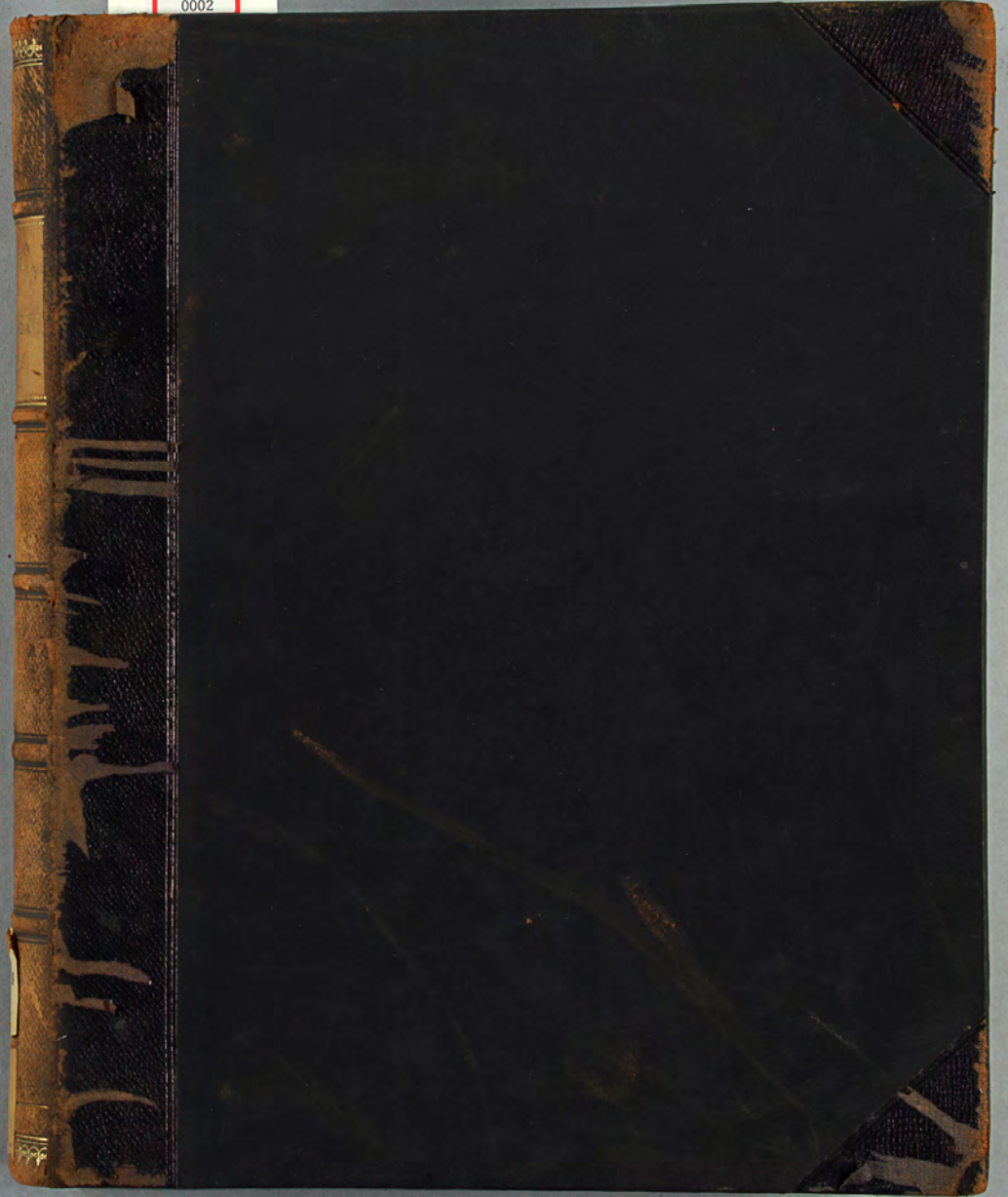


桑本文庫

洋書

0002



物理  
08  
A  
2.1

九州帝國大學理學部  
8155  
物理學教室

桑木文庫  
洋書  
0002

理學部 洋 透及  
022232002000040  
  
九州大學藏書



物理  
08  
A  
2.1

⑤ 図書番号 EC0854  
部 門  
カード

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE NIELS HENRIK ABEL

TOME PREMIER



物理  
08  
A  
2.1

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE NIELS HENRIK ABEL

NOUVELLE ÉDITION

PUBLIÉE AUX FRAIS DE L'ÉTAT NORVÉGIEN

PAR MM. L. SYLOW ET S. LIE

TOME PREMIER

CONTENANT LES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR ABEL



CHRISTIANIA

IMPRIMERIE DE GRONDAHL & SON

M DCCC LXXXI



180583  
10.4.25

PREFACE.

