on obtiendra, en différentiant l'équation $V=0$ $n+1$ fois de suite dans la supposition de α constant, les $n+2$ équations suivantes:

$$V=0,\ dV=0,\ d^2V=0,\ldots d^{n+1}V=0.$$

Éliminant de ces $n+2$ équations les $n+1$ quantités inconnues

$$\varphi\alpha,\ d\varphi\alpha,\ d^2\varphi\alpha \text{ etc.},$$

il en résultera une équation $V_1=0$ qui ne contiendra ni la fonction $\varphi\alpha$ ni ses différentielles, mais seulement les fonctions $f\beta$, $F\gamma$, etc. et leurs différentielles.

Cette équation $V_1=0$ pourra maintenant être traitée de la même manière, par rapport à l'une des autres fonctions inconnues $f\beta$, et l'on obtiendra une équation $V_2=0$ qui ne contiendra ni $\varphi\alpha$ ou ses différentielles, ni $f\beta$ ou ses différentielles, mais seulement $F\gamma$ etc. et les différentielles de ces fonctions.

De cette manière, on peut continuer l'élimination des fonctions inconnues, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne qu'une seule fonction inconnue avec ses différentielles, et en regardant maintenant l'une des quantités variables comme constante, on a, entre la fonction inconnue et l'autre variable, une équation différentielle d'où l'on pourra tirer cette fonction par intégration.

On peut remarquer, qu'il suffit d'éliminer jusqu'à ce qu'on ait obtenu une équation qui ne contienne que deux fonctions inconnues et leurs différentielles; car, si par exemple ces fonctions sont $\varphi\alpha$ et $f\beta$, on pourra, en supposant β constant, exprimer x et y en fonction de α à l'aide des deux équations $\alpha=\alpha$ et $\beta=c$, et arriver de cette manière à une équation différentielle entre $\varphi\alpha$ et α, d'où l'on pourra par conséquent déduire $\varphi\alpha$. De la même manière, on trouvera une équation entre $f\beta$ et β en déterminant x et y par les équations $\alpha=c$ et $\beta=\beta$. Ces fonctions étant ainsi trouvées, on trouvera aisément les autres fonctions à l'aide des équations qui restent.

De cette manière, on pourra donc en général trouver toutes les fonctions inconnues, toutes les fois que le problème sera possible. Pour s'en rendre compte il faut substituer les valeurs trouvées dans l'équation donnée, et voir si elle est satisfaite.

Ce qui précède dépend, comme nous venons de le voir, de la différentiation d'une fonction de x et y par rapport à x, en supposant constante une fonction donnée de x et y; y est donc fonction de x et dans les différentielles

se trouvent les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Ces expressions se trouvent aisément en différentiant l'équation $\alpha=c$ par rapport à x, et en supposant y fonction de x. En effet, on obtiendra les équations suivantes:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+2\,\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}\,\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{d\alpha}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{ etc.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2}}{\frac{d\alpha}{dy}}+2\,\frac{\frac{d^2\alpha}{dx\,dy}\,\frac{d\alpha}{dx}}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2}-\frac{\frac{d^2\alpha}{dy^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^3} \text{ etc.}$$

La méthode générale de résoudre l'équation $V=0$ est applicable dans tous les cas où l'élimination peut s'effectuer, mais il peut arriver que cela ne soit pas possible, et alors il faut avoir recours au calcul des différences; mais pour n'être pas trop long, je passerai ce cas sous silence, d'autant plus qu'on peut voir dans le traité du calcul différentiel et du calcul intégral de M. *Lacroix* t. III, p. 208, comment on doit s'y prendre.

Nous allons appliquer la théorie générale à quelques exemples.

1. Trouver la fonction φ qui satisfasse à l'équation

$$\varphi\alpha=f(x,y,\varphi\beta,\varphi\gamma),$$

f étant une fonction quelconque donnée.

En différentiant cette équation par rapport à x, en supposant α constant, on aura

$$0=f'x+f'y\frac{dy}{dx}+f'(\varphi\beta)\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right)+f'(\varphi\gamma)\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\gamma}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right),$$

or nous avons vu que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}};$$

cette valeur étant substituée dans l'équation ci-dessus, on obtiendra, après avoir multiplié par $\frac{d\alpha}{dy}$:

$$0=f'x\frac{d\alpha}{dy}-f'y\frac{d\alpha}{dx}+f'(\varphi\beta)\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right)+f'(\varphi\gamma)\,\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right).$$

Faisant maintenant γ constant, déterminant x et y en β par les deux équations $\gamma=c$, $\beta=\beta$ et substituant leurs valeurs, on obtiendra entre $\varphi\beta$ et β une équation différentielle du premier ordre, d'où l'on tirera la fonction $\varphi\beta$.

Soit

$$f(x,\,y,\,\varphi\beta,\,\varphi\gamma)=\varphi\beta+\varphi\gamma,$$

on aura

$$f'x=0,\ f'y=0,\ f'(\varphi\beta)=1,\ f'(\varphi\gamma)=1.$$

L'équation deviendra donc

$$0=\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}\right)+\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}\right);$$

on tire de là en intégrant

$$\varphi\beta=\varphi'\gamma\int\frac{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}}\,d\beta.$$

On voit aisément que sans diminuer la généralité du problème on peut faire $\beta=x$ et $\gamma=y$; on aura ainsi

$$\frac{d\beta}{dx}=1,\ \frac{d\beta}{dy}=0,\ \frac{d\gamma}{dx}=0,\ \frac{d\gamma}{dy}=1.$$

Donc, ayant

$$\varphi\alpha=\varphi x+\varphi y,$$

on en conclut

$$\varphi x=\varphi'y\int\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}\,dx,$$

où y est supposé constant après la différentiation.

Appliquons cela à la recherche du logarithme. On a

$$\log(xy)=\log x+\log y,$$

donc

$$\alpha=xy,\ \frac{d\alpha}{dx}=y,\ \frac{d\alpha}{dy}=x;$$

substituant ces valeurs on obtient

$$\varphi x=\varphi'y\int\frac{y}{x}\,dx=c\int\frac{dx}{x},$$

donc

$$\log x=c\int\frac{dx}{x}.$$

Si l'on veut trouver arc tang x, on a

$$\text{arc tang}\,\frac{x+y}{1-xy}=\text{arc tang}\,x+\text{arc tang}\,y,$$

donc

$$\alpha=\frac{x+y}{1-xy}$$

et par suite

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{1}{1-xy}+\frac{y(x+y)}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{1}{1-xy}+\frac{x(y+x)}{(1-xy)^2}=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

On tire de là

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}=\frac{1+y^2}{1+x^2},$$

par conséquent

$$\varphi x=\varphi'y\int\frac{1+y^2}{1+x^2}\,dx,$$

d'où

$$\text{arc tang}\ x=c\int\frac{dx}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+x^2},\ \text{en faisant}\ c=1.$$

Supposons maintenant

$$f(x,\,y,\,\varphi\beta,\,\varphi\gamma)=\varphi\beta\,.\,\varphi\gamma=\varphi x\,.\,\varphi y,$$

en faisant $\beta=x$, $\gamma=y$. On aura

$$f'x=f'y=0,\ f'(\varphi x)=\varphi y,\ f'(\varphi y)=\varphi x,$$

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{d\gamma}{dy}=1,\ \frac{d\beta}{dy}=\frac{d\gamma}{dx}=0.$$

L'équation deviendra donc

$$\varphi y\,.\,\varphi'x\,\frac{d\alpha}{dy}-\varphi x\,.\,\varphi'y\,\frac{d\alpha}{dx}=0,$$

donc

$$\frac{\varphi' x}{\varphi x} = \frac{\varphi' y}{\varphi y} \cdot \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}},$$

et en intégrant

$$\log \varphi x = \frac{\varphi' y}{\varphi y} \int \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} \, dx.$$

Soit

$$\int \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} \, dx = T,$$

on aura

$$\varphi x = e^{cT}.$$

Soit par exemple $\alpha = x + y$, on aura $\frac{d\alpha}{dx} = 1 = \frac{d\alpha}{dy}$, donc

$$T = \int dx = x,$$

et

$$\varphi x = e^{cx}.$$

Soit $\alpha = xy$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx} = y, \ \frac{d\alpha}{dy} = x, \ \ T = y \int \frac{dx}{x},$$

donc

$$\varphi x = e^{c \log x},$$

c'est-à-dire

$$\varphi x = x^c.$$

Si l'on cherche la résultante R de deux forces égales P, dont les directions font un angle égal à $2x$, on trouvera que $R = P\varphi x$, où φx est une fonction qui satisfait à l'équation

$$\varphi x \cdot \varphi y = \varphi(x+y) + \varphi(x-y).*)$$

Pour déterminer cette fonction, il faut différentier l'équation par rapport à x, en supposant $y + x = \text{const.}$, et l'on aura

$$\varphi' x \cdot \varphi y + \varphi x \cdot \varphi' y \frac{dy}{dx} = \varphi'(x-y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right).$$

*) Voyez *Poisson* traité de mécanique t. I, p. 14.

Mais de l'équation $x + y = c$ on tire $\frac{dy}{dx} = -1$; substituant cette valeur, on obtient

$$\varphi' x \cdot \varphi y - \varphi x \cdot \varphi' y = 2\varphi'(x-y).$$

Différentiant maintenant par rapport à x, en supposant $x - y = \text{const.}$, on aura

$$\varphi'' x \cdot \varphi y + \varphi' x \cdot \varphi' y \frac{dy}{dx} - \varphi' x \cdot \varphi' y - \varphi x \cdot \varphi'' y \frac{dy}{dx} = 0;$$

or l'équation $x - y = c$ donne $\frac{dy}{dx} = 1$, donc

$$\varphi'' x \cdot \varphi y - \varphi x \cdot \varphi'' y = 0.$$

La supposition de y constant donne

$$\varphi'' x + c\varphi x = 0,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\varphi x = \alpha \cos(\beta x + \gamma),$$

α, β et γ étant des constantes. En déterminant celles-ci par les conditions du problème, on trouvera

$$\alpha = 2, \ \beta = 1, \ \gamma = 0,$$

donc

$$\varphi x = 2 \cos x, \ \text{ et par suite } \ R = 2P \cos x.$$

2. Déterminer les trois fonctions φ, f et ψ qui satisfassent à l'équation

$$\psi\alpha = F(x, y, \varphi x, \varphi' x, \ldots f y, f' y, \ldots),$$

où α est une fonction donnée de x et de y, et F une fonction donnée des quantités entre les parenthèses.

Différentiant l'équation par rapport à x, en supposant α constant, et écrivant ensuite $-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra l'équation suivante

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} = \frac{F' x + F'(\varphi x)\varphi' x + \ldots}{F' y + F'(f y) f' y + \ldots}.$$

Si dans cette équation on fait y constant, on a une équation différentielle entre φx et x, d'où l'on peut tirer φx, et si l'on fait x constant, on a une équation différentielle d'où l'on peut tirer fy; ces deux fonctions étant trouvées, la fonction $\psi\alpha$ se trouvera sans difficulté par l'équation proposée.

Exemples. Trouver les trois fonctions qui satisfassent à l'équation

$$\psi(x+y)=\varphi x\,.\,f'y+fy\,.\,\varphi' x.$$

On a ici

$$F(x,\ y,\ \varphi x,\ \varphi' x,\ fy,\ f'y)=\varphi x\,.\,f'y+fy\,.\,\varphi' x,$$

donc

$$F'x=F'y=0,\quad F'(\varphi x)=f'y,\quad F'(\varphi' x)=fy,$$
$$F'(fy)=\varphi' x,\quad F'(f'y)=\varphi x;$$

de plus

$$\alpha=x+y,$$

donc

$$\frac{d\alpha}{dx}=1,\quad \frac{d\alpha}{dy}=1.$$

Ces valeurs étant substituées, on aura

$$1=\frac{f'y\,.\,\varphi' x+fy\,.\,\varphi'' x}{\varphi' x\,.\,f'y+\varphi x\,.\,f''y},$$

ou bien

$$\varphi x\,.\,f''y-fy\,.\,\varphi'' x=0.$$

Faisant y constant, on trouvera

$$\varphi x=a\sin(bx+c),$$

et si l'on fait x constant,

$$fy=a'\sin(by+c').$$

On tire de là

$$\varphi' x=ab\cos(bx+c),$$
$$f'y=a'b\cos(by+c').$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation proposée, on obtiendra

$$\psi(x+y)=aa'b\Big(\sin(bx+c)\cos(by+c')+\sin(by+c')\cos(bx+c)\Big)$$
$$=aa'b\sin\Big(b(x+y)+c+c'\Big).$$

Les trois fonctions cherchées sont donc

$$\varphi x=a\sin(bx+c),$$
$$fy=a'\sin(by+c'),$$
$$\psi\alpha=aa'b\sin(b\alpha+c+c').$$

Si l'on fait $a=a'=b=1$ et $c=c'=0$, on aura

$$\varphi x=\sin x,\quad fy=\sin y,\quad \psi\alpha=\sin\alpha,$$

et par suite

$$\sin(x+y)=\sin x\,.\,\sin' y+\sin y\,.\,\sin' x.$$

Trouver les trois fonctions qui sont déterminées par l'équation

$$\psi(x+y)=f(xy)+\varphi(x-y).$$

Différentiant par rapport à x, en supposant $x+y$ constant, on aura

$$0=f'(xy)(y-x)+2\varphi'(x-y).$$

Maintenant pour trouver φ, soit $xy=c$ et $x-y=\alpha$, on aura

$$\varphi'\alpha=k\alpha,$$

donc

$$\varphi\alpha=k'+\frac{k}{2}\alpha^2.$$

Pour trouver f, soit $xy=\beta$ et $x-y=c$, on aura

$$f'\beta=c',$$

donc

$$f\beta=c''+c'\beta.$$

Ces valeurs de $\varphi\alpha$ et $f\beta$ étant substituées dans l'équation donnée, on obtiendra

$$\psi(x+y)=c''+c'xy+k'+\frac{k}{2}(x-y)^2.$$

Pour déterminer ψ, soit $x+y=\alpha$, d'où l'on tire $y=\alpha-x$, d'où

$$\psi\alpha=c''+c'x(\alpha-x)+k'+\frac{k}{2}(2x-\alpha)^2=c''+\frac{k}{2}\alpha^2+k'+x\alpha(c'-2k)+(2k-c')x^2.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut que x disparaisse; alors on aura

$$2k-c'=0,\quad \text{et}\quad c'=2k.$$

Cette valeur étant substituée, on obtient

$$\psi\alpha=k'+c''+\frac{k}{2}\alpha^2,\quad f\beta=c''+2k\beta,\quad \varphi\gamma=k'+\frac{k}{2}\gamma^2,$$

qui sont les trois fonctions cherchées.

Comme dernier exemple je prendrai le suivant: Déterminer les fonctions φ et f par l'équation

$$\varphi(x+y)=\varphi x . fy+fx . \varphi y.$$

En supposant $x+y=c$, et en différentiant, on obtiendra

$$0=\varphi' x . fy-\varphi x . f' y+f' x . \varphi y-fx . \varphi' y.$$

Supposons de plus que $f(0)=1$ et $\varphi(0)=0$; nous aurons en posant $y=0$:

$$0=\varphi' x-\varphi x . c+fx . c',$$

donc

$$fx=k\varphi x+k'\varphi' x.$$

Substituant cette valeur de fx, et faisant y constant, on aura

$$\varphi'' x+a\varphi' x+b\varphi x=0,$$

et en intégrant,

$$\varphi x=c' e^{\alpha x}+c'' e^{\alpha' x}.$$

Connaissant φx, on connaît aussi fx, et en substituant les valeurs de ces fonctions, on pourra déterminer les valeurs des quantités constantes. On peut supposer

$$c'=-c''=\frac{1}{2\sqrt{-1}},\ \alpha=-\alpha'=\sqrt{-1},$$

ce qui donnera

$$\varphi x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin x,\quad fx=\cos x.$$

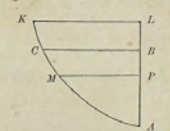
II.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES À L'AIDE D'INTÉGRALES DÉFINIES.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania 1823

1.

C'est bien connu qu'on résout à l'aide d'intégrales définies, beaucoup de problèmes qui autrement ne peuvent point se résoudre, ou du moins sont très-difficiles à traiter. Elles ont surtout été appliquées avec avantage à la solution de plusieurs problèmes difficiles de la mécanique, par exemple, à celui du mouvement d'une surface élastique, des problèmes de la théorie des ondes etc. Je vais en montrer une nouvelle application en résolvant le problème suivant.



Soit CB une ligne horizontale, A un point donné, AB perpendiculaire à BC, AM une courbe dont les coordonnées rectangulaires sont $AP=x$, $PM=y$. Soit de plus $AB=a$, $AM=s$. Si l'on conçoit maintenant qu'un corps se meut sur l'arc CA, la vitesse initiale étant nulle, le temps T qu'il emploie pour le parcourir dépendra de la forme de la courbe, et de a. Il s'agit de déterminer la courbe KCA pour que le temps T soit égal à une fonction donnée de a, p. ex. ψa.

Si l'on désigne par h la vitesse du corps au point M, et par t le temps qu'il emploie pour parcourir l'arc CM, on a comme on sait

$$h=\sqrt{BP}=\sqrt{a-x},\quad dt=-\frac{ds}{h},$$

donc

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

et en intégrant

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Pour avoir T on doit prendre l'intégrale depuis $x=a$ jusqu'à $x=0$, on a donc

$$T = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Or comme T est égal à ψa, l'équation devient

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Au lieu de résoudre cette équation, je vais montrer comment on peut tirer s de l'équation plus générale

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},$$

où n est supposé moindre que l'unité, afin que l'intégrale ne devienne pas infinie entre les limites données; ψa est une fonction quelconque qui n'est pas infinie quand a est égal à zéro.

Posons

$$s = \Sigma \alpha^{(m)} x^m,$$

où $\Sigma \alpha^{(m)} x^m$ a la valeur suivante:

$$\Sigma \alpha^{(m)} x^m = \alpha^{(m')} x^{m'} + \alpha^{(m'')} x^{m''} + \alpha^{(m''')} x^{m'''} + \ldots.$$

En différentiant on obtient

$$ds = \Sigma m \alpha^{(m)} x^{m-1} dx,$$

donc

$$\frac{ds}{(a-x)^n} = \frac{\Sigma m \alpha^{(m)} x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \Sigma m \alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}.$$

En intégrant on a

$$\int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n} = \int_{x=0}^{x=a} \Sigma m \alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}.$$

Or

$$\int \Sigma m \alpha^{(m)} \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \Sigma m \alpha^{(m)} \int \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n},$$

donc, puisque $\int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n} = \psi a$:

$$\psi a = \Sigma m \alpha^{(m)} \int_0^a \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}.$$

La valeur de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n}$$

se trouve aisément de la manière suivante: Si l'on pose $x = at$, on a

$$x^m = a^m t^m, \quad m x^{m-1} dx = m a^m t^{m-1} dt$$
$$(a-x)^n = (a-at)^n = a^n (1-t)^n,$$

donc

$$\frac{m x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \frac{m a^{m-n} t^{m-1} dt}{(1-t)^n},$$

et en intégrant

$$m \int_0^a \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = m a^{m-n} \int_0^1 \frac{t^{m-1} dt}{(1-t)^n}.$$

Or on a

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1} dt}{(1-t)^n} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma m}{\Gamma(m-n+1)},$$

où Γm est une fonction déterminée par les équations

$$\Gamma(m+1) = m\,\Gamma m, \quad \Gamma(1) = 1.\text{*)}$$

En substituant cette valeur pour l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{m-1} dt}{(1-t)^n}$, et remarquant que $m\,\Gamma m = \Gamma(m+1)$ on a

$$m \int_0^a \frac{x^{m-1} dx}{(a-x)^n} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} a^{m-n}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression pour ψa, on obtient

$$\psi a = \Gamma(1-n) \Sigma \alpha^{(m)} a^{m-n} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}.$$

Soit

$$\psi a = \Sigma \beta^{(k)} a^k,$$

on a

$$\Sigma \beta^{(k)} a^k = \Sigma \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} \alpha^{(m)} a^{m-n}.$$

---

*) Les propriétés de cette fonction remarquable ont été largement développées par M. *Legendre* dans son ouvrage, Exercices de calcul intégral t. I et II.

Pour que cette équation soit satisfaite il faut que $m-n=k$, donc $m=n+k$, et que

$$\beta^{(k)}=\frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\alpha^{(m)}=\frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(k+1)}\alpha^{(m)},$$

donc

$$\alpha^{(m)}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n+k+1)}\beta^{(k)}.$$

Or on a

$$\int_0^1\frac{t^k dt}{(1-t)^{1-n}}=\frac{\Gamma n.\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)},$$

par conséquent

$$\alpha^{(m)}=\frac{\beta^{(k)}}{\Gamma n.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1\frac{t^k dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

En multipliant par $x^m=x^{n+k}$ on obtient

$$\alpha^{(m)}x^m=\frac{x^n}{\Gamma n.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1\frac{\beta^{(k)}(xt)^k dt}{(1-t)^{1-n}},$$

d'où

$$\Sigma\alpha^{(m)}x^m=\frac{x^n}{\Gamma n.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1\frac{\Sigma\beta^{(k)}(xt)^k dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

Mais on a $\Sigma\alpha^{(m)}x^m=s$, $\Sigma\beta^{(k)}(xt)^k=\psi(xt)$, donc

$$s=\frac{x^n}{\Gamma n.\,\Gamma(1-n)}\int_0^1\frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

En remarquant ensuite qu'on a $\Gamma n.\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$, on trouve

$$s=\frac{\sin n\pi.\,x^n}{\pi}\int_0^1\frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

De ce qui précède découle ce théorème remarquable:
Si l'on a

$$\psi a=\int_{x=0}^{x=a}\frac{ds}{(a-x)^n},$$

on a aussi

$$s=\frac{\sin n\pi}{\pi}x^n\int_0^1\frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

Appliquons maintenant cela à l'équation

$$\psi a=\int_{x=0}^{x=a}\frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

On a dans ce cas $n=\frac{1}{2}$, donc $1-n=\frac{1}{2}$ et par conséquent

$$s=\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^1\frac{\psi(xt)\,dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Voilà donc l'équation qui détermine l'arc s de la courbe cherchée par l'abscisse correspondante x; on en tirera facilement une équation entre les coordonnées rectangulaires, en remarquant que l'on a $ds^2=dx^2+dy^2$.

