最適化と方程式と不等式と

岩本, 誠一
九州大学大学院経済学研究院

https://doi.org/10.15017/3770

出版情報：經濟學研究. 71 (2/3), pp.1-44, 2005-03-25. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

最適化と方程式と不等式と

岩 本　誠 一

概 要

この報告では特定の数理計画問題を多面的に解き、方程式および不等式との関係を観る。ここでは、2 等式制約条件下で 3 次関数の最適化（最大化・最小化）を 3 変数に限定した標準的な問題として、基本対称問題とモーメント問題を解析的に解く。2 つの等式制約式は右辺定数 a, b を実パラメータとしていることから、最適解を不等式に反映することができる。また、実係数の 3 次代数方程式が 3 つの実数解をもつ必要十分条件を最適値関数から導く。さらに、3 次方程式の判別式との関係に触れる。

1　はじめに

右辺定数をパラメータとする最適化問題を解析的に解くことは、対応する不等式を導くことと同値である。これについては、1 パラメータの場合、多くの成果が得られてきた [5–7, 9–15]。特に、このとき、目的式と制約式を入れ替え、最適子 (Max, min) を交換して得られる逆問題との逆関係が導かれ、与えられた主問題との間に逆定理が成り立っている。

本報告では 2 つの等式制約に対応して、2 パラメータの場合について、その標準的な問題として基本対称問題とモーメント問題をいくつかの方法で解く。その際、3 次方程式による解法を述べ、対応する不等式・等式に言及する。

この報告では 3 変数に限定しているが、n 変数問題に対しては、動的計画法でも解かれる [2, 8]。

2　基本対称問題

この節では、次の基本対称問題の 4 つの解法を与える。4 つは、(1) 3 次方程式論、(2) 不等式論、(3) 1 変数化法 および (4) ラグランジュ乗数法である。

問題 1　（基本対称問題）　実定数 a, b を任意に与える。このとき、最大・最小問題

$$\begin{array}{lll} \text{Maxmize and minimize} & & xyz \\ \text{subject to} & \text{(i)} & x+y+z=a \\ & \text{(ii)} & xy+yz+zx=b \\ & \text{(iii)} & -\infty < x, y, z < \infty \end{array}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

2.1　3次方程式

Solution 1　(3次方程式論)

3変数実数値関数 $f(x,y,z)$ は、任意の対を入れ替えても値が不変のとき、**対称** (symmeteric) という。対称関数の中でも特に

$$\begin{aligned}\sigma_1(x,y,z) &= x+y+z\\ \sigma_2(x,y,z) &= xy+yz+zx\\ \sigma_3(x,y,z) &= xyz\end{aligned}$$

を1次、2次、3次の**基本対称式** (elementary symmetric polynomial) という。この問題は3次までの基本対称関数を含んでいるので、3次**基本対称問題** (elementary symmetric problem) と呼ぼう。

まず、次の不等式が成り立つことに注意する。すなわち、不等式

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \quad on \ \ R^3$$

が成り立つ。等号は $x=y=z$ のときに限り成立する。したがって、$a^2 \geq 3b$ のとき、実行可能解が存在し、$a^2 < 3b$ のとは実行可能解が存在しない。以下、実数からなる任意の三つ組み (x,y,z) に対して

$$x+y+z=a, \quad xy+yz+zx=b, \quad xyz=c$$

とおくと、x,y,z は t の3次方程式

$$(t-x)(t-y)(t-z)=0 \quad \text{すなわち} \ \ t^3-at^2+bt=c$$

の実数解である。以下、

$$f(t) := t^3-at^2+bt$$

とおく。3つの実数解をもつための必要十分条件は、$y=f(t)\ \ -\infty<t<\infty$ のグラフは、(t, y)-平面上で、横軸 t-軸に平行なグラフ $y=c$ と、重複を許して*3*点で交わることである。これを**3点交差性** (3 point corss) という。前者は原点を通り、

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} f(t)=-\infty$$

を満たす。したがって、*3*点交差性が成り立つためには、$y=f(t)$ の2つの極値（極小値 $\leq$ 極大値）が存在して、c の値が極小値と極大値の間にあること：

$$\text{極小値} \leq c \leq \text{極大値}$$

が必要十分である。すなわち、求める最大値、最小値はそれぞれ極大値と極小値である。

さて、極小値と極大値を与える点を $t=\alpha$ (極小点), $t=\beta$ (極大点)$(\leq \alpha)$ とすると、$\alpha,\ \beta$ は2次方程式

$$f'(t)=0 \quad \text{すなわち} \ \ 3t^2-2at+b=0$$

の2つの実数解である：

$$\alpha+\beta=\frac{2a}{3}, \qquad \alpha\beta=\frac{b}{3}.$$

具体的には

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \quad \beta = \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

になる。極値の存在性より、$a^2-3b \geq 0$ でなければならない。また、$f(t)=f(\beta)$ の $t=\beta$ での *2* 重解性より、$f(t)-f(\beta)=0$ は *2* 重解 $t=\beta$ の他に、第 *3* の解 $t=\beta' := a-2\beta$ をもつことが分かる。したがって、求める最大点 $\boldsymbol{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ は 3 つの値 β, β, β' で定まる。同様に，最小点 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ は 3 つの値 α, α ,$\alpha' := a-2\alpha$ で定まる。

1. $a^2 > 3b$ のとき
以下、 α, β を

$$\alpha := \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \quad \beta := \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

とし、α', β' を

$$\alpha' := \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}, \quad \beta' := \frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

とする。

$$\boldsymbol{x}^* = (\beta,\beta,\beta'), (\beta,\beta',\beta), (\beta',\beta,\beta) \text{ のとき，最大値 } M = \beta^2\beta'$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\alpha,\alpha,\alpha'), (\alpha,\alpha',\alpha), (\alpha',\alpha,\alpha) \text{ のとき，最小値 } m = \alpha^2\alpha'.$$

以下では、記法 $[a,b,c]$ は 3 つのベクトル (a,b,c), (b,c,a) または (c,a,b) を表すものとする。これを**巡回ベクトル** (cycle vector) 記法という。$[a,b,c]=[b,c,a]=[c,a,b]$ だから、3 つのベクトルを表すのに、3 つの巡回ベクトル記法の 1 つを用いる。このとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
[a,b,c]+(d,e,f) &= [a+d,b+e,c+f] \\
[a,b,c]+(d,e,f) &= (d,e,f)+[a,b,c] \\
m[a,b,c] &= [ma,mb,mc] \qquad m \in R^1
\end{aligned}$$

$$[a,b,c]+(d,e,f) = (d,e,f)+[a,b,c] \tag{1}$$
$$m[a,b,c] = [ma,mb,mc] \qquad m \in R^1 \tag{2}$$

上記の最適解を巡回ベクトルで表すと、次になる。

$$\boldsymbol{x}^* = [\beta,\beta,\beta'] \text{ のとき，最大値 } M = \beta^2\beta'$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = [\alpha,\alpha,\alpha'] \text{ のとき，最小値 } m = \alpha^2\alpha'.$$

この最大値、最小値は a, b で表すと

$$M = \frac{-2a^3+9ab+2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27} \tag{3}$$
$$m = \frac{-2a^3+9ab-2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27} \tag{4}$$

になる。したがって、次の不等式が成り立つ：

$$m \leq c \leq M \qquad for \;\; a^2 \geq 3b \tag{5}$$

ただし

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx, \quad c = xyz.$$

この不等式 (5) は次の (6) に同値である。

《事実、

$$\frac{-2a^3 + 9ab - 2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}{27} \;\leq\; c \;\leq\; \frac{-2a^3 + 9ab + 2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}{27}$$

より

$$-2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b} \;\leq\; 3^3c + 2a^3 - 3^2ab \;\leq\; 2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}$$

である。したがって、

$$\left(3^3c + 2a^3 - 3^2ab\right)^2 \;\leq\; \left\{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}\right\}^2$$

i.e.,

$$\left(3^3c + 2a^3 - 3^2ab\right)^2 \;\leq\; 2^2(a^2 - 3b)^3$$

すなわち、これを整理すると、(6) が得られる。逆に、(6) から (5) が成り立つ。
》

$$a^2b^2 + 2 \cdot 3^2abc \geq 2^2a^3c + 2^2b^3 + 3^3c^2 \qquad for \;\; a^2 \geq 3b. \tag{6}$$

したがって

定理 *1*　3次元ユークリッド空間 R^3 上で次の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2 &+ 18(x+y+z)(xy+yz+zx)xyz \\ \geq\;\; & 4(x+y+z)^3xyz + 4(xy+yz+zx)^3 + 27(xyz)^2.\end{aligned} \tag{7}$$

等号は

$$x^2y + y^2z + z^2x = x^2z + y^2x + z^2y \tag{8}$$

のときに限り、成り立つ。すなわち、3変数のうち2つが等しいときである。

証明　実際、左辺 − 右辺 は

$$\{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)\}^2 \geq 0$$

になる。また

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$$

である。*(Remark 7* 参照*)*。　　　*Q.E.D.*

系 *1* 3次元ユークリッド空間 R^3 上で次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & (x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2+18(x+y+z)(xy+yz+zx)xyz \\ & -\{4(x+y+z)^3xyz+4(xy+yz+zx)^3+27(xyz)^2\} \\ = \ & \{(x-y)(x-z)(y-z)\}^2. \end{aligned} \tag{9}$$

ここで対称式・交代式および判別式についてまとめておこう ([17])。環 R 上に係数をもつ、文字（または変数、不定元、記号）$X_1,\cdots,X_n$ の多項式全体を、n 変数 $X_1,\cdots,X_n$ の**多項式環**といい、 $R[X_1,\cdots,X_n]$ で表す。整域 k における変数 $X_1,\cdots,X_n$ の多項式 $f(X_1,\cdots,X_n)$ で、変数 $X_1,\cdots,X_n$ の順序をすべての仕方で変えても同じ式になるものを $X_1,\cdots,X_n$ の**対称式** (symmetric polynomial (function)) という。$f(X_1,\cdots,X_n)$ がすべての奇置換で $-f(X_1,\cdots,X_n)$ に写されるとき、これを**交代式** (alternating polynomial (function)) という。$X_1,\cdots,X_n$ の対称式（交代式）$f(X_1,\cdots,X_n)$ において、$X_1,\cdots,X_n$ の代わりに k の元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ を代入したもの $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の対称式（交代式）という。
$(X-X_1)\cdots(X-X_n)$ を展開したときの X^{n-k} の係数を $(-1)^k\sigma_k$ とすれば

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum X_i = X_1+X_2+\cdots+X_n \\ \sigma_2 &= \sum X_iX_j = X_1X_2+X_1X_3+\cdots+X_{n-1}X_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &= X_1X_2\cdots X_n \end{aligned}$$

