\mu - \alpha$ deviendra

$$(\mu - A') - [\alpha - (A' - B)] - A,$$

c'est-à-dire

$$\mu - \alpha = \gamma - A - B. \tag{107}$$

8.

Pour donner un exemple de l'application de la théorie précédente, supposons que $n = 13$, en sorte que y soit déterminé par l'équation

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} p_0 + p_1y + p_2y^2 + p_3y^3 + p_4y^4 + p_5y^5 + p_6y^6 + p_7y^7 \\ \quad + p_8y^8 + p_9y^9 + p_{10}y^{10} + p_{11}y^{11} + p_{12}y^{12} + y^{13}, \end{array} \right.$$

et

$$\theta y = q_0 + q_1y + q_2y^2 + \dots + q_{12}y^{12}.$$

Supposons que les degrés des fonctions entières

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12},$$

soient respectivement

$$2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 1,$$

D'abord, il faut chercher les valeurs de $hy', hy'', \dots hy^{(13)}$. Or, pour cela, il suffit de faire dans l'équation proposée,

$$y = Ax^m,$$

et de déterminer ensuite A et m de manière que l'équation soit satisfaite pour $x = \infty$.

On obtiendra l'équation

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} A^{13}x^{13m} + B_{12}A^{12}x^{12m+1} + B_{11}A^{11}x^{11m+1} + B_{10}A^{10}x^{10m+4} \\ \qquad\qquad + \dots + B_2A^2x^{2m+2} + B_1Ax^{m+3} + B_0x^2. \end{array} \right.$$

Pour y satisfaire il faut qu'un certain nombre des exposants soient égaux et en même temps plus grands que les autres, et que la somme des termes correspondants soit égale à zéro.

Or on trouve qu'en faisant

1° $13m = 10m + 4$, d'où $m = \frac{4}{3}$, les deux exposants $13m$, $10m + 4$, seront les plus grands;

2° $10m + 4 = 5m + 5$, d'où $m = \frac{1}{5}$, $10m + 4$, $5m + 5$;

3° $5m + 5 = m + 3$, d'où $m = -\frac{1}{2}$, $5m + 5$, $m + 3$,

4° $m + 3 = 2$, d'où $m = -1$, $m + 3$, 2.

On a donc

$$y = Ax^{\frac{4}{3}},\quad A^{13} + B_{10}A^{10} = 0,$$

donc

$$A=-\sqrt[3]{B_{10}} \text{ et } hy'=hy''=hy'''=\frac{m'}{\mu'}=\frac{4}{3},\ n'=1;$$

$$y=Ax^{\frac{1}{5}},\ B_{10}A^{10}+B_5A^5=0,$$

donc

$$A=-\sqrt[5]{\frac{B_5}{B_{10}}} \text{ et } hy^{(4)}=hy^{(5)}=hy^{(6)}=hy^{(7)}=hy^{(8)}=\frac{m''}{\mu''}=\frac{1}{5},\ n''=1;$$

$$y=Ax^{-\frac{1}{2}},\ B_5A^5+B_1A=0,$$

donc

$$A=\sqrt[4]{-\frac{B_1}{B_5}} \text{ et } hy^{(9)}=hy^{(10)}=hy^{(11)}=hy^{(12)}=\frac{m'''}{\mu'''}=\frac{-1}{2},\ n'''=2;$$

$$y=Ax^{-1},\ B_1A+B_0=0,$$

donc

$$A=-\frac{B_0}{B_1} \text{ et } hy^{(13)}=\frac{m''''}{\mu''''}=-1,\ n''''=1.$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs des nombres m', μ', n', m'', μ'', n'', m''', μ''', n''', m'''', μ'''', n'''', on aura

$$k'=n'\mu'=3,\ k''=n'\mu'+n''\mu''=8,\ k'''=n'\mu'+n''\mu''+n'''\mu'''=12,$$
$$k''''=n'\mu'+n''\mu''+n'''\mu'''+n''''\mu''''=13=n.$$

Maintenant le nombre ϱ_1 doit être compris entre $n-1$ et $n-k'$, ϱ_2 entre $n-k'-1$ et $n-k''$, etc.; donc on trouvera pour ces quantités, les valeurs suivantes:

$$\varrho_1=12,\ 11,\ 10,\quad \varrho_2=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\quad \varrho_3=4,\ 3,\ 2,\ 1,\quad \varrho_4=0.$$

Connaissant ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, on aura A_β', A_β'', A_β''', A_β'''' par l'équation (92); ensuite θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 par les équations (103); $f\varrho_2$, $f\varrho_3$, $f\varrho_4$ par l'équation (98); et enfin $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... $f(12)$ par l'équation (92).

La valeur de γ, qui est toujours la même, deviendra par l'équation (88) et la relation $\gamma=\gamma'-n+1$,

$$\gamma=\left\{\begin{aligned} &1.4.\left(\frac{3-1}{2}+5+4+1\right)+1.\frac{3-1}{2}\\ &+1.1.\left(\frac{5-1}{2}+4+1\right)+1.\frac{5-1}{2}\\ &+2.(-1).\left(\frac{4-1}{2}+1\right)+2.\frac{2-1}{2}\\ &+1.(-1).\left(\frac{1-1}{2}\right)+1.\frac{1-1}{2}-13+1,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$\gamma=38.$$

Pour pouvoir déterminer numériquement les valeurs de α et de μ, supposons, par exemple,

$$\varrho_1=11,\quad \varrho_2=6,\quad \varrho_3=4,\quad \varrho_4=0.$$

Alors l'équation (92) donnera les suivantes:

$$\begin{aligned}
f(12)&=f(11)-\tfrac{4}{3}-A_0', &&\text{donc } A_0'=\tfrac{2}{3},\ f(12)=f(11)-2\\
f(10)&=f(11)+\tfrac{4}{3}-A_2', &&\text{donc } A_2'=\tfrac{1}{3},\ f(10)=f(11)+1\\
f(9)&=f(6)-\tfrac{3}{5}-A_3'', &&\text{donc } A_3''=\tfrac{2}{5},\ f(9)=f(6)-1\\
f(8)&=f(6)-\tfrac{2}{5}-A_4'', &&\text{donc } A_4''=\tfrac{3}{5},\ f(8)=f(6)-1\\
f(7)&=f(6)-\tfrac{1}{5}-A_5'', &&\text{donc } A_5''=\tfrac{4}{5},\ f(7)=f(6)-1\\
f(5)&=f(6)+\tfrac{1}{5}-A_7'', &&\text{donc } A_7''=\tfrac{1}{5},\ f(5)=f(6)\\
f(3)&=f(4)-\tfrac{1}{2}-A_9''', &&\text{donc } A_9'''=\tfrac{1}{2},\ f(3)=f(4)-1\\
f(2)&=f(4)-1-A_{10}''', &&\text{donc } A_{10}'''=0,\ f(2)=f(4)-1\\
f(1)&=f(4)-\tfrac{3}{2}-A_{11}''', &&\text{donc } A_{11}'''=\tfrac{1}{2},\ f(1)=f(4)-2.
\end{aligned}$$

Pour trouver maintenant $f(0)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(11)$, il faut chercher les limites de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4.

Or les équations (103), qui déterminent ces limites, donnent

$$\theta_1>\frac{11-\alpha_1}{5}-\frac{3A_\beta'}{17},\ \text{d'où } \theta_1>-\frac{1}{5}-\frac{2}{17},\ 0,\ \frac{1}{5}-\frac{1}{17};$$

$$\theta_1<\frac{11-\alpha_2}{5}+\frac{3A_\beta''}{17},\ \text{d'où } \theta_1<\frac{2}{5}+\frac{6}{5.17},\ \frac{3}{5}+\frac{9}{5.17},$$
$$\frac{4}{5}+\frac{12}{5.17},\ 1,\ \frac{6}{5}+\frac{3}{5.17}.$$

Il suit de là que

$$\theta_1>\frac{12}{85},\quad \theta_1<\frac{8}{17}.$$

On trouve de la même manière

$$\theta_2>\frac{5}{14},\quad \theta_2<1,\quad \theta_3>\frac{1}{2},\quad \theta_3<1.$$

Maintenant l'équation (97) donne

$$f\varrho_m-f\varrho_{m-1}>(\varrho_{m-1}-\varrho_m)[\theta''_{m-1}\sigma_{m-1}+(1-\theta''_{m-1})\sigma_m],$$
$$f\varrho_m-f\varrho_{m-1}<(\varrho_{m-1}-\varrho_m)[\theta'_{m-1}\sigma_{m-1}+(1-\theta'_{m-1})\sigma_m],$$

où θ''_{m-1} est la plus petite et θ'_{m-1} la plus grande valeur de θ_{m-1}; donc on trouvera, en faisant,

$$m=2,\ 3,\ 4,$$

$$\begin{aligned}
&f(6)-f(11)>5.\left[\tfrac{12}{85}.\tfrac{4}{3}+\left(1-\tfrac{12}{85}\right).\tfrac{1}{5}\right]\ \left(=1+\tfrac{68}{85}\right)\\
&f(6)-f(11)<5.\left[\tfrac{8}{17}.\tfrac{4}{3}+\left(1-\tfrac{8}{17}\right).\tfrac{1}{5}\right]\ \left(=3+\tfrac{2}{3}\right)\\
&f(4)-f(6)>2.\left[\tfrac{5}{14}.\tfrac{1}{5}-\left(1-\tfrac{5}{14}\right).\tfrac{1}{2}\right]\ \left(=\ -\tfrac{1}{2}\right)\\
&f(4)-f(6)<2.\left[1.\tfrac{1}{5}-(1-1).\tfrac{1}{2}\right]\ \left(=\tfrac{2}{5}\right)\\
&f(0)-f(4)>4.\left[\tfrac{1}{2}.\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(1-\tfrac{1}{2}\right).(-1)\right]\ (=-3)\\
&f(0)-f(4)<4.\left[1.\left(-\tfrac{1}{2}\right)+(1-1).(-1)\right]\ (=-2);
\end{aligned}$$

donc on aura pour $f(6)-f(11)$, $f(4)-f(6)$, $f(0)-f(4)$, les valeurs suivantes:

$$f(6)-f(11)=2,\ 3,\ f(4)-f(6)=0,\ f(0)-f(4)=-3,\ -2;$$

d'où

$$\begin{aligned}
&f(6)=f(11)+2,\ f(11)+3,\ f(4)=f(11)+2,\ f(11)+3;\\
&f(0)=f(11)-1,\ f(11),\ f(11)+1;\\
&f(12)=f(11)-2;\ f(10)=f(11)+1;\ f(9)=f(11)+1,\ f(11)+2;\\
&f(8)=f(11)+1,\ f(11)+2;\ f(7)=f(11)+1,\ f(11)+2;\\
&f(5)=f(11)+2,\ f(11)+3;\ f(3)=f(11)+1,\ f(11)+2;\\
&f(2)=f(11)+1,\ f(11)+2;\ f(1)=f(11),\ f(11)+1.
\end{aligned}$$

En exprimant donc toutes ces quantités par $f(12)$, on voit que les fonctions q_{12}, q_{11}, q_{10}, $\dots q_0$, sont respectivement des degrés suivants

$$\overset{(12)}{\theta},\ \overset{(11)}{\theta+2},\ \overset{(10)}{\theta+3},\ \overset{(9)}{[\theta+3,\theta+4]},\ \overset{(8)}{[\theta+3,\theta+4]},\ \overset{(7)}{[\theta+3,\theta+4]},$$

$$\overset{(6)}{[\theta+4,\theta+5]},\ \overset{(5)}{[\theta+4,\theta+5]},\ \overset{(4)}{[\theta+4,\theta+5]},\ \overset{(3)}{[\theta+3,\theta+4]},$$

$$\overset{(2)}{[\theta+3,\theta+4]},\ \overset{(1)}{[\theta+2,\theta+3]},\ \overset{(0)}{\begin{bmatrix}\theta+1, & \theta+2\\ \theta+2, & \theta+3\end{bmatrix}},$$

où θ est le degré de la fonction q_{12}.

