

On some relations and generators of multiple zeta values

村上, 拓也

<https://doi.org/10.15017/4060004>

出版情報 : Kyushu University, 2019, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名 : 村 上 拓 也

論 文 名 : On some relations and generators of multiple zeta values
(多重ゼータ値の種々の関係式と生成系について)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

本稿は、多重ゼータ値や有限多重ゼータ値の新たな関係式、および多重 t 値に関する研究結果のまとめである。多重ゼータ値および多重ゼータスター値とは、リーマンゼータ関数の正整数点での値の一般化であり、ある種の多重級数で定義される実数値のことである。Euler が深さ 2 の多重ゼータ値に関して研究したことに端を発する多重ゼータ値に関する研究は、1990 年代に Zagier, Hoffman らにより一般の深さのものについて研究がされたのをきっかけとして、活発に研究がなされるようになった。この多重ゼータ値は、整数論のみならず、結び目理論や共形場理論、量子物理など様々な分野と関連していることがわかっている。

1994 年に Zagier が多重ゼータ値により張られるベクトル空間の次元を予想し、それは 2000 年代に Terasoma, Deligne, Goncharov らにより部分的に解決された。Zagier, Butet de Monvel, Ecalle らは独立に、級数表示と積分表示を用いた 2 つの正規化の間の関係を表す正規化基本定理を得た。正規化基本定理と、有限複シャッフル関係式から得られる関係式から、多重ゼータ値の \mathbb{Q} 上の関係式がすべて得られると予想されている。Yamamoto は、ある種の半順序集合に付随する積分を定義し、多重ゼータ値、多重ゼータスター値を含む対象を扱う枠組みを考案した。さらに、Kaneko と Yamamoto は、その枠組みを用いて積分級数等式を証明し、有限複シャッフル関係式のもと、積分級数等式が正規化基本定理と等価であることを示した。

一方近年、多重ゼータ値の類似物である 2 種類の有限多重ゼータ値についても研究がさかんに行われている。A-有限多重ゼータ値とは、各素数 p に対し、多重ゼータ値の定義における級数を分母に p が現れる直前で打ち切った有限和を法 p で考えたものを、有限個の違いを無視し全素数で一斉に考えた環の元としてとらえたものである。このような枠組みは Zagier によって導入された。また、対称多重ゼータ値は、多重ゼータ値のある積和である実数を π の 2 乗を法として考えたもので、多重ゼータ値と A-有限多重ゼータ値の橋渡しを担うものとして、Kaneko と Zagier によって導入されたものである。A-有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値が生成する \mathbb{Q} 代数は同型であることが予想されている。

本論文では、積分級数等式を用い、制限和公式と呼ばれる多重ゼータ値の関係式を一般化したものを導いた。さらに、この一般化で得られる関係式族が多重ゼータ値の Ohno-type 関係式で得られる関係式族と等価であることを証明した。Weak-Ohno 関係式と Ohno-type 関係式は同値であることが知られていることから、新しく導いた関係式と Weak-Ohno 関係式が同値であることも分かる。さらに、有限多重ゼータ値においても同様の関係式が Ohno-type 関係式と同値であることを示した。

また、多重ゼータ値の巡回的類似について考察した。この巡回的類似により得られる 2 つの関係式族のうちの 1 つは、多重ゼータスター値の巡回和公式の自然な一般化になっている。また、この関係式族から導分関係式の別証が得られた。

次に、Kaneko が予想し Tanaka が証明した一般導分関係式について、一般導分演算子の具体的な明示式を与えることで、より簡明な別証を得た。それだけでなく、有限多重ゼータ値における同様の関係式を導いた。

Hoffman は、インデックスの成分として 2 または 3 のみからなる多重ゼータ値が多重ゼータ値の張る \mathbb{Q} 上線形空間を生成することを予想し、Brown がモチビック多重ゼータ値の理論を用いてそれを証明した。Glanois は多重ゼータ値の Level 2 以上のものについても考察し、多重ゼータ値の張る \mathbb{Q} 上線形空間の別の生成系の 1 つを発見した。

本論文では、Hoffman が導入した多重ゼータ値の変種の 1 つである多重 t 値のインデックスの成分がすべて 2 以上のものが多重ゼータ値の線形和で表されることを、Glanois の判定条件を利用することで証明した。また、多重ゼータ値の張る \mathbb{Q} 上線形空間の生成系の 1 つとして、インデックスの成分がすべて 2 または 3 のみからなる多重 t 値がとれることを証明した。これらの結果は、Brown 同様モチビック多重ゼータ値の理論を用いることで証明される。