である。

定理 *2* ([17]) 対称式に関する基本定理 (fundamental theorem on symmetric polynomials) ϕ を n 変数多項式環 $k[Y_1,\cdots,Y_n]$ の元とすれば、$\phi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ もそうである。逆に $X_1,\cdots,X_n$ の任意の対称式は一意的に $\phi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ の形にあらわされる。すなわち、$X_1,\cdots,X_n$ の対称式の全体は $k[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n]$ にほかならない。

$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ を $X_1,\cdots,X_n$ の**基本対称式** (elementary symmetric polynomials) という。たとえば、$s_\nu=\sum X_i^\nu$ とすれば

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 \\ s_2 &= \sigma_1^2-2\sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3 \\ s_4 &= \sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4. \end{aligned}$$

基本対称式と s_ν との間には次の関係がある：

$$\begin{aligned} s_\nu-\sigma_1s_{\nu-1}+\sigma_2s_{\nu-2}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\sigma_{\nu-1}s_1+(-1)^\nu\sigma_\nu &= 0 \qquad \nu=1,2,\ldots,n \\ s_\mu-\sigma_1s_{\mu-1}+\cdots+(-1)^\mu\sigma_ns_{\mu-n} &= 0 \qquad \mu=n+1,n+2,\ldots \end{aligned}$$

これらを**Newtonの公式**という。

$X_1, \cdots, X_n$ の $n(n-1)/2$ 個の差の積 $p(X_1, \cdots, X_n) := (X_2-X_1)(X_3-X_1)\cdots(X_n-X_{n-1})$ は $X_1, \cdots, X_n$ の偶置換を施しても変わらないが、奇置換を施せば $-p$ になるから、$X_1, \cdots, X_n$ の交代式である。p をこれらの変数の**最簡交代式** (fundamental alternating polynomial) という。また、この式の作り方から p を $X_1, \cdots, X_n$ の**差積** (difference product) ともいう。標数 $\neq 2$ のとき、交代式 f は最簡交代式 p で割り切れ $f = ps$ とおけば、s は対称式になる。

最簡交代式の2乗 $D := p^2$ は対称式であるから、$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ の多項式となる。$D = 0$ は $X_1, \cdots, X_n$ のうち等しいものがあるための必要十分条件である。$x_1, \cdots, x_n$ が n 次代数方程式 $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ の根であるときの D をこの代数方程式の**判別式** (discriminant) という。判別式は方程式の係数で表される。たとえば

$$n = 2 \text{ ならば}, \quad a_0^2 D = a_1^2 - 4a_0a_1 \tag{10}$$

$$n = 3 \text{ ならば}, \quad a_0^4 D = a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2 \tag{11}$$

になる。

対称式に関する不等式としては、次が特に最適化問題に関係するであろう ([1,3,4, 16])。

定理 *3* ([1])

$$\sigma_{\nu-1}\sigma_{\nu+1} \ \leq \ \sigma_\nu^2 \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{12}$$

ただし、 $\sigma_0 = 1$ とする。

これから算術平均・幾何平均不等式

$$\sigma_1 \ \geq \ \sigma_n^{1/n} \quad on\ R^n \tag{13}$$

が得られる。なお、定理 3 の成立は、次の補題 1 に

$$f(x, y) = (x + r_1y)(x + r_2y)\cdots(x + r_ny) \quad \text{ただし } r_m \text{ はすべて実数}$$

を適用すれば、

$$\sigma_{\nu-1}x^2 + 2\sigma_\nu xy + \sigma_{\nu+1}y^2 = 0$$

が導かれることからわかる。

補題 *1*　方程式

$$f(x, y) = c_0x^m + c_1x^{m-1}y + \cdots + c_my^m \ = \ 0 \tag{14}$$

の解 x/y がすべて実数ならば、x, y で偏微分して得られるすべての方程式もそうである。

2.2 不等式

今度は、逆に不等式 (7) の成立を仮定して、$a^2 \geq 3b$ のとき、基本対称問題を解くことを考えよう。
さて、点 (x, y, z) が条件式 (i), (ii), (iii) を満たすとする。不等式 (7) より、xyz に関する 2 次不等式

$$27(xyz)^2 + 2(2a^3 - 9ab)xyz - (a^2b^2 - 4b^3) \leq 0 \tag{15}$$

が成り立つ。この 2 次不等式を解くと、

$$m \leq xyz \leq M$$

ただし

$$M := \frac{-2a^3 + 9ab + 2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}{27} \tag{16}$$

$$m := \frac{-2a^3 + 9ab - 2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}{27}. \tag{17}$$

しかも、上記の $\boldsymbol{x}^*$, $\hat{\boldsymbol{x}}$ は実行可能で、それぞれ M, m に到達している。すなわち、$\boldsymbol{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ を 3 つの値 β, β, $\beta' := a - 2\beta$ で定める。ただし

$$\beta := \frac{a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \quad \text{したがって} \quad \beta' = \frac{a + 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

このとき、$\boldsymbol{x}^*$ は制約条件 (i), (ii), (iii) を満たし、積は

$$x^*y^*z^* = M$$

になる。この $\boldsymbol{x}^*$ は等号条件 (8) を満たしている。
同様に，点 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ を 3 つの値 α, α, $\alpha' := a - 2\alpha$ で定める。ただし

$$\alpha := \frac{a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \quad \text{したがって} \quad \alpha' = \frac{a - 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

このとき、$\hat{\boldsymbol{x}}$ は制約条件を満たし、その積は

$$\hat{x}\hat{y}\hat{z} = m$$

になる。$\hat{\boldsymbol{x}}$ は等号条件を満たしている。
したがって、$\boldsymbol{x}^*$, M と $\hat{\boldsymbol{x}}$, m はそれぞれ最大解、最小解である。すなわち、不等式を既知として、最大・最小問題が解けることが示された。

2. $a^2 = 3b$ のとき
上記の最大解と最小解は一致して、唯一の実行可能解でもある：

$$\boldsymbol{x}^* = (a/3, a/3, a/3), \quad M = a^3/27.$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (a/3, a/3, a/3), \quad m = a^3/27.$$

3. $a^2 < 3b$ のとき

条件式 (i), (ii) を満たす実数の組 (x, y, z) は存在しない。最大値と最小値は存在しない。

End of Solution 1（3次方程式論）.

以下本文では、*Remark* とは今対象としている問題n または *Solution m* の中に配置されていて、チョット一言コメントする事項を指す。いわば問題を多面的に観たり、*Solution* を詳細に述べたりしている。たとえば、次の *Remark 1* は問題1（基本対称問題）の *Solution 1*（3次方程式論）に付随する注意を記している。

Remark 1 :

- $(a,\ b) = (4,\ 4)$ のとき

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3} = 2, \quad \beta = \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3} = 2/3$$
$$\alpha' = \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3} = 0, \quad \beta' = \frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3} = 8/3$$
$$\boldsymbol{x}^* = (8/3, 2/3, 2/3), (2/3, 8/3, 2/3), (2/3, 2/3, 8/3) \text{ のとき，最大値 } M = 32/27$$
$$\hat{\boldsymbol{x}} = (2, 2, 0), (0, 2, 2), (2, 0, 2) \text{ のとき，最小値 } m = 0.$$

巡回ベクトル記法で表すと、次になる。

$$\boldsymbol{x}^* = [8/3, 2/3, 2/3] \text{ のとき，最大値 } M = 32/27$$
$$\hat{\boldsymbol{x}} = 2[1, 1, 0] \text{ のとき，最小値 } m = 0.$$

- $(a,\ b) = (0,\ -1)$ のとき

$$\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta = \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$
$$\alpha' = \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3} = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \quad \beta' = \frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{ のとき，}$$
$$\text{すなわち } \boldsymbol{x}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}[2, -1, -1] \text{ のとき，最大値 } M = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right) \text{ のとき，}$$
$$\text{すなわち } \hat{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}[2, -1, -1] \text{ のとき，最小値 } m = \frac{-2}{3\sqrt{3}}.$$

- $(a,\ b)=(3,\ 3)$ のとき

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}=1,\quad \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}=1$$
$$\alpha'=\frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}=1,\quad \beta'=\frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}=1$$
$$\boldsymbol{x}^*=(1,1,1)\ \text{のとき，最大値}\ M=1$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}=(1,1,1)\ \text{のとき，最小値}\ m=1.$$

- $(a,\ b)=(0,\ 0)$ のとき

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}=0,\quad \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}=0$$
$$\alpha'=\frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}=0,\quad \beta'=\frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}=0$$
$$\boldsymbol{x}^*=(0,0,0)\ \text{のとき，最大値}\ M=0$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}=(0,0,0)\ \text{のとき，最小値}\ m=0.$$

- $(a,\ b)=(2,\ 2)$ のとき
  $a^2<3b$ より、最大値と最小値は存在しない。

- $(a,\ b)=(0,\ 1)$ のとき
  $a^2<3b$ より、最大値と最小値は存在しない。

End of Remark 1.

Remark 2 : 上記の、$a^2\geq 3b$ のときの最大解、最小解を (a,b) の関数で表すと、次になる。

$$\boldsymbol{x}^*(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3},\ \dfrac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)\\ \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3},\ \dfrac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)\\ \left(\dfrac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)\end{cases}$$

のとき、すなわち $\boldsymbol{x}^*(a,b)=\frac{a}{3}(1,1,1)-\frac{\sqrt{a^2-3b}}{3}[1,1,-2]$ のとき

$$\text{最大値}\ M\ =\ M(a,b)\ =\ \frac{-2a^3+9ab+2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27}.$$

ここに

$$\frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3} = \frac{b}{a+\sqrt{a^2-3b}},$$

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}\right) = \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{\sqrt{a^2-3b}}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a,b) = \begin{cases} \left(\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}\right) \\ \left(\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}\right) \\ \left(\frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}\right) \end{cases}$$

のとき、すなわち $\hat{\boldsymbol{x}}(a,b) = \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{\sqrt{a^2-3b}}{3}[1,1,-2]$ のとき

$$\text{最小値 } m = m(a,b) = \frac{-2a^3+9ab-2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27}.$$

ここに

$$\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3} = \frac{b}{a-\sqrt{a^2-3b}},$$

$$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}, \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}\right) = \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{\sqrt{a^2-3b}}{3}(1,1,-2).$$

このとき

$$\begin{aligned} M_b(a,b) &= \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3} \\ M_a(a,b) &= \frac{-2a^2+3b+2a\sqrt{a^2-3b}}{9} \\ &= -\left(\frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} m_b(a,b) &= \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3} \\ m_a(a,b) &= \frac{-2a^2+3b+2a\sqrt{a^2-3b}}{9} \\ &= -\left(\frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $D := \{(a,b) \mid a^2 \geq 3b\}$ 上の2つの C^1 級曲面、最大値曲面 $c = M(a,b)$ および 最小値曲面 $c = m(a,b)$、は次の**可逆性** (invertibility) をもつ。