Appliquons maintenant la solution précédente à quelques cas spéciaux.
1) Trouver la courbe qui a la propriété, que le temps qu'un corps emploie pour parcourir un arc quelconque, soit proportionel à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la hauteur que le corps a parcourue.

Dans ce cas on a $\psi a=ca^n$, où c est une constante, donc $\psi(xt)=cx^nt^n$, par suite:

$$s=\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^1\frac{cx^nt^n dt}{\sqrt{1-t}}=x^{n+\frac{1}{2}}\frac{c}{\pi}\int_0^1\frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}},$$

donc en faisant

$$\frac{c}{\pi}\int_0^1\frac{t^n dt}{\sqrt{1-t}}=C,$$

on a

$$s=Cx^{n+\frac{1}{2}};$$

on tire de là

$$ds=(n+\tfrac{1}{2})Cx^{n-\frac{1}{2}}\,dx,$$

et

$$ds^2=(n+\tfrac{1}{2})^2C^2x^{2n-1}dx^2=dy^2+dx^2,$$

d'où l'on déduit en posant $(n+\frac{1}{2})^2C^2=k$

$$dy=dx\sqrt{kx^{2n-1}-1};$$

l'équation de la courbe cherchée devient donc

$$y=\int dx\sqrt{kx^{2n-1}-1}.$$

Si l'on fait $n=\frac{1}{2}$, on a $x^{2n-1}=1$, donc

$$y=\int dx\sqrt{k-1}=k'+x\sqrt{k-1},$$

la courbe cherchée est donc une droite.

2) Trouver l'équation de l'isochrone.

Puisque le temps doit être indépendant de l'espace parcouru, on a $\psi a = c$ et par conséquent

$$s = \frac{\sqrt{x}}{\pi} c \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},$$

donc

$$s = k\sqrt{x},$$

où

$$k = \frac{c}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}},$$

ce qui est l'équation connue de la cycloide.

Nous avons vu que si l'on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},$$

on a aussi

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} x^n \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

On peut aussi exprimer s d'une autre manière, que je vais rapporter à cause de sa singularité, savoir

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int^n \psi x \,.\, dx^n = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}},$$

c'est-à-dire, si l'on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} ds\,(a-x)^n,$$

on a aussi

$$s = \frac{1}{\Gamma(1+n)} \frac{d^n \psi x}{dx^n};$$

en d'autres termes, on a

$$\psi a = \frac{1}{\Gamma(1+n)} \int_{x=0}^{x=a} \frac{d^{n+1}\psi x}{dx^{n+1}} (a-x)^n dx.$$

Cette proposition se démontre aisément comme il suit. Si l'on pose

$$\psi x = \Sigma \alpha^{(m)} x^m,$$

on obtient en différentiant:

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \Sigma \alpha^{(m)} m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\, x^{m-k};$$

mais

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)},$$

donc

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \Sigma \alpha^{(m)} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)} x^{m-k}.$$

Or on a

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-k+1)} = \frac{1}{\Gamma(-k)} \int_0^1 \frac{t^m dt}{(1-t)^{1+k}},$$

par conséquent

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \frac{1}{x^k \Gamma(-k)} \int_0^1 \frac{\Sigma \alpha^{(m)} (xt)^m dt}{(1-t)^{1+k}};$$

mais $\Sigma \alpha^{(m)} (xt)^m = \psi(xt)$, donc

$$\frac{d^k \psi x}{dx^k} = \frac{1}{x^k \Gamma(-k)} \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1+k}}.$$

En posant $k = -n$, on en tire

$$\frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}} = \frac{x^n}{\Gamma n} \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}}.$$

Or nous avons vu que

$$s = \frac{x^n}{\Gamma n \,.\, \Gamma(1-n)} \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}},$$

donc on a

$$s = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \frac{d^{-n}\psi x}{dx^{-n}},$$

si

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n},$$

c. q. f. d.

En différentiant n fois de suite la valeur de s, on obtient

$$\frac{d^n s}{dx^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \psi x,$$

et par conséquent, en faisant $s = \varphi x$,

$$\frac{d^n \varphi a}{da^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_0^a \frac{\varphi' x \,.\, dx}{(a-x)^n}.$$

On doit remarquer que, dans ce qui précède, n doit toujours être moindre que l'unité.

Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, on a

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{-\frac{1}{2}}\psi x}{dx^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{1}{2}} \psi x \,.\, dx^{\frac{1}{2}}.$$

C'est là l'équation de la courbe cherchée, quand le temps est égal à ψa.

De cette équation on tire

$$\psi x = \sqrt{\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}} s}{dx^{\frac{1}{2}}},$$

donc:

Si l'équation d'une courbe est $s = \varphi x$, le temps qu'un corps emploie pour en parcourir un arc, dont la hauteur est a, est égal à $\sqrt{\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}\varphi a}{da^{\frac{1}{2}}}$.

Je remarquerai enfin que de la même manière, qu'en partant de l'équation

$$\psi a = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}$$

j'ai trouvé s, de même en partant de l'équation

$$\psi a = \int \varphi(xa) fx \,.\, dx$$

j'ai trouvé la fonction φ, ψ et f étant des fonctions données, et l'intégrale étant prise entre des limites quelconques; mais la solution de ce problème est trop longue pour être donnée ici.

2.

Valeur de l'expression $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$.

Lorsque φ est une fonction algébrique, logarithmique, exponentielle ou circulaire, on peut, comme on sait, toujours exprimer la valeur réelle de $\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1})$ sous forme réelle et finie. Si au contraire φ conserve sa généralité, on n'a pas que je sache, jusqu'à présent pu l'exprimer sous forme réelle et finie. On peut le faire à l'aide d'intégrales définies de la manière suivante.

Si l'on développe $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ et $\varphi(x-y\sqrt{-1})$ d'après le théorème de *Taylor*, on obtient

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = \varphi x + \varphi' x . y\sqrt{-1} - \frac{\varphi'' x}{1.2} y^2 - \frac{\varphi''' x}{1.2.3} y^3 \sqrt{-1} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} y^4 + \dots$$

$$\varphi(x-y\sqrt{-1}) = \varphi x - \varphi' x . y\sqrt{-1} - \frac{\varphi'' x}{1.2} y^2 + \frac{\varphi''' x}{1.2.3} y^3 \sqrt{-1} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} y^4 - \dots$$

donc

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1}) = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{1.2} y^2 + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} y^4 - \dots\right).$$

Pour trouver la somme de cette série, considérons la série

$$\varphi(x+t) = \varphi x + t\varphi' x + \frac{t^2}{1.2}\varphi'' x + \frac{t^3}{1.2.3}\varphi''' x + \dots$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $e^{-v^2t^2}dt$, et prenant ensuite l'intégrale depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = \varphi x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} dt + \varphi' x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t\, dt + \tfrac{1}{2}\varphi'' x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^2 dt + \dots$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^{2n+1} dt = 0$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = \varphi x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} dt + \frac{\varphi'' x}{1.2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^2 dt + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^4 dt + \dots$$

Considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^{2n} dt.$$

Soit $t = \frac{\alpha}{v}$, on a $e^{-v^2t^2} = e^{-\alpha^2}$; $t^{2n} = \frac{\alpha^{2n}}{v^{2n}}$, $dt = \frac{d\alpha}{v}$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^{2n} dt = \frac{1}{v^{2n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \alpha^{2n} d\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{v^{2n+1}},$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2t^2} t^{2n} dt = \frac{1.3.5\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n v^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}} A_n.$$

Cette valeur étant substituée ci-dessus, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(\varphi x + \frac{A_1}{2} \frac{\varphi'' x}{v^2} + \frac{A_2}{2.3.4} \frac{\varphi'''' x}{v^4} + \dots\right).$$

En multipliant par $e^{-v^2y^2} v dv$, et prenant l'intégrale depuis $v = -\infty$ jusqu'à $v = +\infty$, on obtiendra

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = \varphi x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} dv + \frac{A_1 \varphi'' x}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} \frac{dv}{v^2} + \dots$$

Soit $vy=\beta$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v^{-2n} dv = y^{2n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} \beta^{-2n} d\beta.$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}\beta^{-2n}d\beta = \Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{A_n}$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v^{-2n} dv = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\, y^{2n-1}}{A_n},$$

et par suite

$$A_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v^{-2n} dv = (-1)^n y^{2n-1} \sqrt{\pi}.$$

En substituant cette valeur, et divisant par $\frac{\sqrt{\pi}}{2y}$, on obtiendra

$$\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{2} y^2 + \frac{\varphi'''' x}{2.3.4} y^4 - \ldots\right).$$

Le second membre de cette équation est égal à

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1}),$$

donc

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1}) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2t^2} dt.$$

Posant $x=0$, on a

$$\varphi(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi t \,.\, e^{-v^2t^2} dt.$$

Soit par exemple $\varphi t = e^t$, on aura

$$\varphi(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) = e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}} = 2\cos y,$$

donc

$$\cos y = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2} v dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-v^2t^2} dt;$$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-v^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v} e^{\frac{1}{4v^2}}$, donc

$$\cos y = \frac{y}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2y^2 + \frac{1}{4v^2}} dv.$$

Si l'on fait $v=\frac{t}{y}$, on aura

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + \frac{1}{4}\frac{y^2}{t^2}} dt.$$

En donnant d'autres valeurs à φt, on peut déduire la valeur d'autres intégrales définies, mais comme mon but était seulement de déterminer la valeur de $\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1})$ je ne m'en occuperai pas.

3.

Nombres de Bernoulli exprimés par des intégrales définies, d'où l'on a ensuite déduit l'expression de l'intégrale finie $\Sigma\varphi x$.

Si l'on développe la fonction $1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2}$ en série suivant les puissances entières de u, en posant

$$1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = A_1\frac{u^2}{2} + A_2\frac{u^4}{2.3.4} + \ldots + A_n\frac{u^{2n}}{2.3.4..2n} + \ldots,$$

les coefficiens A_1, A_2, A_3 etc. sont, comme on sait, les nombres de *Bernoulli*.*)

On a**)

$$1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = 2u^2\left(\frac{1}{4\pi^2-u^2} + \frac{1}{4.4\pi^2-u^2} + \frac{1}{9.4\pi^2-u^2} + \ldots\right);$$

et en développant le second membre en série:

$$\begin{aligned} 1-\frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = & \frac{u^2}{2\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) \\ & + \frac{u^4}{2^3\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right) \\ & + \frac{u^6}{2^5\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{u^{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En comparant ce développement au précédent, on aura

$$\frac{A_n}{1.2.3\ldots2n} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right).$$

*) Voyez *Euleri* Institutiones calc. diff. p. 426.
**) Voyez *Euleri* Institutiones calc. diff. p. 423.

Considérons maintenant l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1}$. On a

$$\frac{1}{e^t-1} = e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + \dots,$$

donc

$$\int \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1} = \int e^{-t}t^{2n-1}dt + \int e^{-2t}t^{2n-1}dt + \dots + \int e^{-kt}t^{2n-1}dt + \dots$$

Or $\int_0^{\frac{1}{0}} e^{-kt}t^{2n-1}dt = \frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$ *), donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1} = \Gamma(2n)\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots\right);$$

mais d'après ce qui précède, on a

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\dots 2n} A_n = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{\Gamma(2n+1)} A_n,$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1} = \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n+1)} 2^{2n-1}\pi^{2n} A_n = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{2n} A_n,$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1}.$$

En mettant $t\pi$ au lieu de t, on obtiendra enfin

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t}-1}.$$

Ainsi les nombres de *Bernoulli* peuvent être exprimés d'une manière très simple, par des intégrales définies.

D'un autre côté on voit aussi, lorsque n est un nombre entier, que l'expression $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t}-1}$ est toujours rationnelle et égale à $\frac{2^{2n-1}}{2n} A_n$, ce qui est assez remarquable. Ainsi on aura par exemple en faisant $n = 1, 2, 3$ etc.

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{6},$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{30}\cdot\frac{2^3}{4} = \frac{1}{15},$$

*) Cette expression se déduit de l'équation fondamentale $\Gamma a = \int_0^1 dx \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$, en y faisant $a = 2n$ et $x = e^{-kt}$. *Legendre*, Exercices de calc. int. t. I, p. 277.

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^5dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{42}\cdot\frac{2^5}{6} = \frac{8}{63} \text{ etc.}$$

Maintenant à l'aide de ce qui précède, on pourra très facilement exprimer la fonction $\Sigma\varphi x$ par une intégrale définie. On a

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x.dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + A_1\frac{\varphi' x}{1.2} - A_2\frac{\varphi''' x}{1.2.3.4} + \dots$$

En substituant les valeurs de A_1, A_2, A_3 etc., on aura

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x.dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \frac{\varphi' x}{1.2}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t}-1} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3.2^3}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3dt}{e^{\pi t}-1} + \dots$$

c'est-à-dire

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x.dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\left(\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \dots\right).$$

Or

$$\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{\varphi'' x}{1.2}\frac{t^2}{2^2} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4}\frac{t^4}{2^4} - \dots$$
$$+ \sqrt{-1}\left(\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \dots\right),$$

$$\varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{\varphi'' x}{1.2}\frac{t^2}{2^2} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4}\frac{t^4}{2^4} - \dots$$
$$- \sqrt{-1}\left(\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \dots\right).$$

On tire de là

$$\varphi' x.\frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \dots = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)\right].$$

Cette valeur étant substituée dans l'expression de $\Sigma\varphi x$, on obtient

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x.dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}\frac{dt}{e^{\pi t}-1}.$$

Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me paraît très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.

De l'équation précédente on tire

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}\frac{dt}{e^{\pi t}-1} = \Sigma\varphi x - \int\varphi x.dx + \tfrac{1}{2}\varphi x.$$

On a ainsi l'expression d'une intégrale définie très générale. Je vais en faire voir l'application à quelques cas particuliers.

1. Soit $\varphi x = e^x$. Dans ce cas on a

$$\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = e^x e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}} = e^x\left(\cos\frac{t}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{t}{2}\right),$$

donc

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = e^x \sin\frac{t}{2},$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\sin\frac{t}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = e^{-x}\Sigma e^x - e^{-x}\int e^x dx + \tfrac{1}{2};$$

mais $\Sigma e^x = \frac{e^x}{e-1}$, et $\int e^x dx = e^x$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\sin\frac{t}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e-1} - \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on fait $\varphi x = e^{mx}$, on obtiendra de la même manière

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\sin\frac{mt}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e^m-1} - \frac{1}{m} + \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on met $2t$ à la place de t, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\sin mt.dt}{e^{2\pi t}-1} = \tfrac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1} - \frac{1}{2m},$$

formule trouvée d'une autre manière par M. *Legendre.* (Exerc. de calc. int. t. II, p. 189.)

2. Soit $\varphi x = \frac{1}{x}$, on trouvera

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = -\frac{t}{2(x^2+\frac{1}{4}t^2)},$$

et

$$\int \varphi x.dx = \int\frac{dx}{x} = \log x + C,$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(x^2+\frac{1}{4}t^2)(e^{\pi t}-1)} = 2\log x - \frac{1}{x} - 2\Sigma\frac{1}{x} + C.$$

On détermine C en posant $x = 1$, ce qui donne

$$C = 3 + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(1+\frac{1}{4}t^2)(e^{\pi t}-1)}.$$

3. Soit $\varphi x = \sin ax$, on aura

$$\sin\left(ax + \frac{at}{2}\sqrt{-1}\right) - \sin\left(ax - \frac{at}{2}\sqrt{-1}\right) = 2\cos ax.\sin\frac{at}{2}\sqrt{-1} = \cos ax\,\frac{e^{-\frac{at}{2}} - e^{\frac{at}{2}}}{\sqrt{-1}},$$

$$\Sigma\sin ax = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a},\quad \int\sin ax.dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

donc

$$\frac{\cos ax}{2}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{\frac{at}{2}} - e^{-\frac{at}{2}}}{e^{\pi t}-1}dt = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a} + \frac{1}{a}\cos ax + \tfrac{1}{2}\sin ax,$$

et en écrivant $2a$ au lieu de a, et réduisant

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{at}-e^{-at}}{e^{\pi t}-1}dt = \frac{1}{a} - \operatorname{cotg} a.$$

En supposant d'autres formes pour la fonction φx on pourra de la même manière trouver la valeur d'autres intégrales définies.

4.

Sommation de la série infinie $S = \varphi(x+1) - \varphi(x+2) + \varphi(x+3) - \varphi(x+4) + \dots$ *à l'aide d'intégrales définies.*

On voit aisément que S pourra être exprimé comme il suit,

$$S = \tfrac{1}{2}\varphi x + A_1\varphi' x + A_2\varphi'' x + A_3\varphi''' x + \dots$$

Si l'on suppose $\varphi x = e^{ax}$ on obtient

$$S = \tfrac{1}{2}e^{ax} + e^{ax}(A_1 a + A_2 a^2 + A_3 a^3 + \dots).$$

Mais on a aussi

$$S = e^{ax+a} - e^{ax+2a} + e^{ax+3a} - \dots = \frac{e^{ax}e^a}{1+e^a},$$

donc

$$\frac{e^a}{1+e^a}-\tfrac{1}{2}=A_1a+A_2a^2+A_3a^3+\ldots$$

En faisant $a=c\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{e^{c\sqrt{-1}}}{1+e^{c\sqrt{-1}}}-\tfrac{1}{2}=\sqrt{-1}\,(A_1c-A_3c^3+A_5c^5-\ldots)+P,$$

où P désigne la somme de tous les termes réels. Mais

$$\frac{e^{c\sqrt{-1}}}{1+e^{c\sqrt{-1}}}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{c}{2}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{c}{2}\sqrt{-1}}}{e^{\frac{c}{2}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{c}{2}\sqrt{-1}}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c,$$

donc

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=A_1c-A_3c^3+A_5c^5-\ldots$$

Or on a (*Legendre* Exerc. de calc. int. t. II, p. 186)

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{e^{ct}-e^{-ct}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,dt,$$

donc, puisque

$$e^{ct}-e^{-ct}=2\left\{ct+\frac{c^3}{2.3}t^3+\frac{c^5}{2.3.4.5}t^5+\ldots\right\},$$

on obtient

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=A_1c-A_3c^3+A_5c^5-\ldots$$

$$=2c\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}+2\frac{c^3}{2.3}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^3dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}+2\frac{c^5}{2.3.4.5}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^5dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}+\ldots$$

On en conclut,

$$A_1=2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}},$$

$$A_3=-\frac{2}{2.3}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^3dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}},$$

$$A_5=\frac{2}{2.3.4.5}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^5dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}},$$

etc.

En substituant ces valeurs dans l'expression pour S, on trouve

$$S=\tfrac{1}{2}\varphi x+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\left\{t\varphi'x-\frac{t^3}{2.3}\varphi'''x+\frac{t^5}{2.3.4.5}\varphi^{(V)}x-\ldots\right\};$$

mais on a

$$t\varphi'x-\frac{t^3}{2.3}\varphi'''x+\frac{t^5}{2.3.4.5}\varphi^{(V)}x-\ldots=\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

donc

$$\varphi(x+1)-\varphi(x+2)+\varphi(x+3)-\varphi(x+4)+\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\varphi x+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on pose $x=0$, on obtient

$$\varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\varphi(4)+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=\tfrac{1}{2}\varphi(0)+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{\varphi(t\sqrt{-1})-\varphi(-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Supposons par exemple $\varphi x=\dfrac{1}{x+1}$, on a

$$\frac{\varphi(t\sqrt{-1})-\varphi(-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=-\frac{t}{1+t^2},$$

donc

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\ldots=\tfrac{1}{2}-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{(1+t^2)(e^{\pi t}-e^{-\pi t})};$$

or on a

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\ldots=1-\log 2,$$

par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{(1+t^2)(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}=\tfrac{1}{2}\log 2-\tfrac{1}{4}.$$

III.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES, OU L'ON DÉMONTRE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'y a pas réussi jusqu'à présent. J'ose donc espérer que les géomètres recevront avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

l'équation générale du cinquième degré, et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement, c'est-à-dire qu'on puisse exprimer y par une fonction des quantités a, b, c, d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous la forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

m étant un nombre premier et R, p, p_1, p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des fonctions rationnelles des quantités a, b, c, d et e. On peut aussi supposer qu'il soit impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a, b etc. p, p_1, p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc,

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation proposée, on obtiendra en réduisant un résultat de cette forme,

$$P = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0,$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions rationnelles et entières des quantités a, b, c, d, e, p, p_2 etc. et R. Pour que cette équation puisse avoir lieu il faut que $q = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ etc. $q_{m-1} = 0$. En effet, en désignant $R^{\frac{1}{m}}$ par z, on aura les deux équations

$$z^m - R = 0 \quad \text{et} \quad q + q_1 z + \ldots + q_{m-1} z^{m-1} = 0.$$

Si maintenant les quantités q, q_1 etc. ne sont pas égales à zéro, ces équations ont nécessairement une ou plusieurs racines communes. Soit k le nombre de ces racines, on sait qu'on peut trouver une équation du degré k qui a pour racines les k racines mentionnées, et dans laquelle tous les coefficiens sont des fonctions rationnelles de R, q, q_1 et q_{m-1}. Soit

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_k z^k = 0$$

cette équation. Elle a ces racines communes avec l'équation $z^m - R = 0$; or toutes les racines de cette équation sont de la forme $\alpha_\mu z$, α_μ désignant une des racines de l'équation $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. On aura donc en substituant les équations suivantes,

$$\begin{gathered}
r + r_1 z + r_2 z^2 + \ldots + r_k z^k = 0, \\
r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \ldots + \alpha^k r_k z^k = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r + \alpha_{k-2} r_1 z + \alpha_{k-2}^2 r_2 z^2 + \ldots + \alpha_{k-2}^k r_k z^k = 0.
\end{gathered}$$

De ces k équations, on peut toujours tirer la valeur de z exprimée par une fonction rationnelle des quantités r, r_1, r_2 etc. r_k, et comme ces quantités sont elles-mêmes des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e, $R \ldots p$, p_2 etc., il s'en suit que z est aussi une fonction rationnelle de ces dernières quantités; mais cela est contre l'hypothèse. Il faut donc que

$$q = 0, \; q_1 = 0 \text{ etc. } q_{m-1} = 0.$$

Si maintenant ces équations ont lieu, il est clair que l'équation proposée est satisfaite par toutes les valeurs qu'on obtiendra pour y, en donnant à $R^{\frac{1}{m}}$ toutes les valeurs

$$R^{\frac{1}{m}}, \; \alpha R^{\frac{1}{m}}, \; \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \; \alpha^3 R^{\frac{1}{m}}, \text{ etc. } \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}},$$