De là suit que

$$\alpha=f(0)+f(1)+\cdots+f(12)+12=13\theta+47,\ 13\theta+48,\ 13\theta+57,\ 13\theta+58,$$

et

$$\begin{aligned}
\mu&=n'\mu'\left(f\varrho_1+\varrho_1\frac{m'}{\mu'}\right)+n''\mu''\left(f\varrho_2+\varrho_2\frac{m''}{\mu''}\right)\\
&\qquad+n'''\mu'''\left(f\varrho_3+\varrho_3\frac{m'''}{\mu'''}\right)+n''''\mu''''\left(f\varrho_4+\varrho_4\frac{m''''}{\mu''''}\right)\\
&=3\left(f(11)+11.\tfrac{4}{5}\right)+5.\left(f(6)+6.\tfrac{1}{5}\right)+4\left(f(4)-4.\tfrac{1}{2}\right)+1.(f(0)-0);
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\mu=13\theta+85,\ \ 13\theta+86,\ \ 13\theta+95,\ \ 13\theta+96.$$

La valeur de $\mu-\alpha$ deviendra donc

$$\mu-\alpha=38,$$

comme nous avons trouvé plus haut pour la valeur de γ.

9.

Par les équations (92) et (98) établies précédemment, on aura les valeurs de toutes les quantités $f(0), f(1), f(2) \dots f(n-1)$, exprimées de la manière suivante:

$$fm=f\varrho_1+M_m, \tag{108}$$

où M_m est indépendant de $f\varrho_1$. Cette dernière quantité est entièrement arbitraire. Le nombre des coefficients dans q_0, q_1, $q_2 \dots q_{n-1}$, séra donc égal à

$$nf\varrho_1+M_0+M_1+M_2+\cdots+M_{n-1}; \tag{109}$$

mais α, ou le nombre des quantités indéterminées a, a', $a'' \dots$, est égal au nombre des coefficients déjà mentionnés diminué d'un certain nombre. On aura donc

$$\alpha=nf\varrho_1+M, \tag{110}$$

où M est indépendant de $f\varrho_1$.

De là il suit qu'on peut prendre α aussi grand qu'on voudra, le nombre $\mu-\alpha$ restant toujours le même.

L'équation (74) nous met donc en état d'exprimer une somme d'un nombre quelconque de fonctions données, de la forme ψx, par une somme d'un nombre déterminé de fonctions. Le dernier nombre peut toujours être supposé égal à γ, qui, en général, sera sa plus petite valeur.

De la formule (74) on peut en déduire une autre qui est plus générale encore, et dont elle est un cas particulier.

En effet, soient

$$(111)\quad \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha = v - (\psi_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \psi_{\alpha+2} x_{\alpha+2} + \cdots + \psi_\mu x_\mu),$$

$$\psi_1' x_1' + \psi_2' x_2' + \cdots + \psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = v' - (\psi'_{\alpha'+1} x'_{\alpha'+1} + \psi'_{\alpha'+2} x'_{\alpha'+2} + \cdots + \psi'_{\mu'} x'_{\mu'}),$$

où ψ_1', ψ_2', ... sont des fonctions semblables à ψ_1, ψ_2, ...

Supposons, ce qui est permis, que

$$x'_{\alpha'} = x_\mu,\ x'_{\alpha'-1} = x_{\mu-1},\ x'_{\alpha'-2} = x_{\mu-2},\ \ldots\ x'_{\alpha'-\mu+\alpha+1} = x_{\alpha+1},$$

et

$$\psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = \psi_\mu x_\mu,\ \psi'_{\alpha'-1} x'_{\alpha'-1} = \psi_{\mu-1} x_{\mu-1},\ \ldots\ \psi'_{\alpha'-\mu+\alpha+1} x'_{\alpha'-\mu+\alpha+1} = \psi_{\alpha+1} x_{\alpha+1};$$

les équations précédentes donneront

$$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha - \psi_1' x_1' - \psi_2' x_2' - \cdots - \psi'_{\alpha'-\mu+\alpha} x'_{\alpha'-\mu+\alpha} = v - v' + \psi'_{\alpha'+1} x'_{\alpha'+1} + \cdots + \psi'_{\mu'} x'_{\mu'};$$

donc en mettant V au lieu de $v - v'$, α' au lieu de $\alpha' - \mu + \alpha$,

$$\psi_1'',\ \psi_2'',\ \ldots\ \psi_k'' \text{ au lieu de } \psi'_{\alpha'+1},\ \psi'_{\alpha'+2},\ \ldots\ \psi'_{\mu'},$$
$$x_1'',\ x_2'',\ \ldots\ x_k'' \text{ au lieu de } x'_{\alpha'+1},\ x'_{\alpha'+2},\ \ldots\ x'_{\mu'},$$

et enfin k au lieu de $\mu' - \alpha'$, il viendra

$$(112)\quad \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha - \psi_1' x_1' - \psi_2' x_2' - \cdots - \psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = V + \psi_1'' x_1'' + \psi_2'' x_2'' + \psi_3'' x_3'' + \cdots + \psi_k'' x_k''.$$

Le nombre k, qui est égal à $\mu' - \alpha'$, est indépendant de α et α', qui sont des nombres quelconques.

Si l'on suppose

$$(113)\qquad x_1'' = c_1,\ x_2'' = c_2,\ \ldots\ x_k'' = c_k,$$

c_1, c_2, ... c_k étant des constantes, alors la formule (112) deviendra

$$(114)\quad \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + \cdots + \psi_\alpha x_\alpha - \psi_1' x_1' - \psi_2' x_2' - \cdots - \psi'_{\alpha'} x'_{\alpha'} = C + V,$$

où un nombre k des quantités x_1, x_2, ... x_α, x_1', x_2', ... $x'_{\alpha'}$ sont fonctions des autres, en vertu des équations (113). Il est clair qu'on peut prendre c_1, c_2, ... c_k de manière que C deviendra égal à zéro.

Supposons maintenant qu'on ait dans la formule précédente

$$(115)\quad \left\{\begin{array}{l}
x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{\varepsilon_1} = z_1 \\
x_{\varepsilon_1+1} = x_{\varepsilon_1+2} = x_{\varepsilon_1+3} = \cdots = x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = z_2, \\
x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+1} = x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2} = \cdots = x_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} = z_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{\alpha-\varepsilon_m+1} = x_{\alpha-\varepsilon_m+2} = \cdots = x_\alpha = z_m, \\
\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{\varepsilon_1} = \pi_1, \\
\psi_{\varepsilon_1+1} = \psi_{\varepsilon_1+2} = \cdots = \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \pi_2, \\
\psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+1} = \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+2} = \cdots = \psi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} = \pi_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_{\alpha-\varepsilon_m+1} = \psi_{\alpha-\varepsilon_m+2} = \cdots = \psi_\alpha = \pi_m;
\end{array}\right.$$

en sorte que

$$\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m.$$

Supposons les mêmes choses relativement aux quantités x'_1, x'_2, ... ψ'_1, ψ'_2, ... α', en accentuant les lettres ε_1, ε_2, ... ε_m, z_1, z_2, ... z_m, π_1, π_2, ... π_m et m. Alors la formule (114) deviendra:

$$(116)\quad V = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \pi_1 z_1 + \varepsilon_2 \pi_2 z_2 + \varepsilon_3 \pi_3 z_3 + \cdots + \varepsilon_m \pi_m z_m - \varepsilon_1' \pi_1' z_1' \\ \qquad - \varepsilon_2' \pi_2' z_2' - \cdots - \varepsilon'_{m'} \pi'_{m'} z'_{m'}, \end{array}\right.$$

où un nombre k des fonctions $\pi_1 z_1$, $\pi_2 z_2$, ... $\pi_1' z_1'$, ... dépendent des formes et des valeurs des autres.

En divisant les deux membres de cette équation par un nombre quelconque A et désignant les nombres rationnels

$$\frac{\varepsilon_1}{A},\ \frac{\varepsilon_2}{A},\ \ldots\ \frac{\varepsilon_m}{A},\ -\frac{\varepsilon_1'}{A},\ -\frac{\varepsilon_2'}{A},\ \ldots\ -\frac{\varepsilon'_{m'}}{A},$$

par h_1, h_2, h_3, ... h_α, et mettant ψ au lieu de π, x au lieu de z, et v au lieu de $\frac{V}{A}$, il viendra:

$$(117)\qquad h_1 \psi_1 x_1 + h_2 \psi_2 x_2 + \cdots + h_\alpha \psi_\alpha x_\alpha = v,$$

où il est clair que h_1, h_2, ... h_α peuvent être des nombres rationnels quelconques, positifs ou négatifs.

En remarquant que k des quantités x_1, x_2, ... x_α sont déterminées en fonctions des autres, on peut écrire cette formule comme il suit:

$$(118)\qquad h_1 \psi_1 x_1 + h_2 \psi_2 x_2 + \cdots + h_m \psi_m x_m = v + k_1 \psi_1' x_1' + k_2 \psi_2' x_2' + \cdots + k_k \psi_k' x_k',$$

$$h_1,\ h_2,\ \ldots\ h_m,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_k$$

étant des nombres *rationnels* quelconques;

$$x_1,\ x_2,\ \dots x_m$$

étant des quantités indéterminées en nombre arbitraire;

$$x_1',\ x_2',\ \dots x_k'$$

étant des fonctions de ces quantités, qui peuvent se trouver algébriquement, et k étant un nombre indépendant de m.

Si l'on prend, par exemple,

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_k = 1,$$

on aura la formule

$$\begin{aligned}(119)\qquad & h_1\psi_1x_1 + h_2\psi_2x_2 + \cdots + h_m\psi_mx_m \\ & = v + \psi_1'x_1' + \psi_2'x_2' + \cdots + \psi_k'x_k'.\end{aligned}$$

10.

Après avoir ainsi, dans ce qui précède, considéré les fonctions en général, je vais maintenant appliquer la théorie à une classe de fonctions qui méritent une attention particulière. Ce sont les fonctions de la forme

$$(120)\qquad \int f(x,y)\,dx,$$

où y est donné par l'équation

$$(121)\qquad \chi y = y^n + p_0 = 0,$$

p_0 étant une fonction entière de x.

Quelle que soit la fonction entière p_0, on peut toujours supposer

$$(122)\qquad -p_0 = r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} r_3^{\mu_3} \dots r_\varepsilon^{\mu_\varepsilon},$$

où $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots \mu_\varepsilon$ sont des nombres entiers et positifs, et $r_1,\ r_2,\ \dots r_\varepsilon$ des fonctions entières qui n'ont point de facteurs égaux.