1. 最大値曲面 $c = M(a,b) : D \to R^1$ は $a(\geq 0)$ を固定すると、区間 $I(a) := \left(0,\ \dfrac{a^2}{3}\right]$ 上で b の連続狭義増加である（この値域の区間を $J(a)$ とする。このとき、b の連続狭義増加関数 $c = M(a,b) =: M_a(b) : I(a) \to J(a)$ の逆関数を $b = M_a^{-1}(c) =: M^{-1}(a,c) : J(a) \to I(a)$ とする）。 区間 $I(a) := (-\infty,\ 0]$ 上で b の連続狭義減少である（この値域の区間を $J(a)$ とする。このとき、b の連続狭義減少関数 $c = M(a,b) =: M_a(b) : I(a) \to J(a)$ の逆関数を $b = M_a^{-1}(c) =: M^{-1}(a,c) : J(a) \to I(a)$ とする。$a(\geq 0)$ のとき、関数 $M^{-1}(a,c) = b$ は c に対して2通りの $b = b_1,\ b_2$ が定まることがある)。
   $a(\leq 0)$ を固定すると、区間 $I(a) := \left(-\infty,\ \dfrac{a^2}{3}\right]$ 上で b の連続狭義減少である（この値域の区間を $J(a)$ とする。このとき、b の連続狭義減少関数 $c = M(a,b) =: M_a(b) : I(a) \to J(a)$ の逆関数を $b = M_a^{-1}(c) =: M^{-1}(a,c) : J(a) \to I(a)$ とする。すなわち、2変数関数 $b = M^{-1}(a,c)$ が一意に定義される)。
   最小値曲面 $c = m(a,b) : D \to R^1$ は $a(\geq 0)$ を固定すると、区間 $I(a) := \left(-\infty,\ \dfrac{a^2}{3}\right]$ 上で b の連続狭義増加である（この値域の区間を $J(a)$ とする。このとき、b の連続狭義増加関数 $c = m(a,b) =: m_a(b) : I(a) \to J(a)$ の逆関数を $b = m_a^{-1}(c) =: m^{-1}(a,c) : J(a) \to I(a)$ とする。$a(\geq 0)$ のとき、1変数関数 $b = m^{-1}(a,c)$ が一意に定義される）。$a(\leq 0)$ を固定すると、区間 $I(a) := \left(0,\ \dfrac{a^2}{3}\right]$ 上で b の連続狭義減少である（この値域の区間を $J(a)$ とする。このとき、b の連続狭義増加関数 $c = m(a,b) =: m_a(b) : I(a) \to J(a)$ の逆関数を $b = m_a^{-1}(c) =: m^{-1}(a,c) : J(a) \to I(a)$ とする）。区間 $I(a) := (-\infty,\ 0]$ 上で b の連続狭義減少である（この値域の区間を $J(a)$ とする。このとき、b の連続狭義増加関数 $c = m(a,b) =: m_a(b) : I(a) \to J(a)$ の逆関数を $b = m_a^{-1}(c) =: m^{-1}(a,c) : J(a) \to I(a)$ とする。 $a(\leq 0)$ のとき、1変数関数 $b = m^{-1}(a,c)$ が2通りに定義されることがある)。
   このとき、値域の区間 $J(a)$ を a で表すには（の陽的表現を求めるには）b に関する3次方程式の解析解を求める必要がある。未完。
2. 両曲面は $b(\geq 0)$ を固定すると、区間の和集合 $I(b) := \left(-\infty,\ -\sqrt{\dfrac{b}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{b}{3}},\ \infty\right)$ 上で a の連続狭義減少である（1変数関数 $a = M^{-1}(c,b),\ a = m^{-1}(c,b)$ が一意に定義される)。このとき、値域 $J(b)$ の陽的表現は未完。
3. 両曲面は $b(< 0)$ を固定すると、区間 $I(b) := (-\infty, \infty)$ 上で a の連続狭義減少である（1変数関数 $a = M^{-1}(c,b),\ a = m^{-1}(c,b)$ が一意に定義される）。このとき、値域の区間 $J(b)$ の陽的表現は未完。

End of Remark 2.

Remark 3 : $a^2 = 3b + 1$ 、すなわち、 $b = \dfrac{a^2 - 1}{3}$ の場合、*Remark 2* の最大解、最小解

は1変数 a で表される。

$$\boldsymbol{x}^*(a) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1)-\frac{1}{3}[1,1,-2]=\begin{cases}\left(\dfrac{a-1}{3},\ \dfrac{a-1}{3},\ \dfrac{a+2}{3}\right)\\[2mm]\left(\dfrac{a-1}{3},\ \dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{a-1}{3}\right)\\[2mm]\left(\dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{a-1}{3},\ \dfrac{a-1}{3}\right)\end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値関数}\ c \;=\; M(a) \;=\; \frac{a^3-3a+2}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{a-1}{3},\ \frac{a-1}{3},\ \frac{a+2}{3}\right) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1)-\frac{1}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}[1,1,-2]=\begin{cases}\left(\dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{a-2}{3}\right)\\[2mm]\left(\dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{a-2}{3},\ \dfrac{a+1}{3}\right)\\[2mm]\left(\dfrac{a-2}{3},\ \dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{a+1}{3}\right)\end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値関数}\ c \;=\; m(a) \;=\; \frac{a^3-3a-2}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{a+1}{3},\ \frac{a-2}{3}\right) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}(1,1,-2).$$

特に、$(a,b)=(1,0)$ および $(a,b)=(-1,0)$ の場合は次になる。

1. $(a,b)=(1,0)$ の場合

$$\boldsymbol{x}^*(1,0) \;=\; \frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{3}[1,1,-2]=\begin{cases}(0,\ 0,\ 1)\\(0,\ 1,\ 0)\\(1,\ 0,\ 0)\end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値}\ M(1,0)=0.$$

ここに

$$(0,\ 0,\ 1) \;=\; \frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(1,0) \;=\; \frac{1}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}[1,1,-2]=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{-1}{3}\right)\\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{-1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)\\ \left(\dfrac{-1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)\end{cases}$$

のとき

$$最小値\ m(1,0)=-\frac{4}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{-1}{3}\right) \;=\; \frac{1}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}(1,1,-2).$$

2. $(a,b)=(-1,0)$ の場合

$$\boldsymbol{x}^*(-1,0) \;=\; \frac{-1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{3}[1,1,-2]=\begin{cases}\left(\dfrac{-2}{3},\ \dfrac{-2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)\\ \left(\dfrac{-2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{-2}{3}\right)\\ \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-2}{3},\ \dfrac{-2}{3}\right)\end{cases}$$

のとき

$$最大値\ M(-1,0)=\frac{4}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{-2}{3},\ \frac{-2}{3},\ \frac{1}{3}\right) \;=\; \frac{-1}{3}(1,1,1)-\frac{1}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(-1,0) \;=\; \frac{-1}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}[1,1,-2]=\begin{cases}(0,\ 0,\ -1)\\ (0,\ -1,\ 0)\\ (-1,\ 0,\ 0)\end{cases}$$

のとき

$$最小値\ m(-1,0)=0.$$

ここに

$$(0,\ 0,\ -1) \;=\; \frac{-1}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}(1,1,-2).$$

End of Remark 3.

Remark 4 : $a^2 = 3b + 4$ 、すなわち、 $b = \dfrac{a^2 - 4}{3}$ の場合、*Remark 2* の最大解、最小解は1変数 a で表される。

$$\boldsymbol{x}^*(a) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{2}{3}[1,1,-2] = \begin{cases} \left(\dfrac{a-2}{3},\ \dfrac{a-2}{3},\ \dfrac{a+4}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a-2}{3},\ \dfrac{a+4}{3},\ \dfrac{a-2}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a+4}{3},\ \dfrac{a-2}{3},\ \dfrac{a-2}{3}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値関数 } c \;=\; M(a) \;=\; \frac{a^3 - 6a + 16}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{a-2}{3},\ \frac{a-2}{3},\ \frac{a+4}{3}\right) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{2}{3}[1,1,-2] = \begin{cases} \left(\dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{a-4}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{a-4}{3},\ \dfrac{a+2}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a-4}{3},\ \dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{a+2}{3}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値関数 } c \;=\; m(a) \;=\; \frac{a^3 - 6a - 16}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{a+2}{3},\ \frac{a-4}{3}\right) \;=\; \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{2}{3}(1,1,-2).$$

特に、$(a,b) = (2,0)$ および $(a,b) = (-2,0)$ の場合は次になる。

1. $(a,b) = (2,0)$ の場合

$$\boldsymbol{x}^*(2,0) \;=\; \frac{2}{3}(1,1,1) - \frac{2}{3}[1,1,-2] = \begin{cases} (0,\ 0,\ 2) \\ (0,\ 2,\ 0) \\ (2,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値 } M(2,0) = 0.$$

ここに

$$(0,\ 0,\ 2) \;=\; \frac{2}{3}(1,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(2,0) = \frac{2}{3}(1,1,1)+\frac{2}{3}[1,1,-2] = \begin{cases} \left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{-2}{3}\right) \\ \left(\frac{4}{3},\ \frac{-2}{3},\ \frac{4}{3}\right) \\ \left(\frac{-2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値 } m(2,0) = -\frac{32}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1,1,1)+\frac{2}{3}(1,1,-2).$$

2. $(a,b)=(-2,0)$ の場合

$$\boldsymbol{x}^*(-2,0) = \frac{-2}{3}(1,1,1)-\frac{2}{3}[1,1,-2] = \begin{cases} \left(\frac{-4}{3},\ \frac{-4}{3},\ \frac{2}{3}\right) \\ \left(\frac{-4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{-4}{3}\right) \\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{-4}{3},\ \frac{-4}{3}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値 } M(-2,0) = \frac{32}{27}.$$

ここに

$$\left(\frac{-4}{3},\ \frac{-4}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}(1,1,1)-\frac{2}{3}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(-2,0) = \frac{-2}{3}(1,1,1)+\frac{2}{3}[1,1,-2] \begin{cases} (0,\ 0,\ -2) \\ (0,\ -2,\ 0) \\ (-2,\ 0,\ 0) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値 } m(-2,0) = 0.$$

ここに

$$\left(\frac{-4}{3},\ \frac{-4}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}(1,1,1)+\frac{2}{3}(1,1,-2).$$

End of Remark 4.

