

Discrete approximations for determinantal point processes on continuum spaces and their applications

長田, 翔太

<https://doi.org/10.15017/4060005>

出版情報 : Kyushu University, 2019, 博士 (数理学) , 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名 : 長田翔太

論文名 : Discrete approximations for determinantal point processes on continuum spaces and their applications

(連続空間上の行列式点過程に対する離散近似とその応用)

区分 : 甲

論文内容の要旨

申請者は、これまでに行列式点過程とその 1 パラメータ補間である α 行列式点過程の研究を行った。

完備可分距離空間上の集積点を持たない非負整数値測度の集合に漠位相を備えたものを配置空間と呼ぶ。点過程とは配置空間上の確率測度であり、相関関数が与えられた核関数の行列式で表される点過程を行列式点過程という。例えば、ランダム行列の固有値分布、Uniform Spanning Tree, Schur process, Uniform Lozenge Tiling など様々な対象の中に現れる構造である。1 つ目は連続空間上の行列式点過程であり、2 つ目以降は離散空間上の行列式点過程である。

行列式点過程は斥力が働く粒子系を表しており、各点に存在する粒子の個数は、1 つ以下である。つまり、粒子の多重点を持たない。この性質は、特に離散空間上の行列式点過程では威力を発揮し、実際、興味深い性質で離散空間しか知られていないものがいくつも存在した。申請者は、その中でも、連続空間上の行列式点過程の tail 自明性と Bernoulli 性 (Poisson 性) を証明した。また、tail 自明性の証明の際に鍵となったツリー表現を α 行列式点過程に拡張した。さらに、ユークリッド空間上の行列式点過程の Gibbs 性を示した。その応用として、ランダム行列に関する実軸上の行列式点過程に付随するディクレ形式が可閉であることを示した。

1. [α 行列式点過程のツリー表現]

相関関数が核関数の α 行列式で与えられる点過程を α 行列式点過程という。 α 行列式は、 $\alpha = -1$ のとき行列式、 $\alpha = 1$ のときパーマネントであり、それぞれ行列式点過程 (フェルミオン点過程)、パーマネント点過程 (ボゾン点過程) に対応している。前者は粒子間に斥力が働く点過程、後者は引力が働く点過程を表している。また、 α 行列式点過程は $\alpha \rightarrow 0$ で無相関である Poisson 点過程となる。 α 行列式点過程の難しさは、行列式点過程と違い一般に多重点を持ちうることである。申請者は、一般の連続集合上の α 行列式点過程に対して、ツリー表現と呼ばれる相関関数の α 行列式構造を保った離散近似を構成した。

行列式点過程の tail 自明性、Bernoulli 性を示した際の証明の骨子は、ツリー表現を介することで、離散行列式点過程の性質をマルチンゲール収束定理や Ornstein の同型理論に乗せて連続まで持ち上げることであった。本結果によって、tail 自明性に関しては、離散の結果が証明できれば連続に持ち上げることができる。

2. [tail 自明性]

有限領域には依らない事象を tail 事象と呼び、tail 事象の確率が 0 または 1 の値しかとらない時、点過程は tail 自明性を持つという。この性質は独立確率変数列における Kolmogorov の 0-1

法則に相当する．離散行列式点過程の tail 自明性は白井・高橋, Lyons により示されたが, 連続 DPP においては 2003 年に Lyons が Conjecture として提示し, 以来, 永らく未解決であった．申請者は連続行列式点過程の tail 自明性を証明した．

3. [行列式点過程の Bernoulli 性]

整数格子上またはユークリッド空間上の定常な点過程を, 平行移動を変換としてもつ測度保存力学系とみる．整数格子上の定常点過程が Bernoulli 性を持つとは, エルゴード理論の意味で直積確率空間とその上のシフトに同型なことである．Bernoulli 性を持つ定常点過程においては, Ornstein の同型定理により, Kolmogorov-Sinai エントロピーの等値性が同型性の必要十分条件になる．また, 整数格子上の定常点過程において, Bernoulli 性は tail 自明性の十分条件である．白井・高橋や Lyons-Steif では整数格子上の定常行列式点過程の Bernoulli 性が証明されている．Ornstein の同型定理は連続でも成り立ち, 定常 Poisson 点過程はすべてエントロピー無限大であり互いに同型であることが知られている．申請者は, 核関数がフーリエ変換で与えられるユークリッド空間上の定常行列式点過程に対して, Bernoulli 性の連続版である定常 Poisson 点過程との同型を示した．

4. [行列式点過程の Gibbs 性]

離散集合上およびユークリッド空間上の行列式点過程において, 核関数のスペクトルが 1 を含まない場合には Dobrushin-Lanford-Ruelle 方程式を満たすことが知られている．この性質はカノニカル Gibbs 性と呼ばれ, 点過程から定まるディリクレ形式の可閉性に関係する．一方で, ランダム行列に関連する行列式点過程はスペクトルが 1 を含むためこの一般論は適用できない．申請者はユークリッド空間上の行列式点過程に対して, Log 微分と呼ばれる reduced Campbell 測度の超関数の意味での微分の存在から Papangelou 密度関数という条件付局所密度の存在という意味での Gibbs 性が従うことを示した．さらに実軸上の点過程においては Papangelou 密度関数が連続になることを示した．その応用として, スペクトルが 1 を含む実軸上の行列式点過程に対して, ディリクレ形式の可閉性を示した．