Backward Stochastic Differential Equations and Solutions

泉, 優行

https://doi.org/10.15017/4060006

出版情報：Kyushu University, 2019, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　　名	泉　優行
論　文　名	Backward Stochastic Differential Equations and Solutions （後退確率微分方程式と解に関する研究）
論文調査委員	主　査　　九州大学　　　　　教授　　谷口説男 副　査　　九州大学　　　　　教授　　長田博文 副　査　　九州大学　　　　　教授　　稲濱譲 副　査　　九州大学　　　　　教授　　白井朋之

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

後退確率微分方程式（Backward Stochastic Differential Equation。以下 BSDE と称する。）は、数理ファイナンスにおいて重要な問題である、条件付き請求権の価格に対する複製ポートフォリオとそのためのヘッジポートフォリオの構築を実現する確率微分方程式である。BSDE は市場の完備性に関わらず利用できるため、実務上も重要となっている。その研究は、1970 年代末に Bismut により研究の端緒が開かれ、1990 年代から精力的に研究が続けられている。

BSDE は、確率微分を用いて

$$dY_t=-f(t, Y_t, Z_t)dt+Z_t^*dW_t, \quad Y_T=\xi$$

と表される。満期時 T に支払われる条件付き請求権の額が ξ、Y_t が複製ポートフォリオ、Z_t がヘッジポートフォリオである。被積分関数はすべて時間発展に順じているが、ヘッジポートフォリオ Z_t は終端条件である条件付き請求権 ξ を実現するための制御として現れる、方程式にとっては陰な確率過程である。通常の確率微分方程式の解は Y_t だけからなるが、BSDE の解は Z_t も含めた組 (Y_t ,Z_t) からなる。Z_t の存在が解析を難しくしている。

本研究者は、 まず、ジェネレータ f がリプシッツ連続でないが線形増大であるときに BSDE が p-乗可積分な解を持つことを示した。 確率微分方程式の先行研究に鑑み、線形増大条件下で p-乗可積分な解が存在することは自然な予想であり、本研究者の成果はこの予想を肯定的に解決するものである。さらに、裁定価格などの様々な量が解からなる多項式の期待値として実現されることを考えれば、任意次数の可積分性を保証することは実用上も重要である。

本研究者以前に、f がリプシッツ連続な場合は、1990 年代後半に El Karoui らが p-乗可積分な解の存在と一意性を示している。また f はリプシッツ連続ではないが線形増大の場合には、同時期に Lepeltier-San Martin が 2 乗可積分な解の解の存在を示し、2010 年代になって、$1<p\leqq 2$ の場合に Chen が p-乗可積分な解の存在を証明し、その後 Fan-Jiang が $p>2$ の場合にも解の存在を示した。Lepeltier-San Martin や Chen の手法は、f をリプシッツ連続な関数で近似をし、極限移行するという構成的なものであったが、この手法の $p>2$ への拡張は難しいと考えられていた。Fan-Jiang は停止時刻を用いた、p-乗可積分な解の存在を示すためだけの特殊な手法であった。本研究者は、Chen によるアプリオリ評価を詳細化、一般化することで、f のリプシッツ連続な近似列が駆動する BSDE の解が適当なバナッハ空間でコーシー列となることを導き出し、それにより極限となる元の BSDE の p-乗可積分な解の存在を証明した。これは、拡張は難しいと考えられていた手法を正当化する、直接的な解の構成となっており、解のより詳細な解析と実際的な応用を可能とするものでもある。

本研究者はつぎに、BSDE の解のマリアバン解析の意味での微分可能性について新たな結果を得

ている。価格の初期値などのパラメータの変動に対する感度を表すグリークと呼ばれる指標の計算においてポートフォリオのマリアバン微分が重要な役割を果たす。その意味で BSDE の解がマリアバン微分可能であるかどうかは、純粋理論の側面からのみならず、応用の側面からも重要な課題である。Pardoux-Peng、El Karoui-Peng-Quenez、Lin による先行研究がある。 ただし、f に課す条件が制約的であったり、マリアバン微分の可積分性が 2 乗可積分に限られたりしていた。本研究者は、1 階以上のマリアバン微分はすべてヒルベルト空間値の線形な BSDE を満たすことに着目し、前段で述べた解の具体的な構成方法を援用することにより、2 階までのマリアバン微分可能性、さらにマリアバン微分の p-乗可積分性を証明した。先に述べたように、価格の期待値表現などへの応用を思えば、任意の可積分性を持つことを証明することは不可欠である。

本研究者は、さらにこの可微分性と可積分性を明らかにする過程で、一般には微分回数が上がるたびに終端条件項に低階のマリアバン微分の多項式が現われ、3 階以上の場合はその制御には技術的な困難さを伴うこと、このため、より高階の微分可能性を論ずるためには付加的な条件が必要であることを見出している。そしてその付加的な条件として、f が z 成分に関し 2 次多項式となっていること、もしくは Z_t の 1 階マリアバン微分が有界であることが十分条件となることを示している。また、方程式としては陰に定まる Z_t が、ξ と Y_t のマリアバン微分を用いて具体的に決定できることも証明している。

以上の結果は、先行結果をより一般化、深化する成果であり、また一般化における問題点を明らかにし、解決のための十分条件を提示した示唆に富む結果である。確率解析の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。