Remark 5 : $a^2=4b$ 、すなわち、 $\sqrt{a^2-3b}=\pm\frac{a}{2}$ の場合、*Remark 2* の最大解、最小解は 1 変数 a で表される。

1. $a^2 = 4b,\ a \geq 0$ 、すなわち、 $\sqrt{a^2 - 3b} = \dfrac{a}{2} \geq 0$ の場合

$$\boldsymbol{x}^*(a) \ = \ \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{a}{6}[1,1,-2] = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{6},\ \dfrac{a}{6},\ \dfrac{2a}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a}{6},\ \dfrac{2a}{3},\ \dfrac{a}{6}\right) \\ \left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{a}{6},\ \dfrac{a}{6}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値関数 } c \ = \ M(a) \ = \ \frac{a^3}{2\cdot 3^3}.$$

ここに

$$\left(\frac{a}{6},\ \frac{a}{6},\ \frac{2a}{3}\right) \ = \ \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{a}{6}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a) \ = \ \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{a}{6}[1,1,-2] \ = \ \begin{cases} \left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2},\ 0\right) \\ \left(\dfrac{a}{2},\ 0,\ \dfrac{a}{2}\right) \\ \left(0,\ \dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値関数 } c \ = \ m(a) \ = \ 0.$$

ここに

$$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right) \ = \ \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{a}{6}(1,1,-2).$$

2. $a^2 = 4b,\ a \leq 0$ 、すなわち、 $\sqrt{a^2 - 3b} = -\dfrac{a}{2} \geq 0$ の場合

$$\boldsymbol{x}^*(a) \ = \ \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{a}{6}[1,1,-2] \ = \ \begin{cases} \left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2},\ 0\right) \\ \left(\dfrac{a}{2},\ 0,\ \dfrac{a}{2}\right) \\ \left(0,\ \dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値関数 } c \ = \ M(a) \ = \ 0.$$

ここに

$$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2},\ 0\right) \ = \ \frac{a}{3}(1,1,1) + \frac{a}{6}(1,1,-2).$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a) = \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{a}{6}[1,1,-2] = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{6},\ \dfrac{a}{6},\ \dfrac{2a}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a}{6},\ \dfrac{2a}{3},\ \dfrac{a}{6}\right) \\ \left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{a}{6},\ \dfrac{a}{6}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値関数 } c = m(a) = \frac{a^3}{2\cdot 3^3}.$$

ここに

$$\left(\frac{a}{6},\ \frac{a}{6},\ \frac{2a}{3}\right) = \frac{a}{3}(1,1,1) - \frac{a}{6}(1,1,-2).$$

End of Remark 5.

Remark 6 : 3 変数実数値関数 $f(x,y,z)$ は

$$f(x,y,z) = f(y,z,x) \quad \forall(x,y,z)$$

を満たすとき、**巡回的** (cyclic) という。対称関数は巡回的である。たとえば、3 次までの基本対称関数 $\sigma_1(x,y,z) = x+y+z,\quad \sigma_2(x,y,z) = xy+yz+zx,\quad \sigma_3(x,y,z) = xyz$ はいずれも巡回的である。このうち、2 つを等号制約とし、残りを目的式とする最適化問題においては、(x,y,z) が実行可能ならば、(y,z,x), (z,x,y) も実行可能である。1 つが最適ならば、他の 2 つも最適である。

End of Remark 6.

Remark 7 : **不等式の証明　(I) : 直接法**

$$a := x+y+z,\quad b := xy+yz+zx,\quad c := xyz$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2 + 18(x+y+z)(xy+yz+zx)xyz \\ &= ab(ab+18c) \\ \text{右辺} &= 4(x+y+z)^3xyz + 4(xy+yz+zx)^3 + 27(xyz)^2 \\ &= 2^2a^3c + 2^2b^3 + 3^3c^2. \end{aligned}$$

さて

$$\begin{aligned} ab &= (x+y+z)(xy+yz+zx) \\ &= x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 3xyz \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= ab(ab+18c) \\
&= (x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+3xyz) \\
&\quad \times(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+21xyz) \\
&= (x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)^2 \\
&\quad +24xyz(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2) \\
&\quad +63x^2y^2z^2.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&(a+b+b+d+e+f)^2 \\
= \; & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \\
&+2ab+2ac+2ad+2ae+2af \\
&+2bc+2bd+2be+2bf \\
&+2cd+2ce+2cf \\
&+2de+2df \\
&+2ef
\end{aligned}$$

を用いると、次になる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= x^4y^2+x^2y^4+y^4z^2+y^2z^4+z^4x^2+z^2x^4 \\
&\quad +2x^3y^3+2x^2y^3z+2x^2y^2z^2+2x^3yz^2+2x^4yz \\
&\quad +2xy^4z+2xy^3z^2+2x^2y^2z^2+2x^3y^2z \\
&\quad +2y^3z^3+2xy^2z^3+2x^2y^2z^2 \\
&\quad +2xyz^4+2x^2yz^3 \\
&\quad +2x^3z^3 \\
&\quad +24xyz(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2) \\
&\quad +63x^2y^2z^2 \\
&= x^4y^2+x^2y^4+y^4z^2+y^2z^4+z^4x^2+z^2x^4 \\
&\quad +2x^3y^3+2y^3z^3+2z^3x^3 \\
&\quad +2x^4yz+2xy^4z+2xyz^4 \\
&\quad +2xy^2z^3+2xy^3z^2+2x^2yz^3+2x^3yz^2+2x^2y^3z+2x^3y^2z \\
&\quad +24xyz(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2) \\
&\quad +69x^2y^2z^2.
\end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned}
(X+Y+Z)^3 &= X^3+Y^3+Z^3 \\
&\quad +3X^2Y+3XY^2+3Y^2Z+3YZ^2+3Z^2X+3ZX^2 \\
&\quad +6XYZ
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= 4a^3c+4b^3+27c^2 \\
&= 4x^4yz+4xy^4z+4xyz^4 \\
&\quad + 12x^3y^2z+12x^2y^3z+12xy^3z^2+12xy^2z^3+12x^3yz^2+12x^2yz^3 \\
&\quad + 24x^2y^2z^2 \\
&\quad + 4x^3y^3+4y^3z^3+4z^3x^3 \\
&\quad + 12x^3y^2z+12x^2y^3z+12xy^3z^2+12xy^2z^3+12x^3yz^2+12x^2yz^3 \\
&\quad + 24x^2y^2z^2 \\
&\quad + 27x^2y^2z^2 \\
&= 4x^4yz+4xy^4z+4xyz^4 \\
&\quad + 4x^3y^3+4y^3z^3+4z^3x^3 \\
&\quad + 24x^3y^2z+24x^2y^3z+24xy^3z^2+24xy^2z^3+24x^3yz^2+24x^2yz^3 \\
&\quad + 75x^2y^2z^2.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\text{左辺}-\text{右辺} \\
=\ & x^4y^2+x^2y^4+y^4z^2+y^2z^4+z^4x^2+z^2x^4-2x^4yz-2xy^4z-2xyz^4 \\
& + 2xy^2z^3+2xy^3z^2+2x^2yz^3+2x^3yz^2+2x^2y^3z+2x^3y^2z \\
& - 2x^3y^3-2y^3z^3-2z^3x^3-6x^2y^2z^2 \\
=\ & x^4(y-z)^2+y^4(z-x)^2+z^4(x-y)^2 \\
& + 2xy^2z^3+2xy^3z^2+2x^2yz^3+2x^3yz^2+2x^2y^3z+2x^3y^2z \\
& - 2x^3y^3-2y^3z^3-2z^3x^3-6x^2y^2z^2 \\
=\ & x^4(y-z)^2+y^4(z-x)^2+z^4(x-y)^2 \\
& + 2x^2y^2(yz+zx-xy-z^2)+2y^2z^2(zx+xy-yz-x^2)+2z^2x^2(xy+yz-zx-y^2) \\
=\ & x^4(y-z)^2+y^4(z-x)^2+z^4(x-y)^2 \\
& + 2x^2(y-z)y^2(z-x)+2y^2(z-x)z^2(x-y)+2z^2(x-y)x^2(y-z) \\
=\ & \{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}^2 \\
\geq\ & 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。等号は

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$$

すなわち

$$x^2y+y^2z+z^2x=x^2z+y^2x+z^2y$$

のときに限り成り立つ。実際、不等式

$$\begin{aligned}
\text{左辺}-\text{右辺} &= \{(x-y)(y-z)(z-x)\}^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。　　$Q.E.D.$

注意　左辺も右辺も *3* 次の基本対称式

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx, \quad c = xyz$$

の対称関数である。したがって 差 := 左辺 − 右辺 もそうである。差 は

$$\text{差積} = (y - x)(z - x)(z - y)$$

の平方で表されている。

不等式の証明　(II)：代数的方法
ここでは因数定理を用いる。

定理 *4*（因数定理）α が多項式 $f(x)$ の解である必要十分条件は、$x - \alpha$ が $f(x)$ の因数（約数）であることである。

系 *2* $(x - \alpha)^2$ が多項式 $f(x)$ の因数である必要十分条件は、$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ が成り立つことである。

さて

$$a := x + y + z, \quad b := xy + yz + zx, \quad c := xyz$$

とおこう。左辺から右辺を引いた差を 2 変数 x, y を固定して 1 変数 z の実数値関数 f と考える：

$$f(z) = f(z; x, y) := a^2b^2 + 18abc - (2^2a^3c + 2^2b^3 + 3^3c^2).$$

このとき、次が成り立つ：

$$f(y) = 0 \tag{18}$$

$$f'(y) = 0 \tag{19}$$

$$f(z; 0, 1) = (z - 1)^2z^2. \tag{20}$$

したがって、(18), (19) および 系2より、z の多項式 $f(z)$ は $(z - y)^2$ で割り切れる。対称性より、$(z - x)^2$ でも $(y - x)^2$ でも割り切れる。ゆえに、3つの積でも割り切れ、商は定数 C になる。すなわち

$$f(z; x, y) = C(y - x)^2(z - x)^2(z - y)^2$$

と表される。(20) より、

$$(z - 1)^2z^2 = C(1 - 0)^2(z - 0)^2(z - 1)^2 \qquad \text{すなわち} \qquad C = 1.$$

ゆえに

$$f(z) = (y - x)^2(z - x)^2(z - y)^2$$

となる。したがって

$$\text{左辺} - \text{右辺} \ \geq \ 0$$

が示された。等号は2つの変数が等しいときに限り、成り立つ。　　$Q.E.D.$

注意　性質 (18), (19), (20) は容易に確かめられる。

End of Remark 7.

Remark 8 : 算術平均・幾何平均不等式より、次の不等式が成り立つ。

$$(1+x)(1+y)(1+z) \ \leq \ \left(1+\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \qquad x \geq -1,\ y \geq -1,\ z \geq -1. \tag{21}$$

等号は

$$x = y = z$$

のときに限り、成り立つ。不等式 (21) は次になる。

$$xy+yz+zx+xyz \ \leq \ \frac{(x+y+z)^2}{3}+\frac{(x+y+z)^3}{27} \qquad x \geq -1,\ y \geq -1,\ z \geq -1 \tag{22}$$

この不等式はどのような最適化問題を解くのに役立つだろうか？

End of Remark 8.