α étant une racine de l'équation

$$\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\ldots+\alpha+1=0.$$

On voit aussi que toutes ces valeurs de y sont différentes; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que l'équation $P=0$, et une telle équation conduit comme on vient de le voir à un résultat qui ne peut avoir lieu. Le nombre m ne peut donc dépasser 5. En désignant donc par y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 les racines de l'équation proposée, on aura

$$y_1=p+R^{\frac{1}{m}}+p_2R^{\frac{2}{m}}+\ldots+p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}},$$

$$y_2=p+\alpha R^{\frac{1}{m}}+\alpha^2p_2R^{\frac{2}{m}}+\ldots+\alpha^{m-1}p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}},$$

. . . .

$$y_m=p+\alpha^{m-1}R^{\frac{1}{m}}+\alpha^{m-2}p_2R^{\frac{2}{m}}+\ldots+\alpha p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}.$$

De ces équations on tirera sans peine

$$p=\frac{1}{m}(y_1+y_2+\ldots+y_m),$$

$$R^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{m}(y_1+\alpha^{m-1}y_2+\ldots+\alpha y_m),$$

$$p_2R^{\frac{2}{m}}=\frac{1}{m}(y_1+\alpha^{m-2}y_2+\ldots+\alpha^2y_m),$$

. . . .

$$p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}=\frac{1}{m}(y_1+\alpha y_2+\ldots+\alpha^{m-1}y_m).$$

On voit par là que p, p_2 etc. p_{m-1}, R et $R^{\frac{1}{m}}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Considérons maintenant l'une quelconque de ces quantités, par exemple R. Soit

$$R=S+v^{\frac{1}{n}}+S_2v^{\frac{2}{n}}+\ldots+S_{n-1}v^{\frac{n-1}{n}}.$$

En traitant cette quantité de la même manière que y, on obtiendra un résultat pareil savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2 etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1, y_2 etc., les fonctions $v^{\frac{1}{n}}$, v, S, S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes

les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considérons d'abord les fonctions irrationnelles de la forme $R^{\frac{1}{m}}$, R étant une fonction rationnelle de a, b, c, d et e. Soit $R^{\frac{1}{m}}=r$, r est une fonction rationnelle y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5, et R une fonction symétrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la résolution de l'équation générale du cinquième degré, il est clair qu'on peut considérer y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 comme des variables indépendantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}}=r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition. Par conséquent on peut échanger les quantités y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}}=r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symétrique. La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en permutant de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m=5$ ou $m=2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. *Cauchy* inséré dans le Journal de l'école polytechnique, XVII^e Cahier). Soit d'abord $m=5$. La fonction r a donc cinq valeurs différentes, et peut par conséquent être mise sous la forme

$$R^{\frac{1}{5}}=r=p+p_1y_1+p_2y_1^2+p_3y_1^3+p_4y_1^4,$$

p, p_1, $p_2\ldots$ étant des fonctions symétriques de y_1, y_2 etc. Cette équation donne en changeant y_1 en y_2

$$p+p_1y_1+p_2y_1^2+p_3y_1^3+p_4y_1^4=\alpha p+\alpha p_1y_2+\alpha p_2y_2^2+\alpha p_3y_2^3+\alpha p_4y_2^4$$

où

$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0;$$

mais cette équation ne peut avoir lieu; le nombre m doit par conséquent être égal à deux. Soit donc

$$R^{\frac{1}{2}}=r,$$

r doit avoir deux valeurs différentes et de signe contraire; on aura donc (voyez le mémoire de M. *Cauchy*)

$$R^{\frac{1}{2}}=r=v(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots(y_2-y_3)\ldots(y_4-y_5)=vS^{\frac{1}{2}},$$

v étant une fonction symétrique.

Considérons maintenant les fonctions irrationnelles de la forme

$$\left(p + p_1 R^{\frac{1}{\nu}} + p_2 R_1^{\frac{1}{\mu}} + \ldots\right)^{\frac{1}{m}},$$

p, p_1, p_2 etc., R, R_1 etc. étant des fonctions rationnelles de a, b, c, d et e et par conséquent des fonctions symétriques de y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5. Comme on l'a vu, on doit avoir $\nu = \mu =$ etc. $= 2$, $R = v^2 S$, $R_1 = v_1^2 S$ etc. La fonction précédente peut donc être mise sous la forme

$$\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Soit

$$r = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$r_1 = \left(p - p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}},$$

on aura en multipliant,

$$r r_1 = \left(p^2 - p_1^2 S\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Si maintenant $r r_1$ n'est pas une fonction symétrique, le nombre m doit être égal à deux; mais dans ce cas r aura quatre valeurs différentes, ce qui est impossible; il faut donc que $r r_1$ soit une fonction symétrique. Soit v cette fonction, on aura

$$r + r_1 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{m}} = z.$$

Cette fonction a m valeurs différentes, il faut donc que $m = 5$, en remarquant que m est un nombre premier. On aura par conséquent

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} + v\left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions symétriques de y_1, y_2, y_3 etc. et par conséquent des fonctions rationnelles de a, b, c, d et e. En combinant cette équation avec l'équation proposée, on en tirera la valeur de y exprimée par une fonction rationnelle de z, a, b, c, d et e. Or une telle fonction est toujours réductible à la forme

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}},$$

où P, R, P_2, P_3 et P_4 sont des fonctions de la forme $p + p_1 S^{\frac{1}{2}}$, p, p_1, et S étant des fonctions rationnelles de a, b, c, d et e. De cette valeur de y on tire

$$R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}\left(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5\right) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

où

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Or le premier membre a 120 valeurs différentes et le second membre seulement 10; par conséquent y ne peut avoir la forme que nous venons de trouver; mais nous avons démontré que y doit nécessairement avoir cette forme, si l'équation proposée est résoluble; nous concluons donc

qu'il est impossible de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré.

Il suit immédiatement de ce théorème qu'il est de même impossible de résoudre par des radicaux les équations générales des degrés supérieurs au cinquième.

IV.

L'INTÉGRALE FINIE $\Sigma^n \varphi x$ EXPRIMÉE PAR UNE INTÉGRALE DÉFINIE SIMPLE.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang III, Bind 2, Christiania 1825.

On peut comme on sait, au moyen du théorème de *Parseval* exprimer l'intégrale finie $\Sigma^n \varphi x$ par une intégrale définie double, mais si je ne me trompe, on n'a pas exprimé la même intégrale par une intégrale définie simple. C'est ce qui est l'objet de ce mémoire.

En désignant par φx une fonction quelconque de x, il est aisé de voir qu'on peut toujours supposer

$$\varphi x = \int e^{vx} fv \,.\, dv, \tag{1}$$

l'intégrale étant prise entre deux limites quelconques de v, indépendantes de x. La fonction fv désigne une fonction de v, dont la forme dépend de celle de φx. En supposant $\Delta x = 1$, on aura en prenant l'intégrale finie des deux membres de l'équation (1)

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv, \tag{2}$$

où il faut ajouter une constante arbitraire. En prenant une seconde fois l'intégrale finie, on obtiendra

$$\Sigma^2 \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^2} dv.$$

En général on trouvera

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dv. \tag{3}$$

Pour compléter cette intégrale il faut ajouter au second membre une fonction de la forme

$$C + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1},$$

C, C_1, C_2 etc. étant des constantes arbitraires.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de l'intégrale définie $\int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dv$. Pour cela je me sers d'un théorème dû à M. *Legendre* (Exerc. de calc. int. t. II, p. 189), savoir que

$$\tfrac{1}{4} \frac{e^v + 1}{e^v - 1} - \frac{1}{2v} = \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \,.\, \sin vt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

On tire de cette équation

$$\frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \,.\, \sin vt}{e^{2\pi t} - 1}. \tag{4}$$

En substituant cette valeur de $\frac{1}{e^v - 1}$ dans l'équation (2), on aura

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{v} dv - \tfrac{1}{2} \int e^{vx} fv \,.\, dv + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \int e^{vx} fv \,.\, \sin vt \,.\, dv.$$

L'intégrale $\int e^{vx} fv \,.\, \sin vt \,.\, dv$ se trouve de la manière suivante. En remplaçant dans l'équation (1) x successivement par $x + t\sqrt{-1}$ et $x - t\sqrt{-1}$, on obtiendra

$$\varphi(x + t\sqrt{-1}) = \int e^{vx} e^{vt\sqrt{-1}} fv \,.\, dv,$$

$$\varphi(x - t\sqrt{-1}) = \int e^{vx} e^{-vt\sqrt{-1}} fv \,.\, dv,$$

d'où l'on tire, en retranchant et divisant par $2\sqrt{-1}$,

$$\int e^{vx} \sin vt \,.\, fv \,.\, dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Ainsi l'expression de $\Sigma \varphi x$ devient

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x \,.\, dx - \tfrac{1}{2} \varphi x + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \, \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Maintenant pour trouver la valeur de l'intégrale générale

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} fv \frac{dv}{(e^v - 1)^n},$$

posons

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \left(A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dv} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \ldots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right)$$

où p est égal à $\frac{1}{e^v - 1}$, $A_{0,n}$, $A_{1,n} \ldots$ étant des coefficiens numériques qui doivent être déterminés. Si l'on différentie l'équation précédente, on a

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}} = (-1)^n \left(A_{0,n} \frac{dp}{dv} + A_{1,n} \frac{d^2p}{dv^2} + \ldots + A_{n-1,n} \frac{d^np}{dv^n}\right).$$

Or

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}} = \frac{n}{(e^v-1)^n} + \frac{n}{(e^v-1)^{n+1}},$$

donc

$$\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}} = n(-1)^{n-1}\left(A_{0,n}\,p + A_{1,n}\frac{dp}{dv} + \ldots + A_{n-1,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$
$$+ n(-1)^n \left(A_{0,n+1}\,p + A_{1,n+1}\frac{dp}{dv} + \ldots + A_{n,n+1}\frac{d^np}{dv^n}\right).$$

En comparant ces deux expressions de $\frac{ne^v}{(e^v-1)^{n+1}}$, on en déduit les équations suivantes:

$$\begin{array}{lll}
A_{0,n+1} - A_{0,n} = 0 & \text{ɔ:} & \Delta A_{0,n} = 0, \\
A_{1,n+1} - A_{1,n} = \frac{1}{n} A_{0,n} & \text{ɔ:} & \Delta A_{1,n} = \frac{1}{n} A_{0,n}, \\
A_{2,n+1} - A_{2,n} = \frac{1}{n} A_{1,n} & \text{ɔ:} & \Delta A_{2,n} = \frac{1}{n} A_{1,n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-1,n+1} - A_{n-1,n} = \frac{1}{n} A_{n-2,n} & \text{ɔ:} & \Delta A_{n-1,n} = \frac{1}{n} A_{n-2,n}, \\
\qquad A_{n,n+1} = \frac{1}{n} A_{n-1,n}, & &
\end{array}$$

d'où l'on tire

$$A_{0,n} = 1,\ A_{1,n} = \Sigma \frac{1}{n},\ A_{2,n} = \Sigma\left(\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{n}\right),\ A_{3,n} = \Sigma\left[\frac{1}{n}\Sigma\left(\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{n}\right)\right] \text{ etc.}$$

$$A_{n,n+1} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot A_{0,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

Cette dernière équation servira à déterminer les constantes qui rentrent dans les expressions de $A_{1,n}$, $A_{2,n}$, $A_{3,n}$ etc.

Ayant ainsi déterminé les coefficiens $A_{0,n}$, $A_{1,n}$, $A_{2,n}$ etc., on aura, en substituant dans l'équation (3) au lieu de $\frac{1}{(e^v-1)^n}$ sa valeur,

$$\Sigma^n \varphi x = (-1)^{n-1} \int e^{vx} fv\,.\,dv \left(A_{0,n}\,p + A_{1,n}\frac{dp}{dv} + \ldots + A_{n-1,n}\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right);$$

maintenant on a

$$p = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt\,.\sin vt}{e^{2\pi t} - 1},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{v^2} + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt\,.\cos vt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \quad \frac{2}{v^3} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^2 dt\,.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$

$$\frac{d^3p}{dv^3} = -\frac{2.3}{v^4} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3 dt\,.\cos vt}{e^{2\pi t}-1} \text{ etc.};$$

donc en substituant

$$\Sigma^n \varphi x = \int\left(A_{n-1,n}\frac{\Gamma n}{v^n} - A_{n-2,n}\frac{\Gamma(n-1)}{v^{n-1}} + \ldots + (-1)^{n-1} A_{0,n}\frac{1}{v} + (-1)^n.\tfrac{1}{2}\right) e^{vx} fv.dv$$
$$+ 2(-1)^{n-1} \iint_0^{\frac{1}{0}} \frac{P \sin vt.dt}{e^{2\pi t}-1} e^{vx} fv.dv + 2(-1)^{n-1} \iint_0^{\frac{1}{0}} \frac{Q \cos vt.dt}{e^{2\pi t}-1} e^{vx} fv\,.\,dv.$$

De l'équation $\varphi x = \int e^{vx} fv\,.\,dv$ on tire en intégrant:

$$\int \varphi x\,.\,dx = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v},$$

$$\int^2 \varphi x\,.\,dx^2 = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^2},$$

$$\int^3 \varphi x\,.\,dx^3 = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^3} \text{ etc.};$$

de plus on a

$$\int \sin vt\,.\,e^{vx} fv\,.\,dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) - \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$\int \cos vt\,.\,e^{vx} fv\,.\,dv = \frac{\varphi(x + t\sqrt{-1}) + \varphi(x - t\sqrt{-1})}{2},$$

donc on aura en substituant

$$\Sigma^n \varphi x = A_{n-1,n}\Gamma n \int^n \varphi x.dx^n - A_{n-2,n}\Gamma(n-1)\int^{n-1}\varphi x.dx^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}\int \varphi x.dx$$
$$+ (-1)^n.\tfrac{1}{2}\varphi x + 2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{P\,dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$+ 2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{Q\,dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

où

$$P = A_{0,n} - A_{2,n}t^2 + A_{4,n}t^4 - \ldots,$$
$$Q = A_{1,n}t - A_{3,n}t^3 + A_{5,n}t^5 - \ldots.$$

En faisant p. ex. $n=2$, on aura

$$\Sigma^2 \varphi x = \iint \varphi x . dx^2 - \int \varphi x . dx + \tfrac{1}{2} \varphi x - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$-2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}.$$

Soit p. ex. $\varphi x = e^{ax}$, on aura

$$\varphi(x \pm t\sqrt{-1}) = e^{ax} e^{\pm at\sqrt{-1}}, \ \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, \ \iint e^{ax} dx^2 = \frac{1}{a^2} e^{ax},$$

donc, en substituant et divisant par e^{ax},

$$\frac{1}{(e^a-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt.\sin at}{e^{2\pi t}-1} - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt.\cos at}{e^{2\pi t}-1}.$$

Le cas le plus remarquable est celui où $n=1$. On a alors, comme on l'a vu précédemment:

$$\Sigma \varphi x = C + \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2} \varphi x + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En supposant que les deux intégrales $\Sigma \varphi x$ et $\int \varphi x\, dx$ s'annulent pour $x=a$, il est clair qu'on aura:

$$C = \tfrac{1}{2} \varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2}(\varphi x - \varphi a) + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$-2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on fait $x=\infty$, en supposant que φx et $\int \varphi x . dx$ s'annulent pour cette valeur de x, on aura:

$$\varphi a + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \varphi(a+3) + \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x . dx + \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \, \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Soit p. ex. $\varphi x = \frac{1}{x^2}$, on aura

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1}) - \varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{-2at}{(a^2+t^2)^2},$$

donc

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \ldots = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a} + 4a\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(a^2+t^2)^2},$$

et en faisant $a=1$

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = \tfrac{3}{2} + 4\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(1+t^2)^2}.$$

V.

PETITE CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE QUELQUES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Présenté à la société royale des sciences à Throndhjem le 22 mars 1826. Imprimé dans Det kongelige norske Videnskabers Selskabs Skrifter t. 2. Throndhjem 1824—1827.

1.

Considérons l'intégrale

$$p = \int \frac{q\,dx}{x-a},$$

q étant une fonction de x qui ne contient pas a. En différentiant p par rapport à a on trouve

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{q\,dx}{(x-a)^2}.$$

Si maintenant q est choisi tel que $\int \frac{q\,dx}{(x-a)^2}$ puisse être exprimé par l'intégrale $\int \frac{q\,dx}{x-a}$, on trouvera une équation différentielle linéaire entre p et a d'où l'on pourra tirer p en fonction de a. On obtiendra ainsi une relation entre plusieurs intégrales prises les unes par rapport à x, les autres par rapport à a. Comme on est conduit par ce procédé à plusieurs théorèmes intéressants, je vais les développer pour un cas très étendu où la réduction mentionnée de l'intégrale $\int \frac{q\,dx}{(x-a)^2}$ est possible, savoir le cas où l'on a $q = \varphi x . e^{fx}$, fx étant une fonction algébrique rationnelle de x, et φx étant déterminé par l'équation

$$\varphi x = k(x+\alpha)^{\beta}(x+\alpha')^{\beta'}(x+\alpha'')^{\beta''}\ldots\ldots(x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ sont des constantes, $\beta, \beta', \beta'' \ldots$ des nombres rationnels quelconques. Dans ce cas on a

$$p = \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a},$$

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x-a)^2}.$$

2.

La dernière de ces intégrales peut être réduite de deux manières.

a) Si l'on différentie la quantité $\frac{e^{fx}\varphi x}{x-a}$ on trouve

$$-\frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x-a)^2} + \frac{(e^{fx}\varphi' x + e^{fx} f' x . \varphi x)\,dx}{x-a} = d\left(\frac{e^{fx}\varphi x}{x-a}\right).$$

En intégrant cette équation de sorte que les intégrales s'annulent pour $x = c$, on obtient

$$\int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x-a)^2} = \frac{e^{fx}\varphi x}{a-x} - \frac{e^{fc}\varphi c}{a-c} + \int \frac{e^{fx}(\varphi' x + \varphi x . f' x)\,dx}{x-a}.$$

Si l'on différentie l'expression de φx on obtient

$$\varphi' x = \left(\frac{\beta}{x+\alpha} + \frac{\beta'}{x+\alpha'} + \frac{\beta''}{x+\alpha''} + \ldots + \frac{\beta^{(n)}}{x+\alpha^{(n)}}\right)\varphi x = \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{x+\alpha^{(p)}}\varphi x,$$

où la somme doit être étendue aux valeurs $p = 0, 1, 2, 3 \ldots n$. On tire de là

$$\frac{\varphi' x}{x-a} = \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(x-a)}\varphi x;$$

or on a

$$\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(x-a)} = -\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(a+\alpha^{(p)})} + \frac{\beta^{(p)}}{(x-a)(a+\alpha^{(p)})},$$

donc

$$\frac{\varphi' x}{x-a} = -\varphi x\,\Sigma \frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(a+\alpha^{(p)})} + \frac{\varphi x}{x-a}\Sigma \frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}}.$$

Considérons maintenant la quantité $\frac{f' x}{x-a}$. Comme fx est une fonction rationnelle de x on peut faire

$$fx = \Sigma \gamma^{(p)} x^p + \Sigma \frac{\delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}}},$$

la somme étant étendue à toute valeur entière de p, et $\mu^{(p)}$ désignant un nombre entier. En différentiant on obtient

$$f'x = \Sigma p\gamma^{(p)} x^{p-1} - \Sigma \frac{\delta^{(p)} \mu^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}},$$

donc

$$\frac{f'x}{x-a} = \Sigma p\gamma^{(p)} \frac{x^{p-1}}{x-a} - \Sigma \frac{\delta^{(p)} \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}.$$

Or on a

$$\frac{x^{p-1}}{x-a} = x^{p-2} + ax^{p-3} + \ldots + a^{p'} x^{p-p'-2} + \ldots + a^{p-2} + \frac{a^{p-1}}{x-a},$$

donc

$$\Sigma p\gamma^{(p)} \frac{x^{p-1}}{x-a} = \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p'} x^{p-p'-2} + \frac{1}{x-a} \Sigma p\gamma^{(p)} a^{p-1}.$$

Pour réduire l'expression $\Sigma \frac{\delta^{(p)} \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}$ posons

$$\frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x+c} + \frac{A_2}{(x+c)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x+c)^m};$$

si l'on multiplie de part et d'autre par $x-a$, et qu'on fasse ensuite $x=a$, on obtient

$$A = \frac{1}{(a+c)^m}.$$

Pour trouver $A_{p'}$ on multiplie les deux membres de l'équation par $(x+c)^m$,

$$\frac{1}{x-a} = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x+c} + \ldots + \frac{A_{p'-1}}{(x+c)^{p'-1}}\right)(x+c)^m$$
$$+ A_{p'}(x+c)^{m-p'} + A_{p'+1}(x+c)^{m-p'-1} + \ldots,$$

puis on différentie $m-p'$ fois de suite, ce qui donne

$$(-1)^{m-p'} \frac{1.2.3\ldots(m-p')}{(x-a)^{m-p'+1}} = (x+c)R + 1.2.3\ldots(m-p')A_{p'}.$$

En faisant $x=-c$, on tire

$$A_{p'} = -\frac{1}{(a+c)^{m-p'+1}},$$

donc

$$\frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{1}{(a+c)^m(x-a)} - \Sigma \frac{1}{(a+c)^{m-p'+1}(x+c)^{p'}}.$$

En écrivant maintenant $\varepsilon^{(p)}$ au lieu de c, $\mu^{(p)}+1$ au lieu de m, et multipliant par $\mu^{(p)}\delta^{(p)}$ on a

$$\frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} = \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}(x-a)} - \Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}},$$

donc

$$\Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} = \frac{1}{x-a} \Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} - \Sigma\Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

En substituant dans l'expression de $\frac{f'x}{x-a}$ cette valeur, de même que celle trouvée plus haut pour $\Sigma p\gamma^{(p)} \frac{x^{p-1}}{x-a}$, on obtient

$$\frac{f'x}{x-a} = \frac{1}{x-a}\left(\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p-1} - \Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}\right)$$
$$+ \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p'} x^{p-p'-2} + \Sigma\Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par φx, et qu'on remarque que le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ est égal à $f'a$ on a

$$\frac{\varphi x . f'x}{x-a} = \frac{\varphi x . f'a}{x-a} + \varphi x\, \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p'} x^{p-p'-2} + \varphi x\, \Sigma\Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

