九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Discrete approximations for determinantal point processes on continuum spaces and their applications

長田, 翔太

https://doi.org/10.15017/4060005

出版情報：Kyushu University, 2019, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　名	長田翔太
論　文　名	Discrete approximations for determinantal point processes on continuum spaces and their applications （連続空間上の行列式点過程に対する離散近似とその応用）
論文調査委員	主　査　　九州大学　　教授　白井朋之 副　査　　九州大学　　教授　稲濱譲 副　査　　九州大学　　教授　原隆 副　査　　慶応義塾大学　　教授　種村秀紀

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

点過程とは空間内のランダムな点配置のことで，理論と応用の両面から広く研究されてきた．行列式点過程は，量子力学におけるフェルミオン粒子系を記述するため，ユークリッド空間上のフェルミオン点過程として,1970 年代に Macchi により導入され,2000 年頃 Soshnikov や Shirai-Takahashi らにより，相関関数が局所トレース族の積分作用素の核関数の行列式として表される点過程として一般の空間上に抽象化された．連続空間上ではランダム行列の固有値やある種のガウス型解析関数のランダム零点を，また離散空間上ではポアソン化されたランダムヤング図形・一様全域木などを例として含む重要な点過程のクラスとして認識され，数学や物理の分野との関連で様々な角度から研究が進められてきた．近年では，機械学習などの応用分野でも重要な点過程として注目されている．本論文の内容は,「行列式点過程が独立な点過程であるポアソン点過程（連続空間）もしくはベルヌイ系（離散空間）にどれくらい近いか？」という基本的な問題について，確率論的・エルゴード理論的な考察を行ったものである．これらの独立性に関する性質を調べることは，確率論およびエルゴード理論における極限定理の研究において本質的であるとともに，無限粒子系の時間発展の問題においても極めて重要な役割を果たすことが知られている.本論文では,上記問題に関連して，以下の 3 つのテーマが論じられている．

（i）一つ目は末尾自明性と呼ばれる性質で，独立な場合には Kolmogorov の 0-1 法則に代表される重要な性質である．点過程の場合には，任意の有限領域の外側の点配置に対して可測な事象，つまり空間的には無限遠の情報だけで決まってくるような事象の確率は 0 か 1 しかない（末尾自明）という性質である．離散空間上の行列式点過程の場合には，Lyons らによって末尾自明性が示されていたが，連続空間の場合は未解決であった．本論文ではその問題を解決した．その証明のために，連続空間の分割の細分列に対する行列式点過程の離散化列を考察しているが，直ちに思いつく離散化では行列式点過程の性質を保たないため，分割の細分に応じたハール関数系で核関数をフーリエ変換することで，行列式構造を保つ離散化を巧みに構成している．その系として，元の行列式点過程の相関関数とその離散化との間にパーセバル型の等式を示した．このようにして離散化された行列式点過程が末尾自明性をもつことと，空間の細分列に関するマルチンゲール収束定理を用いて，連続空間における行列式点過程の末尾自明性を一般の設定で証明した．この結果は，Journal of Statistical Physics(2018)に出版済みである．この離散化のテクニックは，行列式点過程の一般化である連続空間上の α 行列式点過程においてもなされ,樹木による離散表現として拡張されている．この結果は RIMS Kôkyûroku Bessatsu に受理され，出版予定である．

(ii) d 次元ユークリッド空間上の行列式点過程は，核関数がフーリエ変換で与えられて平行移動不変な場合，その確率分布は空間の平行移動に関して不変になる．そのような点過程は R^d の作用をもつ測度論的力学系の不変測度として捉えることができる．測度論的力学系の同型問題はエルゴード理論では基本的な重要問題で，von Neumann や Kolmogorov 以来，古くから研究されている．測度論的力学系が同型ならば，等しい Kolmogorov-Sinai エントロピーを持つが，逆は一般には成り立たないことが知られている．しかし，ベルヌイ系と呼ばれる独立性の非常に強いクラスに制限すると，Kolmogorov-Sinai エントロピーが同型不変量を与えるという結果が Ornstein によって示され，Ornstein の同型定理と呼ばれている．また，連続空間上では定常ポアソン点過程のエントロピーは無限大で，全て同型であることが知られている．本論文では，連続空間上の核関数がフーリエ変換で与えられる行列式点過程は,すべて定常ポアソン過程に同型であることを証明した.この事実は，離散空間上のエントロピー有限の場合には，定常行列式点過程がベルヌイ系であることに対応しており，Steif-Lyons，Shirai-Takahashi らによって離散行列式点過程の場合に示された結果の連続版であると言える．証明は(i)で述べた離散近似の手法を用いて，性質のよい離散の行列式点過程を構成し，離散行列式点過程のベルヌイ性や Ornstein の同型定理などを用いてなされている．
(iii)無限粒子系の時間発展の問題において,点過程に対する対数微分は無限次元の確率微分方程式のドリフト項を表現するために重要な量である．無限粒子の場合はその存在や具体的表示を与えることは自明ではないが，Gibbs 点過程の場合は DLR 方程式を介して，またランダム行列の固有値に関連する点過程の場合には対数ポテンシャルのある種の極限として対数微分の具体形が知られている．本論文では，点過程に対する任意の相関関数の存在と対数微分の存在を仮定すると，点過程の弱い意味（Georgii の意味）での Gibbs 性，つまり任意の有界領域においてポアソン点過程に関して絶対連続性であること，が導かれることを示した．さらに，同様の仮定のもとで，1 次元の場合には局所密度関数が連続であることを示し，無限粒子系の時間発展を定義するために必要な点過程に対応する Dirichlet 形式の可閉性が従うことを示した．また，この一般論を実ランダム行列に付随する行列式点過程およびその一般化などに適用した．

以上の結果は，点過程および無限粒子系の理論的研究の分野において基本的かつ重要な結果であると同時に，エルゴード理論の分野においても価値あるすぐれた業績と認められる．
よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．