En substituant cette expression de $-p_0$ dans l'équation (121), on en tirera la valeur de y, savoir:

$$(123)\qquad y = r_1^{\frac{\mu_1}{n}} r_2^{\frac{\mu_2}{n}} r_3^{\frac{\mu_3}{n}} \dots r_\varepsilon^{\frac{\mu_\varepsilon}{n}}.$$

Si l'on désigne cette valeur de y par R, et par $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \dots \omega^{n-1}$ les n racines de l'équation $\omega^n - 1 = 0$, les n valeurs de y seront

$$(124)\qquad R,\ \omega R,\ \omega^2 R,\ \omega^3 R,\ \dots \omega^{n-1}R;$$

on aura, par conséquent,

$$\begin{aligned}(125)\qquad r = \theta y'.\theta y'' \dots \theta y^{(n)} = & (q_0 + q_1R + q_2R^2 + \cdots + q_{n-1}R^{n-1}) \\ & \times(q_0 + \omega q_1R + \omega^2 q_2R^2 + \cdots + \omega^{n-1}q_{n-1}R^{n-1}) \\ & \times(q_0 + \omega^2 q_1R + \omega^4 q_2R^2 + \cdots + \omega^{2n-2}q_{n-1}R^{n-1}) \\ & \times(q_0 + \omega^3 q_1R + \omega^6 q_2R^2 + \cdots + \omega^{3n-3}q_{n-1}R^{n-1}) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \times(q_0 + \omega^{n-1} q_1R + \omega^{2n-2} q_2R^2 + \cdots + \omega^{(n-1)^2}q_{n-1}R^{n-1});\end{aligned}$$

attendu que

$$(126)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta y' &= q_0 + q_1R + q_2R^2 + \cdots + q_{n-1}R^{n-1}, \\ \theta y'' &= q_0 + \omega q_1R + \omega^2 q_2R^2 + \cdots + \omega^{n-1}q_{n-1}R^{n-1}, \\ \theta y''' &= q_0 + \omega^2 q_1R + \omega^4 q_2R^2 + \cdots + \omega^{2n-2}q_{n-1}R^{n-1}, \\ & \text{etc., etc.}\end{aligned}\right.$$

Cela posé, soit

$$(127)\qquad f(x,y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2x\,.\,\chi' y},$$

et supposons

$$f_1(x,y) = nf_3x\,.\,y^{n-m-1},$$

où f_2x et f_3x sont deux fonctions entières de x; alors on aura, en vertu de l'équation $\chi y = y^n + p_0$, qui donne $\chi' y = ny^{n-1}$,

$$(128)\qquad f(x,y) = \frac{f_3x}{f_2x\,.\,y^m};$$

d'où

$$(129)\qquad \psi x = \int \frac{f_3x\,.\,dx}{y^m f_2x}.$$

L'une quelconque des valeurs de y est de la forme $\omega^e R$, donc

$$(130)\qquad \psi x = \omega^{-em}\int \frac{f_3x\,.\,dx}{R^m f_2x}.$$

En indiquant donc par ψx la fonction $\int \frac{f_3x\,.\,dx}{R^m f_2x}$, toutes les fonctions $\psi_1x,\ \psi_2x\ \dots\ \psi_\mu x$ seront de la forme $\omega^{-em}\psi x$. Soient donc

$$(131)\qquad \psi_1x = \omega^{-e_1m}\psi x,\ \psi_2x = \omega^{-e_2m}\psi x,\ \dots\ \psi_\mu x = \omega^{-e_\mu m}\psi x,$$

où

$$\psi x = \int \frac{f_3x\,.\,dx}{R^m f_2x}.$$

Maintenant les équations (38) donnent pour φx et $\varphi_1 x$ les expressions suivantes:

$$\varphi x = \Sigma \frac{f_3 x}{f_2 x \cdot y^m} \log \theta y, \quad \varphi_1 x = \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{f_3 x}{y^m} \log \theta y,$$

c'est-à-dire

$$\varphi x = \frac{f_3 x}{f_2 x} \Sigma \frac{\log \theta y}{y^m}, \quad \varphi_1 x = \frac{F_2 x \cdot f_3 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \Sigma \frac{\log \theta y}{y^m},$$

où il est clair que

$$\Sigma \frac{\log \theta y}{y^m} = \frac{\log \theta R}{R^m} + \omega^{-m} \frac{\log \theta(\omega R)}{R^m} + \cdots + \omega^{-(n-1)m} \frac{\log \theta(\omega^{n-1} R)}{R^m},$$

ou bien

$$\Sigma \frac{\log \theta y}{y^m} = \frac{1}{R^m} \left\{ \begin{array}{l} \log \theta R + \omega^{-m} \log \theta(\omega R) + \omega^{-2m} \log \theta(\omega^2 R) \\ + \cdots + \omega^{-(n-1)m} \log \theta(\omega^{n-1} R). \end{array} \right\}$$

En faisant donc, pour abréger,

$$\varphi_2 x = \frac{f_3 x}{R^m} \left\{ \begin{array}{l} \log \theta R + \omega^{-m} \log \theta(\omega R) + \omega^{-2m} \log \theta(\omega^2 R) \\ + \cdots + \omega^{-(n-1)m} \log \theta(\omega^{n-1} R) \end{array} \right\} \tag{132}$$

on aura

$$\varphi x = \frac{\varphi_2 x}{f_2 x}, \quad \varphi_1 x = \frac{F_2 x}{\theta_1^{(\nu)} x} \varphi_2 x. \tag{133}$$

La formule (41) deviendra donc

$$\begin{aligned} & \omega^{-e_1 m} \psi x_1 + \omega^{-e_2 m} \psi x_2 + \cdots + \omega^{-e_\mu m} \psi x_\mu \\ & \qquad = C - \Pi \frac{\varphi_2 x}{f_2 x} + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{F_2 \beta \cdot \varphi_2 \beta}{\theta_1^{(\nu)} \beta} \right). \end{aligned} \tag{134}$$

Les équations

$$\theta y_1 = 0, \ \theta y_2 = 0, \ \ldots \ \theta y_\mu = 0,$$

qui ont lieu entre les quantités $a, a', a'', \ldots x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y^\mu$, peuvent, dans les cas que nous considérons, s'écrire comme il suit:

$$\begin{aligned} \theta(x_1, \omega^{e_1} R_1) = 0, \ \theta(x_2, \omega^{e_2} R_2) = 0, \ \theta(x_3, \omega^{e_3} R_3) = 0, \\ \ldots \ \theta(x_\mu, \omega^{e_\mu} R_\mu) = 0, \end{aligned}$$

où

$$\theta(x, y) = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots + q_{n-1} y^{n-1},$$

et $R_1, R_2, R_3, \ldots R_\mu$ désignent les valeurs de R pour $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$.

Cela posé, supposons d'abord que tous les coefficients dans $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ soient des quantités indéterminées, en sorte que le nombre des quantités $a, a', a'', \ldots$ serait

$$\alpha = hq_0 + hq_1 + hq_2 + \cdots + hq_{n-1} + n - 1, \tag{135}$$

et cherchons la plus petite valeur de $\mu - \alpha$.

Comme toutes les fonctions $y', y'', y''', \ldots y^{(n)}$ sont du même degré, on aura

$$hy' = hy'' = hy''' = \cdots = hy^{(n)} = \frac{m'}{\mu'};$$

par conséquent

$$\varepsilon = 1, \ n = n'\mu' = k'.$$

L'équation (92) donne donc

$$fm = f\varrho_1 + (\varrho_1 - m) \frac{m'}{\mu'} - A_m', \tag{136}$$

où m est un nombre entier quelconque depuis zéro jusqu'à $n - 1$, et A_m' une quantité positive moindre que l'unité.

On a de même par (106)

$$\mu = hr = n'\mu' \left(f\varrho_1 + \varrho_1 \frac{m'}{\mu'} \right),$$

donc

$$\mu = nf\varrho_1 + n'm'\varrho_1, \tag{137}$$

et par l'équation (62) la valeur de γ, qui sera celle de $\mu - \alpha$, savoir:

$$\mu - \alpha = \gamma = n'\mu' \frac{n'm' - 1}{2} - n' \frac{m' + 1}{2} + 1, \tag{138}$$

ou bien en remarquant que $n = n'\mu'$, $n'm' = nhR$:

$$\mu - \alpha = \gamma = \frac{n-1}{2} n . hR - \frac{n + n'}{2} + 1. \tag{139}$$

C'est là la moindre valeur de $\mu - \alpha$ lorsque toutes les quantités $a, a', a'', \ldots$ sont indéterminées; mais dans le cas qui nous occupe, on peut rendre ce nombre beaucoup plus petit en déterminant convenablement quelques-unes des quantités $a, a', a'', \ldots$

Désignons, pour abréger, par EA le plus grand nombre entier contenu dans un nombre quelconque A, et par εA le reste, on aura:

$$A = EA + \varepsilon A, \tag{140}$$

où il est clair que εA est positif et plus petit que l'unité.

Cela posé, soient

$$\theta_m = E \frac{\mu_m}{n} + E \frac{2\mu_m}{n} + E \frac{3\mu_m}{n} + \cdots + E \frac{(n-1)\mu_m}{n}, \tag{141}$$

et

$$\delta_{m,\pi} = \theta_m - E \left(\frac{\pi \mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n} \right), \tag{142}$$

où m est l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \dots \varepsilon$, π un des nombres $0, 1, 2, \dots n-1$, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varepsilon$ des nombres entiers positifs.

Supposons

$$q_\pi = v_\pi r_1^{\delta_{1,\pi}} r_2^{\delta_{2,\pi}} \dots r_\varepsilon^{\delta_{\varepsilon,\pi}}, \tag{143}$$

v_π étant une fonction entière de x.