En y ajoutant la valeur trouvée pour $\frac{\varphi' x}{x-a}$, multipliant ensuite par $e^{fx} dx$ et intégrant, on en tire

$$\int \frac{e^{fx}(\varphi'x + \varphi x . f'x)\,dx}{x-a} = \left(f'a + \frac{\varphi'a}{\varphi a}\right)\int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a} + \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p'} \int e^{fx}\varphi x . x^{p-p'-2}\,dx$$
$$- \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x+\alpha^{(p)}} + \Sigma\Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de $\int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x-a)^2}$ ou $\frac{dp}{da}$, et qu'on écrive p au lieu de $\int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x-a}$, on trouve

$$\frac{dp}{da} - \left(f'a + \frac{\varphi'a}{\varphi a}\right)p = -\frac{e^{fx}\varphi x}{x-a} + \frac{e^{fc}\varphi c}{c-a} + \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)} a^{p'} \int e^{fx}\varphi x . x^{p-p'-2}\,dx \tag{1}$$
$$- \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{x+\alpha^{(p)}} + \Sigma\Sigma \frac{\mu^{(p)}\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}} \int \frac{e^{fx}\varphi x . dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

b) Je vais maintenant exposer la seconde méthode de réduction; mais comme celle-ci est assez longue et compliquée quand fx est une fonction rationnelle quelconque de x, je me bornerai au cas où fx est une fonction entière. On a donc

$$fx = \Sigma \gamma^{(p)} x^p.$$

En différentiant l'expression $\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{x-a}$ où

$$\psi x = (x+\alpha)(x+\alpha')\dots(x+\alpha^{(n)}),$$

on obtient

$$-\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{(x-a)^2}dx + \frac{e^{fx}\varphi x\left[\psi' x + \psi x\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f'x\right)\right]dx}{x-a} = d\left(\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{x-a}\right).$$

Pour réduire cette expression, considérons l'équation

$$\frac{Fx}{x-a} = \frac{F + F'.x + \frac{F''}{2}x^2 + \frac{F'''}{2.3}x^3 + \dots + \frac{F^{(m)}}{2.3\dots m}x^m}{x-a},$$

où F, F', F'' ... désignent les valeurs que prennent Fx, $F'x$, $F''x$... quand on fait $x=0$. On a ainsi

$$\frac{Fx}{x-a} = \Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}\frac{x^p}{x-a} = \frac{\Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}a^p}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}a^{p'}x^{p-p'-1}$$

ou, en remarquant que $\Sigma\frac{F^{(p)}}{2.3\dots p}a^p = Fa$,

$$\frac{Fx}{x-a} = \frac{Fa}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{F^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'}x^p,$$

où l'on a mis $p+p'+1$ au lieu de p. En différentiant cette formule par rapport à a on obtient

$$\frac{Fx}{(x-a)^2} = \frac{Fa}{(x-a)^2} + \frac{F'a}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{p'F^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'-1}x^p.$$

Si dans cette formule on pose $Fx = \psi x$, on a

$$\frac{\psi x}{(x-a)^2} = \frac{\psi a}{(x-a)^2} + \frac{\psi' a}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{(p'+1)\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\dots(p+p'+2)}a^{p'}x^p.$$

En mettant dans la première formule, pour Fx la fonction entière $\psi' x + \psi x\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f'x\right)$, on obtient

$$\frac{\psi' x + \psi x\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f'x\right)}{x-a} = \frac{\psi' a + \psi a\left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f'a\right)}{x-a} + \Sigma\Sigma\frac{\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'}x^p$$
$$+ \Sigma\Sigma\frac{\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'}x^p.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $d\left(\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{x-a}\right)$, on obtient

$$d\left(\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{x-a}\right) = -\psi a\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{(x-a)^2} + \psi a\left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f'a\right)\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{x-a}$$
$$+ \Sigma\Sigma\frac{(p+1)\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\dots(p+p'+2)}a^{p'}e^{fx}\varphi x \,.\, x^p\,dx$$
$$+ \Sigma\Sigma\frac{\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}a^{p'}e^{fx}\varphi x \,.\, x^p\,dx.$$

En intégrant cette équation, divisant de part et d'autre par ψa, et écrivant p au lieu de $\int\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{x-a}$, $\frac{dp}{da}$ au lieu de $\int\frac{e^{fx}\varphi x \,.\, dx}{(x-a)^2}$, on trouve

$$\frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f'a\right)p = \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{\psi a(a-x)} - \frac{e^{fc}\varphi c \,.\, \psi c}{\psi a(a-c)}$$
$$+ \Sigma\Sigma\frac{(p+1)\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\dots(p+p'+2)}\frac{a^{p'}}{\psi a}\int e^{fx}\varphi x \,.\, x^p\,dx$$
$$+ \Sigma\Sigma\frac{\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}\frac{a^{p'}}{\psi a}\int e^{fx}\varphi x \,.\, x^p\,dx,$$

ou bien

(2)
$$\frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f'a\right)p = \frac{e^{fx}\varphi x \,.\, \psi x}{\psi a(a-x)} - \frac{e^{fc}\varphi c \,.\, \psi c}{\psi a(a-c)} + \Sigma\Sigma\varphi(p, p')\frac{a^{p'}}{\psi a}\int e^{fx}\varphi x \,.\, x^p\,dx$$
$$\text{où}\quad \varphi(p, p') = \frac{(p+1)\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\dots(p+p'+2)} + \frac{\left(\psi\frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{2.3\dots(p+p'+1)}.$$

3.

Les équations (1) et (2) deviennent immédiatement intégrables quand on les multiplie par $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$; on obtient de cette manière, en remarquant qu'on a

$$\int\left(dp - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f'a\right)p\,da\right)\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = \frac{pe^{-fa}}{\varphi a},$$

les deux formules suivantes:

$$\begin{aligned}\frac{pe^{-fa}}{\varphi a} &= e^{fx}\varphi x\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)\varphi a}-e^{fc}\varphi c\int\frac{e^{-fa}da}{(a-c)\varphi a}\\ &+\Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x.x^{p-p'-2}dx-\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x+\alpha^{(p)}}\\ &+\Sigma\Sigma\mu^{(p)}\delta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}+C(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{pe^{-fa}}{\varphi a} &= e^{fx}\varphi x.\psi x\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)\varphi a.\psi a}-e^{fc}\varphi c.\psi c\int\frac{e^{-fa}da}{(a-c)\varphi a.\psi a}\\ &+\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a.\psi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x.x^{p}dx+C(x).\end{aligned}$$

La quantité c étant arbitraire, nous ferons dans la première formule $e^{fc}\varphi c=0$, dans la seconde $e^{fc}\varphi c.\psi c=0$. Si de plus on suppose que les intégrales prises par rapport à a s'annulent pour $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}=0$, on voit aisément qu'on a $C(x)=0$; on obtient ainsi, en remettant pour p sa valeur $\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x-a}$, les deux formules suivantes:

$$\begin{aligned}\frac{e^{-fa}}{\varphi a}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x-a}-e^{fx}\varphi x\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)\varphi a} &= \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x.x^{p-p'-2}dx\\ &-\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x+\alpha^{(p)}}\\ &+\Sigma\Sigma\mu^{(p)}\delta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}};\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\frac{e^{-fa}}{\varphi a}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x-a}-e^{fx}\varphi x.\psi x\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)\varphi a.\psi a}\\ &\qquad=\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a.\psi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x.x^{p}dx.\end{aligned}\tag{4}$$

Si dans la première de ces formules, fx est une fonction entière, on a $\delta^{(p)}=0$, donc

$$\begin{aligned}&\frac{e^{-fa}}{\varphi a}\int\frac{e^{fx}\varphi x.dx}{x-a}-e^{fx}\varphi x.\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)\varphi a}\\ &\qquad=\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x.x^{p}dx\\ &\qquad-\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\varphi x\,dx}{x+\alpha^{(p)}}.\end{aligned}\tag{5}$$

4.

Je vais maintenant appliquer les formules générales à quelques cas spéciaux.

a) Si l'on fait $\varphi a=1$, la formule (3) donne

$$\begin{aligned}e^{-fa}\int\frac{e^{fx}dx}{x-a}-e^{fx}\int\frac{e^{-fa}da}{a-x} &= \Sigma\Sigma p\gamma^{(p)}\int e^{-fa}a^{p'}da.\int e^{fx}x^{p-p'-2}dx.\\ &+\Sigma\Sigma\mu^{(p)}\delta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\cdot\int\frac{e^{fx}dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.\end{aligned}$$

Si de plus fx est une fonction entière, on a $\delta^{(p)}=0$; dans ce cas la formule devient

$$e^{-fa}\int\frac{e^{fx}dx}{x-a}-e^{fx}\int\frac{e^{-fa}da}{a-x}=\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int e^{-fa}a^{p'}da.\int e^{fx}x^{p}dx.\tag{6}$$

En développant le second membre, on obtient

$$\begin{aligned}e^{-fa}\int\frac{e^{fx}dx}{x-a}-e^{fx}\int\frac{e^{-fa}da}{a-x} &= 2\gamma^{(2)}\int e^{-fa}da.\int e^{fx}dx\\ &+3\gamma^{(3)}\left(\int e^{-fa}a\,da.\int e^{fx}dx+\int e^{-fa}da.\int e^{fx}x\,dx\right)\\ &+4\gamma^{(4)}\left(\int e^{-fa}a^{2}da\int e^{fx}dx+\int e^{-fa}a\,da.\int e^{fx}x\,dx\right.\\ &\qquad\left.+\int e^{-fa}da.\int e^{fx}x^{2}dx\right)\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+n\gamma^{(n)}\left(\int e^{-fa}a^{n-2}da.\int e^{fx}dx+\int e^{-fa}a^{n-3}da.\int e^{fx}x\,dx+\dots\right.\\ &\qquad\left.+\int e^{-fa}da.\int e^{fx}x^{n-2}dx\right).\end{aligned}$$

Si par exemple $fx=x^{n}$, on a $\gamma^{(2)}=\gamma^{(3)}=\dots=\gamma^{(n-1)}=0$, $\gamma^{(n)}=1$; la formule ci-dessus devient

$$\begin{aligned}e^{-a^{n}}\int\frac{e^{x^{n}}dx}{x-a}-e^{x^{n}}\int\frac{e^{-a^{n}}da}{a-x} &= n\left(\int e^{-a^{n}}a^{n-2}da.\int e^{x^{n}}dx\right.\\ &\left.+\int e^{-a^{n}}a^{n-3}da.\int e^{x^{n}}x\,dx+\dots+\int e^{-a^{n}}da.\int e^{x^{n}}x^{n-2}dx\right);\end{aligned}$$

par exemple pour $n=2$, $n=3$, on a respectivement

$$e^{-a^{2}}\int\frac{e^{x^{2}}dx}{x-a}-e^{x^{2}}\int\frac{e^{-a^{2}}da}{a-x}=2\int e^{-a^{2}}da.\int e^{x^{2}}dx,$$

$$e^{-a^{3}}\int\frac{e^{x^{3}}dx}{x-a}-e^{x^{3}}\int\frac{e^{-a^{3}}da}{a-x}=3\left(\int e^{-a^{3}}a\,da.\int e^{x^{3}}dx+\int e^{-a^{3}}da.\int e^{x^{3}}x\,dx\right).$$

b) Posons maintenant dans la formule (3) $fx=0$, nous aurons

$$(7)\qquad \varphi x\int\frac{da}{(a-x)\varphi a}-\frac{1}{\varphi a}\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x-a}=\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}},$$

ou bien, en développant le second membre,

$$\varphi x\int\frac{da}{(a-x)\varphi a}-\frac{1}{\varphi a}\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x-a}=\beta\int\frac{da}{(a+\alpha)\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha}$$
$$+\beta'\int\frac{da}{(a+\alpha')\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha'}+\ldots+\beta^{(n)}\int\frac{da}{(a+\alpha^{(n)})\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(n)}}$$

où il faut se rappeler qu'on a

$$\varphi x=(x+\alpha)^{\beta}(x+\alpha')^{\beta'}\ldots\ldots(x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$
$$\varphi a=(a+\alpha)^{\beta}(a+\alpha')^{\beta'}\ldots\ldots(a+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}.$$

c) En faisant dans la formule (4) $fx=0$, on obtient

$$(8)\qquad \frac{1}{\varphi a}\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x-a}-\varphi x\,.\,\psi x\int\frac{da}{(a-x)\varphi a\,.\,\psi a}=\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{a^{p'}da}{\varphi a\,.\,\psi a}\cdot\int\varphi x\,.\,x^{p}\,dx$$

$$\text{où}\quad \varphi(p,p')=\frac{(p+1)\,\psi^{(p+p'+2)}}{2\,.\,3\ldots(p+p'+2)}+\frac{\left(\psi\,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)}}{2\,.\,3\ldots(p+p'+1)},$$
$$\psi x=(x+\alpha)(x+\alpha')\ldots\ldots(x+\alpha^{(n)}).$$

d) Posons dans la formule (8) $\beta=\beta'=\ldots=\beta^{(n)}=m$, nous aurons

$$\varphi x=(\psi x)^{m},\qquad \varphi x\,.\,\psi x=(\psi x)^{m+1},$$
$$\varphi' x=m(\psi x)^{m-1}\psi' x,\quad \frac{\psi x\,.\,\varphi' x}{\varphi x}=m\psi' x,$$
$$\left(\psi\,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)}=m\,\psi^{(p+p'+2)};$$

donc en posant

$$\psi x=k+k'x+k''x^{2}+\ldots+k^{(n)}x^{n},$$

nous avons

$$\varphi(p,p')=\frac{(p+1+m(p+p'+2))\,\psi^{(p+p'+2)}}{2\,.\,3\ldots(p+p'+2)}=\big(p+1+m(p+p'+2)\big)\,k^{(p+p'+2)}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$(9)\qquad \frac{1}{(\psi a)^{m}}\int\frac{(\psi x)^{m}dx}{x-a}-(\psi x)^{m+1}\int\frac{da}{(a-x)\,(\psi a)^{m+1}}$$
$$=\Sigma\Sigma k^{(p+p'+2)}\big(p+1+m(p+p'+2)\big)\int\frac{a^{p'}da}{(\psi a)^{m+1}}\cdot\int(\psi x)^{m}x^{p}\,dx.$$

Le cas où $m=-\frac{1}{2}$ a cela de remarquable, que les intégrales par rapport à x et à a prennent la même forme; en effet on a

$$(\psi a)^{m+1}=(\psi a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\psi a},\ \ \frac{1}{(\psi a)^{m}}=\sqrt{\psi a},$$

donc

$$\sqrt{\psi a}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}}-\sqrt{\psi x}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{\psi a}}=\tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma(p-p')\,k^{(p+p'+2)}\int\frac{a^{p'}da}{\sqrt{\psi a}}\cdot\int\frac{x^{p}dx}{\sqrt{\psi x}}.$$

Si l'on suppose, par exemple que $\psi x=1+\alpha x^{n}$, on a $k^{(n)}=\alpha$; $k^{(p+p'+2)}$ sera égal à zéro, à moins que $p+p'+2=n$, c'est-à-dire que $p=n-p'-2$; donc

$$\sqrt{1+\alpha a^{n}}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+\alpha x^{n}}}-\sqrt{1+\alpha x^{n}}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1+\alpha a^{n}}}$$
$$=\frac{\alpha}{2}\,\Sigma\,(n-2p'-2)\int\frac{a^{p'}da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{x^{n-p'-2}dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}.$$

En développant le second membre, on a

$$\sqrt{1+\alpha a^{n}}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+\alpha x^{n}}}-\sqrt{1+\alpha x^{n}}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1+\alpha a^{n}}}$$
$$=\frac{\alpha}{2}(n-2)\left[\int\frac{da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}-\int\frac{a^{n-2}da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}\right]$$
$$+\frac{\alpha}{2}(n-4)\left[\int\frac{a\,da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{x^{n-3}dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}-\int\frac{a^{n-3}da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}\right]$$
$$+\frac{\alpha}{2}(n-6)\left[\int\frac{a^{2}da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{x^{n-4}dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}-\int\frac{a^{n-4}da}{\sqrt{1+\alpha a^{n}}}\cdot\int\frac{x^{2}dx}{\sqrt{1+\alpha x^{n}}}\right]$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par exemple si $n=3$, on a

$$\sqrt{1+\alpha a^{3}}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1+\alpha x^{3}}}-\sqrt{1+\alpha x^{3}}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{1+\alpha a^{3}}}$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left[\int\frac{da}{\sqrt{1+\alpha a^{3}}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\alpha x^{3}}}-\int\frac{a\,da}{\sqrt{1+\alpha a^{3}}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^{3}}}\right].$$

Comme second exemple je prends

$$\psi x=(1-x^{2})(1-\alpha x^{2});$$

alors on a $k=1$, $k'=0=k'''$, $k''=-(1+\alpha)$, $k''''=\alpha$. Si l'on écrit $-a$ pour a, la formule devient

$$\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}\int\frac{dx}{(x+a)\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$-\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}\int\frac{da}{(a+x)\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}$$
$$=\alpha\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}\cdot\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$-\alpha\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}.$$

En posant

$$x=\sin\varphi,\quad a=\sin\psi,$$

on a

$$\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}=\cos\varphi\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi},$$
$$\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}=\cos\psi\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}},$$
$$\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}},$$
$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}=\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}},$$
$$\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}}=\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$\cos\psi\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}\int\frac{d\varphi}{(\sin\varphi+\sin\psi)\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}}$$
$$-\cos\varphi\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}\int\frac{d\psi}{(\sin\psi+\sin\varphi)\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}$$
$$=\alpha\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}\cdot\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}}-\alpha\int\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\psi}}\cdot\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha\sin^2\varphi}}.$$

Cette formule répond à celle que M. *Legendre* a donnée dans ses Exercices de calcul intégral t. I p. 136, et elle peut en être déduite.

e) Si dans la formule (5) on pose $fx=x$, on obtient

$$(10)\qquad \frac{e^{-a}}{\varphi a}\int\frac{e^x\varphi x\,dx}{x-a}-e^x\varphi x\int\frac{e^{-a}da}{(a-x)\varphi a}=-\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-a}da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^x\varphi x.dx}{x+\alpha^{(p)}},$$

d'où en développant le second membre on tire

$$e^x\varphi x\int\frac{e^{-a}da}{(a-x)\varphi a}-\frac{e^{-a}}{\varphi a}\int\frac{e^x\varphi x.dx}{x-a}=\beta\int\frac{e^{-a}da}{(a+\alpha)\varphi a}\cdot\int\frac{e^x\varphi x.dx}{x+\alpha}$$
$$+\beta'\int\frac{e^{-a}da}{(a+\alpha')\varphi a}\cdot\int\frac{e^x\varphi x.dx}{x+\alpha'}+\cdots+\beta^{(n)}\int\frac{e^{-a}da}{(a+\alpha^{(n)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^x\varphi x.dx}{x+\alpha^{(n)}}.$$

Par exemple si $\varphi x=\sqrt{x^2-1}$, on a $\beta=\beta'=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$, $\alpha'=-1$, donc

$$e^x\sqrt{x^2-1}\int\frac{e^{-a}da}{(a-x)\sqrt{a^2-1}}-\frac{e^{-a}}{\sqrt{a^2-1}}\int\frac{e^x dx\sqrt{x^2-1}}{x-a}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{e^{-a}da}{(a+1)\sqrt{a^2-1}}\cdot\int\frac{e^x dx\sqrt{x^2-1}}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{e^{-a}da}{(a-1)\sqrt{a^2-1}}\cdot\int\frac{e^x dx\sqrt{x^2-1}}{x-1}.$$

f) En posant dans la formule (4) $\beta=\beta'=\beta''=\ldots=\beta^{(n)}=m$, on a $\varphi x=(\psi x)^m$, $\varphi x.\psi x=(\psi x)^{m+1}$, donc

$$(11)\qquad \frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m}\int\frac{e^{fx}(\psi x)^m dx}{x-a}-e^{fx}(\psi x)^{m+1}\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}}$$
$$=\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{(\psi a)^{m+1}}\cdot\int e^{fx}(\psi x)^m x^p dx.$$

Or on trouve

$$\varphi(p,p')=\frac{f^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+1)}+\big(p+1+m(p+p'+2)\big)\frac{\psi^{(p+p'+2)}}{2.3\ldots(p+p'+2)};$$

donc, en faisant

$$fx=\gamma+\gamma'x+\gamma''x^2+\cdots+\gamma^{(n')}x^{n'},$$
$$\psi x=k+k'x+k''x^2+\cdots+k^{(n)}x^n,$$

on a

$$\varphi(p,p')=(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}+\big(p+1+m(p+p'+2)\big)k^{(p+p'+2)}.$$

Par conséquent on a

$$\frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m}\int\frac{e^{fx}(\psi x)^m dx}{x-a}-e^{fx}(\psi x)^{m+1}\int\frac{e^{-fa}da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}}$$
$$(12)\qquad =\Sigma\Sigma\Big[(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}$$
$$+\big(p+1+m(p+p'+2)\big)k^{(p+p'+2)}\Big]\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{(\psi a)^{m+1}}\cdot\int e^{fx}(\psi x)^m x^p dx.$$

Si l'on fait $m = -\frac{1}{2}$, on trouve

$$e^{-fa}\sqrt{\psi a}\int\frac{e^{fx}\,dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}} - e^{fx}\sqrt{\psi x}\int\frac{e^{-fa}\,da}{(a-x)\sqrt{\psi a}}$$
$$= \Sigma\Sigma\left[(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)} + \tfrac{1}{2}(p-p')k^{(p+p'+2)}\right]\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\sqrt{\psi a}}\int\frac{e^{fx}x^{p}\,dx}{\sqrt{\psi x}}.$$

Soit par exemple $fx = x$ et $\psi x = 1 - x^2$, on a

$$\gamma^{(p+p'+2)} = 0,\quad \tfrac{1}{2}(p-p')k^{(p+p'+2)} = 0,$$

donc

$$e^{-a}\sqrt{1-a^2}\int\frac{e^{x}\,dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = e^{x}\sqrt{1-x^2}\int\frac{e^{-a}\,da}{(a-x)\sqrt{1-a^2}}.$$

En écrivant $-a$ au lieu de a, on obtient

$$e^{a}\sqrt{1-a^2}\int\frac{e^{x}\,dx}{(x+a)\sqrt{1-x^2}} = e^{x}\sqrt{1-x^2}\int\frac{e^{a}\,da}{(a+x)\sqrt{1-a^2}};$$

en posant $x = \sin\varphi$, et $a = \sin\psi$, on trouve

$$\cos\psi\, e^{\sin\psi}\int\frac{e^{\sin\varphi}\,d\varphi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \cos\varphi\, e^{\sin\varphi}\int\frac{e^{\sin\psi}\,d\psi}{\sin\psi + \sin\varphi},$$

les intégrales devant s'annuler pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Je vais maintenant faire une autre application des équations générales. Nous avons jusqu'à présent regardé x et a comme des indéterminées, sans nous occuper des valeurs spéciales de ces quantités qui simplifieraient les formules. Nous allons maintenant chercher de telles valeurs.

a) Considérons en premier lieu l'équation (5). Le premier membre de cette équation contient deux intégrales, mais comme chacune d'elles est multipliée par une quantité dépendant respectivement de a et de x, il est clair qu'on peut donner à ces quantités des valeurs telles, que les intégrales disparaissent, ou l'une, ou toutes les deux, pourvu seulement que chacune des équations $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, $e^{fx}\varphi x = 0$, ait au moins deux racines différentes; car nous avons déjà supposé que les intégrales s'annulent pour des valeurs de x et de a qui satisfont à ces équations.