Remark 9 : 不等式による１つの接近

既存の（どこまでかが問題だが、一応「有名な」）不等式を用いて、問題１の最大・最小化問題の最大値・最小値に近づけるかを試行してみよう。

いま、点 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ が制約条件式 (i), (ii) を満たすとしよう。このとき $a^2 \geq 3b$ である。

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

より

$$x^2+y^2+z^2 = a^2-2b.$$

すなわち、点 $\boldsymbol{x}$ は、原点 $O=(0,0,0)$ を中心とし、半径 $r_1 := \sqrt{a^2-2b}\left(\geq \frac{1}{\sqrt{3}}|a| \geq 0\right)$ の球面 $\mathcal{S}_1$ 上にある。制約条件 (i), (ii) ：

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ xy+yz+zx=b \end{cases} \tag{23}$$

は

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2b \end{cases} \tag{24}$$

に同値である。さらに

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}(a^2-3b)$$

が成り立つ。すなわち、点 $\boldsymbol{x}$ は、点 $P=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ を中心とし、半径 $r_2:=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{a^2-3b}(\geq 0)$ の球面 $\mathcal{S}_2$ 上にもある。条件式 (i), (ii) より

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \;=\; a^2-2b \\ \left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2 \;=\; \frac{2}{3}(a^2-3b) \end{cases} \tag{25}$$

が成り立つ。逆に、$a\neq 0$ のときは、(25) より、式 (i), (ii) が導かれる。すなわち、$a\neq 0$ のとき、制約条件式 (i), (ii) は2つの球面が交わる円を表している。$a=0$ のときは2つの球面は一致している（同一である）。

さて、制約条件式を満たす点 $\boldsymbol{x}$ に算術平均・幾何平均不等式を適用すると、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3^2}(a^2-3b)\right)^3 &= \left(\frac{\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2}{3}\right)^3 \\ &\geq \left(x-\frac{a}{3}\right)^2\left(y-\frac{a}{3}\right)^2\left(z-\frac{a}{3}\right)^2 \\ &= \left(xyz-\frac{a}{3}(xy+yz+zx)+\left(\frac{a}{3}\right)^2(x+y+z)-\left(\frac{a}{3}\right)^3a^3\right)^2 \\ &= \left(xyz-\frac{1}{3}ab+\frac{2}{3^3}a^3\right)^2. \end{aligned}$$

等号は、等式制約条件式 (i), (ii) に加えて、

$$\left(x-\frac{a}{3}\right)^2=\left(y-\frac{a}{3}\right)^2=\left(z-\frac{a}{3}\right)^2$$

が成り立つときに限り、成り立つ。

この不等式を xyz について解くと、

$$\begin{aligned} &\frac{-2a^3+9ab-2\sqrt{2}(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27} \\ &\qquad\leq\; xyz \\ &\qquad\qquad\leq\; \frac{-2a^3+9ab+2\sqrt{2}(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27} \end{aligned}$$

が得られる。この評価は真の評価

$$\begin{aligned} &\frac{-2a^3+9ab-2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27} \\ &\qquad\leq\; xyz \\ &\qquad\qquad\leq\; \frac{-2a^3+9ab+2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27} \end{aligned}$$

より少し（$\sqrt{2}$倍、*41.4%*）粗い。しかも左・右の等号が成立するには、

$$\begin{aligned}\text{(i)}\quad x+y+z &= a\\ \text{(ii)}\quad xy+yz+zx &= b\end{aligned}$$

に加えて、等号条件

$$x-\frac{a}{3}=\pm\left(y-\frac{a}{3}\right)=\pm\left(z-\frac{a}{3}\right)\qquad \text{（複合同順ではない）}$$

が成り立たねばならない。たとえば、等号条件

$$x-\frac{a}{3}=y-\frac{a}{3}=-\left(z-\frac{a}{3}\right)$$

を考えよう。制約条件式 (i), (ii) とこの等号条件

$$x=y,\qquad x+z=\frac{2}{3}a$$

の組は3変数4式となり、過剰決定系である。一般に、4式を満たす点 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ は存在しない。実際、4式を解いてみよう。最初の3式を解くと、

$$x=y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-3b}}{3},\quad z=\frac{a\pm 2\sqrt{a^2-3b}}{3}\qquad \text{（複合同順）}$$

となり、

$$x+z=\frac{2a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

になる。これは、$a^2>3b$ のとき、最後の第4式 $x+z=\dfrac{2a}{3}$ を満たさない。

次に、等式

$$x^2+y^2+z^2=a^2-2b$$

に算術平均・幾何平均不等式を適用すると、次の不等式が成り立つ。

$$\left(\frac{a^2-2b}{3}\right)^3 = \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 \geq (xyz)^2.$$

等号は

$$x^2=y^2=z^2$$

のときに限り、成り立つことになる。したがって、次の評価式を得る。

$$-\frac{(a^2-2b)\sqrt{a^2-2b}}{3\sqrt{3}} \leq xyz \leq \frac{(a^2-2b)\sqrt{a^2-2b}}{3\sqrt{3}}.$$

ここでも左・右の等号が成立する場合は一般に存在しない。この評価は最良とは言えない。

前述の2つの算術平均・幾何平均不等式をうまく組み合わせた適用が最良評価を与えるだろうか？

注意　問題1の最大・最小化問題は、$a \neq 0$ のとき、次の2次等式制約下の問題に同値である：

$$\begin{aligned}
&\text{Maxmize and minimize} \quad xyz \\
&\text{subject to} \quad \text{(i)} \;\; x^2+y^2+z^2 = a^2-2b \\
&\qquad\qquad\quad \text{(ii)} \;\; \left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+\left(z-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}(a^2-3b) \\
&\qquad\qquad\quad \text{(iii)} \;\; -\infty < x,y,z < \infty.
\end{aligned}$$

$a=0$ のときは、次に同値である：

$$\begin{aligned}
&\text{Maxmize and minimize} \quad xyz \\
&\text{subject to} \quad \text{(i)} \;\; x+y+z=0 \\
&\qquad\qquad\quad \text{(ii)} \;\; x^2+y^2+z^2=-2b \\
&\qquad\qquad\quad \text{(iii)} \;\; -\infty < x,y,z < \infty.
\end{aligned}$$

End of Remark 9.

以下では、前述の方程式論および不等式による解法以外に、基本対称問題に対してさらに1変数化とラグランジュ乗数による解法をそれぞれ述べる。

2.3　1変数化

Solution 2（1変数化）

まず、*Solution 1* の不等式と同様にする。$a^2 \geq 3b$ のとき、実行可能解が存在し、$a^2 < 3b$ のときは実行可能解が存在しない。2変数 x, y を消去して1変数 z で表そう。制約条件式 (i), (ii) より

$$x+y=a-z, \qquad xy=b-az+z^2.$$

実数条件（x, y が実数として存在すること）

$$D:(x+y)^2 \geq 4xy$$

より

$$(a-z)^2 \geq 4(b-az+z^2).$$

したがって、次の同値な最大・最小問題が得られる：

$$\begin{aligned}
&\text{Maxmize and minimize} \quad z^3-az^2+bz \\
&\text{subject to} \quad \text{(i)} \;\; 3z^2-2az+4b-a^2 \leq 0. \\
&\qquad\qquad\quad \text{(ii)} \;\; -\infty < z < \infty
\end{aligned}$$

この条件式 (i), (ii) は

$$\text{(i)}' \quad \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3} \le z \le \frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

になる。 $f(z) := z^3 - az^2 + bz$ とおく。*3* 次関数のグラフ $w = f(z)$ は点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{-2a^3+9ab}{27}\right)$ に関して対称になり、区間 (i)$'$ の最大解・最小解は次になる。

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{a-\sqrt{a^2-3b}}{3}, \ \frac{a+2\sqrt{a^2-3b}}{3} \quad \text{のとき} \\ &\quad \text{最大値} \ \ M = \frac{-2a^3+9ab+2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{a-2\sqrt{a^2-3b}}{3}, \ \frac{a+\sqrt{a^2-3b}}{3} \quad \text{のとき} \\ &\quad \text{最小値} \ \ m = \frac{-2a^3+9ab-2(a^2-3b)\sqrt{a^2-3b}}{27}. \end{aligned}$$

したがって、 *Solution 1* と同じ最適解が得られる。

End of Solution 2 （1 変数化）.

2.4 ラグランジュ乗数

Solution 3 （ラグランジュ乗数法）

$a^2 \ge 3b$ のとき、実行可能解で、 $a^2 < 3b$ のとき実行不可能になる。ラグランジュ関数

$$L = L(x,y,z;\lambda,\mu) := xyz + \lambda(a-x-y-z) + \mu(b-xy-yz-zx)$$

を構成する。点 $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ が極値とすると、定数 λ, μ が存在して

$$L_x(x,y,z;\lambda,\mu) = L_y = L_z = L_\lambda = L_\mu = 0$$

を満たす。すなわち、次の 5 元連立 2 次方程式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &(1) \quad yz - \lambda - \mu(y+z) = 0 \\ &(2) \quad zx - \lambda - \mu(z+x) = 0 \\ &(3) \quad xy - \lambda - \mu(x+y) = 0 \\ &(4) \quad x+y+z = a \\ &(5) \quad xy+yz+zx = b. \end{aligned}$$

これを解く。(2) − (3) より

$$(6) \quad (x-\mu)(z-y) = 0.$$

$(6-\mathrm{i})$ $x=\mu$ のとき。(2) より $\lambda=-x^2$. (1) より

$$(x-y)(x-z)=0.$$

$(6-\mathrm{i}-a)$ $x=y$ のとき。(4), (5) より

$$x=y=\mu=\frac{a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3},\qquad z=\frac{a\mp 2\sqrt{a^2-3b}}{3}.$$

このとき

$$\lambda=-\mu^2=\frac{3b-2a^2\mp 2a\sqrt{a^2-3b}}{9}.$$

$(6-\mathrm{i}-b)$ $x=z$ のとき。(4), (5) より

$$x=z=\mu=\frac{a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3},\qquad y=\frac{a\mp 2\sqrt{a^2-3b}}{3}.$$

このとき、$\lambda=-\mu^2$.

$(6-\mathrm{ii})$ $y=z$ のとき。同様にして

$$y=z=\mu=\frac{a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3},\qquad x=\frac{a\mp 2\sqrt{a^2-3b}}{3}.$$

このとき、$\lambda=-\mu^2$.

これら3つの場合について、点 $\boldsymbol{x}$ が最大点または最小点のいずれかになるかは、別途検討を必要とする。

End of Solution 3（ラグランジュ乗数法）.

