Variational problem of anisotropic energy and its discretization

軸丸, 芳揮

https://doi.org/10.15017/4060002

出版情報：Kyushu University, 2019, 博士（機能数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式３）

氏　　名　：軸丸　芳揮

論 文 名　：Variational problem of anisotropic energy and its discretization
（非等方的エネルギーに対する変分問題とその離散化）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

(n＋1)次元ユークリッド空間内における n 次元閉超曲面のうち，囲む（n+1）次元体積一定条件下で表面積を最小にする問題は等周問題と呼ばれる古典的な問題である．特に 3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面は，面積汎関数の，囲む体積を変えない変分に対する臨界点として特徴づけられ，しばしばシャボン玉の数理モデルとして取り上げられる．これは，十分小さなシャボン玉に対しては，表面張力は方向に依存せず，表面張力は面積に比例することによる．一方で，塩の結晶などの向きに依存した（非等方的な）表面張力をもつ対象は，Gibbs（1875-1878）によってモデル化されたように,非等方的エネルギーの囲む体積を変えない変分に対する臨界点として与えられ，さらに非等方的平均曲率一定曲面として特徴づけられる．そのエネルギー最小解は Wulff 図形と呼ばれ，その存在や一意性などの等周問題的性質は，Taylor（1978）などによって幾何学的測度論の視点から多くの研究がなされてきたが，微分幾何学，特に変分問題の視点から最小解に限らないすべての臨界点に対する研究は, Reilly (1976）あるいは Koiso-Palmer (2005）の研究に端を発する．
古典的には,「ある種の制約条件下において平均曲率一定曲面は球面に限るか」という一意性に関する Hopf の定理（条件：種数 0（2 次元），1989），Alexandrov の定理（条件：埋め込み（n 次元），1962），Barbosa-do Carmo の定理（条件：安定（n 次元），1984）が挙げられるが，近年同様の制約条件下において「非等方的平均曲率一定曲面が Wulff 図形に限るか」という一意性に関する問題の研究が盛んである（Koiso-Palmer, 2010, He-Li-Ma-Ge, 2009, Palmer, 1998, 2012, Koiso, 2019）．
他方で離散微分幾何学は，コンピューターでの可視化，また数値解析上の応用の観点から現在活発に研究が進められている分野である．近年の離散微分幾何学の進展は，Bobenko-Pinkall (1996）らによる方程式の可積分性に着目したアプローチと，Pinkall-Polthier (1993）などに代表される変分法を用いたアプローチがあり，離散化したい対象に応じて異なるアプローチがとられている．
本学位論文では，非等方的エネルギーに対する変分問題と，それらの離散化を変分法的に定式化することで以下の研究成果を得ている．

(1) 非等方的平均曲率一定閉超曲面に対する非一意性（第 2 章）: 小磯深幸教授（九州大学）との共同研究で, 非等方的エネルギーを定めるエネルギー密度に凸性条件を課さない場合には, Hopf 型, Alexandrov 型の一意性定理が成り立たない例が存在することを示した．すなわち，2 次元の場合は種数 0 かつ非等方的平均曲率一定な曲面で，Wulff 図形でないものが存在するようなエネルギー密度が存在することを示した．また，埋め込まれた非等方的平均曲率一定超曲面で，Wulff 図形でないものが存在するようなエネルギー密度が存在することを示した．凸性を課さないエネルギー密度関数を考察することは，ローレンツ・ミンコフスキー空間内の曲面に対する面積汎関数を非等方的エネルギーの文脈で定式化した際に現れる密度関数の非凸性などの視点から重要である．本研究で

は，区分的に滑らかな超曲面を一般化した超曲面のクラスを考えることの重要性も示している．さらにこれらの例を用いることで，非等方的平均曲率流に対する自己相似縮小解の非一意性を示した．

(2) 離散非等方的平均曲率一定曲線・曲面の定式化と安定性の問題（第 3 章）: 非等方的平均曲率一定曲面の離散化は，可積分系に着目した定式化は困難を伴うため，これまで研究が進められていなかったが，本研究において非等方的エネルギーに対する変分問題に着目した離散化を定式化した．これは，Pinkall-Polthier (1993) によって導出された余接公式（面積勾配）を非等方的エネルギー勾配に一般化した公式に基づき，Polthier-Rossman (2002) により導入された離散平均曲率一定曲面を包括する定式化を与えた．これはローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率一定曲面の離散化も包括した定式化であり，可積分系に着目した離散化との関連も興味深い対象である．最も簡単な場合は平面内の離散曲線であるが，その「頂点における法ベクトル，曲率，線素とは何か」という自然な問いが挙げられる．離散曲線に対する長さ汎関数の第一変分公式から曲率ベクトルの情報を取り出し，頂点における線素の非一意性という特性から，既存の離散曲率の概念が統一的に説明できることを示し，曲率ベクトルの方向を頂点における法ベクトルとみなすことで平行曲線に対する Steiner 型の公式が導かれることを示した．さらに，長さ汎関数の囲む面積を変えない変分に対する臨界点が（凸とは限らない）正多角形に限ることを証明し，先に導出した頂点における法ベクトルを用い，変分ベクトル場を法方向と接方向に分解した形での長さの第 2 変分公式を導き，凸でない正多角形が不安定であることを証明した．これらは微分幾何的手法に基づいて証明されるため，最小解に着目し，埋め込まれた凸多角形を扱う従来の凸幾何学では扱われない対象である．一般の非等方的エネルギーの場合においては，離散非等方的曲率一定曲線を定める Euler-Lagrange 方程式の保存則を示し，応用として，凸幾何学で古典的な離散等周問題の文脈で知られる Chakerian-Lange (1971) への別証明を与えた．また第二変分公式に基づき，離散非等方的曲率一定曲線が不安定であるための十分条件を与えた．離散曲面（単体的曲面）に対しては，非等方的平均曲率一定の概念を曲線の場合と同様に変分原理に基づいて定式化した．エネルギー勾配の文脈で離散化することにより，一般に計算で求めることが難しい対象，例えば非等方的 Plateau 問題の数値解を，ソフトウェア JavaView を用いて可視化した．また第二変分公式を導出し，エネルギー密度が凸性をもつ場合は，離散非等方的平均曲率一定曲面の十分小さな部分は安定であるという Polthier-Rossman (2002) の結果を一般化した．