Supposons d'abord $e^{fx}\varphi x = 0$, nous aurons après avoir multiplié par $e^{fa}\varphi a$,

$$\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a} = e^{fa}\varphi a\,\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^{p}\,dx$$
$$(13)\qquad - e^{fa}\varphi a\,\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}}$$
$$(x = x',\ x = x'',\ a = a'),$$

les équations entre parenthèses indiquant les limites entre lesquelles les intégrales doivent être prises; ces limites doivent satisfaire aux équations

$$e^{fx'}\varphi x' = 0,\quad e^{fx''}\varphi x'' = 0;\quad \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'} = 0.$$

De la formule précédente découle le théorème suivant:

"La valeur de l'intégrale $\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a}$, entre des limites qui annulent la "fonction $e^{fx}\varphi x$ peut être exprimée par des intégrales des formes suivantes:

$$\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^{p}\,dx,\quad \int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a},\quad \int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}},\quad \int\frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a},$$

"les intégrales par rapport à x étant prises entre les mêmes limites que la "première intégrale."

Ce théorème a cela de remarquable, que la même réduction est impossible, quand l'intégrale $\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a}$ est prise entre des limites indéterminées.

En posant $fx = 0$, on obtient

$$(14)\qquad \int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x-a} = -\varphi a\,\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}}$$
$$(x = x',\ x = x'',\ a = a').$$

Si l'on pose $\varphi x = 1$, on aura

$$(15)\qquad \int\frac{e^{fx}\,dx}{x-a} = e^{fa}\,\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int e^{-fa}a^{p'}\,da\,.\int e^{fx}x^{p}\,dx.$$
$$(x = x',\ x = x'',\ a = a').$$

Supposons maintenant qu'on donne en même temps à a une valeur qui annule la quantité $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$, et soit a'' cette valeur, la formule (13) donnera

$$\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-fa}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}}$$
$$(16)\qquad = \Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^{p}\,dx.$$
$$(x = x',\ x = x'';\ a = a',\ a = a'').$$

En supposant $fx = kx$, on en tire

(17) $$\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{e^{-ka}\,da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{e^{kx}\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}}=0$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

En faisant $k=0$, on obtient

(18) $$\Sigma\beta^{(p)}\int\frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\,.\,dx}{x+\alpha^{(p)}}=0$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

Posons par exemple $\varphi x=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)}$, on a

$\beta=\beta'=\frac{1}{2};\ \alpha=-1,\ \alpha'=1;\ x'=1,\ x''=-1;\ a'=\infty,\ a''=-\infty;$

donc

$$\int\frac{da}{(a-1)\sqrt{a^2-1}}\cdot\int\frac{dx\sqrt{x^2-1}}{x-1}+\int\frac{da}{(a+1)\sqrt{a^2-1}}\cdot\int\frac{dx\sqrt{x^2-1}}{x+1}=0$$
$$(x'=1,\ x''=-1;\ a'=+\infty,\ a''=-\infty),$$

ce qui a lieu en effet, car on a

$$\int\frac{da}{(a-1)\sqrt{a^2-1}}=-\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}=0\quad(a'=+\infty,\ a''=-\infty),$$
$$\int\frac{da}{(a+1)\sqrt{a^2-1}}=-\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}=0\quad(a'=+\infty,\ a''=-\infty).$$

Si dans la formule (16) on fait $\varphi x=1$, on obtient

(19) $$\Sigma\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\int e^{-fa}a^{p'}da\,.\int e^{fx}x^p dx=0$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

b) Considérons en second lieu la formule (4). En supposant $e^{fx}\varphi x\,.\,\psi x=0$, on trouve après avoir multiplié par $e^{fa}\varphi a$

(20) $$\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a}=e^{fa}\varphi a\,\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a\,.\,\psi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^p\,dx$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a'),$$

où l'on a

$$e^{fx'}\varphi x'\,.\,\psi x'=0,\ e^{fx''}\varphi x''\,.\,\psi x''=0,\ \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'}=0.$$

Cette formule se traduit en théorème comme suit:

"La valeur de l'intégrale $\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a}$, prise entre des limites qui annu-"lent la quantité $e^{fx}\varphi x\,.\,\psi x$, peut être exprimée par des intégrales de ces "formes: $\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{\varphi a\,.\,\psi a}$, $\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^p\,dx$."

Pour des valeurs indéterminées de x au contraire, cette réduction de $\int\frac{e^{fx}\varphi x\,.\,dx}{x-a}$ est impossible.

En faisant $\beta=\beta'=\ldots=\beta^{(n)}=m$, on obtient la formule suivante

(21) $$\int\frac{e^{fx}(\psi x)^m dx}{x-a}=e^{fa}(\psi a)^m\,\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}da}{(\psi a)^{m+1}}\cdot\int e^{fx}(\psi x)^m x^p\,dx$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a'),$$

où

$$\psi x=(x+\alpha)(x+\alpha')\ldots(x+\alpha^{(n)}).$$

Si de plus on suppose $fx=0$, on obtient

(22) $$\int\frac{(\psi x)^m dx}{x-a}=(\psi a)^m\,\Sigma\Sigma\varphi(p,p')\int\frac{a^{p'}da}{(\psi a)^{m+1}}\cdot\int(\psi x)^m x^p\,dx$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a').$$

On a donc le théorème suivant, qui n'est qu'un cas spécial du précédent:

"La valeur de l'intégrale $\int\frac{(\psi x)^m dx}{x-a}$, prise entre des limites qui satis-"font à l'équation $(\psi x)^{m+1}=0$, peut être exprimée par des intégrales des "formes $\int\frac{a^{p'}da}{(\psi a)^{m+1}}$, $\int(\psi x)^m x^p\,dx$, ψx étant une fonction entière de x."

En faisant $m=-\frac{1}{2}$, on obtient

(23) $$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}}=\frac{1}{2\sqrt{\psi a}}\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}\int\frac{a^{p'}da}{\sqrt{\psi a}}\cdot\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{\psi x}}$$
$$(x=x',\ x=x'';\ a=a'),$$

d'où le théorème suivant:

"La valeur de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\psi x}}$, prise entre des limites qui annu-

"lent la fonction ψx, peut être exprimée par dés intégrales de la for-
"me $\int \frac{x^p\, dx}{\sqrt{\psi x}}$."

Faisons par exemple $\psi x = (1-x^2)(1-\alpha x^2)$, nous aurons $x' = 1$, $x' = -1$, $x' = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $x' = -\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$; $a^k = 1, -1, \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, -\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$; donc

$$\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$= \alpha \int \frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}} \cdot \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$
$$- \alpha \int \frac{a^2\, da}{\sqrt{(1-a^2)(1-\alpha a^2)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}$$

$$\left(x = 1,\ x = -1;\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}}\right)$$
$$\left(x = 1,\ x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}};\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}}\right)$$
$$\left(x = -1,\ x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}};\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}}\right)$$
$$\left(x = \sqrt{\tfrac{1}{\alpha}},\ x = -\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}};\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}}\right).$$

Si dans la formule (22) on suppose $\psi x = 1 - x^{2n}$, on trouve

$$\int \frac{(1-x^{2n})^m\, dx}{x-a} = (1-a^{2n})^m\, \Sigma\Sigma\, \varphi(p,p') \int (1-x^{2n})^m x^p\, dx \cdot \int \frac{a^{p'}\, da}{(1-a^{2n})^{m+1}}$$
$$(x = 1,\ x = -1,\ a = 1),$$

où $m+1$ doit être moindre que l'unité, c'est-à-dire que $m < 0$. On a

$$\varphi(p,p') = \big(p + 1 + m(p+p'+2)\big)\, k^{(p+p'+2)}:$$

puisque $k^{(p+p'+2)} = 0$, à moins que $p + p' + 2 = 2n$, et comme $k^{2n} = -1$, on en tire

$$\varphi(p,p') = -(p + 1 + 2mn).$$

L'intégrale $\int (1-x^{2n})^m x^p\, dx$ peut être exprimée par la fonction Γ. On a en effet

$$\int_{+1}^{-1} (1-x^{2n})^m x^p\, dx = -\int_0^1 (1-x^{2n})^m x^p\, dx + \int_0^{-1} (1-x^{2n})^m x^p\, dx.$$

Mais on a

$$\int_0^{-1} (1-x^{2n})^m x^p\, dx = (-1)^{p+1} \int_0^1 (1-x^{2n})^m x^p\, dx,$$

comme on le voit en mettant $-x$ au lieu de x. Donc

$$\int_{+1}^{-1} (1-x^{2n})^m x^p\, dx = \big((-1)^{p+1} - 1\big) \int_0^1 (1-x^{2n})^m x^p\, dx,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\int_{+1}^{-1} (1-x^{2n})^m x^{2p}\, dx = -2 \int_0^1 (1-x^{2n})\, x^{2p}\, dx,$$
$$\int_{+1}^{-1} (1-x^{2n})^m x^{2p+1}\, dx = 0.$$

Or on déduit aisément d'une formule connue (*Legendre* Exercices de calcul intégral t. I p. 279) l'équation suivante

$$\int_0^1 (1-x^{2n})^m x^{2p}\, dx = \frac{\Gamma(m+1)\, \Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{2n\, \Gamma\left(m + 1 + \frac{1+2p}{2n}\right)};$$

on a donc

$$\int_{+1}^{-1} (1-x^{2n})^m x^{2p}\, dx = -\frac{\Gamma(m+1)\, \Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{n\, \Gamma\left(m + 1 + \frac{1+2p}{2n}\right)}.$$

En substituant cette valeur, et écrivant ensuite $-m$ pour m, on obtient

$$(24) \int \frac{dx}{(x-a)(1-x^{2n})^m} = \frac{\Gamma(-m+1)}{n(1-a^{2n})^m}\, \Sigma (2p + 1 - 2mn)\, \frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(-m + 1 + \frac{1+2p}{2n}\right)} \int \frac{a^{2n-2p-2}\, da}{(1-a^{2n})^{1-m}}$$
$$(x = 1,\ x = -1;\ a = 1).$$

Si l'on fait $m = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{n\sqrt{1-a^{2n}}}\, \Sigma (2p + 1 - n)\, \frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+2p}{2n}\right)} \int \frac{a^{2n-2p-2}\, da}{\sqrt{1-a^{2n}}}$$
$$(x = 1,\ x = -1;\ a = 1,\ a = a).$$

Par exemple si $n=3$, on trouve

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^6}}=-\tfrac{2}{3}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})\sqrt{1-a^6}}\int\frac{a^4\,da}{\sqrt{1-a^6}}+\tfrac{2}{3}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})\sqrt{1-a^6}}\int\frac{da}{\sqrt{1-a^6}}$$

$$(x=1,\ x=-1;\ a=1).$$

Or on a $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, en substituant cette valeur on obtient

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^6}}=-\tfrac{2}{3}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-a^6}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\int\frac{a^4\,da}{\sqrt{1-a^6}}+\tfrac{2}{3}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-a^6}}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})}\int\frac{da}{\sqrt{1-a^6}}$$

$$(x=1,\ x=-1;\ a=1).$$

Dans ce qui précède nous avons supposé $e^{fx}\varphi x\,.\,\psi x=0$; supposons maintenant qu'on ait en même temps $\dfrac{e^{-fa}}{\varphi a}=0$, et désignons par a'' une valeur de a qui satisfait à cette condition. L'équation (4) devient dans ce cas:

$$\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int\frac{e^{-fa}a^{p'}\,da}{\varphi a\,.\,\psi a}\cdot\int e^{fx}\varphi x\,.\,x^p\,dx=0 \tag{25}$$

$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

Si $fx=0$, on a

$$\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int\frac{a^{p'}\,da}{\varphi a\,.\,\psi a}\cdot\int\varphi x\,.\,x^p\,dx=0 \tag{26}$$

$$(x=x',\ x=x'';\ a=a',\ a=a'').$$

Supposons que β, β', β''… soient négatifs, mais que leurs valeurs absolues soient moindres que l'unité, nous aurons $\varphi x\,.\,\psi x=0$ pour $x=-\alpha^{(p)}$, et $\dfrac{1}{\varphi a}=0$ pour $a=-\alpha^{(q)}$. On obtient ainsi la formule suivante

$$\Sigma\Sigma\,\varphi(p,p')\int\frac{a^{p'}\,da}{\psi a}\cdot\int\frac{x^p\,dx}{\varphi x}=0 \tag{27}$$

$$(x=-\alpha^{(p)},\ x=-\alpha^{(p')};\ a=-\alpha^{(q)},\ a=-\alpha^{(q')}),$$

où l'on a fait

$$\varphi x=(x+\alpha)^{\beta}(x+\alpha')^{\beta'}(x+\alpha'')^{\beta''}\ldots.$$
$$\psi a=(a+\alpha)^{1-\beta}(a+\alpha')^{1-\beta'}(a+\alpha'')^{1-\beta''}\ldots,$$

β, β', β''… étant positifs et moindres que l'unité.

En faisant $\beta=\beta'=\beta''=\cdots=\frac{1}{2}$, on obtient

$$\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}\int\frac{a^{p'}\,da}{\sqrt{\varphi a}}\cdot\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{\varphi x}}=0 \tag{28}$$

$$(x=-\alpha^{(p)},\ x=-\alpha^{(p')};\ a=-\alpha^{(q)},\ a=-\alpha^{(q')}).$$

Dans cette formule on a

$$\varphi x=(x+\alpha)(x+\alpha')(x+\alpha'')\cdots=k+k'x+k''x^2+\cdots$$

Par exemple si l'on pose $\varphi x=(1-x)(1+x)(1-cx)(1+cx)$, on a $\alpha=1$, $\alpha'=-1$, $\alpha''=\dfrac{1}{c}$, $\alpha'''=-\dfrac{1}{c}$, donc

$$\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=\int\frac{a^2\,da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

$$\left(x=1,\ x=-1;\ a=1,\ a=-1\right) \qquad (1)$$
$$\left(x=1,\ x=-1;\ a=1,\ a=\frac{1}{c}\right) \qquad (2)$$
$$\left(x=1,\ x=-1;\ a=1,\ a=-\frac{1}{c}\right) \qquad (3)$$
$$\left(x=1,\ x=-1;\ a=\frac{1}{c},\ a=-\frac{1}{c}\right) \qquad (4)$$
$$\left(x=1,\ x=\frac{1}{c};\ a=1,\ a=\frac{1}{c}\right) \qquad (5)$$
$$\left(x=1,\ x=\frac{1}{c};\ a=1,\ a=-\frac{1}{c}\right) \qquad (6)$$
$$\left(x=1,\ x=\frac{1}{c};\ a=\frac{1}{c},\ a=-\frac{1}{c}\right) \qquad (7)$$
$$\left(x=\frac{1}{c},\ x=-\frac{1}{c};\ a=\frac{1}{c},\ a=-\frac{1}{c}\right) \qquad (8)$$

Désignons par Fx la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ prise depuis $x=0$, et par Ex celle de $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$ depuis $x=0$, nous aurons

$$\int_{\alpha}^{\alpha'}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=F\alpha'-F\alpha,$$
$$\int_{\alpha}^{\alpha'}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}=E\alpha'-E\alpha.$$

En substituant ces valeurs, on aura la formule suivante

$$F(1)\,E\left(\frac{1}{c}\right)=E(1)\,F\left(\frac{1}{c}\right).$$

On n'obtient pas d'autres relations quel que soit le système de limites qu'on emploie, excepté seulement les systèmes qui donnent des identités, savoir le 1er, le 5ième et le 8ième.

Si l'on désigne en général par $F(p,x)$ la valeur de l'intégrale $\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{\varphi x}}$ prise d'une limite inférieure arbitraire, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha'}\frac{x^p\,dx}{\sqrt{\varphi x}}=F(p,\alpha')-F(p,\alpha).$$

En substituant cette valeur dans la formule (28), on obtient la suivante:

$$(29)\quad \begin{aligned}&\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha)F(p',\alpha')+\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha'')F(p',\alpha''')\\ &=\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha)F(p',\alpha''')+\Sigma\Sigma(p-p')k^{(p+p'+2)}F(p,\alpha'')F(p',\alpha').\end{aligned}$$

De cette formule on peut en déduire beaucoup d'autres plus spéciales en supposant φx paire ou impaire, mais pour ne pas m'étendre trop au long je les passe sous silence.

Il faut se rappeler que α, α', α'', α''' peuvent désigner des racines quelconques de l'équation $\varphi x=0$. On peut aussi supposer $\alpha=\alpha'$, $\alpha''=\alpha'''$.

VI.

RECHERCHE DES FONCTIONS DE DEUX QUANTITÉS VARIABLES INDÉPENDANTES x ET y, TELLES QUE $f(x,y)$, QUI ONT LA PROPRIÉTÉ QUE $f(z,f(x,y))$ EST UNE FONCTION SYMÉTRIQUE DE z, x ET y.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

Si l'on désigne p. ex. les fonctions $x+y$ et xy par $f(x,y)$, on a pour la première, $f(z,f(x,y))=z+f(x,y)=z+x+y$, et pour la seconde, $f(z,f(x,y))=zf(x,y)=zxy$. La fonction $f(x,y)$ a donc dans l'un et l'autre cas la propriété remarquable que $f(z,f(x,y))$ est une fonction symétrique des trois variables indépendantes z, x et y. Je vais chercher dans ce mémoire la forme générale des fonctions qui jouissent de cette propriété.

L'équation fondamentale est celle-ci:

$$(1)\qquad f(z,f(x,y)) = \text{une fonction symétrique de } x,\ y \text{ et } z.$$

Une fonction symétrique reste la même lorsqu'on y échange entre elles d'une manière quelconque, les quantités variables dont elle dépend. On a donc les équations suivantes:

$$(2)\qquad \begin{aligned}f(z,f(x,y))&=f(z,f(y,x)),\\ f(z,f(x,y))&=f(x,f(z,y)),\\ f(z,f(x,y))&=f(x,f(y,z)),\\ f(z,f(x,y))&=f(y,f(x,z)),\\ f(z,f(x,y))&=f(y,f(z,x)).\end{aligned}$$

La première équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$f(x, y) = f(y, x),$$

c'est-à-dire que $f(x, y)$ doit être une fonction symétrique de x et y. Par cette raison les équations (2) se réduisent aux deux suivantes:

$$(3) \qquad \begin{aligned} f(z, f(x, y)) &= f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) &= f(y, f(z, x)). \end{aligned}$$

Soit pour abréger $f(x, y) = r$, $f(y, z) = v$, $f(z, x) = s$, on aura

$$(4) \qquad f(z, r) = f(x, v) = f(y, s).$$

En différentiant successivement par rapport à x, y, z, on aura

$$f'r \frac{dr}{dx} = f's \frac{ds}{dx},$$

$$f'v \frac{dv}{dy} = f'r \frac{dr}{dy},$$

$$f's \frac{ds}{dz} = f'v \frac{dv}{dz}.$$

Si l'on multiplie ces équations membre à membre et qu'on divise les produits par $f'r . f'v . f's$, on obtiendra cette équation

$$(5) \qquad \frac{dr}{dx} \frac{dv}{dy} \frac{ds}{dz} = \frac{dr}{dy} \frac{dv}{dz} \frac{ds}{dx}$$

ou bien

$$\frac{dr}{dx} \frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{dv}{dz}} = \frac{dr}{dy} \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{ds}{dz}}.$$

Si l'on fait z invariable, $\frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz}$ se réduira à une fonction de y seule. Soit φy cette fonction, on aura en même temps $\frac{ds}{dx} : \frac{ds}{dz} = \varphi x$; car s est la même fonction de z et x que v l'est de z et y. Donc

$$(6) \qquad \frac{dr}{dx} \varphi y = \frac{dr}{dy} \varphi x.$$

On en tirera, en intégrant, la valeur générale de r,

$$r = \psi(\int \varphi x . dx + \int \varphi y . dy),$$

ψ étant une fonction arbitraire. En écrivant pour abréger φx pour $\int \varphi x dx$, et φy pour $\int \varphi y dy$, on aura

$$(7) \qquad r = \psi(\varphi x + \varphi y), \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \psi(\varphi x + \varphi y).$$

Voilà donc la forme que doit avoir la fonction cherchée. Mais elle ne peut pas dans toute sa généralité satisfaire à l'équation (4). En effet l'équation (5), qui donne la forme de la fonction $f(x, y)$, est beaucoup plus générale que l'équation (4), à laquelle elle doit satisfaire. Il s'agit donc des restrictions auxquelles l'équation générale est assujettie. On a

$$f(z, r) = \psi(\varphi z + \varphi r).$$

Or $r = \psi(\varphi x + \varphi y)$, donc

$$f(z, r) = \psi(\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y)).$$

Cette expression doit être symétrique par rapport à x, y et z. Donc

$$\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi(\varphi y + \varphi z).$$

Soit $\varphi z = 0$ et $\varphi y = 0$, on aura

$$\varphi\psi\varphi x = \varphi x + \varphi\psi(0) = \varphi x + c,$$

donc en faisant $\varphi x = p$,

$$\varphi\psi p = p + c.$$

En désignant donc par φ_1 la fonction inverse de celle qui est exprimée par φ, de sorte que

$$\varphi\varphi_1 x = x,$$

on trouvera

$$\psi p = \varphi_1(p + c).$$

La forme générale de la fonction cherchée $f(x, y)$ sera donc

$$f(x, y) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y),$$

et cette fonction a en effet la propriété demandée. On tire de là

$$\varphi f(x, y) = c + \varphi x + \varphi y$$

ou, en mettant $\psi x - c$ à la place de φx, et par conséquent $\psi y - c$ à la place de φy et $\psi f(x, y) - c$ à la place de $\varphi f(x, y)$,

$$\psi f(x, y) = \psi x + \psi y.$$

Cela donne le théorème suivant:

Lorsqu'une fonction $f(x, y)$ *de deux quantités variables indépendantes* x *et* y *a la propriété que* $f(z, f(x, y))$ *est une fonction symétrique de* x, y *et* z, *il y aura toujours une fonction* ψ *pour laquelle on a*

$$\psi f(x, y) = \psi x + \psi y.$$

La fonction $f(x, y)$ étant donnée, on trouvera aisément la fonction ψx. En effet on aura en différentiant l'équation ci-dessus, par rapport à x et par rapport à y, et faisant pour abréger $f(x, y) = r$

$$\psi' r \frac{dr}{dx} = \psi' x,$$

$$\psi' r \frac{dr}{dy} = \psi' y,$$

donc en éliminant $\psi' r$,

$$\frac{dr}{dy} \psi' x = \frac{dr}{dx} \psi' y,$$

d'où

$$\psi' x = \psi' y \frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{dr}{dy}}.$$

Multipliant donc par dx et intégrant, on aura

$$\psi x = \psi' y \int \frac{\frac{dr}{dx}}{\frac{dr}{dy}} dx.$$

Soit par exemple

$$r = f(x, y) = xy,$$

il se trouvera une fonction ψ pour laquelle

$$\psi(xy) = \psi x + \psi y.$$

Comme $r = xy$, on a $\frac{dr}{dx} = y$, $\frac{dr}{dy} = x$, donc

$$\psi x = \psi' y \int \frac{y}{x} dx = y\, \psi' y . \log cx,$$

ou, puisque la quantité y est supposée constante,

$$\psi x = a \log cx.$$

Cela donne $\psi y = a \log cy$, $\psi(xy) = a \log cxy$; on doit donc avoir:

$$a \log cxy = a \log cx + a \log cy,$$

ce qui a effectivement lieu pour $c = 1$.

