

黄金時代の経済と新古典派定理

山下, 正毅

<https://doi.org/10.15017/4071696>

出版情報 : 経済論究. 27, pp.1-10, 1972-06. 九州大学大学院経済学会
バージョン :
権利関係 :



黄金時代の経済と新古典派定理

山 下 正 毅

この論文では、経済が黄金時代にある時、資本蓄積の黄金律、いわゆる新古典派定理が成立することを示そうとするものである。この定理は、発表後既に10年を経過しているもので、内容そのものについては何ら新しいものを付け加えるものではない。

黄金時代の経済についてのロビンソンとフェルプスの定義

周知の如く、新古典派定理は黄金時代の経済において成立するものであるが、黄金時代の経済とはいかなるものであるかについて、J・ロビンソンとE・フェルプスによる二通りの定義がある。(Robinson, J., *The Accumulation of Capital*, 1956. Phelps, E., “The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen”, *American Economic Review*, 1962, p. 639) 今それぞれを紹介すれば、ロビンソンの定義は「労働力の完全雇用という条件のもとで、時間の経過を通じて資本利潤率及び所得分配率が不変にとどまり続ける経済。」というものであり、フェルプスのそれは、「産出と資本が同一の率で成長する経済」というものであった。もちろんフェルプスの定義においても完全雇用が前提されていることは言うまでもない。そこで、これら二つの定義が互いに同値であることを証明しよう。

その前に、この論文全体にわたって前提されていることを列挙しておく。

(a)生産関数は一次同次である。(b)生産要素は資本と労働から成る。(c)供給される資本と労働は完全雇用される。生産要素に対する需要供給の調整は、利子率と賃金率はその役割をになう。(d)資本と労働の結合比率は連続的に可変である。(e)生産関数は少なくとも2回返微分可能。生産要素のそれぞれについての第1次微係数はプラス、第2次微係数はマイナスである。(f)各生産主体は極

大利潤を得よう行動するので、資本の限界生産力は資本利潤率（＝市場利子率）に等しく、労働の限界生産力は賃金率に等しい。(g)労働力供給の成長率は $n > 0$ である。従って労働力供給をあらわす式は $L = L_0 e^{nt}$ となる。ここで L_0 は初期労働力、 t は時間である。

さて、ロビンソンとフェルプスの定義の同値性の証明に移る。

(i) 資本利潤率を r 、賃金率を w 、資本を K 、所得（あるいは同じことであるが産出）を Y であらわせば、所得分配率は利潤分配率 rK/Y と賃金分配率 wL/Y の比である。しかるに、利潤分配率と賃金分配率は2つのうちどちらかが求まれば他方はすぐに求まるし（利潤分配率＋賃金分配率＝1）、一方が時間に関係なく一定であれば他方も一定であるから、以後所得分配率の指標として利潤分配率のみを考えることにする。

そこでロビンソンの定義をこれらの記号を用いて書き直せば、

$$r = \text{constant}$$

$$\frac{rK}{Y} = \alpha \quad (= \text{constant})$$

なることである。

ここで、成長率演算子 G を導入することにしよう。

即ち $G(A)$ は A の成長率をあらわし $G(A) = \frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$ の意味である。

そうすると

$$G\left(\frac{rK}{Y}\right) = G(\alpha) = 0$$

であるが、左辺は $G(r) + G(K) - G(Y) = 0 + G(K) - G(Y)$

であるから、

$$G(K) - G(Y) = 0$$

となって

$$G(K) = G(Y)$$

が成立する。これは資本と所得の成長率が等しいというフェルプスの定義にほかならない。

(ii) 次に、産出と資本が同一の成長率で成長しているものとする。産出と

資本の成長率を $g(=\text{constant})$ とすれば,

$$K = K_0 e^{gt} \quad Y = Y_0 e^{gt}$$

とあらわすことができる。但し K_0 , Y_0 は資本と労働の $t=0$ における初期値である。ところで資本利潤率は資本の限界生産力に等しいので,

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \left(\frac{dY_0 e^{gt}}{dt} \right) / \left(\frac{dK_0 e^{gt}}{dt} \right) = Y_0 / K_0 = \text{constant}$$

である。従って, 利潤分配率の成長率は

$$G\left(\frac{rK}{Y}\right) = G(r) + G(K) - G(Y) = 0 + g - g = 0$$

となる。これは, 利潤分配率もまた時間に関係なく constant であることを示すものである。利潤分配率が constant ならば, 賃金分配率の constancy はただちに導くことができる。