L'édition des Œuvres d'Abel faite par *Holmboe* et publiée en 1839, était devenue très rare trente ans après. C'est pourquoi plusieurs mathématiciens étrangers, surtout allemands et français, en demandaient une nouvelle édition à leurs confrères norvégiens. C'étaient MM. *Clebsch*, *Kronecker* et *Weierstrass* qui firent les premiers cette proposition, dont la *Société Mathématique de France* déclara hautement l'utilité par son président *Charles*. Dans ces circonstances, le Gouvernement Norvégien, sollicité par la *Société des Sciences* de Christiania, crut devoir inviter le Corps Législatif à voter la somme nécessaire pour faire une nouvelle édition revue et complète des Œuvres d'Abel. Le *Storting* accorda promptement la somme voulue, et conformément à la proposition émise l'édition nous fut confiée. Pendant l'exécution de cette tâche importante, nous avons profité des sages conseils et du précieux concours de beaucoup de personnes autorisées. Outre les mathématiciens déjà nommés nous devons remercier spécialement M. *O. J. Broch*, de Christiania, M. *C. Jordan*, de Paris, et M. *E. Schering*, de Gottingue. L'illustre *Académie* de Berlin mit à notre disposition, avec une bienveillance extrême, les manuscrits de plusieurs mémoires, insérés dans le *Journal de Crelle*, et les dates de publication des autres, insérés dans les tomes II—IV dudit *Journal*, nous ont été obligés de nous en procurer les originaux par *Borchardt*.



Nous avons cru de notre devoir d'admettre tout travail publié par Abel dans notre édition; à ceci nous n'avons fait qu'une seule exception, dont nous parlerons aussitôt. En outre nous avons cherché à recueillir tous les manuscrits et toutes les lettres d'Abel encore existantes, en les soumettant à un examen minutieux pour en extraire tout ce qui pût avoir de l'intérêt scientifique. La Bibliothèque de notre Université avait acquis quelques-uns des manuscrits d'Abel; d'autres, moins importants, il est vrai, étaient devenus la propriété de quelques mathématiciens norvégiens. Sollicitée par nous, la veuve de *Holmboe* a revu soigneusement les papiers de son défunt mari, avec l'heureux résultat que toute une série des manuscrits d'Abel fut retrouvée et donnée à la Bibliothèque de l'Université. Néanmoins beaucoup des documents qui étaient sous les mains de *Holmboe* nous manquent, étant probablement détruits par un incendie survenu peu après sa mort. Cependant il nous semble probable que la plus grande partie de ce qui date des dernières années d'Abel est encore conservé. Dans ces manuscrits nous n'avons relevé, il est vrai, aucun résultat nouveau à la science; cependant ils ont montré que plusieurs théorèmes importants, trouvés plus tard par d'autres, étaient déjà connus à Abel et se cachaient dans ses papiers quand ils furent publiés pour la première fois. Outre les théorèmes, déjà connus par l'édition de *Holmboe*, sur les équations résolubles par radicaux, nous pouvons mentionner comme tels: un théorème fondamental sur les relations qui peuvent avoir lieu entre des intégrales de différentielles algébriques, qu'Abel avait bien énoncé dans une lettre adressée à *Legendre*, mais dont il n'avait pas donné la démonstration; en outre une proposition très-générale sur la convergence des séries, laquelle fut publiée pour la première fois par *M. Bertrand*.

Le Tome I de notre édition contient, dans l'ordre chronologique, tous les mémoires publiés par Abel, à l'exception d'un opuscule imprimé dans le *Magasin des Sciences Naturelles*, année 1824, dans lequel il s'était glissé, par inadvertance, une faute grave. Or comme Abel a expressément retracté ce mémoire, nous croyons avec *Holmboe* devoir l'exclure des Œuvres Complètes. Notre édition contient quatre mémoires publiés par Abel qui manquent à celle de *Holmboe*, savoir les mémoires III, V, XII, et XIII de notre premier volume.

Les deux premiers furent omis par *Holmboe*, parce que le contenu s'en retrouve dans d'autres travaux d'Abel. Le mémoire XII, présenté par Abel à *L'Académie des Sciences* de Paris en 1826, ne put être inséré dans l'édition de *Holmboe*; ce n'est qu'en 1841 qu'il fut imprimé dans les *Mémoires des Savans étrangers*. Le mémoire XIII semble avoir échappé à l'attention de *Holmboe*.