Par un procédé semblable au précédent, on peut en général trouver des fonctions de deux quantités variables, qui satisfassent à des équations données à trois variables. En effet, par des différentiations successives par rapport aux différentes quantités variables, on trouvera des équations, desquelles on peut éliminer autant de fonctions inconnues qu'on voudra, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une équation qui ne contienne qu'une seule fonction inconnue. Cette équation sera une équation différentielle partielle à deux variables indépendantes. L'expression que donne cette équation contiendra donc un certain nombre de fonctions arbitraires d'une seule quantité variable. Lorsque les fonctions inconnues trouvées de cette manière seront substituées dans l'équation donnée, on trouvera une équation entre plusieurs fonctions d'une seule quantité variable. Pour trouver ces fonctions, on doit différentier de nouveau et l'on parviendra ainsi à des équations différentielles ordinaires, au moyen desquelles on trouvera les fonctions, qui ne sont plus arbitraires. De cette manière on trouvera la forme de toutes les fonctions inconnues, à moins qu'il ne soit impossible de satisfaire à l'équation donnée.

VII.

DÉMONSTRATION DE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES QUI PASSENT LE QUATRIÈME DEGRÉ.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

On peut, comme on sait, résoudre les équations générales jusqu'au quatrième degré, mais les équations d'un degré plus élevé, seulement dans des cas particuliers, et, si je ne me trompe, on n'a pas encore répondu d'une manière satisfaisante à la question: "Est-il possible de résoudre en général les équations qui passent le quatrième degré?" Ce mémoire a pour but de répondre à cette question.

Résoudre algébriquement une équation ne veut dire autre chose, que d'exprimer ses racines par des fonctions algébriques des coefficiens. Il faut donc considérer d'abord la forme générale des fonctions algébriques, et chercher ensuite s'il est possible de satisfaire à l'équation donnée, en mettant l'expression d'une fonction algébrique au lieu de l'inconnue.

§ I.

Sur la forme générale des fonctions algébriques.

Soient $x', x'', x''' \ldots$ un nombre fini de quantités quelconques. On dit que v est une fonction *algébrique* de ces quantités, s'il est possible d'exprimer v en $x', x'', x''' \ldots$ à l'aide des opérations suivantes: 1) par l'addition; 2) par la multiplication, soit de quantités dépendant de $x', x'', x''' \ldots$, soit de quantités qui n'en dépendent pas; 3) par la division; 4) par l'extraction de racines d'indices premiers. Parmi ces opé-

rations nous n'avons pas compté la soustraction, l'élévation à des puissances entières et l'extraction de racines de degrés composés, car elles sont évidemment comprises dans les quatre opérations mentionnées.

Lorsque la fonction v peut se former par les trois premières des opérations ci-dessus, elle est dite *algébrique et rationnelle*, ou seulement *rationnelle;* et si les deux premières opérations sont seules nécessaires, elle est dite *algébrique, rationnelle et entière*, ou seulement *entière.*

Soit $f(x', x'', x''' \ldots)$ une fonction quelconque qui peut s'exprimer par la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$Ax'^{m_1} x''^{m_2} \ldots\ldots$$

où A est une quantité indépendante de x', x'' etc. et où m_1, m_2 etc. désignent des nombres entiers positifs; il est clair que les deux premières opérations ci-dessus sont des cas particuliers de l'opération désignée par $f(x', x'', x''' \ldots)$. On peut donc considérer les fonctions entières, suivant leur définition, comme résultant d'un nombre limité de répétitions de cette opération. En désignant par v', v'', v''' etc. plusieurs fonctions des quantités $x', x''\ x''' \ldots.$ de la même forme que $f(x', x'' \ldots.)$, la fonction $f(v', v'' \ldots.)$ sera évidemment de la même forme que $f(x', x'' \ldots)$. Or $f(v', v'' \ldots)$ est l'expression générale des fonctions qui résultent de l'opération $f(x', x'' \ldots.)$ deux fois répétée. On trouvera donc toujours le même résultat en répétant cette opération autant de fois qu'on voudra. Il suit de là, que toute fonction entière de plusieurs quantités $x', x'' \ldots..$ peut être exprimée par une somme de plusieurs termes de la forme $Ax'^{m_1} x''^{m_2} \ldots..$

Considérons maintenant les fonctions rationnelles. Lorsque $f(x', x'' \ldots)$ et $\varphi(x', x'' \ldots)$ sont deux fonctions entières, il est évident, que les trois premières opérations sont des cas particuliers de l'opération désignée par

$$\frac{f(x', x'' \ldots)}{\varphi(x', x'' \ldots)}.$$

On peut donc considérer une fonction rationnelle comme le résultat de la répétition de cette opération. Si l'on désigne par v', v'', v''' etc. plusieurs fonctions de la forme $\frac{f(x', x'' \ldots)}{\varphi(x', x'' \ldots)}$, on voit aisément que la fonction $\frac{f(v', v'' \ldots)}{\varphi(v', v'' \ldots)}$ peut être réduite à la même forme. Il suit de là, que toute fonction rationnelle de plusieurs quantités $x', x'' \ldots..$ peut toujours être réduite à la forme

$$\frac{f(x', x'' \ldots.)}{\varphi(x', x'' \ldots.)},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières.

Enfin nous allons chercher la forme générale des fonctions algébriques. Désignons par $f(x', x'' \ldots)$ une fonction rationnelle quelconque, il est clair que toute fonction algébrique peut être composée à l'aide de l'opération désignée par $f(x', x'' \ldots)$ combinée avec l'opération $\sqrt[m]{r}$, où m est un nombre premier. Donc, si $p', p'' \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x', x'' \ldots$,

$$p_1 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots)$$

sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération exprimée par $\sqrt[m]{r}$ affecte seulement des fonctions rationnelles. Les fonctions de la forme p_1 seront dites fonctions algébriques *du premier ordre.* En désignant par $p_1', p_1'' \ldots$ plusieurs quantités de la forme p_1, l'expression

$$p_2 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''} \ldots)$$

sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération $\sqrt[m]{r}$ affecte seulement des fonctions rationnelles, et des fonctions algébriques du premier ordre. Les fonctions de la forme p_2 seront dites fonctions algébriques *du deuxième ordre.* De la même manière l'expression

$$p_3 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''}, \ldots \sqrt[n_2']{p_2'}, \sqrt[n_2'']{p_2''} \ldots),$$

dans laquelle $p_2', p_2'' \ldots$ sont des fonctions du deuxième ordre, sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération $\sqrt[m]{r}$ n'affecte que des fonctions rationnelles, et des fonctions algébriques du premier et du deuxième ordre.

En continuant de cette manière, on obtiendra des fonctions algébriques du troisième, du quatrième ... du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, et il est clair, que l'expression des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, sera l'expression *générale* des fonctions algébriques.

Donc en désignant par μ l'ordre d'une fonction algébrique quelconque et par v la fonction même, on aura

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots),$$

où $p', p'' \ldots$ sont des fonctions de l'ordre $\mu - 1$; $r', r'' \ldots$ des fonctions de l'ordre $\mu - 1$ ou des ordres moins élevés, et $n', n'' \ldots$ des nombres premiers; f désigne toujours une fonction rationnelle des quantités comprises entre les parenthèses.

On peut évidemment supposer qu'il est impossible d'exprimer l'une des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ par une fonction rationnelle des autres et des quantités $r', r'' \ldots$; car dans le cas contraire, la fonction v aurait cette forme plus simple,

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots),$$

où le nombre des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ serait diminué au moins d'une unité. En réduisant de cette manière l'expression de v autant que possible, on parviendrait, ou à une expression irréductible, ou à une expression de la forme

$$v = f(r', r'', r''' \ldots);$$

mais cette fonction serait seulement de l'ordre $\mu - 1$, tandis que v doit être du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, ce qui est une contradiction.

Si dans l'expression de v le nombre des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ est égal à m, nous dirons que la fonction v est du $\mu^{\text{ième}}$ *ordre* et du $m^{\text{ième}}$ *degré.* On voit donc qu'une fonction de l'ordre μ et du degré 0 est la même chose qu'une fonction de l'ordre $\mu - 1$, et qu'une fonction de l'ordre 0 est la même chose qu'une fonction rationnelle.

Il suit de là, qu'on peut poser

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n]{p}),$$

où p est une fonction de l'ordre $\mu - 1$, mais $r', r'' \ldots$ des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre et tout au plus du degré $m - 1$, et qu'on peut toujours supposer qu'il est impossible d'exprimer $\sqrt[n]{p}$ par une fonction rationnelle de ces quantités.

Dans ce qui précède nous avons vu qu'une fonction rationnelle de plusieurs quantités peut toujours être réduite à la forme

$$\frac{s}{t},$$

où s et t sont des fonctions entières des mêmes quantités variables. On conclut de là que v peut toujours être exprimé comme il suit,

$$v=\frac{\varphi(r', r''\ldots \sqrt[n]{p})}{\tau(r', r''\ldots \sqrt[n]{p})},$$

où φ et τ désignent des fonctions entières des quantités r', $r''\ldots$ et $\sqrt[n]{p}$. En vertu de ce que nous avons trouvé plus haut, toute fonction entière de plusieurs quantités s, r', $r''\ldots$ peut s'exprimer par la forme

$$t_0+t_1 s+t_2 s^2+\cdots+t_m s^m,$$

t_0, $t_1\ldots t_m$ étant des fonctions entières de r', r'', $r'''\ldots$ sans s. On peut donc poser

$$v=\frac{t_0+t_1 p^{\frac{1}{n}}+t_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0+v_1 p^{\frac{1}{n}}+v_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}}=\frac{T}{V},$$

où t_0, $t_1\ldots t_m$ et v_0, $v_1\ldots v_{m'}$ sont des fonctions entières de r', r'', r''' etc.

Soient V_1, $V_2\ldots V_{n-1}$ les $n-1$ valeurs de V qu'on trouve en mettant successivement $\alpha p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^3 p^{\frac{1}{n}}\ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$ au lieu de $p^{\frac{1}{n}}$, α étant une racine différente de l'unité de l'équation $\alpha^n-1=0$; on trouvera en multipliant le numérateur et le dénominateur de $\frac{T}{V}$ par $V_1\, V_2\, V_3\ldots V_{n-1}$

$$v=\frac{T\,V_1\,V_2\ldots V_{n-1}}{V\,V_1\,V_2\ldots V_{n-1}}.$$

Le produit $V\,V_1\ldots V_{n-1}$ peut, comme on sait, s'exprimer par une fonction entière de p et des quantités r', $r''\ldots$, et le produit $T\,V_1\ldots V_{n-1}$ est, comme on le voit, une fonction entière de $\sqrt[n]{p}$ et de r', $r''\ldots$. En supposant ce produit égal à

$$s_0+s_1 p^{\frac{1}{n}}+s_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+s_k p^{\frac{k}{n}},$$

on trouve

$$v=\frac{s_0+s_1 p^{\frac{1}{n}}+s_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+s_k p^{\frac{k}{n}}}{m},$$

ou, en écrivant q_0, q_1, $q_2\ldots$ au lieu de $\frac{s_0}{m}$, $\frac{s_1}{m}$, $\frac{s_2}{m}$ etc.,

$$v=q_0+q_1 p^{\frac{1}{n}}+q_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+q_k p^{\frac{k}{n}},$$

où q_0, $q_1\ldots q_k$ sont des fonctions rationnelles des quantités p, r', $r''\ldots$ etc.

Soit μ un nombre entier quelconque, on peut toujours poser

$$\mu=an+\alpha,$$

a et α étant deux nombres entiers, et $\alpha<n$. Il suit de là, que

$$p^{\frac{\mu}{n}}=p^{\frac{an+\alpha}{n}}=p^a p^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En mettant donc cette expression au lieu de $p^{\frac{\mu}{n}}$ dans l'expression de v, on obtiendra

$$v=q_0+q_1 p^{\frac{1}{n}}+q_2 p^{\frac{2}{n}}+\cdots+q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

q_0, q_1, q_2 étant encore des fonctions rationnelles de p, r', $r''\ldots$, et par conséquent des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre et au plus du degré $m-1$, et telles qu'il soit impossible d'exprimer $p^{\frac{1}{n}}$ rationnellement par ces quantités.

Dans l'expression de v ci-dessus, on peut toujours faire $q_1=1$. Car si q_1 n'est pas nul, on obtiendra, en faisant $p_1=pq_1^n$,

$$p=\frac{p_1}{q_1^n},\quad p^{\frac{1}{n}}=\frac{p_1^{\frac{1}{n}}}{q_1},$$

donc

$$v=q_0+p_1^{\frac{1}{n}}+\frac{q_2}{q_1^2}\,p_1^{\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}}\,p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

expression de la même forme que la précédente, sauf que $q_1=1$. Si $q_1=0$, soit q_μ une des quantités q_1, $q_2\ldots q_{n-1}$, qui ne soit pas nulle, et soit $q_\mu^n p^\mu=p_1$. On déduit de là $q_\mu^\alpha p^{\frac{\alpha\mu}{n}}=p_1^{\frac{\alpha}{n}}$. Donc en prenant deux nombres entiers α et β, qui satisfassent à l'équation $\alpha\mu-\beta n=\mu'$, μ' étant un nombre entier, on aura

$$q_\mu^\alpha p^{\frac{\beta n+\mu'}{n}}=p_1^{\frac{\alpha}{n}} \quad\text{et}\quad p^{\frac{\mu'}{n}}=q_\mu^{-\alpha} p^{-\beta} p_1^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En vertu de cela et en remarquant que $q_\mu p^{\frac{\mu}{n}}=p_1^{\frac{1}{n}}$, v aura la forme

$$v=q_0+p_1^{\frac{1}{n}}+q_2 p_1^{\frac{2}{n}}+\cdots+q_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}}.$$

De tout ce qui précède on conclut: Si v est une fonction algébrique de l'ordre μ et du degré m, on peut toujours poser:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

n étant un nombre premier, $q_0, q_2 \ldots q_{n-1}$ des fonctions algébriques de l'ordre μ et du degré $m-1$ au plus, p une fonction algébrique de l'ordre $\mu - 1$, et telle que $p^{\frac{1}{n}}$ ne puisse s'exprimer rationnellement en $q_0, q_1 \cdots q_{n-1}$.

§ II.

Propriétés des fonctions algébriques qui satisfont à une équation donnée.

Soit

$$(1) \qquad c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0$$

une équation quelconque du degré r, où $c_0, c_1 \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x', x'' \ldots, x', x'' \ldots$ étant des quantités indépendantes quelconques. Supposons qu'on puisse satisfaire à cette équation, en mettant au lieu de y une fonction algébrique de $x', x'' \ldots$. Soit

$$(2) \qquad y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

cette fonction. En substituant cette expression de y, dans l'équation proposée, on obtiendra, en vertu de ce qui précède, une expression de la forme

$$(3) \qquad r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0,$$

où $r_0, r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles des quantités $p, q_0, q_1 \cdots q_{n-1}$.

Or je dis que l'équation (3) ne peut avoir lieu, à moins qu'on n'ait séparement

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0 \ldots\ldots r_{n-1} = 0.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait en posant $p^{\frac{1}{n}} = z$ les deux équations

$$z^n - p = 0$$

et

$$r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_{n-1} z^{n-1} = 0,$$

qui auraient une ou plusieurs *racines communes*. Soit k le nombre de ces racines, on peut, comme on sait, trouver une équation qui a pour racines les k racines mentionnées, et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$. Soit

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots + s_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0$$

cette équation, et

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu$$

un facteur de son premier membre, où t_0, t_1 etc. sont des fonctions rationnelles de $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, on aura de même

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0,$$

et il est clair qu'on peut supposer qu'il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé. Cette équation a ses μ racines communes avec l'équation $z^n - p = 0$. Or toutes les racines de l'équation $z^n - p = 0$, sont de la forme αz, où α est une racine quelconque de l'unité. Donc en remarquant que μ ne peut être moindre que 2, parce qu'il est impossible d'exprimer z en fonction rationnelle des quantités $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, il s'ensuit, que deux équations de la forme

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu = 0,$$

et

$$t_0 + \alpha t_1 z + \alpha^2 t_2 z^2 + \cdots + \alpha^{\mu-1} t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \alpha^\mu z^\mu = 0$$

doivent avoir lieu. De ces équations on tire, en éliminant z^μ,

$$t_0(1 - \alpha^\mu) + t_1(\alpha - \alpha^\mu) z + \cdots + t_{\mu-1}(\alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu) z^{\mu-1} = 0.$$

Mais cette équation étant du degré $\mu - 1$, et l'équation

$$z^\mu + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \cdots = 0$$

étant irréductible, et par conséquent t_0 ne pouvant être égal à zéro, on doit avoir $\alpha^\mu - 1 = 0$, ce qui n'a pas lieu. On doit donc avoir

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0 \ldots r_{n-1} = 0.$$

Maintenant, ces équations ayant lieu, il est clair que l'équation proposée sera satisfaite par toutes les valeurs de y qu'on obtient en attribuant à $p^{\frac{1}{n}}$ toutes les valeurs $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}} \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$. On voit aisément que toutes ces valeurs de y seront différentes entre elles; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que (3), mais une telle équation conduit, comme on vient de le voir, à des contradictions.

En désignant donc par $y_1, y_2 \ldots y_n$ n racines différentes de l'équation (1), on aura

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}.$$

De ces n équations on tirera sans peine

$$q_0 = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n),$$
$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \cdots + \alpha y_n),$$
$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \alpha^{n-4} y_3 + \cdots + \alpha^2 y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 + \cdots + \alpha^{n-1} y_n).$$

On voit par là que toutes les quantités $p^{\frac{1}{n}}$, q_0, $q_2 \ldots q_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. En effet on a

$$q_\mu = n^{\mu-1} \frac{y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n}{(y_1 + \alpha^{-1} y_2 + \alpha^{-2} y_3 + \cdots + \alpha^{-(n-1)} y_n)^\mu}.$$

Considérons maintenant l'équation générale du degré m,

$$0 = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m,$$

et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement. Soit

$$x = s_0 + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}};$$

en vertu de ce qui précède, les quantités v, s_0, s_2 etc. peuvent s'exprimer rationnellement en $x_1, x_2 \ldots x_m$, en désignant par $x_1, x_2 \ldots x_m$ les racines de l'équation proposée.

Considérons l'une quelconque des quantités v, s_0, s_2 etc. par exemple v. Si l'on désigne par $v_1, v_2 \ldots v_{n'}$ les valeurs différentes de v, qu'on trouve lorsqu'on échange entre elle les racines $x_1, x_2 \ldots x_m$ de toutes les manières possibles, on pourra former une équation du degré n' dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de $a, a_1 \ldots a_{m-1}$, et dont les racines sont les quantités $v_1, v_2 \ldots v_{n'}$, qui sont des fonctions rationnelles des quantités $x_1, x_2 \ldots x_m$.

Donc si l'on pose

$$v = t_0 + u^{\frac{1}{\nu}} + t_2 u^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + t_{\nu-1} u^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

toutes les quantités $u^{\frac{1}{\nu}}$, t_0, $t_2 \ldots\ldots t_{\nu-1}$ seront des fonctions rationnelles de $v_1, v_2 \ldots\ldots v_{n'}$, et par conséquent de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$. En traitant les quantités u, t_0, t_2 etc. de la même manière, on en conclut que

> si une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée puissent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

§ III.

Sur le nombre des valeurs différentes qu'une fonction de plusieurs quantités peut acquérir, lorsqu'on échange entre elles les quantités qu'elle renferme.

Soit v une fonction rationnelle de plusieurs quantités indépendantes $x_1, x_2 \ldots x_n$. Le nombre des valeurs différentes dont cette fonction est susceptible par l'échange des quantités dont elle dépend, ne peut surpasser le produit $1.2.3\ldots n$. Soit μ ce produit.