De là on tire

$$q_\pi R^\pi = v_\pi r_1^{\frac{\pi\mu_1}{n}+\delta_{1,\pi}} r_2^{\frac{\pi\mu_2}{n}+\delta_{2,\pi}} \dots r_\varepsilon^{\frac{\pi\mu_\varepsilon}{n}+\delta_{\varepsilon,\pi}};$$

or

$$\frac{\pi\mu_m}{n} + \delta_{m,\pi} = \frac{\pi\mu_m}{n} + \theta_m - E\left(\frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n}\right);$$

mais en vertu de l'équation (140),

$$E\left(\frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n}\right) = \frac{\pi\mu_m}{n} - \frac{\alpha_m}{n} - \varepsilon\left(\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n}\right),$$

donc en substituant:

$$\frac{\pi\mu_m}{n} + \delta_{m,\pi} = \theta_m + \frac{\alpha_m}{n} + \varepsilon\,\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n}; \tag{144}$$

en faisant donc, pour abréger,

$$\varepsilon\,\frac{\pi\mu_m - \alpha_m}{n} = k_{m,\pi}, \tag{145}$$

on aura

$$q_\pi R^\pi = v_\pi r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}} \times r_1^{k_{1,\pi}} r_2^{k_{2,\pi}} \dots r_\varepsilon^{k_{\varepsilon,\pi}}, \tag{146}$$

ou bien en faisant

$$r_1^{k_{1,\pi}} r_1^{k_{2,\pi}} r_3^{k_{3,\pi}} \dots r_\varepsilon^{k_{\varepsilon,\pi}} = R^{(\pi)}: \tag{147}$$

$$q_\pi R^\pi = v_\pi r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}} R^{(\pi)}. \tag{148}$$

Par là il est évident qu'on aura

$$\left\{\begin{aligned} &q_0 + q_1 R + q_2 R^2 + \dots + q_\pi R^\pi + \dots + q_{n-1} R^{n-1} \\ &= (v_0 R^{(0)} + v_1 R^{(1)} + v_2 R^{(2)} + \dots + v_\pi R^{(\pi)} + \dots + v_{n-1} R^{(n-1)}) \\ &\qquad \times r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}}; \end{aligned}\right. \tag{149}$$

et en général (126)

$$\left\{\begin{aligned} \theta y^{(e)} &= q_0 + \omega^e q_1 R + \omega^{2e} q_2 R^2 + \dots + \omega^{(n-1)e} q_{n-1} R^{n-1}, \\ &= (v_0 R^{(0)} + \omega^e v_1 R^{(1)} + \omega^{2e} v_2 R^{(2)} + \dots + \omega^{(n-1)e} v_{n-1} R^{(n-1)}) \\ &\qquad \times r_1^{\theta_1+\frac{\alpha_1}{n}} r_2^{\theta_2+\frac{\alpha_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{\theta_\varepsilon+\frac{\alpha_\varepsilon}{n}}; \end{aligned}\right. \tag{150}$$

Soit, pour abréger,

$$v_0 R^{(0)} + \omega^e v_1 R^{(1)} + \omega^{2e} v_2 R^{(2)} + \dots + \omega^{(n-1)e} v_{n-1} R^{(n-1)} = \theta'(x, e), \tag{151}$$

il est clair que

$$\begin{aligned} r &= \theta y' . \theta y'' \dots \theta y^{(n)} \\ &= \theta'(x,0)\,\theta'(x,1)\,\theta'(x,2) \dots \theta'(x,n-1)\, r_1^{n\theta_1+\alpha_1} r_2^{n\theta_2+\alpha_2} \dots r_\varepsilon^{n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon}; \end{aligned} \tag{152}$$

donc en supposant que tous les coefficients dans $v_0, v_1, \dots v_{n-1}$ soient des quantités indéterminées, on aura

$$\begin{aligned} F_0 x &= r_1^{n\theta_1+\alpha_1} r_2^{n\theta_2+\alpha_2} \dots r_\varepsilon^{n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon}, \\ F x &= \theta'(x,0)\,\theta'(x,1)\,\theta'(x,2) \dots \theta'(x,n-1). \end{aligned} \tag{153}$$

Maintenant l'équation (19) donne, en substituant les valeurs de $f_1(x,y) = nf_3 x . y^{n-m-1}$ et de $\chi' y = ny^{n-1}$,

$$Rx = \Sigma\,\frac{f_3 x}{y^m}\,\frac{r . \delta\theta y}{\theta y};$$

or, par l'équation (150),

$$\frac{\delta\theta y^{(e)}}{\theta y^{(e)}} = \frac{\delta\theta'(x,e)}{\theta'(x,e)},$$

donc, en substituant et mettant au lieu de r sa valeur,

$$r = F_0 x . F x:$$

$$Rx = F_0 x\,\Sigma\,\frac{f_3 x}{y^m}\,\frac{Fx . \delta\theta'(x,e)}{\theta'(x,e)}, \tag{154}$$

où

$$y = y^{(e)};$$

or, on a par (123)

$$y^m = r_1^{\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{\frac{m\mu_2}{n}} \dots r^{\frac{m\mu_\varepsilon}{n}},$$

donc

$$y^m = r_1^{E\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{E\frac{m\mu_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{E\frac{m\mu_\varepsilon}{n}} \times r_1^{\varepsilon\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{\varepsilon\frac{m\mu_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{\varepsilon\frac{m\mu_\varepsilon}{n}}; \tag{155}$$

en faisant donc pour abréger

$$s_m = r_1^{\varepsilon\frac{m\mu_1}{n}} r_2^{\varepsilon\frac{m\mu_2}{n}} \dots r_\varepsilon^{\varepsilon\frac{m\mu_\varepsilon}{n}}, \tag{156}$$

et posant ensuite

$$(157)\qquad f_3x = fx\,.\,r_1^{E\frac{m\mu_1}{n}}\,r_2^{E\frac{m\mu_2}{n}}\,\ldots\,r_\varepsilon^{E\frac{m\mu_\varepsilon}{n}},$$

on aura

$$\frac{f_3x}{y^m} = \frac{fx}{s_m};$$

donc

$$\frac{f_3x}{(y^{(e)})^m} = \omega^{-em}\frac{fx}{s_m},$$

et par conséquent la valeur de Rx deviendra

$$(158)\qquad Rx = \frac{fx\,.\,F_0x}{s_m}\,\Sigma\,\omega^{-em}\frac{Fx}{\theta'(x,e)}\,\delta\theta'(x,e)$$

$$= \frac{F_0x\,.\,fx}{s_m}\left\{\begin{array}{r}\dfrac{Fx}{\theta'(x,0)}\,\delta\theta'(x,0) + \omega^{-m}\dfrac{Fx}{\theta'(x,1)}\,\delta\theta'(x,1) + \omega^{-2m}\dfrac{Fx}{\theta'(x,2)}\,\delta\theta'(x,2)\\ + \cdots + \omega^{-(n-1)m}\dfrac{Fx}{\theta'(x,n-1)}\,\delta\theta'(x,n-1)\end{array}\right\}.$$

Maintenant il est clair que

$$\frac{Fx}{\theta'(x,0)}\,\delta\theta'(x,0),$$

qui est égal à (153)

$$\theta'(x,1)\,\theta'(x,2)\,\ldots\,\theta'(x,n-1)\,\delta\theta'(x,0)$$

et par conséquent une fonction entière de x et de $R^{(0)}, R^{(1)}, \ldots R^{(n-1)}$, peut être mise sous la forme

$$M_0 + M_1s_1 + M_2s_2 + \cdots + M_ms_m + \cdots + M_{n-1}s_{n-1},$$

où M_0, M_1, $\ldots$ M_{n-1} sont des fonctions entières de x.

De là il suit que la fonction Rx, qui doit être entière, sera égale à

$$nF_0x\,.\,fx\,.\,M_m.$$

La fonction F_0x est donc un facteur de Rx, et par conséquent

$$(159)\qquad Rx = F_0x\,.\,R_1x.$$

Par là il est clair, en vertu des équations (23), (25) et (35), qu'on aura

$$(160)\qquad F_2x = 1,\quad \theta_1x = f_2x.$$

Cela posé, la valeur (132) de φ_2x deviendra, en mettant $\frac{fx}{s_m}$ au lieu

de $\frac{f_3x}{R^m}$, substituant les valeurs de $\theta(R)$, $\theta(\omega R)$, etc., données par l'équation (150), en remarquant que

$$1 + \omega^{-m} + \omega^{-2m} + \cdots + \omega^{-(n-1)m} = 0:$$

$$(161)\qquad \varphi_2x = \frac{fx}{s_m}\left\{\begin{array}{r}\log\theta'(x,0) + \omega^{-m}\log\theta'(x,1) + \omega^{-2m}\log\theta'(x,2)\\ + \cdots + \omega^{-(n-1)m}\log\theta'(x,n-1)\end{array}\right\},$$

et les valeurs (133) de φx et φ_1x:

$$\varphi x = \frac{\varphi_2x}{f_2x},\quad \varphi_1x = \frac{\varphi_2x}{f_2^{(\nu)}x},$$

et par suite la formule (134) donnera

$$(162)\qquad \omega^{-e_1m}\psi x_1 + \omega^{-e_2m}\psi x_2 + \cdots + \omega^{-e_\mu m}\psi x_\mu$$

$$= C - \Pi\frac{\varphi_2x}{f_2x} + \Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{\varphi_2\beta}{f_2^{(\nu)}\beta}\right\};$$

on a

$$f_2x = (x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\ldots(x-\beta_k)^{\nu_k}.$$

Il nous reste à trouver la valeur de μ et le nombre des quantités indéterminées; or, on a par l'équation (153)

$$(163)\qquad hF_0x = (n\theta_1+\alpha_1)hr_1 + (n\theta_2+\alpha_2)hr_2 + \cdots + (n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon)hr_\varepsilon;$$

mais

$$hr = nf\varrho_1 + n'm'\varrho_1,$$

donc

$$\mu = nf\varrho_1 + n'm'\varrho_1 - [(n\theta_1+\alpha_1)hr_1 + (n\theta_2+\alpha_2)hr_2 + \cdots + (n\theta_\varepsilon+\alpha_\varepsilon)hr_\varepsilon];$$

or

$$n'm' = n\,.\,hR = n\left(\frac{\mu_1}{n}hr_1 + \frac{\mu_2}{n}hr_2 + \cdots + \frac{\mu_\varepsilon}{n}hr_\varepsilon\right)$$

$$= \mu_1hr_1 + \mu_2hr_2 + \cdots + \mu_\varepsilon hr_\varepsilon,$$

donc en substituant,

$$(164)\qquad \mu = \left\{\begin{array}{l}nf\varrho_1 + (\mu_1\varrho_1 - n\theta_1 - \alpha_1)hr_1\\ + (\mu_2\varrho_1 - n\theta_2 - \alpha_2)hr_2 + \cdots + (\mu_\varepsilon\varrho_1 - n\theta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon)hr_\varepsilon.\end{array}\right.$$

Maintenant l'équation (143) donne

$$(165)\qquad hq_\pi = f\pi = \delta_{1,\pi}\,.\,hr_1 + \delta_{2,\pi}\,.\,hr_2 + \cdots + \delta_{\varepsilon,\pi}\,.\,hr_\varepsilon + hv_\pi,$$

donc, en écrivant ϱ au lieu de ϱ_1,

$$\mu = nhv_\varrho + (n\delta_{1,\varrho} - n\theta_1 + \varrho\mu_1 - \alpha_1)hr_1 + (n\delta_{2,\pi} - n\theta_2 + \varrho\mu_2 - \alpha_2)hr_2 + \cdots;$$

mais en vertu de (144) on aura

$$n\delta_{m,\varrho}-n\theta_m+\varrho\mu_m-\alpha_m=n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_m-\alpha_m}{n},$$

donc

(166) $$\mu=nhv_\varrho+n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_1-\alpha_1}{n}hr_1+n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_2-\alpha_2}{n}hr_2+\cdots+n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_\varepsilon-\alpha_\varepsilon}{n}hr_\varepsilon.$$

Cherchons maintenant la valeur de α ou le nombre des indéterminées. On a

$$\alpha=hv_0+hv_1+hv_2+\cdots+hv_{n-1}+n-1,$$

donc en vertu de (165)

(167) $$\alpha=\begin{cases} hq_0+hq_1+hq_2+\cdots+hq_{n-1}+n-1\\ -(\delta_{1,0}+\delta_{1,1}+\delta_{1,2}+\cdots+\delta_{1,n-1})hr_1\\ -(\delta_{2,0}+\delta_{2,1}+\delta_{2,2}+\cdots+\delta_{2,n-1})hr_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -(\delta_{\varepsilon,0}+\delta_{\varepsilon,1}+\delta_{\varepsilon,2}+\cdots+\delta_{\varepsilon,n-1})hr_\varepsilon.\end{cases}$$