注意　この検討故、最大・最小化問題への適用するときのラグランジュ乗数法の欠点である。というよりも、ラ・乗数法は極値の必要条件を与えているだけである。

3　関連問題

この節では、基本対称問題に関連する問題として、標準型問題、不等式制約問題および逆問題を考える。標準型では右辺定数 a, b を標準的な値にセットしている。不等式制約では等号条件を（等号をも含む）不等号にしている。右辺定数2パラメータ問題の逆問題は制約式の1つと目的式を入れ替えて得られる。

3.1　標準型

問題 2（標準型基本対称問題）実定数 p を任意に与える。このとき、最大・最小問題

$$\begin{aligned}&\text{Maxmize and minimize}\quad xyz\\&\text{subject to}\quad \text{(i)}\ \ x+y+z=0\\&\qquad\qquad\qquad \text{(ii)}\ \ xy+yz+zx=3p\\&\qquad\qquad\qquad \text{(iii)}\ \ -\infty<x,y,z<\infty\end{aligned}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

Solution

この問題は基本対称問題 1 の標準的な場合である。すなわち、 $a=0,\ b=3p$ のときである。この問題を**標準型** (normal) 基本対称問題という。最適解を p で表すと、次になる。

1. $p>0$ のとき、実行不可能。最大解、最小解は存在しない。
2. $p=0$ のとき、実行可能解は原点 $O=(0,0,0)$ のみ。O は同時に最大点でも最小点でもある。

$$\boldsymbol{x}^*(0) \;=\; (0,0,0) \text{ のとき、 最大値関数 } M(0) \;=\; 0.$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}(0) \;=\; (0,0,0) \text{ のとき、 最小値関数 } m(0) \;=\; 0.$$

3. $p<0$ のとき、実行可能である。

$$\boldsymbol{x}^*(p) \;=\; \sqrt{-p}[-1,-1,2] \text{ のとき、 最大値関数 } M(p) \;=\; -2p\sqrt{-p}.$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}(p) \;=\; -\sqrt{-p}[-1,-1,2] \text{ のとき、 最小値関数 } m(p) \;=\; 2p\sqrt{-p}.$$

ここに、$[-1,-1,2]$ は巡回している 3 つのベクトル $(2,-1,-1),\ (-1,2,-1),\ (-1,-1,2)$ のいずれかを表している。

End of Solution.

注意　3 次方程式

$$\xi^3+3p\xi-q=0 \tag{26}$$

の判別式は

$$D=-27(q^2+4p^3) \tag{27}$$

になる（(11) 参照)。

一般に、3 次方程式においては解がすべて実数である必要十分条件は $D\geq 0$ である。(これは 2 次方程式でもそうであるが、4 次方程式ではそうではない。ただし、ここでの判別式はすべての解に対する差積の自乗とする。)

実定数 p が与えられたとき、標準型問題 2 の目的関数 $q=xyz$ が取り得る値の範囲は 3 次方程式 (26) が 3 つの実数解をもつ q の全体である。したがって、q の最大値・最小値はそれぞれ、次の 1 変数最適化問題の最大値・最小値である。

$$\begin{array}{lll} \text{Max and min} & q & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & D\geq 0 \\ & \text{(ii)} & -\infty<q<\infty \end{array}$$

これは

$$\begin{array}{lll} \text{Max and min} & q & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & q^2+4p^3\leq 0 \\ & \text{(ii)} & -\infty<q<\infty \end{array}$$

で表される。$p \leq 0$ のとき、これを解くと、

$$2p\sqrt{-p} \leq q \leq -2p\sqrt{-p}$$

になる。$p > 0$ のとき、$D < 0$ になる。このときは、(26) は3つの実数解をもたない。1つは実数、他の2つは共役な複素数である。

他方、3次方程式 (26) は次のように解かれる。まず、2次方程式

$$t^2 - qt - p^3 = 0 \tag{28}$$

の2つの解を t_1, t_2 とする。

$$t_1 = \frac{1}{2}\left(q - \sqrt{q^2 + 4p^3}\right), \quad t_2 = \frac{1}{2}\left(q + \sqrt{q^2 + 4p^3}\right).$$

このとき

$$t_1 + t_2 = q, \qquad t_1 t_2 = -p^3.$$

他方、ω を 1 の 3 乗根とすれば、(26) の解は

$$\xi = \omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2} \tag{29}$$

で与えられる。実際、

$$\begin{aligned}
\xi^3 + 3p\xi - q &= \left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right)^3 + 3p\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) - q \\
&= t_1 + t_2 + 3\sqrt[3]{t_1 t_2}\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) + 3p\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) - q \\
&= q + 3\sqrt[3]{-p^3}\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) + 3p\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) - q \\
&= q - 3p\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) + 3p\left(\omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2}\right) - q \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。この解法では、$\sqrt{\ }$ 内の q^2+4p^3 が負値のとき、すなわち 判別式が $D = -27(q^2 + 4p^3) \geq 0$ のとき、2方程式の2つの解 t_1, t_2 の立方根を求めなければならない。つまり、3次方程式が3つの実数解をもつ場合、複素数の立方根を求める必要がある（後述の Cardano の公式参照）。

3.2　不等式制約

問題 3 次の最大・最小問題が実行可能になる（実行可能解をもつ）ための（非負定数 a, c が満たす）必要十分条件を与えよ。その上で

$$\begin{array}{ll}
\text{Maxmize and minimize} & xy + yz + zx \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ x + y + z \leq a \\
& \text{(ii)}\ \ xyz \geq c \\
& \text{(iii)}\ \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0
\end{array}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

Solution

まず算術平均・幾何平均不等式より、次の不等式が成り立つことに注意する。すなわち

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \quad on \;\; R_+^3$$

が成り立つ。等号は $x=y=z$ のときに限り成立する。したがって

$$c \leq \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

のときに限り、実行可能である。算術平均・幾何平均不等式より

$$(xyz)^2 \leq \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3 \quad on \;\; R_+^3$$

が成り立つ。等号は $xy=yz=zx$ のときに限り成立する。また、

$$3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2 \quad on \;\; R^3$$

が成り立ち、等号は $x=y=z$ のときに限り成立する。したがって

$$3c^{2/3} \leq 3(xyz)^{2/3} \leq xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} \leq \frac{a^2}{3} \quad on \;\; R_+^3.$$

しかも、$x=y=z=\dfrac{a}{3}$ のときに右側２つの等号が成り立つ。$x=y=z=c^{1/3}$ のときに左側２つの等号が成り立つ。したがって、最適解は次で与えられる：

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{a}{3}(1,1,1), \quad \text{最大値 } M = \frac{a^2}{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = c^{1/3}(1,1,1), \quad \text{最小値 } m = 3c^{2/3}.$$

End of Solution.

3.3 逆問題 I

逆問題 I は基本対称問題の２次制約式と３次目的式を入れ替えて得られる。

問題 4 （逆問題 I）実定数 a, c を任意に与える。このとき、最大・最小問題

$$\begin{aligned}
&\text{Maxmize and minimize} \quad xy+yz+zx \\
&\text{subject to} \quad \text{(i)} \;\; x+y+z=a \\
&\qquad\qquad\quad\;\; \text{(ii)} \;\; xyz=c \\
&\qquad\qquad\quad\;\; \text{(iii)} \;\; -\infty < x,y,z < \infty
\end{aligned}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

Solution 1　（不等式）
R^3 上の *6* 次不等式

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2 &+ 18(x+y+z)(xy+yz+zx)xyz \\ &\geq\ 4(x+y+z)^3xyz+4(xy+yz+zx)^3+27(xyz)^2\end{aligned}$$

および等号条件

$$x^2y+y^2z+z^2x=x^2z+y^2x+z^2y$$

を用いる。今、 (x,y,z) が制約条件式 (i), (ii), (iii) を満たしているとする。このとき、$Y:=xy+yz+zx$ は *3* 次不等式

$$4Y^3-a^2Y^2-18acY+4a^3c+27c^2\ \leq\ 0 \tag{30}$$

を満たす。この左辺を $f(Y)$ とおく：

$$f(Y):=4Y^3-a^2Y^2-18acY+4a^3c+27c^2.$$

このとき

$$\begin{aligned}f'(Y) &= 12Y^2-2a^2Y-18ac \\ f''(Y) &= 24Y-2a^2.\end{aligned}$$

よって

$$Y_3\ :=\ \frac{a^2}{12}$$

とし、特に $a^4+2^3\cdot3^3ac\geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}Y_1 &:= \frac{a^2-\sqrt{a^4+2^3\cdot3^3ac}}{2^2\cdot3} \\ Y_2 &:= \frac{a^2+\sqrt{a^4+2^3\cdot3^3ac}}{2^2\cdot3}\end{aligned}$$

とする。関数 $f(Y)$ は次を満たす：

$$\lim_{Y\to\infty}f(Y)=\infty,\qquad \lim_{Y\to-\infty}f(Y)=-\infty.$$

したがって、$W=f(Y)\ -\infty<Y<\infty$ のグラフは、(Y, W)-平面上で、横軸 Y-軸 $Y=0$ と、*1* 点以上重複を許して高々 *3* 点で交わる。最大値 $M(a,c)$ は、$f(Y)\leq 0$ なる最大の値で与えられる：

$$M(a,c)=\textit{the greatest}\ Y\ \textit{satisfying}\ f(Y)\leq 0.$$

この $M(a,c)$ は上に有界である。(詳細は後述)。
最小値 $m(a,c)$ は、$f(Y)\leq 0$ なる最小の値で与えられる：

$$m(a,c)=\textit{the smallest}\ Y\ \textit{satisfying}\ f(Y)\leq 0.$$

したがって、 $m(a.c)=-\infty$.

End of Solution 1 （不等式）.

注意　3 次方程式

$$4Y^3 - a^2Y^2 - 18acY + 4a^3c + 27c^2 = 0$$

の 3 つの解は次の Cardano の公式で与えられる。しかし、不還元の問題がある ([17])。

一般に 3 次方程式 $a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = 0$ を解くには、 $A_1 := 9a_0a_1a_2 - 2a_1^3 - 27a_0^2a_3$, $A_2 := a_1^2 - 3a_0a_2$ とおいて、2 次方程式 $T^2 - A_1X + A_2^3 = 0$ の 2 根を t_1, t_2 とする。また、ω を 1 の 3 乗根とすれば、$(-a_1 + \omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2})/a_0$ が初めの方程式の根となる（**Cardano の公式**）。この方法では、実係数の 3 次方程式 $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ で、根が 3 つとも実数である場合には、複素数の立方根を求める必要がある。これを実数の範囲で代数的に解こうとする試みがなされたが、ついにその不可能なことが示された。すなわち、上の方程式が有理数体 $\mathcal{Q}$ の拡大体 $\mathcal{Q}(a,b,c,d)$ において既約のとき、もしそれが 3 つの実根を有するならば、その根を 4 則演算法と実数のベキ乗根を求めることだけによって計算することは不可能である。よってこの場合を**不還元の場合** (casus irreducibilis) という。

Solution 2 （1 変数化）

2 変数 x, y を消去して 1 変数 z で表す。 以下 $z \neq 0$ とする。 制約条件式 (i), (ii) より

$$x + y = a - z, \qquad xy = \frac{c}{z}.$$

実数条件より

$$(a-z)^2 \geq 4\frac{c}{z}.$$

したがって、次の分数型最大・最小問題が得られる：

$$\begin{aligned} &\text{Maxmize and minimize} && \frac{c}{z} + z(a-z) \\ &\text{subject to} && \text{(i)}\ \ 4\frac{c}{z} \leq (a-z)^2 \\ & && \text{(ii)}\ \ z \neq 0. \end{aligned}$$

まず、最小値関数 $m = m(a,c)$ は任意の (a,c) に対して $-\infty$ に近づくこと ($m(a,c) = -\infty$) を示す。$f(z) := \dfrac{c}{z} + az - z^2$ とおく。

1. $c < 0$ のとき
$z \searrow 0$ とすると、$\dfrac{c}{z} \searrow -\infty$. よって、式 (i) を満たすように $z \searrow 0$ とすることができ、このとき $f(z) \searrow -\infty$.