但し, ここで注意しなければならないのは, 上の証明において K と Y の成長率を一定 ($=g$) であるとしたが, これが constant でない場合も考えられるということである。その場合には, 成長率は時間と共に変化するのであるから

$$G(K) = G(Y) = g(t)$$

とあらわすことにすれば, 次のような証明が可能である。

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \left(\frac{dY}{dt} \right) / \left(\frac{dK}{dt} \right) = g(t) Y / g(t) K = Y/K$$

$$\therefore G(r) = G(Y) - G(K) = g(t) - g(t) = 0$$

従って r は constant である。利潤分配率が一定であることの証明は, g を時間に関係なく一定とした場合と全く同様であるから省略する。

これで, フェルプスの定義からロビンソンの定義を導くことができた。

(i) (ii) より黄金時代に関するロビンソンの定義とフェルプスの定義は互いに同値である。

黄金時代の経済

ここでは, 生産関数としてコブ・ダグラス型のものを採用してモデルを構成し, そのモデルがあらわしている経済は黄金時代にあることを証明する。コブ・ダグラス型の生産関数を採用した理由は, この生産関数は生産要素の代替弾

力性が1であるという性質をもつからで、さらに要素代替の弾力性が1であればいかなる資本労働比率 (K/L) に対しても所得分配率は一定だからである。そうすると、資本利潤率が一定でありさえすれば、経済は黄金時代にあるということになる。そこでその生産関数を

$$Y = T(t) K^a L^{1-a}$$

としよう。但し、 $T(t)$ は技術進歩係数である。以後 $G(T) = \lambda(\text{constant})$ としよう。そうすると $T = T_0 e^{it}$ である。パラメーター a については $0 < a < 1$ なる制限を加えよう。容易に分るようにこの生産関数は一次同次であるから、一人当たり資本 k と一人あたり所得 y の関係になおすことができる。

$$y = T(t) k^a \dots \dots \dots (1)$$

所で賃金率 w は労働の限界生産力に等しいから、

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = y - k \frac{dy}{dk} = T(t) k^a - k a T(t) k^{a-1} = (1-a)y \dots \dots \dots$$

である。故に

$$G(w) = G(1-a) + G(y) = G(y) \dots \dots \dots (2)$$

が成立する。

資本利潤率 r は先に述べた如く資本の限界生産力に等しいので

$$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{dy}{dk} = a T k^{a-1} = a \frac{y}{k}$$

なる関係を満たす。従って

$$G(r) = G(a) + G\left(-\frac{y}{k}\right) = G(y) - G(k) \dots \dots \dots (3)$$

である。

貯蓄は、総所得のうちで資本家の受け取り分たる利潤の中から行われるものと、労働者の受け取る賃金部分から行われるものとに分れる。そこで、それらはそれぞれ利潤総額と賃金総額の一定割合を占めるものとしよう。 s_q を利潤からの貯蓄比率、 s_w を賃金からの貯蓄比率とすれば、貯蓄総額 S は、

$$\begin{aligned} S &= s_q r K + s_w w L = s_q r K + s_w \frac{(1-a)}{a} r K \\ &= \left\{ s_q + s_w \frac{(1-a)}{a} \right\} r K \end{aligned}$$

とあらわすことができる。この式で、 $s_q + s_w \frac{(1-a)}{a}$ を ξ で置き換えれば

$$S = \xi r K$$

と表現を簡単化することができる。さて、今我々が問題としているのは、経済諸変量の需要供給が均衡しつつ成長を続ける経済である。しかるに、総所得からの貯蓄総額 S に等しい量の投資が行われなければ総需要と総供給は一致せず、従って均衡成長は実現しない。投資 I は資本ストックの変化率として捉えられているので、 $I = \frac{dK}{dt}$ である。この時、上の条件は

$$I = \frac{dK}{dt} = S = \xi r K$$

とあらわすことができる。そうすると資本ストックの成長率は

$$G(K) = \frac{1}{K} \frac{dK}{dt} = \frac{\xi r K}{K} = \xi r \dots \dots \dots (4)$$

である。

(4)式と $G(L) = n$ であることを利用すれば

$$G(k) = G(K/L) = G(K) - G(L) = \xi r - n \dots \dots \dots (5)$$

が直ちに導かれる。

(1)に対して成長率演算子を用いれば、

$$G(y) = G(T) + G(k^a) = \lambda + aG(k)$$

が成立するが、これと(2)(3)(5)を合わせれば、連立微分方程式体系

$$\begin{cases} G(y) = \lambda + aG(k) \dots \dots \dots (I) \\ G(w) = G(y) \dots \dots \dots (II) \\ G(r) = G(y) - G(k) \dots \dots \dots (III) \\ G(k) = \xi r - n \dots \dots \dots (IV) \end{cases}$$