On a d'après (136) et (85)

(168) $$\begin{aligned} &hq_0+hq_1+\cdots+hq_{n-1}\\ &=n.hq_\varrho+[\varrho+(\varrho-1)+\cdots+(\varrho-n+1)]\frac{m'}{\mu'}-(A_0'+A_1'+\cdots+A'_{n-1})\\ &=n(hv_\varrho+\delta_{1,\varrho}hr_1+\delta_{2,\varrho}hr_2+\cdots+\delta_{\varepsilon,\varrho}hr_\varepsilon)+\left(n\varrho-\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{m'}{\mu'}-\frac{n'(\mu'-1)}{2},\end{aligned}$$

et d'après (142)

(169) $$\begin{aligned} &\delta_{m,0}+\delta_{m,1}+\cdots+\delta_{m,n-1}=n\theta_m\\ &-\left(E\frac{-\alpha_m}{n}+E\frac{\mu_m-\alpha_m}{n}+E\frac{2\mu_m-\alpha_m}{n}+\cdots+E\frac{(n-1)\mu_m-\alpha_m}{n}\right).\end{aligned}$$

En désignant le second membre par

$$n\theta_m-P_m,$$

on aura

$$P_m=\begin{cases}\dfrac{-\alpha_m}{n}+\dfrac{\mu_m-\alpha_m}{n}+\dfrac{2\mu_m-\alpha_m}{n}+\cdots+\dfrac{(n-1)\mu_m-\alpha_m}{n}\\ -\left(\varepsilon\dfrac{-\alpha_m}{n}+\varepsilon\dfrac{\mu_m-\alpha_m}{n}+\cdots+\varepsilon\dfrac{(n-1)\mu_m-\alpha_m}{n}\right);\end{cases}$$

or, la suite

$$\varepsilon\frac{-\alpha_m}{n}+\varepsilon\frac{\mu_m-\alpha_m}{n}+\cdots+\varepsilon\frac{(n-1)\mu_m-\alpha_m}{n}$$

contiendra k_m fois la suivante

$$\frac{0}{n_m}+\frac{1}{n_m}+\frac{2}{n_m}+\cdots+\frac{n_m-1}{n_m},$$

si l'on suppose

$$\frac{\mu_m}{n}=\frac{\mu_m'}{n_m}\quad\text{et}\quad n=k_mn_m$$

et

(170) $$\alpha_m=\varepsilon_mk_m,$$

ε_m étant un nombre entier.

La somme dont il s'agit sera donc

$$k_m\frac{n_m-1}{2},$$

et par conséquent

$$P_m=-\alpha_m+\frac{n-1}{2}\mu_m-\frac{n_m-1}{2}k_m.$$

En faisant $\alpha_m=0$, on aura d'après (141) $P_m=\theta_m$, donc

$$\theta_m=\frac{n-1}{2}\mu_m-\frac{n_m-1}{2}k_m;$$

de là il suit:

$$\delta_{m,0}+\delta_{m,1}+\cdots+\delta_{m,n-1}=\alpha_m+(n-1)\theta_m;$$

la valeur de α deviendra donc

$$\alpha=\begin{cases} nhv_\varrho+[n\delta_{1,\varrho}-\alpha_1-(n-1)\theta_1]hr_1\\ \quad+[n\delta_{2,\varrho}-\alpha_2-(n-1)\theta_2]hr_2+\cdots\\ \quad+n-1-\dfrac{n'(\mu'-1)}{2}+\left(n\varrho-\dfrac{n(n-1)}{2}\right)\dfrac{m'}{\mu'};\end{cases}$$

or

$$n\delta_{m,\varrho}-\alpha_m-n\theta_m=n\,.\,\varepsilon\frac{\varrho\mu_m-\alpha_m}{n}-\varrho\mu_m,\quad n'\mu'=n$$

et

$$\frac{m'}{\mu'}=hR=\frac{1}{n}(\mu_1hr_1+\mu_2hr_2+\cdots+\mu_\varepsilon hr_\varepsilon),$$

donc en substituant

$$\alpha=\begin{cases} nhv_\varrho+\left(n.\varepsilon\dfrac{\varrho\mu_1-\alpha_1}{n}+\theta_1-\dfrac{n-1}{2}\mu_1\right)hr_1\\ \quad+\left(n.\varepsilon\dfrac{\varrho\mu_2-\alpha_2}{n}+\theta_2-\dfrac{n-1}{2}\mu_2\right)hr_2+\cdots\\ \quad+\left(n.\varepsilon\dfrac{\varrho\mu_\varepsilon-\alpha_\varepsilon}{n}+\theta_\varepsilon-\dfrac{n-1}{2}\mu_\varepsilon\right)hr_\varepsilon-1+\dfrac{n+n'}{2};\end{cases}$$

mais nous avons vu que

$$\theta_m = \frac{n-1}{2}\mu_m - \frac{n_m-1}{2}k_m = \frac{n-1}{2}\mu_m - \frac{n-k_m}{2},$$

donc

$$(171) \qquad \alpha = \begin{cases} nhv_\varrho + \left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_1-\alpha_1}{n} - \frac{n-k_1}{2}\right)hr_1 \\ \quad + \left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_2-\alpha_2}{n} - \frac{n-k_2}{2}\right)hr_2 + \cdots \\ \quad + \left(n.\varepsilon\frac{\varrho\mu_\varepsilon-\alpha_\varepsilon}{n} - \frac{n-k_\varepsilon}{2}\right)hr_\varepsilon - 1 + \frac{n+n'}{2}. \end{cases}$$

Ayant ainsi trouvé les valeurs de μ et α on aura celle de $\mu-\alpha$, savoir:

$$(172) \quad \mu-\alpha = \frac{n-k_1}{2}hr_1 + \frac{n-k_2}{2}hr_2 + \frac{n-k_3}{2}hr_3 + \cdots$$
$$+ \frac{n-k_\varepsilon}{2}hr_\varepsilon + 1 - \frac{n'+n}{2} = \theta;$$

$\mu-\alpha$ est donc, comme on le voit, indépendant de ϱ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\varepsilon$.

En vertu des équations (145) et (147), il est clair qu'on aura aussi

$$(173) \qquad \mu = n.hv_\varrho + n.hR^{(\varrho)},$$

$$(174) \qquad \alpha = n.hv_\varrho + n.hR^{(\varrho)} - \theta.$$

Les quantités $hv_0, hv_1, \ldots hv_{n-1}$ peuvent s'exprimer en hv_ϱ au moyen des équations (136) et (165).

On a

$$fm = \delta_{1,m}hr_1 + \delta_{2,m}hr_2 + \cdots + \delta_{\varepsilon,m}hr_\varepsilon + hv_m$$
$$f\varrho = \delta_{1,\varrho}hr_1 + \delta_{2,\varrho}hr_2 + \cdots + \delta_{\varepsilon,\varrho}hr_\varepsilon + hv_\varrho$$

et

$$fm = f\varrho + (\varrho - m)\frac{m'}{\mu'} - A_m';$$

donc en éliminant fm et $f\varrho$,

$$hv_m = \begin{cases} hv_\varrho + (\varrho-m)\frac{m'}{\mu'} + (\delta_{1,\varrho}-\delta_{1,m})hr_1 + (\delta_{2,\varrho}-\delta_{2,m})hr_2 + \cdots \\ \quad + (\delta_{\varepsilon,\varrho}-\delta_{\varepsilon,m})hr_\varepsilon - A_m'. \end{cases}$$

Or,

$$\frac{m'}{\mu'} = \frac{1}{n}(\mu_1 hr_1 + \mu_2 hr_2 + \cdots + \mu_\varepsilon hr_\varepsilon),$$

et par (142)

$$\delta_{k,\varrho} - \delta_{k,m} = \theta_k - E\left(\frac{\varrho\mu_k}{n} - \frac{\alpha_k}{n}\right) - \left\{\theta_k - E\left(\frac{m\mu_k}{n} - \frac{\alpha_k}{n}\right)\right\}$$
$$= (m-\varrho)\frac{\mu_k}{n} + \varepsilon\frac{\varrho\mu_k - \alpha_k}{n} - \varepsilon\frac{m\mu_k-\alpha_k}{n} = (m-\varrho)\frac{\mu_k}{n} + k_{k,\varrho} - k_{k,m};$$

donc en substituant et réduisant

$$hv_m = \begin{cases} hv_\varrho + (k_{1,\varrho}-k_{1,m})hr_1 + (k_{2,\varrho}-k_{2,m})hr_2 + \cdots \\ \quad + (k_{\varepsilon,\varrho}-k_{\varepsilon,m})hr_\varepsilon - A_m'; \end{cases}$$

c'est-à-dire en remarquant que A_m' est positif et plus petit que l'unité,

$$(175) \quad hv_m = hv_\varrho + E\left\{ \begin{array}{l} (k_{1,\varrho}-k_{1,m})hr_1 + (k_{2,\varrho}-k_{2,m})hr_2 + \cdots \\ \quad + (k_{\varepsilon,\varrho}-k_{\varepsilon,m})hr_\varepsilon \end{array} \right\}.$$

D'après l'équation (147), qui donne la valeur de $R^{(\pi)}$, on peut aussi écrire

$$(176) \qquad hv_m = hv_\varrho + Eh\frac{R^{(\varrho)}}{R^{(m)}}.$$

Cela posé, soient

$$(177) \quad \begin{cases} x_{\alpha+1} = z_1,\ x_{\alpha+2} = z_2,\ x_{\alpha+3} = z_3,\ \ldots x_{\mu-1} = z_{\theta-1},\ x_\mu = z_\theta, \\ e_{\alpha+1} = \varepsilon_1,\ e_{\alpha+2} = \varepsilon_2,\ e_{\alpha+3} = \varepsilon_3,\ \ldots e_{\mu-1} = \varepsilon_{\theta-1},\ e_\mu = \varepsilon_\theta, \end{cases}$$

et pour abréger

$$(178) \qquad \omega^{-e_\mu} = \omega_\mu,\quad \omega^{-\varepsilon_\mu} = \pi_\mu.$$

La formule (134) deviendra, en mettant $s_m(x)$ au lieu de s_m, et $\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ au lieu de $\varphi_2 x$,

$$(179) \quad \omega_1^m\psi x_1 + \omega_2^m\psi x_2 + \cdots + \omega_\alpha^m\psi x_\alpha + \pi_1^m\psi z_1 + \pi_2^m\psi z_2 + \cdots + \pi_\theta^m\psi z_\theta$$
$$= C - \Pi\frac{fx.\varphi x}{s_m(x).f_2 x} + \Sigma\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{f\beta.\varphi\beta}{s_m(\beta).f_2^{(\nu)}\beta}\right\}.$$

Dans cette formule on a

$$(180) \qquad \psi x = \int\frac{fx.dx}{f_2 x.s_m(x)},$$

où fx est une fonction entière quelconque, et

$$f_2 x = A(x-\beta_1)^{\nu_1}(x-\beta_2)^{\nu_2}\ldots$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$, sont des variables indépendantes; $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\alpha$, des racines quelconques de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0.$$

Les fonctions $z_1, z_2, \ldots z_\theta$, sont les θ racines de l'équation

$$(181) \qquad \frac{\theta'(z,0)\theta'(z,1)\theta'(z,2)\ldots\theta'(z,n-1)}{(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)\ldots(z-x_\alpha)}=0.$$