2. $c > 0$ のとき
$z \nearrow 0 \implies \dfrac{c}{z} \searrow -\infty$. よって、 (i) を満たしながら $z \nearrow 0$ とすることができ、$f(z) \searrow -\infty$.

3. $c = 0$ のとき
(i) を満たしながら $z \nearrow \infty$ とすることができ、$f(z) \searrow -\infty$.

次に、最大化問題：

$$\begin{aligned}&\text{Maxmize} \quad \frac{c}{z}+z(a-z)\\&\text{subject to} \quad \text{(i)}\ \ 4\frac{c}{z}\le (a-z)^2\\&\qquad\qquad\quad\ \ \text{(ii)}\ \ z\neq 0.\end{aligned}$$

を考える。
未完。

End of Solution 2（1変数化）.

注意　$c=0$ のときを考える。$xyz=0$ より、たとえば $z=0$ とすると、与問題は2変数問題

$$\begin{aligned}&\text{Maxmize and minimize} \quad xy\\&\text{subject to} \quad \text{(i)}\ \ x+y=a\\&\qquad\qquad\quad\ \ \text{(ii)}\ \ -\infty<x,y<\infty\end{aligned}$$

になる。解は

$$m(a,0)=-\infty, \qquad \boldsymbol{x}^*(a,0)=\frac{a}{2}(1,1)\ \text{のとき}\ M(a,0)=\frac{a^2}{4}.$$

問題 5 次の最大・最小問題が実行可能になる（実行可能解をもつ）ための（非負定数 a, c が満たす）必要十分条件を与えよ。その上で

$$\begin{aligned}&\text{Maxmize and minimize} \quad xy+yz+zx\\&\text{subject to} \quad \text{(i)}\ \ x+y+z=a\\&\qquad\qquad\quad\ \ \text{(ii)}\ \ xyz=c\\&\qquad\qquad\quad\ \ \text{(iii)}\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\end{aligned}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

Solution
まず不等式

$$xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \qquad on\ \ R^3_+$$

および等号条件 $x=y=z$ より、

$$c\le\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

のときに限り、実行可能になる。また、不等式

$$3(xyz)^{2/3}\le xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3} \qquad on\ \ R^3_+$$

および 左・右等号条件 $xy = yz = zx$, $x = y = z$ が得られる。$\boldsymbol{x}$ が実行可能（制約条件 (i), (ii), (iii) を満たす）ならば、

$$3c^{2/3} = 3(xyz)^{2/3} \leq xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{a^2}{3}$$

が成り立つ。したがって、最小値は $3c^{2/3}$ 以上で、最大値は $\dfrac{a^2}{3}$ 以下である。

さて、制約条件 (i) は

$$x = \frac{a}{3} + u, \quad y = \frac{a}{3} + v, \quad z = \frac{a}{3} + w, \qquad u + v + w = 0$$

で表される。さらに、最適解の**巡回性** (cyclicity) （(x, y, z) が最適ならば、(y, z, x) も最適）より、$u + v + w = 0$ は

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \quad w = r\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

で表される。ただし

$$0 \leq r \leq \frac{a}{3}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

したがって

$$x = \frac{a}{3} + r\cos\theta, \quad y = \frac{a}{3} + r\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \quad z = \frac{a}{3} + r\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right).$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) &= 0 \\
\cos\theta\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\theta &= -\frac{3}{4} \\
\cos\theta\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) &= \cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta
\end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}
xyz &= \left(\frac{a}{3}\right)^3 + r^2\frac{a}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) + r^3\left(\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta\right) \\
xy + yz + zx &= \frac{a^2}{3} + r^2\left(-\frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

したがって、所与の最大・最小問題は 2 変数問題

$$\begin{array}{lll}
 & \text{Max and min} & \dfrac{a^2}{3} + r^2\left(-\dfrac{3}{4}\right) \\
(\mathcal{R}) & \text{subject to} & \text{(i)} \quad \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 + r^2\dfrac{a}{3}\left(-\dfrac{3}{4}\right) + r^3\left(\cos^3\theta - \dfrac{3}{4}\cos\theta\right) = c \\
 & & \text{(ii)} \quad 0 \leq r \leq \dfrac{a}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi
\end{array}$$

に帰着する。これは、$s := \cos\theta$ とおくと、次に等価になる。

$$(\mathcal{Q}) \qquad \begin{array}{lll} \text{min and Max} & r^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & -\left(s^3 - \frac{3}{4}s\right) r^3 + \frac{a}{4} r^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^3 - c \\ & \text{(ii)} & 0 \le r \le \frac{a}{3}, \quad -1 \le s \le 1 \end{array}$$

以下、未完
　Do It Now!!

End of Solution.

3.4　逆問題 II

逆問題 II では基本対称問題の1次制約式と3次目的式を入れ替えている。

問題 6（逆問題 II）次の最大・最小問題が実行可能になる（実行可能解をもつ）ための（非負定数 b, c が満たす）必要十分条件を与えよ。その上で

$$\begin{array}{lll} \text{Maxmize and minimize} & & x+y+z \\ \text{subject to} & \text{(i)} & xy+yz+zx = b \\ & \text{(ii)} & xyz = c \\ & \text{(iii)} & x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \end{array}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

Solution
　不等式

$$3(xyz)^{2/3} \le xy+yz+zx \qquad on \quad R^3_+$$

および等号条件 $xy = yz = zx$ より、

$$3c^{2/3} \le b$$

のときに限り、実行可能になる。また、不等式

$$xy+yz+zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3} \qquad on \quad R^3_+$$

および 等号条件 $x = y = z$ が得られる。$\boldsymbol{x}$ が実行可能（制約条件 (i), (ii), (iii) を満たす）ならば、

$$b = xy+yz+zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

が成り立つ。したがって、最小値は $\sqrt{3b}$ 以上である。
　以下、未完成
　Do It Now!!

End of Solution.

問題 7 実定数 b, c を任意に与える。このとき、最大・最小問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maxmize and minimize} & x+y+z \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ xy+yz+zx=b \\ & \text{(ii)}\ \ xyz=c \\ & \text{(iii)}\ \ -\infty<x,y,z<\infty \end{array}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

Solution 1　（不等式）
　いま (x,y,z) が制約条件式 (i), (ii), (iii) を満たしているとする。このとき、$X := x+y+z$ は *3* 次不等式

$$4cX^3 - b^2X^2 - 18bcX + 4b^3 + 27c^2 \ \leq\ 0 \tag{31}$$

を満たす。この左辺を $g(X)$ とおく：

$$g(X) := 4cX^3 - b^2X^2 - 18bcX + 4b^3 + 27c^2.$$

このとき

$$\begin{aligned} g'(X) &= 2^2\cdot 3cX^2 - 2b^2X - 2\cdot 3^2bc \\ g''(X) &= 2^3\cdot 3cX - 2b^2. \end{aligned}$$

よって

$$X_3 \ := \ \frac{b^2}{2^2\cdot 3c}$$

とし、特に $b^4 + 2^3\cdot 3^3bc^2 \geq 0$ のとき

$$X_1 \ := \ \frac{b^2 - \sqrt{b^4 + 2^3\cdot 3^3bc^2}}{2^2\cdot 3c}$$

$$X_2 \ := \ \frac{b^2 + \sqrt{b^4 + 2^3\cdot 3^3bc^2}}{2^2\cdot 3c}$$

とする。

- $c>0$ とすると、

$$\lim_{X\to\infty} g(X) = \infty, \qquad \lim_{X\to-\infty} g(X) = -\infty.$$

したがって、$W = g(X)\ \ -\infty < X < \infty$ のグラフは、(X, W)-平面上で、横軸 X-軸 $X = 0$ と、*1* 点以上重複を許して高々 *3* 点で交わる。最大値 $M(b,c)$ は、$g(X) \leq 0$ なる最大の値で与えられる：

$$M(b,c) = \textit{the greatest } X \textit{ satisfying } g(X) \leq 0.$$

この $M(b,c)$ は上に有界である。(詳細は後述)。

最小値 $m(b,c)$ は、$f(Y) \leq 0$ なる最小の値で与えられる：

$$m(b,c) = \textit{the smallest } X \textit{ satisfying } g(X) \leq 0.$$

したがって、 $m(b,c) = -\infty$.

- $c < 0$ とすると、

$$\lim_{X\to\infty} g(X) = -\infty, \qquad \lim_{X\to-\infty} g(X) = \infty.$$

したがって、 $M(b,c) = \infty$.

$$m(b,c) = \textit{the smallest } X \textit{ satisfying } g(X) \leq 0.$$

(詳細は後述)。

End of Solution 1　(不等式) .

Solution 2　(1 変数化)

以下 $z \neq 0$ とする。 制約条件式 (i), (ii) より

$$x + y = \frac{b}{z} - \frac{c}{z^2}, \qquad xy = \frac{c}{z}.$$

実数条件より

$$\left(\frac{b}{z} - \frac{c}{z^2}\right)^2 \geq 4\frac{c}{z}.$$

したがって、次の分数型最大・最小問題が得られる：

$$\text{Maxmize and minimize} \quad z + \frac{b}{z} - \frac{c}{z^2}$$

$$\text{subject to} \quad \text{(i)} \quad 4\frac{c}{z} \leq \left(\frac{b}{z} - \frac{c}{z^2}\right)^2$$

$$\text{(ii)} \quad z \neq 0.$$

$c > 0$ のとき、最小値関数 $m = m(b,c)$ は任意の (b,c) に対して $-\infty$ に近づく ($m(b,c) = -\infty$)。$c < 0$ のとき、最大値関数 $M = M(b,c)$ は任意の (b,c) に対して ∞ に近づく ($M(b,c) = \infty$)。

(詳細は後述)。

End of Solution 2（1 変数化）.