が完成する。

今われわれが検討しなければならないのは、経済を黄金時代へと収束せしめるような解が上記微分方程式体系に存在するか否かである。生産関数にコブ・ダグラス型のものを採用したので、既に述べた如く所得分配率は一定である。故に、利潤率 r を constant ならしめるような解が存在しさえすれば、経済は黄金時代にあるといえることができる。そこでまず r の取る経路を検討しよう。

(I), (II), (III), より

$$G(r) = (a-1)\xi r + (1-a)n + \lambda \dots \dots \dots (6)$$

を得る。我々が知りたいのは r がいかなる値を取った場合にその値を保ち続けようとするのか、また、 r は時間の経過と共にその値へと収束するものかどうか、言いかえると $G(r) = 0$ ならしめる r の値は安定的であるか否かということである。(6)の右辺は r に関する一次式である。故に平面上で横軸に r を取り縦軸に $G(r)$ を取るならば、(6)は第1象限を左上から右下へと横切る直線としてあらわされ、その傾きは

$$(a-1)\xi < 0$$

$r = 0$ における切片は

$$(1-a)n + \lambda > 0$$

である。従って直線 $G(r)$ は図1の如くなる。

$G(r) = 0$ となるのは r が

$$\frac{n}{\xi} + \frac{\lambda}{(1-a)\xi}$$

という値を取る場合である。この値を r^* であらわすことにすれば、 $r < r^*$ の時

$$G(r) > 0$$

であるから r は増加して r^* へ近付き、 $r > r^*$ ならば

$$G(r) < 0$$

であるから r は減少しつつ r^* へ近づく。いずれにせよ r は均衡値 r^* へと収束。しかも一旦 r が r^* に達したら、 r^* にとどまろうとする。故に r^* は安定的である。

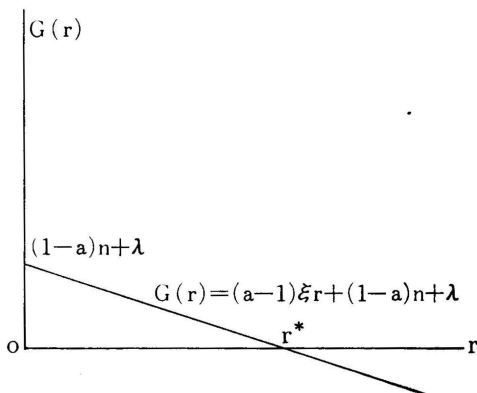
ところで $r = r^*$ あれば、経済は黄金時代にあるのであるが、それは次のようにしてたしかめることができる。

$r = r^*$ の時 $G(r) = 0$ であるから、(Ⅲ)の左辺にこれを代入すると、

$$G(y) - G(k) = 0$$

となる。しかるに $G(y) - G(k) = G(y/k) = G(Y/K)$ であるから、これは

図 1



Y/K が constant なることにほかならない。従って $r=r^*(\text{constant})$ であることとあわせると、利潤分配率 rK/Y も constant となって、経済は黄金時代にあるといえることができる。

そもそも r^* は r が最終的に到達する値であるから、 r が途中の過程で取る経路については r^* から我々は何も知ることができない。これを知るためには微分方程式(6)を解かなければならない。(6)を変形すると微分方程式

$$\frac{dr}{dt} - \{(1-a)n + \lambda\}r - (a-1)\xi r^2 = 0$$

を得る。これはベルヌーイ型の微分方程式である。この方程式の解は

$$r = \frac{1}{Be^{-\{(1-a)n + \lambda\}t}} + \frac{(1-a)\xi}{(1-a)n + \lambda} \quad (B \text{ は任意定数}) \cdots \cdots (7)$$

で与えられる。この解において t を限りなく大きくすれば、確かに r は

$$r^* = \frac{(1-a)n + \lambda}{(1-a)\xi} = \frac{n}{\xi} + \frac{\lambda}{(1-a)\xi}$$

へと収束する。

さて、黄金時代において他の変数 y , k , Y , K , w 等はいかなる変化をするであろうか。まず (IV) の r に $r^* = \frac{n}{\xi} + \frac{\lambda}{(1-a)\xi}$ を代入すると、微分方程式

$$G(k) = \frac{\lambda}{1-a}$$

を得るから、これを解くことによって k の経路を求めることができる。その解は

$$k = k_0 e^{\frac{\lambda}{1-a}t}$$

である。ここで k_0 は k の初期値である。

次に (IV) と (I) から

$$G(y) = a\xi r + \lambda - an \cdots \cdots (8)$$

を得る。これも r^* を代入すると

$$G(y) = \frac{\lambda}{1-a}$$

となるので、解は y_0 を初期値として、

$$y = y_0 e^{\frac{\lambda}{1-a}t}$$

である。

Y と K については

$$Y = Ly = L_0 e^{nt} y_0 e^{\left(\frac{\lambda}{1-a}\right)t} = Y_0 e^{\left(\frac{\lambda+n(1-a)}{1-a}\right)t}$$

$$K = Lk = L_0 e^{nt} k_0 e^{\left(\frac{\lambda}{1-a}\right)t} = K_0 e^{\left(\frac{\lambda+n(1-a)}{1-a}\right)t}$$