Les quantités $a, a', a'', \ldots$ sont déterminées par les α équations

$$(182) \qquad \theta'(x_1,e_1)=0,\ \theta'(x_2,e_2)=0,\ \theta'(x_3,e_3)=0,\ \ldots\ \theta'(x_\alpha,e_\alpha)=0;$$

et les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\theta$, par les θ équations

$$(183) \qquad \theta'(z_1,\varepsilon_1)=0,\ \theta'(z_2,\varepsilon_2)=0,\ \theta'(z_3,\varepsilon_3)=0,\ \ldots\ \theta'(z_\theta,\varepsilon_\theta)=0.$$

La fonction $\theta'(x,e)$ est donnée par l'équation

$$(184) \qquad \theta'(x,e)=v_0R^{(0)}+\omega^e v_1R^{(1)}+\omega^{2e}v_2R^{(2)}+\cdots+\omega^{(n-1)e}v_{n-1}R^{(n-1)},$$

et la fonction φx par

$$(185) \qquad \varphi(x)=\log\theta'(x,0)+\omega^{-m}\log\theta'(x,1)+\omega^{-2m}\log\theta'(x,2)+\cdots$$
$$+\omega^{-(n-1)m}\log\theta'(x,n-1).$$

Si les fonctions $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ sont déterminées d'après l'équation (175), les quantités θ, μ et α auront les valeurs que leur donnent les équations (172), (173), (174), et dans le même cas la valeur de $\mu-\alpha$ ou le nombre des fonctions dépendantes est le plus petit possible. Mais si les fonctions $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ ont des formes quelconques, alors on a toujours

$$(186) \qquad \theta=\mu-\alpha,\ \mu=h[\theta'(x,0).\theta'(x,1).\theta'(x,2)\ldots\theta'(x,n-1)];$$

α ou le nombre des indéterminées $a, a'\ a'', \ldots$ est arbitraire, mais sa valeur ne peut pas surpasser le nombre

$$hv_0+hv_1+hv_2+\cdots+hv_{n-1}+n-1,$$

ou celui des coefficients dans $v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$ moins un.

Comme cas particuliers on doit remarquer les suivants:

1° Lorsque $f_2x=(x-\beta)^\nu$.

Alors la formule (179) deviendra, en faisant pour abréger,

$$\omega_1^m\psi x_1+\omega_2^m\psi x_2+\cdots+\omega_\alpha^m\psi x_\alpha=\Sigma\omega^m\psi x,$$
$$\pi_1^m\psi z_1+\pi_2^m\psi z_2+\cdots+\pi_\theta^m\psi z_\theta=\Sigma\pi^m\psi z,$$

$$(187) \qquad \Sigma\omega^m\psi x+\Sigma\pi^m\psi z=C-\Pi\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)(x-\beta)^\nu}+\frac{1}{\Gamma\nu}\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\left\{\frac{f\beta.\varphi\beta}{s_m(\beta)}\right\},$$

et

$$\psi x=\int\frac{fx.dx}{(x-\beta)^\nu s_m(x)};$$

2° Lorsque $f_2x=x-\beta$,

$$(188) \qquad \Sigma\omega^m\psi x+\Sigma\pi^m\psi z=C-\Pi\frac{fx.\varphi x}{s_m(x).(x-\beta)}+\frac{f\beta.\varphi\beta}{s_m(\beta)},$$

où

$$\psi x=\int\frac{fx.dx}{(x-\beta).s_m(x)};$$

3° Lorsque $f_2x=1$.

Alors on aura la formule

$$(189) \qquad \Sigma\omega^m\psi x+\Sigma\pi^m\psi z=C-\Pi\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}.$$

Si le degré de la fonction $\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ est moindre que -1, alors $\Pi\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ s'évanouira, et on aura

$$(190) \qquad \Sigma\omega^m\psi x+\Sigma\pi^m\psi z=C.$$

D'après la valeur de φx, il est clair que le degré de la fonction $\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ ou le nombre $h\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ est toujours un nombre entier; or φx est du degré zéro en général, et ne peut pas être d'un degré plus élevé, donc $h\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ ne peut pas surpasser le plus grand nombre entier contenu dans $h\frac{fx}{s_m(x)}$, c'est-à-dire que, d'après la notation adoptée, on aura en général

$$h\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}\leqq Eh\frac{fx}{s_m(x)}\leqq E(hfx)+E[-hs_m(x)]\leqq hfx+E[-hs_m(x)].$$

Si donc

$$(191) \qquad hfx\leqq-E[-hs_m(x)]-2,$$

le nombre $h\frac{fx.\varphi x}{s_m(x)}$ sera toujours moindre que -1, et par conséquent la formule (190) aura lieu.

La détermination de la fonction φx, qui dépend de celle des quantités a, a', a'', etc., est en général assez longue; mais il y a un cas dans lequel on peut déterminer cette fonction d'une manière assez simple; c'est celui où l'on suppose

$$(192) \qquad \theta'(x,0)=v_tR^{(t)}+R^{(t_1)}.$$

En effet, en faisant

$$(193) \qquad v_t=\theta x,\ \frac{R^{(t_1)}}{R^{(t)}}=-\theta_1x,$$

les équations

$$\theta'(x_1, e_1) = 0, \quad \theta'(x_2, e_2) = 0, \quad \ldots \; \theta'(x_\alpha, e_\alpha) = 0$$

peuvent s'écrire comme il suit:

(194) $$\theta x_1 = \omega_1^{t_1 - t} \theta_1 x_1, \quad \theta x_2 = \omega_2^{t_1 - t} \theta_1 x_2, \quad \ldots \; \theta x_\alpha = \omega_\alpha^{t_1 - t} \theta_1 x_\alpha.$$

En supposant maintenant que tous les coefficients dans θx soient des quantités indéterminées, la fonction θx sera du degré $\alpha - 1$; il s'agit donc de trouver une fonction entière de x du degré $\alpha - 1$, qui, pour les α valeurs particulières de x: $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$, auront les α valeurs correspondantes

$$\omega_1^{t_1 - t} \theta_1 x_1, \quad \omega_2^{t_1 - t} \theta_1 x_2, \quad \ldots \; \omega_\alpha^{t_1 - t} \theta_1 x_\alpha.$$

Or, comme on sait, la fonction θx aura alors la valeur suivante:

(195) $$\theta x = \begin{cases} \dfrac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_\alpha)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_\alpha)} \, \omega_1^{t_1 - t} \theta_1 x_1 \\ + \dfrac{(x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_\alpha)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_\alpha)} \, \omega_2^{t_1 - t} \theta_1 x_2 + \cdots \\ + \dfrac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{\alpha-1})}{(x_\alpha - x_1)(x_\alpha - x_2) \cdots (x_\alpha - x_{\alpha-1})} \, \omega_\alpha^{t_1 - t} \theta_1 x_\alpha. \end{cases}$$

En désignant cette fonction par $\theta' x$, la fonction la plus générale qui peut satisfaire aux équations (194) sera

(196) $$\theta x = \theta' x + (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_\alpha) \theta'' x,$$

$\theta'' x$ étant une fonction entière quelconque.

Ayant ainsi déterminé θx, on aura $\theta'(x, m)$ d'après l'équation

(197) $$\theta(x, m) = \omega^{tm} \theta x R^{(t)} + \omega^{m t_1} R^{(t_1)},$$

et la fonction φx par l'équation (185).

Dans ce qui précède nous avons exposé ce qui concerne les fonctions $\int \frac{fx \, . \, dx}{f_2 x \, . \, s_m}$ en général, quelle que soit la forme de la fonction s_m.

Considérons maintenant quelques cas particuliers:

A) soit d'abord $n = 1$.

Dans ce cas, le nombre des fonctions $s_0, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ se réduit à l'unité, c'est-à-dire qu'on aura la seule fonction s_0, qui, d'après l'équation (156), se réduit à l'unité.

On aura donc

$$s_0 = 1, \quad \psi x = \int \frac{fx \, . \, dx}{f_2 x}.$$

L'équation (147) donne $R^{(0)} = 1$, et l'équation (184)

$$\theta'(x, 0) = v_0 R^{(0)} = v_0(x);$$

on aura ensuite la fonction φx par (185), savoir:

$$\varphi x = \log v_0(x).$$

Les équations (182) qui détermineront

$$x_1, \; x_2, \; \ldots x_\alpha,$$

seront

(198) $$v_0(x_1) = 0, \quad v_0(x_2) = 0, \quad \ldots \; v_0(x_\alpha) = 0,$$

et celle qui donne $z_1, z_2, \ldots z_\theta$,

(199) $$\frac{v_0(z)}{(z - x_1)(z - x_2) \cdots (z - x_\alpha)} = 0.$$

Cela posé, la formule générale (179) deviendra, en remarquant que $m = 0$,

(200) $$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\alpha + \psi z_1 + \psi z_2 + \cdots + \psi z_\theta$$
$$= C - \Pi \frac{fx}{f_2 x} \log v_0(x) + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)} \beta} \log v_0(\beta) \right).$$

Les équations (198) et (199) donnent

$$v_0(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_\alpha) \, . \, (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_\theta).$$

D'après l'équation (172) il est clair qu'on peut faire $\theta = 0$. Alors on aura, en faisant en même temps $\nu = 1$,

$$\Sigma \psi x = \begin{cases} C - \Pi \dfrac{fx}{f_2 x} [\log a + \log(x - x_1) + \log(x - x_2) + \cdots + \log(x - x_\alpha)] \\ \quad + \Sigma \dfrac{f\beta}{f_2 \beta} [\log a + \log(\beta - x_1) + \log(\beta - x_2) + \cdots + \log(\beta - x_\alpha)]. \end{cases}$$

En faisant $\alpha = 1$, il viendra

(201) $$\int \frac{f x_1 \, . \, d x_1}{f_2 x_1} = C - \Pi \frac{fx}{f_2 x} \log(x - x_1) + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)} \beta} \log(\beta - x_1) \right),$$

formule qu'il est aisé de vérifier. Elle donne, comme on le voit, l'intégrale de toute différentielle rationnelle.