Soit maintenant

$$v\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\ldots\\ a\,b\,c\,d\ldots\end{pmatrix}$$

la valeur qu'une fonction quelconque v reçoit, lorsqu'on y substitue x_a, x_b, x_c, x_d etc. au lieu de $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, x_\delta$ etc., il est clair qu'en désignant par $A_1, A_2 \ldots A_\mu$ les diverses permutations en nombre de μ que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$, les valeurs différentes de v pourront être exprimées par

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix},\quad v\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad v\begin{pmatrix}A_1\\A_3\end{pmatrix}\ldots\ldots v\begin{pmatrix}A_1\\A_\mu\end{pmatrix}.$$

Supposons que le nombre des valeurs différentes de v soit moindre que μ, il faudra que plusieurs valeurs de v soient égales entre elles, en sorte qu'on ait par exemple

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\cdots=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}.$$

Si l'on fait subir à ces quantités la substitution désignée par $\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+1}\end{pmatrix}$, on aura cette nouvelle série de valeurs égales

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+1}\end{pmatrix}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_{m+2}\end{pmatrix}=\cdots=v\begin{pmatrix}A_1\\A_{2m}\end{pmatrix},$$

valeurs qui sont différentes des premières, mais en même nombre. En changeant de nouveau ces quantités par la substitution désignée par $\begin{pmatrix}A_1\\A_{2m+1}\end{pmatrix}$, on aura un nouveau système de quantités égales, mais différentes des précédentes. En continuant ce procédé jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les permutations possibles, les μ valeurs de v seront partagées en plusieurs systèmes, dont chacun contiendra un nombre de m valeurs égales. Il suit de là que si l'on représente le nombre des valeurs différentes de v par ϱ, nombre égal à celui des systèmes, on aura

$$\varrho m = 1.2.3\ldots n,$$

c'est-à-dire:

Le nombre des valeurs différentes qu'une fonction de n quantités peut acquérir par toutes les substitutions possibles entre ces quantités, est nécessairement un diviseur du produit $1.2.3\ldots n$. Cela est connu.

Soit maintenant $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$ une substitution quelconque. Supposons qu'en appliquant celle-ci plusieurs fois de suite à la fonction v on obtienne la suite des valeurs

$$v,\ v_1,\ v_2\ldots v_{p-1},\ v_p,$$

il est clair que v sera nécessairement répété plusieurs fois. Lorsque v revient après un nombre p de substitutions, nous disons que $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$ est une *substitution récurrente de l'ordre* p. On a donc cette série périodique

$$v,\ v_1,\ v_2\ldots v_{p-1},\ v,\ v_1,\ v_2\ldots$$

ou bien, si l'on représente par $v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r$ la valeur de v qu'on obtient après

avoir répété r fois de suite la substitution désignée par $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$, on a la série

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^1,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^2\ldots v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p-1},\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0\ldots$$

Il suit de là que

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{\alpha p+r}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r$$

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{\alpha p}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0=v.$$

Or soit p le plus grand nombre premier contenu dans n, si le nombre des valeurs différentes de v est moindre que p, il faut qu'entre p valeurs quelconques, deux soient égales entre elles.

Il faut donc que des p valeurs,

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^0,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^1,\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^2\ldots v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p-1},$$

deux soient égales entre elles. Soit par exemple

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r'},$$

on en conclut que

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r+p-r}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r'+p-r}.$$

Écrivant r au lieu de $r'+p-r$ et remarquant que $v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^p=v$, on en tire

$$v=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r,$$

où r évidemment n'est pas multiple de p. La valeur de v n'est donc pas changée par la substitution $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^r$, ni par conséquent non plus par la répétition de la même substitution. On a donc

$$v=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r\alpha};$$

α étant un nombre entier. Maintenant si p est un nombre premier, on pourra évidemment toujours trouver deux nombres entiers α et β tels que

$$r\alpha=p\beta+1,$$

donc

$$v = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p\beta+1},$$

et puisque

$$v = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p\beta},$$

on aura

$$v = v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}.$$

La valeur de v ne sera donc pas changée par la substitution récurrente $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$ de l'ordre p.

Or il est clair que

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\ldots\zeta\eta\\\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\eta\alpha\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots\eta\alpha\\\gamma\alpha\beta\delta\ldots\zeta\eta\end{pmatrix}$$

sont des substitutions récurrentes de l'ordre p, lorsque p est le nombre des indices $\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta$. La valeur de v ne sera donc pas changée non plus par la combinaison de ces deux substitutions. Ces deux substitutions sont évidemment équivalentes à cette unique

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\\gamma\alpha\beta\end{pmatrix},$$

et celle-ci aux deux suivantes, appliquées successivement,

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\\beta\alpha\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\beta\gamma\\\gamma\beta\end{pmatrix}.$$

La valeur de v ne sera donc pas changée par la combinaison de ces deux substitutions. Donc

$$v = v\begin{pmatrix}\alpha\beta\\\beta\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\\gamma\beta\end{pmatrix};$$

de même

$$v = v\begin{pmatrix}\beta\gamma\\\gamma\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\\delta\gamma\end{pmatrix},$$

d'où l'on tire

$$v = v\begin{pmatrix}\alpha\beta\\\beta\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\\delta\gamma\end{pmatrix}.$$

On voit par là que la fonction v n'est pas changée par deux substitutions successives de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\\beta\alpha\end{pmatrix}$, α et β étant deux indices quelconques. Si l'on désigne une telle substitution par le nom de *transposition*, on peut conclure qu'une valeur quelconque de v ne sera pas changée par un nombre pair de transpositions, et que par conséquent toutes les valeurs de v qui résultent d'un nombre impair de transpositions sont égales. Tout échange des élémens d'une fonction peut s'opérer à l'aide d'un certain nombre de transpositions; donc la fonction v ne peut avoir plus de deux valeurs différentes. De là on tire le théorème suivant:

Le nombre des valeurs différentes que peut obtenir une fonction de n quantités, ne peut être abaissé au dessous du plus grand nombre premier qui ne surpasse pas n, à moins qu'il ne se réduise à 2 ou à 1.

Il est donc impossible de trouver une fonction de 5 quantités qui ait 3 ou 4 valeurs différentes.

La démonstration de ce théorème est prise d'un mémoire de M. *Cauchy* inséré dans le 17ème cahier du Journal de l'école polytechnique p. 1.

Soient v et v' deux fonctions dont chacune ait deux valeurs différentes, il suit de ce qui précède qu'en désignant par v_1, v_2 et v_1', v_2' ces doubles valeurs, les deux expressions

$$v_1 + v_2 \text{ et } v_1 v_1' + v_2 v_2'$$

seront des fonctions symétriques. Soit

$$v_1 + v_2 = t \text{ et } v_1 v_1' + v_2 v_2' = t_1,$$

on en tire

$$v_1 = \frac{t v_2' - t_1}{v_2' - v_1'}.$$

Soit maintenant le nombre des quantités $x_1, x_2 \ldots x_m$ égal à cinq, le produit

$$\varrho = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)$$

sera évidemment une fonction qui a deux valeurs différentes; la seconde valeur étant la même fonction avec le signe opposé. Donc en posant $v_1' = \varrho$, on aura $v_2' = -\varrho$. L'expression de v_1 sera donc

$$v_1 = \frac{t_1 + \varrho t}{2\varrho};$$

ou bien

$$v_1 = \tfrac{1}{2}t + \frac{t_1}{2\varrho^2}\varrho,$$

où $\frac{1}{2}t$ est une fonction symétrique; ϱ a deux valeurs qui ne diffèrent que par le signe, de sorte que $\frac{t_1}{2\varrho^2}$ est également une fonction symétrique.

Donc, en posant $\frac{1}{2}t = p$ et $\frac{t_1}{2\varrho^2} = q$, il s'ensuit que

> toute fonction de cinq quantités qui a deux valeurs différentes pourra être mise sous la forme $p + q\varrho$, où p et q sont deux fonctions symétriques et $\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_4 - x_5)$.

Pour atteindre notre but nous avons encore besoin de la forme générale des fonctions de cinq quantités qui ont cinq valeurs différentes. On peut la trouver comme il suit:

Soit v une fonction rationnelle des quantités x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, qui ait la propriété d'être invariable lorsqu'on échange entre elles quatre des cinq quantités, par exemple x_2, x_3, x_4, x_5. Dans cette condition v sera évidemment symétrique par rapport à x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc exprimer v par une fonction rationnelle de x_1 et par des fonctions symétriques de x_2, x_3, x_4, x_5. Mais toute fonction symétrique de ces quantités peut s'exprimer par une fonction rationnelle des coefficiens d'une équation du quatrième degré, dont les racines sont x_2, x_3, x_4, x_5. Donc en posant

$$(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s,$$

la fonction v peut s'exprimer rationnellement en x_1, p, q, r, s. Mais si l'on pose

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

on aura

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s) &= x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e\\ &= x^5 - (p + x_1)x^4 + (q + px_1)x^3 - (r + qx_1)x^2 + (s + rx_1)x - sx_1,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} p &= a - x_1,\\ q &= b - ax_1 + x_1^2,\\ r &= c - bx_1 + ax_1^2 - x_1^3,\\ s &= d - cx_1 + bx_1^2 - ax_1^3 + x_1^4;\end{aligned}$$

la fonction v peut donc s'exprimer rationnellement en x_1, a, b, c, d.

Il suit de là que la fonction v peut être mise sous la forme

$$v = \frac{t}{\varphi x_1},$$

où t et φx_1 sont deux fonctions entières de x_1, a, b, c, d. En multipliant

le numérateur et le dénominateur de cette fonction par $\varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5$, on aura

$$v = \frac{t . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5}{\varphi x_1 . \varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5}.$$

Or $\varphi x_2 . \varphi x_3 . \varphi x_4 . \varphi x_5$ est, comme on le voit, une fonction entière et symétrique de x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc exprimer ce produit en fonction entière de p, q, r, s et par suite en fonction entière de x_1, a, b, c, d. Le numérateur de la fraction ci-dessus est donc une fonction entière des mêmes quantités; le dénominateur est une fonction symétrique de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et par conséquent il peut s'exprimer en fonction rationnelle de a, b, c, d, e. On peut donc poser

$$v = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + \cdots + r_m x_1^m.$$

En multipliant l'équation

$$x_1^5 = ax_1^4 - bx_1^3 + cx_1^2 - dx_1 + e$$

successivement par $x_1, x_1^2 \ldots x_1^{m-5}$, il est clair qu'on obtiendra $m - 4$ équations, desquelles on tirera pour $x_1^5, x_1^6 \ldots x_1^m$ des expressions de la forme

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \varepsilon x_1^4,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e.

On peut donc réduire v à la forme

(a) $$v = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4,$$

où r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e, c'est-à-dire des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Voilà la forme générale des fonctions qui ne sont pas altérées lorsqu'on y échange entre elles les quantités x_2, x_3, x_4, x_5. Ou elles ont cinq valeurs différentes, ou elles sont symétriques.

Soit maintenant v une fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, qui ait les cinq valeurs suivantes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Considérons la fonction $x_1^m v$. En y échangeant entre elles de toutes les manières possibles les quatre quantités x_2, x_3, x_4, x_5, la fonction $x_1^m v$ aura toujours une des valeurs suivantes

$$x_1^m v_1,\ x_1^m v_2,\ x_1^m v_3,\ x_1^m v_4,\ x_1^m v_5.$$

Or je dis, que le nombre des valeurs distinctes de $x_1^m v$ résultant de ces changements sera moindre que cinq. En effet, si toutes les cinq valeurs avaient lieu, on tirerait de ces valeurs en échangeant x_1 successivement avec x_2, x_3, x_4, x_5, 20 valeurs nouvelles, qui seraient nécessairement différentes entre elles et des précédentes. La fonction aurait donc en tout 25 valeurs différentes, ce qui est impossible, car 25 n'est pas diviseur du produit $1.2.3.4.5$. En désignant donc par μ le nombre des valeurs que peut prendre v lorsqu'on y échange entre elles les quantités x_2, x_3, x_4, x_5 de toutes les manières possibles, μ doit avoir l'une des quatre valeurs suivantes 1, 2, 3, 4.

1. Soit $\mu = 1$, d'après ce qui précède v sera de la forme (a).

2. Soit $\mu = 4$, la somme $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ sera une fonction de la forme (a). Or on a $v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) =$ une fonction symétrique moins $(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$; donc v_5 est de la forme (a).

3. Soit $\mu = 2$, $v_1 + v_2$ sera une fonction de la forme (a). Soit donc

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4 = \varphi x_1 .$$

En échangeant successivement x_1 avec x_2, x_3, x_4, x_5, on aura

$$\begin{aligned} v_1 &+ v_2 = \varphi x_1 , \\ v_2 &+ v_3 = \varphi x_2 , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_{m-1} &+ v_m = \varphi x_{m-1} , \\ v_m &+ v_1 = \varphi x_m , \end{aligned}$$

où m est un des nombres 2, 3, 4, 5. Pour $m = 2$, on aura $\varphi x_1 = \varphi x_2$, ce qui est impossible, car le nombre des valeurs de φx_1 doit être cinq. Pour $m = 3$ on aura

$$v_1 + v_2 = \varphi x_1, \quad v_2 + v_3 = \varphi x_2, \quad v_3 + v_1 = \varphi x_3,$$

d'où l'on tire

$$2 v_1 = \varphi x_1 - \varphi x_2 + \varphi x_3 .$$

Mais le second membre de cette équation a plus de 5 valeurs, car il en a 30. On prouvera de la même manière que m ne peut être égal à 4 ni à 5. Il suit de là que μ n'est pas égal à 2.

4. Soit $\mu = 3$. Dans ce cas $v_1 + v_2 + v_3$ et par conséquent $v_4 + v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3)$ aura cinq valeurs. Mais on vient de voir que cette supposition est inadmissible. Donc μ ne peut non plus être égal à 3.

De tout cela on déduit ce théorème:

Toute fonction rationnelle de cinq quantités, qui a cinq valeurs différentes, aura nécessairement la forme

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 ,$$

où r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions symétriques, et x l'une quelconque des cinq quantités.

De l'équation

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = v$$

on déduira aisément, en faisant usage de l'équation proposée, pour la valeur de x, une expression de la forme suivante

$$x = s_0 + s_1 v + s_2 v^2 + s_3 v^3 + s_4 v^4 ,$$

où s_0, s_1, s_2 etc., de même que r_0, r_1, r_2 etc., sont des fonctions symétriques.

Soit v une fonction rationnelle qui ait m valeurs différentes $v_1, v_2, v_3 \ldots v_m$. En posant

$$\begin{aligned} &(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3) \ldots (v - v_m) \\ &\quad = q_0 + q_1 v + q_2 v^2 + \cdots + q_{m-1} v^{m-1} + v^m = 0 , \end{aligned}$$

on sait que $q_0, q_1, q_2 \ldots$ sont des fonctions symétriques, et que les m racines de l'équation sont $v_1, v_2, v_3 \ldots v_m$. Or je dis, qu'il est impossible d'exprimer la valeur de v comme racine d'une équation de la même forme, mais d'un degré moins élevé. En effet soit

$$t_0 + t_1 v + t_2 v^2 + \cdots + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + v^\mu = 0$$

une telle équation, t_0, t_1 etc. étant des fonctions symétriques, et soit v_1 une valeur de v qui satisfasse à cette équation, on aura

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots = (v - v_1) P_1 .$$

En échangeant entre eux les élémens de la fonction, on trouvera la série suivante d'équations:

$$\begin{aligned} v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots &= (v - v_2) P_2 , \\ v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots &= (v - v_3) P_3 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots &= (v - v_m) P_m . \end{aligned}$$

On en conclut que $v - v_1$, $v - v_2$, $v - v_3 \ldots v - v_m$ seront des facteurs de $v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots$ et que par conséquent μ doit nécessairement être égal à m. On en tire le théorème suivant:

Lorsqu'une fonction de plusieurs quantités a m valeurs différentes, on peut toujours trouver une équation du degré m, dont les coefficiens soient des fonctions symétriques, et qui ait ces valeurs pour racines; mais il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé qui ait une ou plusieurs de ces valeurs pour racines.

§ IV.

Démonstration de l'impossibilité de la résolution générale de l'équation du cinquième degré.

En vertu des propositions trouvées plus haut on peut énoncer ce théorème:

"Il est impossible de résoudre en général les équations du cinquième "degré."

D'après le § II, toutes les fonctions algébriques dont une expression algébrique des racines est composée, peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Comme il est impossible d'exprimer d'une manière générale la racine d'une équation par une fonction rationnelle des coefficiens, on doit avoir

$$R^{\frac{1}{m}} = v,$$

où m est un nombre premier et R une fonction rationnelle des coefficiens de l'équation proposée, c'est-à-dire une fonction symétrique des racines; v est une fonction rationnelle des racines. On en conclut

$$v^m - R = 0.$$

En vertu du § II, il est impossible d'abaisser le degré de cette équation; la fonction v doit donc, d'après le dernier théorème du paragraphe précédent, avoir m valeurs différentes. Le nombre m devant être diviseur du produit $1.2.3.4.5$, ce nombre peut être égal à 2 ou à 3 ou à 5. Or (§ III) il n'existe pas de fonction de cinq variables qui ait 3 valeurs: il faut donc qu'on ait $m = 5$, ou $m = 2$. Soit $m = 5$, on aura, ainsi qu'il résulte du paragraphe précédent

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

d'où

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}.$$

On en tire (§ II)

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5)$$

où $\alpha^5 = 1$. Cette équation est impossible, attendu que le second membre a 120 valeurs et que pourtant il doit être racine d'une équation du cinquième degré $z^5 - s_1^5 R = 0$. On doit donc avoir $m = 2$.

On aura donc (§ II)

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

où p et q sont des fonctions symétriques, et

$$s = (x_1 - x_2) \ldots (x_4 - x_5).$$

On en tire, en échangeant x_1 et x_2 entre eux,

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

d'où l'on déduit $p = 0$ et $\sqrt{R} = qs$. On voit par là, que toute fonction algébrique du premier ordre qui se trouve dans l'expression de la racine, doit nécessairement avoir la forme $\alpha + \beta\sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$, où α et β sont des fonctions symétriques. Or il est impossible d'exprimer les racines par une fonction de la forme $\alpha + \beta\sqrt{R}$; il doit donc y avoir une équation de la forme

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v,$$

où α et β ne sont pas nuls, m est un nombre premier, α et β sont des fonctions symétriques, et v est une fonction rationnelle des racines. Cela donne

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta s} = v_1, \quad \sqrt[m]{\alpha - \beta s} = v_2,$$

où v_1 et v_2 sont des fonctions rationnelles. On aura en multipliant v_1 par v_2,

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}.$$

Or $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ est une fonction symétrique. Si maintenant $\sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$

n'est pas une fonction symétrique, le nombre m, d'après ce qui précède, doit être égal à deux. Mais dans ce cas v sera égal à $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}$; v aura donc quatre valeurs différentes, ce qui est impossible.

Il faut donc que $\sqrt[m]{\alpha^2-\beta^2 s^2}$ soit une fonction symétrique. Soit γ cette fonction, on aura

$$v_2 v_1 = \gamma, \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{\gamma}{v_1}.$$

Soit

$$x_1+v_2=\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}+\frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}}=p=\sqrt[m]{R}+\frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}}=R^{\frac{1}{m}}+\frac{\gamma}{R}R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Désignons par $p_1, p_2, p_3 \ldots p_m$ les valeurs différentes de p qui résultent de la substitution successive de $\alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \alpha^3 R^{\frac{1}{m}} \ldots \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$ à la place de $R^{\frac{1}{m}}$, α satisfaisant à l'équation

$$\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\cdots+\alpha+1=0,$$

et faisons le produit

$$(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)=p^m-Ap^{m-1}+A_1 p^{m-2}-\cdots=0.$$

On voit sans peine que A, A_1 etc. sont des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation proposée et par conséquent des fonctions symétriques des racines. Cette équation est évidemment irréductible. Il faut donc d'après le dernier théorème du paragraphe précédent que p, consideré comme fonction des racines, ait m valeurs différentes. On en conclut que $m=5$. Mais dans ce cas p sera de la forme (a) du paragraphe précédent. Donc on aura

$$\sqrt[5]{R}+\frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}}=r_0+r_1 x+r_2 x^2+r_3 x^3+r_4 x^4=p,$$

d'où

$$x=s_0+s_1 p+s_2 p^2+s_3 p^3+s_4 p^4,$$

c'est-à-dire, en mettant $R^{\frac{1}{5}}+\frac{\gamma}{R}R^{\frac{4}{5}}$ à la place de p,

$$x=t_0+t_1 R^{\frac{1}{5}}+t_2 R^{\frac{2}{5}}+t_3 R^{\frac{3}{5}}+t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

où t_0, t_1, t_2 etc. sont des fonctions rationnelles de R et des coefficiens de l'équation proposée. On en tire (§ II)

$$t_1 R^{\frac{1}{5}}=\tfrac{1}{5}(x_1+\alpha^4 x_2+\alpha^3 x_3+\alpha^2 x_4+\alpha x_5)=p',$$

où

$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0.$$

De l'équation $p'=t_1 R^{\frac{1}{5}}$ on tire $p'^5=t_1^5 R$. Or $t_1^5 R$ étant de la forme $u+u'\sqrt{s^2}$ on aura $p'^5=u+u'\sqrt{s^2}$, ce qui donne

$$(p'^5-u)^2=u'^2 s^2.$$

Cette équation donne p' par une équation du dixième degré, dont tous les coefficiens sont des fonctions symétriques; mais d'après le dernier théorème du paragraphe précédent cela est impossible; car puisque

$$p'=\tfrac{1}{5}(x_1+\alpha^4 x_2+\alpha^3 x_3+\alpha^2 x_4+\alpha x_5),$$

p' aurait 120 valeurs différentes, ce qui est une contradiction.

Nous concluons donc qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré.

Il suit immédiatement de ce théorème, qu'il est de même impossible de résoudre algébriquement les équations générales des degrés supérieurs au cinquième. Donc les équations des quatre premiers degrés sont les seules qui puissent être résolues algébriquement d'une manière générale.

APPENDICE.

ANALYSE DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Bulletin des sciences math., astr., phys. et chim. publié par le B^{on} *de Férussac*, t. 6, p. 347; Paris 1826.