を得る。ここで Y_0 , K_0 はそれぞれ $L_0 y_0$, $L_0 k_0$ を置き換えたもので, Y , K の初期値であることも明らかであろう。

最後に w の経路を求めておこう。(II) より

$$G(w) = G(y) = \frac{\lambda}{1-a}$$

であるから, w の経路も k , y の経路と同様に,

$$w = w_0 e^{\frac{\lambda}{1-a}t}$$

である。

ただし, ここで注意しなければならないのは, 上に求めた k , y , K , Y , w の経路は黄金時代における経路であるということである。黄金時代に達する迄の過程でこれらの変数が辿る経路は, まず k と y については(IV)と(8)の r に r^* ではなく(7)の r を代入して, これらの微分方程式を解くことにより求めなければならない。他の変数についても同様の手続を取れば, 解が得られる。しかし, ここではそれらの解を求める必要もないと思われるので省略する。

資本蓄積の黄金律

経済は黄金時代にあることがわかったので, 次に一人あたり消費を最大にする時, 利潤率と総所得の成長率, 貯蓄率と資本の分け前がいかなる関係にあるかを検討しよう。

総消費 C は, 総所得から総貯蓄を差し引いたものである。

$$C = Y - S = Y - \xi r K$$

従って一人あたりの消費はこれを L で除することによって求められる。

$$c = \frac{C}{L} = \frac{Y}{L} - \xi r \frac{K}{L} = y - \xi r k$$

経済は黄金時代であるから、 $r = \frac{n}{\xi} + \frac{\lambda}{(1-a)\xi}$ である。これを上の

r に代入して、

$$c = y - \left(n + \frac{\lambda}{1-a} \right) k$$

を得る。 C が最大となる時、即ち一人あたり消費を最大にする時、

$$\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{dy}{dk} - \left(n + \frac{\lambda}{1-a} \right) = 0$$

である。故に

$$\frac{dy}{dk} = n + \frac{\lambda}{1-a}$$

である。しかるに既に述べた如く、 $\frac{dy}{dk} = r$ であったから、

$$r = n + \frac{\lambda}{1-a}$$

が成立する。ここで $n + \frac{\lambda}{1-a}$ は総所得 Y と総資本 K の成長率にほかならない。従って次のことが言える。

I 経済が黄金時代にある時、労働者一人あたりの消費を最大にすれば、利潤率は総所得と資本の成長率に等しい。

ところ、で r はもともと $\frac{n}{\xi} + \frac{\lambda}{(1-a)\xi}$ であったのだから、これが $n + \frac{\lambda}{1-a}$ に等しいということは、 $\xi = 1$ なることである。これはつまり

$$S = \xi r K = r K$$

となることであって、貯蓄総額は利潤総額に等しくなることを示している。但し注意しなければならないのは、これだけでは利潤がすべて貯蓄されるとは言えない事である。この式はあくまでも、貯蓄と利潤の総額が等しいという事をあらわすのみである。そこで次のことが言える。

II 黄金時代においては、貯蓄率と資本の分け前は等しい。

I と II を合わせたものが資本蓄積の黄金律（新古典派定理）である。この定理

をもう少し現実的に言い換えれば、国民の一人一人の消費を最大にしようとするならば、即ち国民に最大の福祉を得させるためには、所得と資本ストックの成長率を利潤率に等しく、又貯蓄量は利潤総額に等しく保つことが必要であるということである。これは必要条件であるから、そうすれば必ず極大消費が得られるというものではないが、しかし、これらの条件が満足されない限り極大利潤は得られない。

以上の証明は、生産関数としてコブ・ダグラス型のものを採用したモデルによって行ったが、一般的な生産関数による証明は前記フェルプスの論文や T. W. Swan の論文 (“Of Golden Ages and Production Functions” *Economic Development with Special Reference to East Asia*, St. Martin's Press, 1964) その他多くの成長理論に関する論文や書物に含まれている。(例えば和田貞夫『経済成長の基礎理論』昭和44年、ダイヤモンド社、浜田宏一、『経済成長と国際資本移動』昭和42年、東洋経済新報社)