B) soit en second lieu $n=2$, $R=r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$. Dans ce cas on aura

$$s_0=1,\ s_1=(r_1 r_2)^{\frac{1}{2}},\ R^{(0)}=r_1^{\frac{1}{2}},\ R^{(1)}=r_2^{\frac{1}{2}},$$

$$\theta'(x,0)=v_0 r_1^{\frac{1}{2}}+v_1 r_2^{\frac{1}{2}},\ \theta'(x,1)=v_0 r_1^{\frac{1}{2}}-v_1 r_2^{\frac{1}{2}},\ \omega=-1.$$

La fonction φx sera, en faisant $m=1$,

$$\varphi x=\log\theta'(x,0)-\log\theta'(x,1)=\log\frac{\theta'(x,0)}{\theta'(x,1)},$$

donc

$$\varphi x=\log\frac{v_0 r_1^{\frac{1}{2}}+v_1 r_2^{\frac{1}{2}}}{v_0 r_1^{\frac{1}{2}}-v_1 r_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Cela posé, en mettant $v_0(x)$ et $v_1(x)$ au lieu de v_0 et v_1, et faisant

$$r_1=\varphi_0 x,\quad r_2=\varphi_1 x,$$

la formule (179) deviendra, en faisant $m=1$,

$$(202)\quad \Sigma\,\omega\psi x+\Sigma\,\pi\psi z=C-\Pi\frac{fx}{f_2 x\sqrt{\varphi_0 x\,.\,\varphi_1 x}}\log\left(\frac{v_0(x)\sqrt{\varphi_0 x}+v_1(x)\sqrt{\varphi_1 x}}{v_0(x)\sqrt{\varphi_0 x}-v_1(x)\sqrt{\varphi_1 x}}\right)$$
$$+\Sigma\,\nu\frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}}\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta\,.\sqrt{\varphi_0\beta\,.\,\varphi_1\beta}}\log\left(\frac{v_0(\beta)\sqrt{\varphi_0\beta}+v_1(\beta)\sqrt{\varphi_1\beta}}{v_0(\beta)\sqrt{\varphi_0\beta}-v_1(\beta)\sqrt{\varphi_1\beta}}\right),$$

où

$$\psi x=\int\frac{fx\,.\,dx}{f_2 x\sqrt{\varphi_0 x\,.\,\varphi_1 x}}.$$

Les fonctions $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont déterminées par les équations:

$$v_0(x_1)\sqrt{\varphi_0 x_1}+\omega_1 v_1(x_1)\sqrt{\varphi_1 x_1}=0,$$
$$v_0(x_2)\sqrt{\varphi_0 x_2}+\omega_2 v_1(x_2)\sqrt{\varphi_1 x_2}=0,\ \text{etc.}$$

et $z_1, z_2, \ldots z_\theta$, par l'équation (181), qui deviendra

$$(203)\qquad \frac{[v_0(z)]^2\varphi_0 z-[v_1(z)]^2\varphi_1 z}{(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_\alpha)}=0.$$

Les quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\alpha$ sont toutes égales à $+1$ ou à -1, et $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\theta$, qui sont aussi de la même forme, sont déterminées par

$$\pi_1=-\frac{v_0(z_1)\sqrt{\varphi_0 z_1}}{v_1(z_1)\sqrt{\varphi_1 z_1}},\ \pi_2=-\frac{v_0(z_2)\sqrt{\varphi_0 z_2}}{v_1(z_2)\sqrt{\varphi_1 z_2}},\ \ldots$$

La plus petite valeur de θ se trouve par l'équation (172), en remarquant que

$$k_1=1,\ k_2=1;$$

on aura

$$\theta=\tfrac{1}{2}hr_1+\tfrac{1}{2}hr_2-\frac{n'}{2}=\tfrac{1}{2}[h(r_1 r_2)-n'],$$

où n' est le plus grand commun diviseur de 2 et hr_1+hr_2; si donc

$$h(\varphi_0 x\,.\,\varphi_1 x)=2m-1,$$

ou

$$h(\varphi_0 x\,.\,\varphi_1 x)=2m,$$

on aura pour θ la même valeur, savoir:

$$\theta=m-1;$$

quant aux valeurs de v_0 et v_1, on aura l'équation (176), savoir, si $\varrho=1$,

$$hv_0=hv_1+E\,h\frac{R^{(1)}}{R^{(0)}}=hv_1+E\tfrac{1}{2}(h\varphi_1 x-h\varphi_0 x);$$

donc dans le cas où $h(\varphi_0 x\,.\,\varphi_1 x)=2m-1$,

$$hv_0=hv_1+\tfrac{1}{2}(h\varphi_1 x-h\varphi_0 x)-\tfrac{1}{2},$$

et dans le cas où $h(\varphi_0 x\,.\,\varphi_1 x)=2m$,

$$hv_0=hv_1+\tfrac{1}{2}(h\varphi_1 x-h\varphi_0 x).$$

Pour les valeurs de μ et α on aura, d'après les équations (173) et (174),

$$\mu=2hv_1+h\varphi_1 x,$$
$$\alpha=2hv_1+h\varphi_1 x-m+1.$$

Si $m=1$, on a $\theta=0$, donc alors:

$$\Sigma\,\omega\psi x=v.$$

Dans ce cas:

$$\psi x=\int\frac{fx\,.\,dx}{f_2 x\,.\sqrt{R}},$$

où R est du premier ou du second degré.

Cette intégrale peut donc s'exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques, comme on le voit, en faisant

$$\varphi_0 x=\varepsilon_0 x+\delta_0,\quad \varphi_1 x=\varepsilon_1 x+\delta_1,\quad f_2 x=(x-\beta)^\nu,$$
$$v_1(x)=1,\quad v_0(x)=a;$$

on aura

$$a = -\frac{\omega_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}}{\sqrt{\varphi_0 x_1}} = v_0(x),$$

donc en substituant et faisant $\omega_1 = 1$,

(204) $$\int \frac{fx_1 \, . \, dx_1}{(x_1 - \beta)^\nu \sqrt{(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)}} = C$$

$$+ \Pi \left(\frac{fx}{(x-\beta)^\nu . \sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}} \log \frac{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} + \sqrt{(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}}{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} - \sqrt{(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}} \right)$$

$$- \frac{1}{\Gamma \nu} \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{\sqrt{(\varepsilon_0 \beta + \delta_0)(\varepsilon_1 \beta + \delta_1)}} \log \frac{\sqrt{(\varepsilon_0 \beta + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} + \sqrt{(\varepsilon_1 \beta + \delta_1)(\varepsilon_0 x_1 + \delta_0)}}{\sqrt{(\varepsilon_0 \beta + \delta_0)(\varepsilon_1 x_1 + \delta_1)} - \sqrt{(\varepsilon_1 \beta + \delta_1)(\varepsilon_0 x_1 + \delta_1)}} \right);$$

soit, par exemple, $\nu = 0$, $fx_1 = 1$, on aura, en mettant z au lieu de x_1,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\varepsilon_0 z + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)}} =$$

$$C + \Pi \left(\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 x + \delta_1)}} \log \frac{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)} + \sqrt{(\varepsilon_1 x + \delta_1)(\varepsilon_0 z + \delta_0)}}{\sqrt{(\varepsilon_0 x + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)} - \sqrt{(\varepsilon_1 x + \delta_1)(\varepsilon_0 z + \delta_0)}} \right)$$

$$= C + \Pi \left\{ \left(\frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}} + \cdots \right) \log \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} + \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} - \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}} + \cdots \right) \right\}.$$

donc

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\varepsilon_0 z + \delta_0)(\varepsilon_1 z + \delta_1)}} = C + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1}} \log \frac{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} + \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_1 z + \delta_1} - \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_0 z + \delta_0}}.$$

Si $m = 2$, on aura $\theta = 1$,

$$h(\varphi_0 x \, . \, \varphi_1 x) = 3 \text{ ou } 4.$$

Dans ce cas on aura donc

(205) $$\Sigma \omega \psi x = v - \pi_1 \psi z_1 = \omega_1 \psi x_1 + \omega_2 \psi x_2 + \cdots + \omega_\alpha \psi x_\alpha,$$

et la fonction ψx sera une fonction elliptique.

On aura immédiatement la valeur de z_1 par l'équation (203).

En effet, en faisant

$$(v_0 z)^2 \varphi_0 z - (v_1 z)^2 \varphi_1 z = A + \cdots + B z^{\alpha+1},$$

on aura

$$x_1 x_2 \ldots x_\alpha z_1 = \frac{A}{B} (-1)^{\alpha+1},$$

donc,

$$z_1 = \frac{A}{B} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{x_1 x_2 \ldots x_\alpha};$$

il est clair que $\frac{A}{B}$ est une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots x_\alpha, \sqrt{\varphi_0 x_1}, \sqrt{\varphi_0 x_2}, \ldots \sqrt{\varphi_0 x_\alpha}, \sqrt{\varphi_1 x_1}, \sqrt{\varphi_1 x_2}, \ldots \sqrt{\varphi_1 x_\alpha}$.

Soit, par exemple,

$$\varphi_0 x = 1, \; \varphi_1 x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \; v_1 x = 1, \; v_0 x = a_0 + a_1 x,$$

on trouvera les équations:

$$v_0(x_1) = -\omega_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}, \; v_0 x_2 = -\omega_2 \sqrt{\varphi_1 x_2},$$

$$v_0(x) = -\omega_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi_1 x_1} - \omega_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi_1 x_2},$$

$$a_0 = \omega_1 \frac{x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi_1 x_1} + \omega_2 \frac{x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi_1 x_2} = \frac{\omega_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_1} - \omega_2 x_1 \sqrt{\varphi_1 x_2}}{x_1 - x_2},$$

$$a_1 = -\omega_1 \frac{1}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi_1 x_1} - \omega_2 \frac{1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi_1 x_2} = \frac{\omega_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} - \omega_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}}{x_1 - x_2};$$

on trouve de même:

$$A = a_0^2 - \alpha_0, \; B = -\alpha_3,$$

donc

$$z_1 = \frac{1}{x_1 x_2} \frac{(a_0^2 - \alpha_0)}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_3 x_1 x_2} \left(\frac{x_2^2 \varphi_1 x_1 + x_1^2 \varphi_1 x_2 - 2\omega_1 \omega_2 . x_1 x_2 \sqrt{\varphi_1 x_1 . \varphi_1 x_2}}{(x_1 - x_2)^2} - \alpha_0 \right);$$

si l'on fait

$$\omega_1 = 1, \; \omega_2 = \pm 1,$$

l'équation (205) deviendra donc

(206) $$\psi x_1 \pm \psi x_2 = \pm \psi z + C$$

$$- \Pi \left(\frac{fx}{f_2 x . \sqrt{\varphi x}} \log Fx \right) + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)} \beta \sqrt{\varphi \beta}} \log F\beta \right),$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x . \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3}}, \; \varphi x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

$$z = \frac{(x_2 \sqrt{\varphi x_1} \pm x_1 \sqrt{\varphi x_2})^2 - \alpha_0 (x_1 - x_2)^2}{\alpha_3 x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2},$$

$$Fx = \frac{-\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi x_1} \mp \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi x_2} + \sqrt{\varphi x}}{-\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \sqrt{\varphi x_1} \mp \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\varphi x_2} - \sqrt{\varphi x}},$$

ou bien

$$Fx = \frac{\frac{\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)} \pm \frac{\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)} + \frac{\sqrt{\varphi x}}{(x - x_1)(x - x_2)}}{\frac{\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1 - x)(x_1 - x_2)} \pm \frac{\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2 - x)(x_2 - x_1)} - \frac{\sqrt{\varphi x}}{(x - x_1)(x - x_2)}}.$$

Pour $f_2 x = x - \beta$, $fx = 1$, on a

$$\psi x_1 \pm \psi x_2 = \pm \psi z + C + \frac{1}{\sqrt{\varphi\beta}} \log F\beta, \quad \text{où} \quad \psi x = \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{\varphi x}};$$

et pour $f_2 x = 1$, $fx = 1$,

$$\psi x_1 \pm \psi x_2 = \pm \psi z + C, \quad \text{où} \quad \psi x = \int \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}.$$

Soit encore $m = 3$, on aura $\theta = 2$, et $h(\varphi_0 x . \varphi_1 x) = 5$ ou 6. Dans ce cas donc on a

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x \sqrt{R}},$$

où R est un polynome du cinquième ou sixième degré, et

$$\omega_1 \psi x_1 + \omega_2 \psi x_2 + \cdots + \omega_\alpha \psi x_\alpha = v - \pi_1 \psi z_1 - \pi_2 \psi z_2 .$$

Ces fonctions z_1, z_2 sont les deux racines d'une équation du second degré, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x_1, x_2, $x_3 \ldots$ et $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, $\sqrt{R_3} \ldots$, en désignant par R_1, R_2, $R_3 \ldots$, les valeurs de R correspondant à x_1, x_2, $x_3 \ldots$.