L'auteur démontre, dans ce mémoire, qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré; car toute fonction algébrique des coefficiens de la proposée, étant substituée à la place de l'inconnue, conduit à une absurdité. Dans un premier paragraphe, l'auteur cherche l'expression générale des fonctions algébriques de plusieurs quantités, d'après la définition qu'une fonction algébrique résulte, 1° d'additions, 2° de multiplications, 3° de divisions, et 4° d'extractions de racines dont les exposans sont des nombres *premiers*. Les soustractions, les élévations aux puissances et l'extraction des racines avec des exposans *composés* rentrent dans les opérations précédentes. D'où il résulte, 1° que toute fonction *rationnelle et entière* des quantités x_1, x_2, x_3 etc. c'est-à-dire, toute fonction qui peut être formée au moyen des *deux* premières opérations mentionnées, peut s'exprimer par une somme d'un nombre *fini* de termes de la forme $Ax_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots$, A étant une constante et $m_1, m_2, \ldots$ des nombres entiers; 2° que toute fonction *rationnelle* des mêmes quantités, c'est-à-dire, toute fonction qui peut être formée au moyen des *trois* premières opérations, peut s'exprimer par un quotient de deux fonctions *entières*; 3° que toute fonction algébrique peut être formée par des répétitions des opérations indiquées par

$$(1) \qquad p' = f(x_1, x_2, x_3 \ldots p_1^{\frac{1}{n_1}}, p_2^{\frac{1}{n_2}}, \ldots),$$

où f désigne une fonction rationnelle des quantités entre les parenthèses; $p_1, p_2, \ldots$ des fonctions rationnelles de $x_1, x_2 \ldots$, et $n_1, n_2 \ldots$ des nombres premiers. On nommera, pour abréger, *fonction algébrique du premier ordre*, une fonction telle que p'. Si maintenant on formait une nouvelle fonction dans laquelle des fonctions du premier ordre entrassent de la même manière que $p_1, p_2 \ldots$ entrent dans p', on aurait une *fonction algébrique du second ordre*; et, en général, une fonction de l'ordre μ serait celle qui pourrait contenir des fonctions de tous les ordres, jusqu'à l'ordre $\mu - 1$, combinées entre elles *algébriquement*. Bien entendu que cette fonction de l'ordre μ ne peut pas s'abaisser à un ordre inférieur, par des réductions des fonctions qui la composent. En outre, si cette même fonction de l'ordre μ contient m quantités de cet ordre, on dira qu'elle est du $m^{\text{ième}}$ *degré*; et en la désignant par v, on pourra poser

$$(2) \qquad v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

c'est-à-dire que l'on a ce premier *théorème: Toute fonction algébrique v de l'ordre μ et du degré m, peut être représentée par la formule* (2), *où n est un nombre premier, $q_0, q_2, \ldots q_{n-1}$ des fonctions algébriques de l'ordre μ et du degré $m - 1$ tout au plus, et p une fonction algébrique de l'ordre $\mu - 1$, telle qu'il est impossible d'exprimer $p^{\frac{1}{n}}$ par une fonction rationnelle de $p, q_0, q_2 \ldots q_{n-1}$.*

Après avoir ainsi trouvé l'expression générale des fonctions algébriques, l'auteur considère, dans un deuxième paragraphe, une équation quelconque dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des quantités $x_1, x_2 \ldots$ et qu'on suppose résoluble algébriquement. En désignant donc par y l'inconnue, et par

$$(3) \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots y) = 0$$

l'équation même, il faut que le premier membre se réduise à zéro, en mettant pour y une certaine fonction de la forme (2). Par cette substitution l'équation (3) se changera en une autre de la forme

$$(4) \qquad r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0,$$

où $r_0, r_1, r_2, r_3 \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, x_3 \ldots$ et de $q_0, q_2, q_3 \ldots$ Cette équation entraine les suivantes:

$$(5) \qquad r_0 = 0,\ r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ \ldots r_{n-1} = 0;$$

car dans le cas contraire, l'équation (4) pourrait donner la valeur de $p^{\frac{1}{n}}$ en fonction *rationnelle* de $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, ce qui est contre l'énoncé du théorème précédent. Si les équations (5) ont lieu, l'équation (4) et par suite l'équation (3), seront de même satisfaites par toutes les valeurs de y qu'on obtiendra en mettant, au lieu de $p^{\frac{1}{n}}$ les $n-1$ valeurs $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$, où α est une racine imaginaire de l'unité. Par là on aura les valeurs de n racines de l'équation (3), savoir

$$\begin{aligned} y_1 &= q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ y_2 &= q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}; \end{aligned}$$

ces équations donnent les n quantités $p^{\frac{1}{n}}, q_0, q_2 \ldots q_{n-1}$ en fonctions *rationnelles* des racines $y_1, y_2 \ldots y_n$.

Si maintenant $fx = 0$ est une équation algébrique générale, résoluble *algébriquement*, et $x_1, x_2 \ldots$ les racines de cette équation, on doit avoir

$$x = s_0 + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} + \cdots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}},$$

cette formule étant analogue à la formule (2). D'après ce qu'on vient de voir $v^{\frac{1}{n}}$, s_0, $s_2 \ldots s_{n-1}$ seront des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, considérons l'une quelconque des quantités v, s_0, $s_2 \ldots s_{n-1}$, par exemple v; en désignant par n' le nombre de toutes les valeurs *différentes* de v, qu'on obtiendra en échangeant entre elles de toutes les manières possibles les racines de l'équation proposée, on peut former une équation du degré n' qui ait toutes ces valeurs pour racines, et dont les coefficiens soient des fonctions rationnelles et symétriques des valeurs de v, et par suite des fonctions rationnelles de x_1, $x_2 \ldots$ En faisant donc

$$v = t_0 + u^{\frac{1}{\nu}} + t_2 u^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + t_{\nu-1} u^{\frac{\nu-1}{\nu}},$$

toutes les quantités u, t_0, $t_2 \ldots t_{\nu-1}$ seront des fonctions rationnelles des valeurs de v, et par suite de x_1, $x_2 \ldots$ En poursuivant ce raisonnement, on établira le théorème suivant:

Deuxième théorème: Si une équation algébrique est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une forme telle, que toutes les expressions algébriques dont elle est composée pourront s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Dans le troisième paragraphe on démontre, d'après un mémoire de M. *Cauchy*, inséré dans le cahier XVII[e] du *Journal de l'École Polytechnique*, que, 1° le nombre des valeurs d'une fonction rationnelle de n quantités, ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier contenu dans n, sans devenir égal à 2 ou à 1; 2° que toute fonction rationnelle qui a deux valeurs différentes aura la forme

$$p + q(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_2 - x_3) \cdots (x_3 - x_4) \cdots$$

et que, si elle contient 5 quantités, elle deviendra

$$p + q(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\ (x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5),$$

où p et q sont des fonctions invariables.

On démontre ensuite que toute fonction rationnelle de cinq quantités qui a cinq valeurs différentes peut être mise sous la forme

$$v = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

où r_0, $r_1 \ldots r_4$ sont des fonctions invariables, et x une des cinq quantités en question.

En combinant cette équation avec l'équation

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \\ = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0,$$

on en peut tirer les valeurs de x sous la forme

$$x = s_0 + s_1 v + s_2 v^2 + s_3 v^3 + s_4 v^4,$$

s_0, $s_1 \ldots$ étant des fonctions invariables de x_1, $x_2 \ldots$ Finalement on arrive à ce théorème connu: *Troisième théorème: Si une fonction rationnelle de plusieurs quantités x_1, $x_2 \ldots$ a m valeurs différentes, on pourra toujours trouver une équation du degré m dont tous les coefficiens sont des fonctions invariables de x_1, $x_2 \ldots$ et qui ont les m valeurs de la fonction pour racines; mais il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé, qui aura une ou plusieurs de ces valeurs pour racines.*

Au moyen des théorèmes établis dans les trois premiers paragraphes, l'auteur démontre ensuite, dans le quatrième, qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du cinquième degré.

En effet, en supposant que l'équation générale du cinquième degré soit résoluble algébriquement, on pourra, en vertu du théorème (1), exprimer toutes les fonctions algébriques dont une racine est composée, par des fonctions rationnelles des racines; donc, puisqu'il est impossible d'exprimer une racine d'une équation générale par une fonction rationnelle des coefficiens, il faut qu'on ait

$$R^{\frac{1}{m}} = v,$$

où $R^{\frac{1}{m}}$ est une des fonctions du premier ordre qui se trouvent dans l'expression de la racine, R étant une fonction rationnelle des coefficiens de l'équation proposée, c'est-à-dire, une fonction invariable des racines, et v une fonction rationnelle des mêmes racines. Cette équation donne $v^m - R = 0$; et pour v, m valeurs différentes, résultant du changement des racines entre elles. Maintenant le nombre des valeurs d'une fonction rationnelle de cinq variables, doit être diviseur du produit 2. 3. 4. 5; il faut donc que m, qui est un nombre premier, soit un des trois nombres 2, 3, 5; mais selon le théorème cité de M. *Cauchy*, le nombre 3 sera exclu, et par conséquent il ne restera pour m que les deux valeurs 5 et 2.

1. Soit d'abord $m=5$; on aura, d'après ce qu'on a vu précédemment,

$$v=R^{\frac{1}{5}}=r_0+r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4,$$

et de là

$$x=s_0+s_1R^{\frac{1}{5}}+s_2R^{\frac{2}{5}}+s_3R^{\frac{3}{5}}+s_4R^{\frac{4}{5}},$$

$s_0, s_1, \ldots$ étant, de même que R, des fonctions invariables des racines. Cette valeur donne, selon ce qui a été établi dans le deuxième paragraphe, pour $s_1R^{\frac{1}{5}}$, une fonction rationnelle des racines, savoir:

$$s_1R^{\frac{1}{5}}=\tfrac{1}{5}(x_1+\alpha^4x_2+\alpha^3x_3+\alpha^2x_4+\alpha x_5)=z,$$

α étant une racine imaginaire de l'équation $\alpha^5-1=0$; mais cela est impossible, car le second membre a 120 valeurs différentes, tandis qu'il doit être racine de l'équation $z^5-s_1^5R=0$, qui n'est que du cinquième degré. Le nombre m ne peut donc être égal à 5.

2. Soit $m=2$. Alors v aura deux valeurs qui, selon ce que M. *Cauchy* a démontré, doivent avoir la forme

$$v=p+qs=\sqrt{R},$$

où

$$s=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_4-x_5),$$

et p et q sont des fonctions invariables.

En échangeant entre elles les deux racines x_1 et x_2, on aura $p-qs=-\sqrt{R}$, et par conséquent $p=0$, et par suite

$$\sqrt{R}=qs.$$

De là il suit que toutes les fonctions algébriques du premier ordre qui se trouvent dans l'expression de la racine, doivent être de la forme $\alpha+\beta\sqrt{s^2}$, où α et β sont des fonctions invariables. Maintenant il est impossible d'exprimer une racine de l'équation générale du cinquième degré, par une fonction de cette forme; par conséquent il faut qu'il y ait, dans l'expression de la racine, des fonctions du deuxième ordre, et qui doivent contenir un radical de la forme

$$\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}=v,$$

où β n'est pas égal à zéro; m est un nombre premier et v une fonction rationnelle des racines. En changeant x_1 en x_2 on aura

$$\sqrt[m]{\alpha-\beta\sqrt{s^2}}=v_1,$$

ce qui donne $vv_1=\sqrt[m]{\alpha^2-\beta^2s^2}$. Maintenant $\alpha^2-\beta^2s^2$ est une fonction invariable; si donc vv_1 n'est pas de même une fonction invariable, il faut que m soit égal à 2; mais alors on aura $v=\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}$, ce qui donne pour v quatre valeurs différentes; or cela est impossible: donc il faut que vv_1 soit une fonction invariable. Soit cette fonction représentée par γ, on aura $v_1=\frac{\gamma}{v}$. Cela posé, considérons l'expression

$$v+v_1=\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}+\frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}}=p=\sqrt[m]{R}+\frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}}.$$

Cette valeur de p peut être racine d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré, et, comme cette équation sera nécessairement irréductible, p aura m valeurs différentes; donc m sera égal à 5.

Alors on aura

$$R^{\frac{1}{5}}+\gamma R^{-\frac{1}{5}}=r_0+r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4=p,$$

d'où

$$x=s_0+s_1p+\cdots+s_4p^4=t_0+t_1R^{\frac{1}{5}}+t_2R^{\frac{2}{5}}+t_3R^{\frac{3}{5}}+t_4R^{\frac{4}{5}},$$

$t_0, t_1 \ldots t_4$ étant des fonctions invariables. De là on tire, comme auparavant,

$$t_1R^{\frac{1}{5}}=\tfrac{1}{5}(x_1+\alpha^4x_2+\alpha^3x_3+\alpha^2x_4+\alpha x_5)=y,$$

$$y^5=t_1^5R=t_1^5(\alpha+\beta\sqrt{s^2}),$$

et

$$(y^5-\alpha t_1^5)^2-t_1^{10}\beta^2s^2=0.$$

Cette équation, dont les coefficiens sont des fonctions invariables, est du dixième degré par rapport à y; mais cela est contraire au théorème (3), parce que y a 120 valeurs différentes.

Nous concluons donc en dernier lieu, qu'il est impossible de résoudre algébriquement l'équation *générale* du cinquième degré. De là il suit immédiatement qu'il est, en général, impossible de résoudre algébriquement les équations générales d'un degré supérieur au quatrième.

VIII.

REMARQUE SUR LE MÉMOIRE N° 4 DU PREMIER CAHIER DU JOURNAL DE M. CRELLE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.

L'objet du mémoire est de trouver l'effet d'une force sur trois points donnés. Les résultats de l'auteur sont très justes, quand les trois points ne sont pas placés sur une même ligne droite; mais dans ce cas ils ne le sont pas. Les trois équations, par lesquelles les trois inconnues Q, Q', Q'' se déterminent, sont les suivantes

$$(1)\qquad \begin{cases} P = Q + Q' + Q'', \\ Q'b\sin\alpha = Q''c\sin\beta, \\ Qa\sin\alpha = -Q''c\sin(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Celles-ci ont lieu pour des valeurs quelconques de P, a, b, c, α et β. Elles donnent en général, comme l'auteur l'a trouvé,

$$(2)\qquad \begin{cases} Q = -\dfrac{bc\sin(\alpha+\beta)}{r}P, \\ Q' = \dfrac{ac\sin\beta}{r}P, \\ Q'' = \dfrac{ab\sin\alpha}{r}P, \end{cases}$$

où

$$r = ab\sin\alpha + ac\sin\beta - bc\sin(\alpha+\beta).$$

Or les équations (2) cessent d'être déterminées lorsque l'une ou l'autre des quantités Q, Q', Q'' prend la forme $\frac{0}{0}$, ce qui a lieu, comme on le voit aisément pour

$$\alpha = \beta = 180^\circ.$$

Dans ce cas il faut recourir aux équations fondamentales (1), qui donnent alors

$$P = Q + Q' + Q'',$$
$$Q'b \sin 180^\circ = Q''c \sin 180^\circ,$$
$$Qa \sin 180^\circ = -Q''c \sin 360^\circ.$$

Or les deux dernières équations sont identiques puisque

$$\sin 180^\circ = \sin 360^\circ = 0.$$

Donc dans le cas où

$$\alpha = \beta = 180^\circ,$$

il n'existe qu'une seule équation, savoir

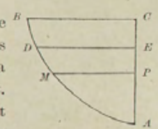
$$P = Q + Q' + Q'',$$

et, par suite, les valeurs de Q, Q', Q'' ne peuvent alors se tirer des équations établies par l'auteur.

IX.

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MECANIQUE.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. I, Berlin 1826.



Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit BC une droite horizontale et CA une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A, et soit a la hauteur EA. La quantité τ sera une certaine fonction de a, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM. D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$

la fonction donnée, on aura

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

équation de laquelle on doit tirer s en fonction de x. Au lieu de cette équation, nous allons considérer cette autre plus générale

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

de laquelle nous chercherons à déduire l'expression de s en x.

Désignons par $\Gamma\alpha$ la fonction

$$\Gamma\alpha = \int_0^1 dx \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1},$$

on a comme on sait

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

où α et β doivent être supérieurs à zéro. Soit $\beta = 1-n$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

d'où l'on tire, en faisant $z = ay$,

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} a^{\alpha-n}.$$

En multipliant par $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma\alpha.\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}}.$$

En faisant $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma n}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donc

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \Gamma n.\Gamma(1-n)\frac{\Gamma\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Or d'après une propriété connue de la fonction Γ, on a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma\alpha;$$

on aura donc en substituant:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha}{\alpha}\Gamma n.\Gamma(1-n).$$

En multipliant par $\alpha\varphi\alpha.d\alpha$, et intégrant par rapport à α, on trouve

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{(\int\varphi\alpha.\alpha z^{\alpha-1}d\alpha)dz}{(a-z)^n} = \Gamma n.\Gamma(1-n)\int\varphi\alpha.x^\alpha d\alpha.$$

Soit

$$\int\varphi\alpha.x^\alpha d\alpha = fx,$$

on en tire en différentiant,

$$\int\varphi\alpha.\alpha x^{\alpha-1}d\alpha = f'x,$$

donc

$$\int\varphi\alpha.\alpha z^{\alpha-1}d\alpha = f'z;$$

par conséquent

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'z.dz}{(a-z)^n} = \Gamma n.\Gamma(1-n)fx,$$

ou, puisque $\Gamma n.\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$,

(1) $$fx = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'z.dz}{(a-z)^n}.$$

A l'aide de cette équation, il sera facile de tirer la valeur de s de l'équation

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}.$$

Qu'on multiplie cette équation par $\frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$, et qu'on prenne l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on aura

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi a.da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

donc en vertu de l'équation (1)

13*

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a \, . \, da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Soit maintenant $n = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\varphi a = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

et

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a \, . \, da}{\sqrt{x-a}}.$$

Cette équation donne l'arc s par l'abscisse x, et par suite la courbe est entièrement déterminée.

Nous allons appliquer l'expression trouvée à quelques exemples.

I. Soit

$$\varphi a = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma \alpha a^{\mu},$$

la valeur de s sera

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \Sigma \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi} \Sigma \left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} \right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu} da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu} dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})},$$

donc

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \Sigma \frac{\alpha\, \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})} x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou, puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma(\mu_0+\frac{3}{2})} x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma(\mu_1+\frac{3}{2})} x^{\mu_1} + \cdots + \alpha_m \frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma(\mu_m+\frac{3}{2})} x^{\mu_m} \right].$$

Si l'on suppose p. ex. que $m = 0$, $\mu_0 = 0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x},$$

or $s = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloide.

II. Soit

φa depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a_0$, égal à $\varphi_0 a$
φa depuis $a = a_0$ jusqu'à $a = a_1$, égal à $\varphi_1 a$
φa depuis $a = a_1$ jusqu'à $a = a_2$, égal à $\varphi_2 a$
. . . .
φa depuis $a = a_{m-1}$ jusqu'à $a = a_m$, égal à $\varphi_m a$,

on aura

$$\pi s = \int_0^x \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = a_0,$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a . da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x = a_0 \text{ jusqu'à } x = a_1,$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a . da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a . da}{\sqrt{a-x}}, \text{ depuis } x = a_1 \text{ jusqu'à } x = a_2,$$

. . . .

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a . da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a . da}{\sqrt{a-x}} + \cdots + \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a . da}{\sqrt{a-x}} + \int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a . da}{\sqrt{a-x}},$$

depuis $x = a_{m-1}$ jusqu'à $x = a_m$,

où il faut remarquer que les fonctions $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a \ldots \varphi_m a$ doivent être telles que

$$\varphi_0 a_0 = \varphi_1 a_0, \quad \varphi_1 a_1 = \varphi_2 a_1, \quad \varphi_2 a_2 = \varphi_3 a_2, \text{ etc.},$$

car la fonction φa doit nécessairement être continue.

X.

DÉMONSTRATION D'UNE EXPRESSION DE LAQUELLE LA FORMULE BINOME EST UN CAS PARTICULIER.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von *Crelle*, Bd. 1, Berlin 1826.

Cette expression est la suivante:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu} + \cdots$$
$$+ \frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1};$$

x, α et β sont des quantités quelconques, n est un nombre entier positif.

Lorsque $n=0$, l'expression donne

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

qu'il fallait. Or on peut, comme il suit, démontrer que si l'expression subsiste pour $n=m$, elle doit aussi subsister pour $n=m+1$, c'est-à-dire qu'elle est vraie en général.

Soit

$$(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \cdots$$
$$+ \frac{m}{1}\alpha(\alpha-(m-1)\beta)^{m-2}(x+(m-1)\beta) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

En multipliant par $(m+1)dx$ et intégrant, on trouve

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1} + \cdots$$
$$+ \frac{m+1}{1}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta) + C,$$

C étant la constante arbitraire. Pour trouver sa valeur posons $x=-(m+1)\beta$, les deux dernières équations donneront

$$(\alpha-(m+1)\beta)^m = (-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m - m^m\alpha\beta^{m-1}$$
$$+ \frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-2} - \frac{m(m-1)}{2.3}(m-2)^{m-2}\alpha(\alpha-3\beta)^2\beta^{m-3} + \cdots\Big],$$
$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1} = (-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1} - (m+1)m^m\alpha\beta^m$$
$$+ \frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1} - \cdots\Big] + C.$$

Multipliant la première de ces équations par $(m+1)\beta$ et ajoutant le produit à la seconde, on trouve

$$C = (\alpha-(m+1)\beta)^{m+1} + (m+1)\beta(\alpha-(m+1)\beta)^m,$$

ou bien

$$C = \alpha(\alpha-(m+1)\beta)^m.$$

Il s'ensuit que l'équation proposée subsiste de même pour $n=m+1$. Or elle a lieu pour $n=0$; donc elle aura lieu pour $n=0, 1, 2, 3$ etc. c'est-à-dire pour toute valeur entière et positive de n.

Si l'on fait $\beta=0$, on obtient la formule binome. Si l'on fait $\alpha=-x$, on trouve

$$0 = x^n - \frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x(x+3\beta)^{n-1} + \cdots$$

ou en divisant par x,

$$0 = x^{n-1} - \frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+2\beta)^{n-1}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(x+3\beta)^{n-1} + \cdots$$

ce qui est d'ailleurs connu; car le second membre de cette équation n'est autre chose que

$$(-1)^n \Delta^n(x^{n-1}),$$

en faisant la différence constante égale à β.