Variational problem of anisotropic energy and its discretization

軸丸, 芳揮

https://doi.org/10.15017/4060002

出版情報：Kyushu University, 2019, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	軸丸　芳揮		
論　文　名	Variational problem of anisotropic energy and its discretization （非等方的エネルギーに対する変分問題とその離散化）		
論文調査委員	主　査　　九州大学	教授	小磯　深幸
	副　査　　九州大学	教授	勝田　篤
	副　査　　九州大学	准教授	大津　幸男
	副　査　　名古屋大学	准教授	内藤　久資
	副　査　　株式会社デンソー	課長	小川　洋

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

(n+1)次元ユークリッド空間における n 次元閉超曲面のうち、囲む(n+1)次元体積一定条件下で n 次元表面積を最小にする問題は等周問題と呼ばれる古典的な問題であり、解は n 次元標準球面であることが知られている。より一般に、「最小」を「臨界点」に変えれば、解は平均曲率が至る所一定の閉超曲面となる。特に 3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面は、シャボン玉の数理モデルと呼ばれることがある。これは、シャボン玉の重さを無視すれば、シャボン玉に働く力は表面張力のみと見なせ、液体の表面張力は表面積に比例するからである。一方、結晶やある種の液晶の形は、Gibbs (1875-1878) によってモデル化された表面の向きに依存するエネルギーの、囲む体積を変えない変分に対する臨界点として与えられる。このようなエネルギーは非等方的エネルギーと呼ばれる。エネルギー最小解は Wulff 図形と呼ばれ、その存在や一意性などの等周問題的性質は Taylor (1978) らにより幾何学的測度論の視点から研究がなされてきたが、微分幾何学、特に変分問題の視点からの最小解に限らないすべての臨界点に対する研究は、Reilly (1976) あるいは Koiso-Palmer (2005) の研究に端を発する。臨界点は、非等方的平均曲率一定曲面として特徴づけられる。古典的な結果としては、「ある種の制約条件下において平均曲率一定閉超曲面は球面に限るか」という一意性問題に対する肯定的な解答を与える Hopf の定理（条件：種数 0（2 次元）、1956）、Alexandrov の定理（条件 : 埋め込み (n 次元)、1958）、Barbosa-do Carmo の定理（条件 : 安定 (n 次元)、1984）が挙げられるが、近年同様の制約条件下において「非等方的平均曲率一定閉超曲面が Wulff 図形に限るか」という一意性に関する問題の研究が進展してきた（Koiso-Palmer, 2010, He-Li-Ma-Ge, 2009, Palmer, 1998, 2012, Koiso, 2019）。

一方、離散微分幾何学は、コンピュータでの可視化や数値解析上の応用の観点から現在活発に研究が進められている分野である。近年の離散微分幾何学の進展は、Bobenko-Pinkall (1996) らによる方程式の可積分性に着目したアプローチと、Pinkall-Polthier (1993) などに代表される変分法を用いたアプローチがあり、離散化したい対象に応じて異なるアプローチがとられている。

本学位論文では、非等方的エネルギーに対する変分問題、及びその離散化により以下に述べる研究成果を得ている。

(1) 非等方的平均曲率一定閉超曲面に対する非一意性（第 1 章）: 小磯深幸教授（九州大学）との共同研究で、非等方的エネルギーを定めるエネルギー密度に凸性条件を課さない場合には、Hopf 型、Alexandrov 型の一意性定理が成り立たない例が存在することを示した。すなわち、2 次元の場

合は種数 0 かつ非等方的平均曲率一定な閉曲面で Wulff 図形でないものが存在するようなエネルギー密度関数が存在することを示した。また、埋め込まれた非等方的平均曲率一定閉超曲面で、Wulff 図形でないものが存在するようなエネルギー密度関数が存在することを示した。凸性を課さないエネルギー密度関数を考察することは、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の曲面に対する面積汎関数を非等方的エネルギーとして定式化した際に現れる密度関数の非凸性などの視点からも重要である。本研究では、区分的に滑らかな超曲面を一般化した超曲面のクラスを考えることの重要性も示している。さらにこれらの例を用いることで、非等方的平均曲率流に対する自己相似縮小解の非一意性を証明している。

(2) 離散非等方的平均曲率一定曲線・曲面の定式化と安定性（第 2 章）: 非等方的平均曲率一定超曲面の離散化は、可積分系に着目した定式化には困難を伴うため、これまで研究が進められていなかった。本研究においては非等方的エネルギーに対する変分問題に着目し、その離散化を定式化した。これは、Pinkall-Polthier (1993) によって導出された余接公式（面積勾配）を非等方的エネルギー勾配に一般化した公式に基づいており、Polthier-Rossman (2002) により導入された離散平均曲率一定曲面の概念を包括する定式化を与えるものである。本研究成果はローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率一定曲面の離散化をも包括した定式化であり、その意味でも重要である。さて、離散超曲面の中で最も簡単なものは平面内の離散曲線であるが、その「頂点における法ベクトル、曲率、線素とは何か」という自然な問いが極めて重要である。本論文では、離散曲線に対する長さ汎関数の第一変分公式を導き、そこから曲率ベクトルの情報を取り出し、頂点における線素の定義の非一意性という特性に着目して既存の種々の離散曲率の概念が統一的に説明できることを示し、曲率ベクトルの方向を頂点における法ベクトルとみなすことで平行曲線に対する Steiner 型の公式が導かれることを示した。さらに、囲む面積を変えない変分に対する長さ汎関数の臨界点が（凸とは限らない）正多角形に限ることを証明し、先に導出した頂点における法ベクトルを用いて変分ベクトル場を法方向と接方向に分解した形での長さの第 2 変分公式を導き、凸でない正多角形が不安定であることを証明した。これらは、埋め込まれた凸多角形を扱う従来の凸幾何学では扱われなかった対象である。一般の非等方的エネルギーに対する変分問題については、離散非等方的曲率一定曲線を定める Euler-Lagrange 方程式の保存則を示し、その応用として、与えられた平面凸集合を含む最小 n 多角形（n は 3 以上の整数を任意に固定したもの）の性質を述べた Chakerian-Lange の定理(1971) の別証明を与えた。また、非等方的エネルギーの第 2 変分公式に基づき、離散非等方的曲率一定曲線が不安定であるための十分条件を与えた。さらに、離散曲面（単体的曲面）に対しても、非等方的平均曲率一定の概念を曲線の場合と同様に変分原理に基づいて定式化し、離散平均曲率一定曲面の十分小さな部分は安定であるという Polthier-Rossman (2002) の結果を非等方の場合に一般化した。また、エネルギー勾配の離散化により、一般に計算で求めることが難しい対象、例えば非等方的 Plateau 問題の数値解を、ソフトウェア JavaView を用いて可視化した。

以上の結果は、微分幾何学並びに離散幾何学の分野において価値ある業績と認められる。
よって、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。