Comme cas particuliers je citerai seulement les suivants:

1° Lorsque $fx = A_0 + A_1 x$, $f_2 x = 1$. Alors on aura

$$\psi x = \int \frac{(A_0 + A_1 x)\, dx}{\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6}}$$

et

$$\pm \psi x_1 \pm \psi x_2 \pm \psi x_3 \pm \ldots \pm \psi x_\alpha = \pm \psi z_1 \pm \psi z_2 + C.$$

2° Lorsque $\varphi_0 x = 1$, $\varphi_1 x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 = \varphi x$, $v_0 x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $v_1 x = 1$.

Alors on trouvera facilement

$$v_0 x = \mp \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \sqrt{\varphi x_1} \mp \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \sqrt{\varphi x_2} \mp \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \sqrt{\varphi x_3}$$

et

$$\begin{aligned} \pm \psi x_1 \pm \psi x_2 \pm \psi x_3 = \pm \psi z_1 \pm \psi z_2 + C \\ - \Pi \frac{fx}{f_2 x \sqrt{\varphi x}} \log \frac{F_0 x}{F_1 x} + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \sqrt{\varphi\beta}} \log \frac{F_0 \beta}{F_1 \beta} \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{f_2 x . \sqrt{\varphi x}}$$

et

$$\frac{F_0 x}{F_1 x} = \frac{\dfrac{\pm\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \dfrac{\pm\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \dfrac{\pm\sqrt{\varphi x_3}}{(x_3-x)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \dfrac{\sqrt{\varphi x}}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}{\dfrac{\pm\sqrt{\varphi x_1}}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \dfrac{\pm\sqrt{\varphi x_2}}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \dfrac{\pm\sqrt{\varphi x_3}}{(x_3-x)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} - \dfrac{\sqrt{\varphi x}}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}};$$

z_1 et z_2 sont les racines de l'équation

$$\frac{(v_0 z)^2 - \varphi z}{(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)} = 0.$$

En faisant dans la formule générale (202) $v_1 = 1$, on aura

$$v_0 x = \left\{ \begin{aligned} & -\omega_1 \frac{(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\alpha)} \sqrt{\frac{\varphi_1 x_1}{\varphi_0 x_1}} - \omega_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_\alpha)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_\alpha)} \sqrt{\frac{\varphi_1 x_2}{\varphi_0 x_2}} \\ & \qquad - \cdots - \omega_\alpha \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{\alpha-1})}{(x_\alpha-x_1)\cdots(x_\alpha-x_{\alpha-1})} \sqrt{\frac{\varphi_1 x_\alpha}{\varphi_0 x_\alpha}}, \end{aligned} \right.$$

et d'après cela

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = \left\{ \begin{aligned} & C - \Pi \left(\frac{fx}{f_2 x . \sqrt{\varphi_0 x . \varphi_1 x}} \log \frac{F_0 x}{F_1 x} \right) \\ & + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left(\frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta . \sqrt{\varphi_0 \beta . \varphi_1 \beta}} \log \frac{F_0 \beta}{F_1 \beta} \right), \end{aligned} \right.$$

où

$$F_0 x = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega_1 \sqrt{\dfrac{\varphi_1 x_1}{\varphi_0 x_1}}}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\alpha)} + \frac{\omega_2 \sqrt{\dfrac{\varphi_1 x_2}{\varphi_0 x_2}}}{(x_2-x)(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_\alpha)} + \cdots \\ & + \frac{\omega_\alpha \sqrt{\dfrac{\varphi_1 x_\alpha}{\varphi_0 x_\alpha}}}{(x_\alpha-x)(x_\alpha-x_1)\cdots(x_\alpha-x_{\alpha-1})} + \frac{\sqrt{\dfrac{\varphi_1 x}{\varphi_0 x}}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}, \end{aligned} \right.$$

$$F_1 x = \left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega_1 \sqrt{\dfrac{\varphi_1 x_1}{\varphi_0 x_1}}}{(x_1-x)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_\alpha)} + \frac{\omega_2 \sqrt{\dfrac{\varphi_1 x_2}{\varphi_0 x_2}}}{(x_2-x)(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_\alpha)} + \cdots \\ & + \frac{\omega_\alpha \sqrt{\dfrac{\varphi_1 x_\alpha}{\varphi_0 x_\alpha}}}{(x_\alpha-x)(x_\alpha-x_1)\cdots(x_\alpha-x_{\alpha-1})} - \frac{\sqrt{\dfrac{\varphi_1 x}{\varphi_0 x}}}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_\alpha)}; \end{aligned} \right.$$

z_1, z_2, $\ldots z_0$ sont les racines de l'équation

$$\frac{v_0{}^2 . \varphi_0 z - \varphi_1 z}{(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_\alpha)} = 0.$$

En faisant dans la même formule générale $f_2 x = 1$, on aura

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = C - \Pi \left(\frac{fx}{\sqrt{\varphi_0 x . \varphi_1 x}} \log \frac{v_0 x \sqrt{\varphi_0 x} + v_1 x \sqrt{\varphi_1 x}}{v_0 x \sqrt{\varphi_0 x} - v_1 x \sqrt{\varphi_1 x}} \right),$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx \, . \, dx}{\sqrt{\varphi_0 x \, . \, \varphi_1 x}}.$$

Si fx est du $(m-2)^e$ degré, on aura

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = C;$$

Si l'on fait $f_2 x = x - \beta$, $fx = 1$, on aura

$$\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = C + \frac{1}{\sqrt{\varphi_0 \beta \, . \, \varphi_1 \beta}} \log \frac{v_0 \beta \sqrt{\varphi_0 \beta} + v_1 \beta \sqrt{\varphi_1 \beta}}{v_0 \beta \sqrt{\varphi_0 \beta} - v_1 \beta \sqrt{\varphi_1 \beta}},$$

où

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{\varphi_0 x \, . \, \varphi_1 x}}.$$

C) Soit en troisième lieu $n = 3$, $R = r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Alors on aura

$$s_0 = 1, \; s_1 = r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}}, \; s_2 = r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}}, \; R^{(0)} = s_0, \; R^{(1)} = s_1, \; R^{(2)} = s_2,$$

$$\theta'(x, 0) = v_0 + v_1 r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}} + v_2 r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}},$$

$$\theta'(x, 1) = v_0 + \omega v_1 r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}} + \omega^2 v_2 r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}},$$

$$\theta'(x, 2) = v_0 + \omega^2 v_1 r_1^{\frac{1}{3}} r_2^{\frac{2}{3}} + \omega v_2 r_1^{\frac{2}{3}} r_2^{\frac{1}{3}},$$

$$\varphi x = \log \theta'(x, 0) + \omega^m \log \theta'(x, 1) + \omega^{2m} \log \theta'(x, 2),$$

$$\theta'(x, 0)\, \theta'(x, 1)\, \theta'(x, 2) = v_0^3 + v_1^3 r_1 r_2^2 + v_2^3 r_1^2 r_2 - 3 v_0 v_1 v_2 r_1 r_2.$$

En faisant donc $m = 1$, $r_1 = \varphi_0 x$, $r_2 = \varphi_1 x$, $v_0 = v_0(x)$, $v_1 = v_1(x)$, $v_2 = v_2(x)$, la formule (179) deviendra

$$\begin{aligned} &\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z \\ &\quad = C - \Pi \frac{fx}{f_2 x \, . \, (\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}}} \left[\log(F_0 x) + \omega \log(F_1 x) + \omega^2 \log(F_2 x)\right] \\ &\quad + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \, . \, (\varphi_0 \beta)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 \beta)^{\frac{2}{3}}} \left[\log(F_0 \beta) + \omega \log(F_1 \beta) + \omega^2 \log(F_2 \beta)\right] \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\psi x = \int \frac{fx \, . \, dx}{f_2 x \, . \, (\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}}},$$

$$F_0 x = v_0(x) + v_1(x)(\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}} + v_2(x)(\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}},$$

$$F_1 x = v_0(x) + \omega v_1(x)(\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}} + \omega^2 v_2(x)(\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}},$$

$$F_2 x = v_0(x) + \omega^2 v_1(x)(\varphi_0 x)^{\frac{1}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{2}{3}} + \omega v_2(x)(\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}}.$$

Pour les mêmes valeurs de x_1, x_2, x_3, ... z_1, z_2, ... $F_0 x$, $F_1 x$, $F_2 x$, on aura aussi

$$\begin{aligned} &\Sigma \omega \psi x + \Sigma \pi \psi z = \\ &\quad C - \Pi \frac{fx}{f_2 x \, . \, (\varphi_0 x)^{\frac{2}{3}} (\varphi_1 x)^{\frac{1}{3}}} \left[\log(F_0 x) + \omega^2 \log(F_1 x) + \omega \log(F_2 x)\right] \\ &\quad + \Sigma \nu \frac{d^{\nu-1}}{d\beta^{\nu-1}} \left\{ \frac{f\beta}{f_2^{(\nu)}\beta \, . \, (\varphi_0 \beta)^{\frac{2}{3}} (\varphi_1 \beta)^{\frac{1}{3}}} \left[\log(F_0 \beta) + \omega^2 \log(F_1 \beta) + \omega \log(F_2 \beta)\right] \right\}. \end{aligned}$$

Les fonctions z_1, z_2, ... z_θ, sont les racines de l'équation

$$\frac{[v_0(z)]^3 + [v_1(z)]^3 \varphi_0 z (\varphi_1 z)^2 + [v_2(z)]^3 (\varphi_0 z)^2 (\varphi_1 z) - 3 v_0(z) . v_1(z) . v_2(z) . \varphi_0 z \, . \, \varphi_1 z}{(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3) \cdots (z - x_{\alpha-1})(z - x_\alpha)} = 0.$$

D'après l'équation (172), la plus petite valeur sera

$$\theta = h r_1 + h r_2 + 1 - \frac{3 + n'}{2};$$

en remarquant que $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, n' est le plus grand commun diviseur de 3 et $h r_1 + 2 h r_2$.

Soit d'abord $h r_1 + 2 h r_2 = 3m$, on aura $n' = 3$ et $\theta = h(\varphi_0 x \, . \, \varphi_1 x) - 2$.

Si $h r_1 + 2 h r_2 = 3m - 1$ ou $3m - 2$, on aura $n' = 1$, et par suite $\theta = h(\varphi_0 x \, . \, \varphi_1 x) - 1$.

Ainsi, par exemple, on aura pour

$$\begin{aligned} h(\varphi_0 x \, . \, \varphi_1 x) &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots \\ \theta &= 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \text{ lorsque } h\varphi_0 x + 2h\varphi_1 x = 3m \pm 1 \\ \text{et } \theta &= \quad 0, 1, 2, 3, 4 \ldots \text{ lorsque } h\varphi_0 x + 2h\varphi_1 x = 3m. \end{aligned}$$