Les mémoires publiés par Abel dans les revues norvégiennes, furent rédigés en norvégien; par égard à la plupart des lecteurs nous les rendons en français. Tous les autres travaux d'Abel furent, d'après ce que nous dit *Holmboe* dans sa préface, rédigés en français; mais les mémoires publiés dans les deux premiers volumes du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, furent traduits en allemand par *Crelle*, à l'exception des *Recherches sur les fonctions elliptiques*. Pour ce qui est des mémoires imprimés dans le quatrième volume du même journal, il existe encore, comme il est dit plus haut, des copies des manuscrits originaux d'Abel; elles font voir que *Crelle* a fait plusieurs corrections du style en partie inutiles; il y en a même qui ont modifié le sens. Ainsi les traductions allemandes de *Crelle* ne pouvant être considérées comme des versions absolument exactes du texte original, nous avons cru, avec *Holmboe*, devoir rendre ces mémoires en français afin de conserver l'unité linguistique de notre édition.

Le Tome II de notre édition comprend les Œuvres posthumes, des extraits de lettres d'Abel, et les notes des éditeurs. Tout en reconnaissant le grand mérite de *Holmboe*, comme l'habile maître et le fidèle ami d'Abel, et aussi comme le zélé éditeur de ses Œuvres, nous ne pouvons nous empêcher de faire observer qu'à notre avis l'éditeur n'a pas toujours traité les manuscrits laissés par Abel avec toute la critique désirable. En effet, dans le second volume de son édition, il a imprimé, à côté de plusieurs mémoires précieux, un certain nombre de travaux de jeunesse, datant d'une période où la critique d'Abel ne s'était pas encore complètement développée. Et même quand Abel parle plus tard des faux résultats auxquels conduit un raisonnement peu rigoureux, il nous paraît évident qu'il pense, entre autres, aux erreurs auxquelles il avait été porté lui-même dans ses anciens travaux, depuis long-



temps rejetés par lui; or ce sont ceux-là qu'a admis *Holmboe*, après la mort de l'auteur, parmi ses Œuvres Complètes. Si nous avions à faire la première édition des Œuvres d'Abel, nous aurions renoncé à publier plusieurs travaux imprimés dans le second volume de l'édition de *Holmboe*. Cependant, comme ces travaux sont déjà connus au public et souvent cités, nous ne nous sommes décidés à omettre que trois des travaux publiés par *Holmboe*, lesquels nous semblent n'avoir plus aucun intérêt même historique. D'autre part nous avons cru devoir mettre au jour plusieurs parties inédites des manuscrits d'Abel, dont quelques-uns offrent un grand intérêt.

Tome II, p. 283—289 nous donnons un aperçu de tous les manuscrits d'Abel encore existants. Ici nous nous bornons à faire remarquer que dans un protocole rempli depuis août 1826 à la fin de la même année ou au commencement de 1827, nous avons trouvé des endroits qui prouvent qu'Abel s'occupait de la *Théorie de la transformation des fonctions elliptiques* à Paris, à la fin de 1826, ce qui d'ailleurs s'accorde avec ce qu'il a dit à *Holmboe*, cité par nous dans le second volume.

Des lettres d'Abel nous donnons des extraits plus complets que ne le faisait *Holmboe*. Nous signalons à l'attention des lecteurs la première lettre d'Abel à *Holmboe*. Cette lettre prouve que, déjà en 1823, Abel avait considéré la fonction inverse de l'intégrale elliptique de la première espèce, mais elle fait voir aussi qu'à cette époque il ne savait pas encore maîtriser les paradoxes apparens qu'il avait rencontrés dans ses recherches.

A l'édition nous avons ajouté quelques notes, dans lesquelles nous donnons tantôt des renseignemens sur les divers mémoires, tantôt sur les endroits où nous avons cru devoir nous écarter du texte original, pourvu toutefois que ce ne soient pas de simples corrections de fautes de calcul ou d'impression; tantôt nous faisons observer des inexactitudes que nous ne nous croyions pas autorisés à corriger. Quelquefois nous donnons notre interprétation de passages obscurs, ou bien nous indiquons comment selon nous Abel a déduit des propositions qu'il a avancées sans preuve. Nous faisons observer expressément, que si dans les notes nous citons quelquefois des auteurs postérieurs, ce n'est que pour éclaircir le texte, et nullement pour montrer comment les découvertes d'Abel ont été développées par ses successeurs.

Au moment où nous achevons cette édition, M. *Bjerkaes*, professeur à l'Université de Christiania, vient de publier une biographie détaillée d'Abel, fondée sur des recherches étendues, dans laquelle il a tenu compte des matériaux recueillis pour cette édition. Dans ce travail intéressant on trouve réuni à peu près toutes les données accessibles de la vie d'Abel. Tout en exprimant le vœu que cette biographie soit bientôt traduite dans une langue plus généralement connue, nous devons faire observer que nous ne partageons pas toutes les vues de l'auteur, bien que nous reconnaissons avec lui que c'est à Abel en première ligne que la science doit la découverte des fonctions elliptiques proprement dites.

