

On some relations and generators of multiple zeta values

村上, 拓也

<https://doi.org/10.15017/4060004>

出版情報 : Kyushu University, 2019, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名	村上 拓也			
論 文 名	On some relations and generators of multiple zeta values (多重ゼータ値の種々の関係式と生成系について)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	金子昌信
	副 査	東北大学	教授	大野泰生
	副 査	九州大学	准教授	斎藤新悟
	副 査	近畿大学	准教授	井原健太郎

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は、村上拓也氏が博士課程在籍中に行った、多重ゼータ値の関係式や生成系についての様々な研究をまとめたものである。論文の実質部分は4部に分かれ、うち2部は共著論文として欧文学術雑誌に公表済み及び受理済み、残り2部のうち1部は共著論文として投稿中、1部は単著論文として投稿中である。

多重ゼータ値とはリーマンゼータ関数の2以上の整数点での値を多重級数に一般化したある実数であり、その研究はオイラーにさかのぼるが、数学や物理学の様々な分野との関係が注目され活発に研究されだしたのはこの四半世紀ほどのことである。とくに、異なるインデックスを持つ多重ゼータ値の間の代数関係式や線型関係式のありようが、様々な数学的、物理学的対象の構造を反映していることが徐々に明らかになっており、多重ゼータ値の関係式を発見、証明することは多重ゼータ値研究の一つの重要な側面であると言える。

本論文の Part I,II は準備の章であり、Part III において、村原英樹との共同研究の成果である、「制限和公式」の一般化が述べられている。多重ゼータ値の重さ、深さを固定したものの和がリーマンゼータ値になる、というのが「和公式」として知られる古典的結果であるが、これが様々な一般化、精密化されており、本論文では、金子・山本修司の「積分級数関係式」と呼ばれる関係式族を用いて、制限和公式として知られる関係式を一般化した（実際にはこの制限和公式は「弱大野関係式」と呼ばれる大きな関係式族の特殊な場合になっており、今回の一般化も弱大野関係式から導くことも出来る）。そうして、この一般化された関係式族が、「弱大野関係式」と等価な、通常の双対の代わりに Hoffman 双対を用いて定式化された「大野型関係式」と著者らが呼んでいる関係式族と同値であることも証明している。また、類似の（全く同じ形を持つ）関係式族を有限多重ゼータ値の世界でも証明しており、それは大野型関係式との等価性を同様の方法で示すという証明方法である。

有限多重ゼータ値とは、各素数 p に対し、多重ゼータ値を定義する級数を p が分母に現れる直前で打ち切った有限和（有理数）を法 p で考え、さらにそれらを、有限個の素数の違いを無視しつつ全ての素数で一斉に考えるような枠組み（直積を直和で割る）で考えたものである。これには「対称多重ゼータ値」という、実数類似も考えられており、本論文では両者を共に有限多重ゼータ値と呼び、Part III, Part V で得ている有限多重ゼータ値に関わる結果は、いずれも両者で成り立つことを示している。

Part IV においては、広瀬稔、村原英樹との共同研究の成果である、多重ゼータ値の巡回的類似というものを考察して、興味深い関係式を導いている。証明に、先に触れた積分級数関係式の巡回

版（今回新しく証明されたもの）が用いられる．等号付き多重ゼータ値（定義の和の範囲に等号を許したもの）の巡回和公式と呼ばれる関係式が大野泰生，若林徳子らによって証明されているが，これの一般化にもなっているほか，導分関係式の別証明をこの巡回類似より導いている．

Part V は一般導分関係式とか擬導分関係式と呼ばれる関係式の新たな証明に関するもので，金子，村原英樹との共同研究である．金子により予想され，田中立志によって証明されていた一般導分関係式を，そこに現れる作用素の新しい具体的な記述を与えることにより，証明をかなり見通しよいものにした．もともとこの一般化は，**Connes-Moscovici** のホップ代数を手本に考案されたもので，この結果が，多重ゼータ値とこのホップ代数のより実質的な関係に何か示唆を与えるものであるか，興味のあるところである．また，この新しい記述により，有限多重ゼータ値の擬導分関係式を新たに定式化し，証明している．

Part VI が本論文の主結果とも言うべき，村上氏単独の仕事で，最近 **Hoffman** によって導入された，多重 t -値という対象に関する結果である．多重 t -値とは，多重ゼータ値を定義する級数の和を奇数のみに制限して走らせて得られるもので，分子に符号を許す「オイラー値」（またはレベル 2 多重ゼータ値）の一次結合で書ける．**Part VI** の主結果は，インデックスに 1 が現れない（“maximal height”）多重 t -値は多重ゼータ値の一次結合で書けること，そうして多重ゼータ値はすべて，インデックスに 2 と 3 しか現れない（すなわち特殊な maximal height の）多重 t -値の一次結合で書けること，である．後者の結果は，多重ゼータ値に関する有名な **Brown** の定理（**Hoffman** 予想）の一つの類似であり，一見多重ゼータ値の世界を飛び出しているかに見える多重 t -値が，あるものは多重ゼータ値の中に住み，**Hoffman** 予想と同じ形のインデックスで多重ゼータ値の空間の生成系を構成しうる，というのは興味深い結果と言える．証明は **Brown** と同様の枠組み，すなわちモチビック多重ゼータ値というものをを用いる．これは代数幾何の深い背景に基づく枠組みであるが，それを使う立場に立てば，線形代数的な考察に終始するとも言え，今回の結果はうまくその成果を利用している．とくに **Brown** の仕事を承けて **Glanois** が行った，（モチビック）オイラー値の一次結合が多重ゼータ値になるための必要十分条件を与えた結果がきれいに使える．面倒な計算の末に各項が都合の良い形にまとまっていくのは玄妙とも言え，多重 t -値という対象のある種の筋の良さを感じさせる結果である．**Brown** が証明を完結させるために，古典的（実数世界の）多重ゼータ値のある関係式（それは **Zagier** によって証明された）が必要であったように，今回も多重 t -値の類似の関係式が必要になる．それも，技術的には幾分面倒になるが，**Zagier** の手法を踏襲することで証明されている．

最初に述べたように，以上の研究成果のうち，二つは既に学術雑誌に公表および受理済みであり，他の二つについても投稿中で，いずれ一定以上の水準の学術誌に受理されることは間違いないと思われる．

これらの研究結果は整数論，とくに多重ゼータ値の分野において価値あるすぐれた業績と認められる．よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格があるものと認める．