En présentant, un demi-siècle après la mort d'Abel, cette nouvelle édition de ses Œuvres au public mathématique, nous osons espérer qu'elle contribuera fortement à ce que ces travaux qui ont tant guidé le mouvement mathématique de notre temps, soient étudiés dans l'original par la génération actuelle de mathématiciens. Abel a eu de grands successeurs; mais pour qui veut continuer dans la voie frayée par lui, il sera toujours profitable de remonter à la source même: les immortelles Œuvres d'Abel.

Christiania, août 1881.

Les Éditeurs.



TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

	PAGES.
I. Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables . . . . .	1.
II. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies . . . . .	11.
III. Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré . . . . .	28.
IV. L'intégrale finie $\sum^n q^x$ exprimée par une intégrale définie simple . . . . .	34.
V. Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendentes	40.
VI. Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes $x$ et $y$ , telles que $f(x, y)$ , qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de $z, x$ et $y$ . . . . .	61.
VII. Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré . . . . .	66.
Appendice. Analyse du mémoire précédent . . . . .	87.
VIII. Remarque sur le mémoire N° 4 du premier cahier du Journal de M. Crelle . . . . .	95.
IX. Résolution d'un problème de mécanique . . . . .	97.
X. Démonstration d'une expression de laquelle la formule binôme est un cas particulier . . . . .	102.
XI. Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{q dx}{\sqrt{R}}$ , $R$ et $q$ étant des fonctions entières . . . . .	104.
XII. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes . . . . .	145.





VIII	TABLE DES MATIÈRES.	PAGES
XIII.	Recherche de la quantité qui satisfait à la fois à deux équations algébriques données . . . . .	212.
XIV.	Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots$ . . . . .	219.
XV.	Sur quelques intégrales définies . . . . .	251.
XVI.	Recherches sur les fonctions elliptiques . . . . .	263.
XVII.	Sur les fonctions qui satisfont à l'équation $qx + qy = v(xfy + yfx)$ . . . . .	389.
XVIII.	Note sur un mémoire de M. L. Olivier, ayant pour titre "Remarques sur les séries infinies et leur convergence" . . . . .	399.
XIX.	Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques . . . . .	403.
XX.	Addition au mémoire précédent . . . . .	429.
XXI.	Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes . . . . .	444.
XXII.	Sur le nombre des transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction rationnelle dont le degré est un nombre premier donné . . . . .	457.
XXIII.	Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce . . . . .	466.
XXIV.	Note sur quelques formules elliptiques . . . . .	467.
XXV.	Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement . . . . .	478.
XXVI.	Théorèmes sur les fonctions elliptiques . . . . .	508.
XXVII.	Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes . . . . .	515.
XXVIII.	Précis d'une théorie des fonctions elliptiques . . . . .	518.
XXIX.	Théorèmes et problèmes . . . . .	618.



I.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR TROUVER DES FONCTIONS D'UNE SEULE QUANTITÉ VARIABLE, LORSQU'UNE PROPRIÉTÉ DE CES FONCTIONS EST EXPRIMÉE PAR UNE ÉQUATION ENTRE DEUX VARIABLES.

Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang 1, Bind 1, Christiania 1823.

Soient  $x$  et  $y$  deux quantités variables indépendantes,  $a, \beta, \gamma, \delta$  etc. des fonctions données de  $x$  et  $y$ , et  $q, f, F$  etc. des fonctions cherchées entre lesquelles une relation est exprimée par une équation  $V=0$ , contenant d'une manière quelconque les quantités  $x, y, qa, f\beta, F\gamma$  etc. et leurs différentielles. On pourra, en général, à l'aide de cette seule équation, trouver toutes les fonctions inconnues dans les cas où le problème est possible.

Pour trouver l'une des fonctions, il est clair qu'on doit chercher une équation où cette fonction soit la seule inconnue et par conséquent chasser toutes les autres. Cherchons donc d'abord à chasser une fonction inconnue par exemple  $qa$  et ses différentielles. Les quantités  $x$  et  $y$  étant indépendantes, on peut regarder l'une d'elles, ou une fonction donnée des deux, comme constante. On peut donc différentier l'équation  $V=0$  par rapport à l'une des variables  $x$ , en considérant  $a$  comme constant, et dans ce cas l'autre variable  $y$  doit être considérée comme fonction de  $x$  et de  $a$ . Or en différentiant l'équation  $V=0$  plusieurs fois de suite, en supposant  $a$  constant, il ne se trouvera pas dans les équations résultantes, d'autres fonctions de  $a$  que celles qui sont comprises dans l'équation  $V=0$ , savoir  $qa$  et ses différentielles. Donc si la fonction  $V$  contient

$$qa, dqa, d^2qa, \dots d^m qa,$$