注意　$c=0$ のときを考える。$xyz=0$ より、たとえば $z=0$ とすると、与問題は2変数問題

$$\begin{aligned}&\text{Maxmize and minimize} \quad x+y\\&\text{subject to} \quad \text{(i)}\ \ xy=b\\&\qquad\qquad\qquad \text{(ii)}\ \ -\infty<x,y<\infty\end{aligned}$$

になる。解は

$$m(b,0)=-\infty, \qquad M(b,0)=\infty.$$

4　モーメント問題

この節では、モーメント問題に関連する解法を述べる。まず、基本対称問題に帰着させ、次に4つの解法を与える。

問題 8（モーメント問題）実定数 a, b を任意に与える。このとき、最大・最小問題

$$\begin{aligned}&\text{Maxmize and minimize} \quad x^3+y^3+z^3\\&\text{subject to} \quad \text{(i)}\ \ x+y+z=a\\&\qquad\qquad\qquad \text{(ii)}\ \ x^2+y^2+z^2=b\\&\qquad\qquad\qquad \text{(iii)}\ \ -\infty<x,y,z<\infty\end{aligned}$$

を解いて、最大解（最大値と最大点）と最小解（最小値と最小点）を求めよ。

4.1　基本対称問題へ還元

Solution 1（基本対称問題へ還元）

問題8は3次までのモーメントまたは累乗和 (power sum)（対称関数）を含んでいる。3次**モーメント問題** (moment problem) と呼ぼう。3次基本対称問題1の型

$$(\mathcal{P})\qquad \begin{aligned}&\text{Maxmize and minimize} \quad xyz\\&\text{subject to} \quad \text{(i)}\ \ x+y+z=a\\&\qquad\qquad\qquad \text{(ii)}\ \ xy+yz+zx=B\\&\qquad\qquad\qquad \text{(iii)}\ \ -\infty<x,y,z<\infty\end{aligned}$$

に帰着させる。ただし、定数 B は後述する。

まず

$$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$$

より、実行可能であるには $3b-a^2\geq 0$ でなければならない。

$$xy+yz+zx \;=\; \frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)$$

より、実行可能な $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ に対しては

$$xy+yz+zx \;=\; \frac{a^2-b}{2}.$$

次に

$$(x+y+z)^3 \;=\; x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$$

より、実行可能な $\boldsymbol{x}$ は

$$3xyz \;=\; x^3+y^3+z^3+\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}ab$$

を満たしている。したがって、制約条件 (i), (ii) :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \end{cases}$$

は

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ xy+yz+zx=B \end{cases}$$

に同値である。ただし、$B:=\dfrac{a^2-b}{2}$. しかも、前者における $x^3+y^3+z^3$ の最大・最小化は後者における xyz の最大・最小化に（狭義単調1次変換を通じて）それぞれ同値である。問題1の型の $(\mathcal{P})$ は次の最適解をもつ：

$$\boldsymbol{x}^*(a,B)=\begin{cases} \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a+2\sqrt{a^2-3B}}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a+2\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3B}}{3}\right) \\ \left(\dfrac{a+2\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-3B}}{3}\right) \end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値 } M \;=\; M(a,B) \;=\; \frac{-2a^3+9aB+2(a^2-3B)\sqrt{a^2-3B}}{27}.$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a,B)=\begin{cases}\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a-2\sqrt{a^2-3B}}{3}\right)\\ \left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a-2\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-3B}}{3}\right)\\ \left(\dfrac{a-2\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-3B}}{3},\ \dfrac{a+\sqrt{a^2-3B}}{3}\right)\end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値 } m \ = \ m(a,B) \ = \ \frac{-2a^3+9aB-2(a^2-3B)\sqrt{a^2-3B}}{27}.$$

この解において、$B=\dfrac{a^2-b}{2}$. 求める最適解は (a,b) で表すと、以下になる：

$$\boldsymbol{x}^*(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a+2\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}}\right)\\ \left(\dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a+2\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}}\right)\\ \left(\dfrac{\sqrt{2}a+2\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a-\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}}\right)\end{cases}$$

のとき

$$\text{最大値 } M \ = \ M(a,b) \ = \ \frac{-2\sqrt{2}a^3+9\sqrt{2}ab+(3b-a^2)\sqrt{3b-a^2}}{9\sqrt{2}}.$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a-2\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}}\right)\\ \left(\dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a-2\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}}\right)\\ \left(\dfrac{\sqrt{2}a-2\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3b-a^2}}{3\sqrt{2}}\right)\end{cases}$$

のとき

$$\text{最小値 } m \ = \ m(a,b) \ = \ \frac{-2\sqrt{2}a^3+9\sqrt{2}ab-(3b-a^2)\sqrt{3b-a^2}}{9\sqrt{2}}.$$

したがって、次の不等式が成り立つ：

$$m \le c \le M \qquad \mathit{for} \ \ a^2 \le 3b$$

ただし

$$a=x+y+z, \quad b=x^2+y^2+z^2, \quad c=x^3+y^3+z^3.$$

この不等式は整理すると、次になる。

$$3^2a^4b + 2^2\cdot 3^2abc + 3b^3 \;\geq\; a^6 + 7\cdot 3a^2b^2 + 2\cdot 3^2c^2 + 2^3a^3c \qquad for \;\; a^2 \leq 3b \tag{32}$$

すなわち

$$18c^2 - 2(-4a^3 + 18ab)c + a^6 + 21a^2b^2 - 9a^4b - 3b^3 \;\leq\; 0 \qquad for \;\; a^2 \leq 3b.$$

実際，この2次不等式の解は

$$\frac{-4a^3 + 18ab - \sqrt{D}}{18} \;\leq\; c \;\leq\; \frac{-2\sqrt{2}a^3 + 9\sqrt{2}ab + \sqrt{D/2}}{9\sqrt{2}}$$

になる。ただし、$D = 2(3b - a^2)^3$.

定理 *5*　3次元ユークリッド空間 R^3 上で次の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & 3^2(x+y+z)^4(x^2+y^2+z^2) \\ & \quad + 2^2\cdot 3^2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) + 3(x^2+y^2+z^2)^3 \\ \geq \; & (x+y+z)^6 + 7\cdot 3(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)^2 \\ & \quad + 2\cdot 3^2(x^3+y^3+z^3)^2 + 2^3(x+y+z)^3(x^3+y^3+z^3). \end{aligned} \tag{33}$$

等号は3変数のうち2つが等しいときに限り、成り立つ。

証明　左辺 − 右辺 は

$$24\{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)\}^2 \geq 0$$

になり、

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$$

である。　　$Q.E.D.$

注意　基本対称問題とモーメント問題の間には次の1対1対応がある（ニュートンの公式）：

$$\begin{cases} x+y+z \;=\; x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 \;=\; (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \\ x^3+y^3+z^3 \;=\; (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz, \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} x+y+z \;=\; x+y+z \\ xy+yz+zx \;=\; \dfrac{1}{2}(x+y+z)^2 - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \\ xyz \;=\; \dfrac{1}{6}(x+y+z)^3 - \dfrac{1}{2}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + \dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3). \end{cases} \tag{35}$$

すなわち

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx, \quad c = xyz$$
$$A = x + y + z, \quad B = x^2 + y^2 + z^2, \quad C = x^3 + y^3 + z^3$$

とおくと、

$$\begin{cases} A &= a \\ B &= a^2 - 2b \\ C &= a^3 - 3ab + 3c, \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} a &= A \\ b &= \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}B \\ c &= \frac{1}{6}A^3 - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}C. \end{cases} \tag{37}$$

変換 (36) のヤコビアン（関数行列式） $J_1 = \dfrac{\partial(A, B, C)}{\partial(a, b, c)}$ は

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2 & 0 \\ 3a^2 - 3b & -3a & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

逆変換 (37) のヤコビアン $J_2 = \dfrac{\partial(a, b, c)}{\partial(A, B, C)}$ は

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}B & -\frac{1}{2}A & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \neq 0.$$

2 つの不等式 (7),(33) はそれぞれ対応関係 (36),(37) を通してお互いに導かれる。同値である。

End of Solution 1 （基本対称問題へ還元）.

4.2 4 つの解法

Solution 2 （不等式）
上述の不等式 (33) を用いる。

End of Solution 2 （不等式）.

Solution 3 （3次方程式論）

問題1と同様にする。以下、実数からなる任意の三つ組み (x, y, z) に対して

$$a = x + y + z, \quad b = x^2 + y^2 + z^2, \quad c = x^3 + y^3 + z^3$$

とおくと、

$$x + y + z = a, \quad xy + yz + zx = \frac{a^2 - b}{2}, \quad xyz = \frac{1}{3}c + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}ab.$$

したがって、x, y, z は t の3次方程式

$$(t - x)(t - y)(t - z) = 0 \qquad \text{すなわち} \ t^3 - at^2 + \frac{a^2 - b}{2}t - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{3}c$$

の実数解である。以下、

$$f(t) := t^3 - at^2 + \frac{a^2 - b}{2}t - \frac{a(a^2 - 3b)}{6}$$

とおく。3つの実数解をもつための必要十分条件は、$y = f(t) \ -\infty < t < \infty$ のグラフは、(t, y)-平面上で、横軸 t-軸に平行なグラフ $y = \dfrac{1}{3}c$ と、重複を許して*3*点で交わることである。前者は点 $\left(\dfrac{a}{3}, f\left(\dfrac{a}{3}\right)\right)$ に関して対称で、

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$$

を満たす。したがって、以下同様に続く（詳細は省略）。

End of Solution 3 （3次方程式論）.

Solution 4 （ラグランジュ乗数法）

まず、実行可能であるには $3b - a^2 \geq 0$ でなければならない。問題1と同様にする（詳細は省略）。

End of Solution 4 （ラグランジュ乗数法）.

Solution 5 （1 変数化）

実行可能性より、$3b - a^2 \geq 0$ である。制約条件式 (i), (ii) より

$$x + y = a - z, \qquad xy = z^2 - az + \frac{a^2 - b}{2}.$$

実数条件より

$$(a - z)^2 \geq 4z^2 - 4az + 2(a^2 - b).$$

したがって、次のような2次制約下（有限閉区間上）での3次関数の最大・最小問題が同値な問題として得られる：

$$\text{Maxmize and minimize} \quad z^3+(a-z)^3-3(a-z)\left(z^2-az+\frac{a^2-b}{2}\right)$$

$$\text{subject to} \quad \text{(i)} \ 3z^2-2az+a^2-2b \leq 0$$

$$\text{(ii)} \ -\infty \leq z \leq \infty.$$

以下、問題1と同様にする（詳細は省略）。

End of Solution 5 （1 変数化）.

参考文献

[1] E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities,* 3rd revised printing, Springer, New York, 1971.

[2] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[3] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis,* 2nd Ed., McGraw Hill, New York, 1970.

[4] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

[5] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), no. 1, 113–134 ; no. 2, 247–279 ; no. 3, 439–448.

[6] S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **59** (1977), no. 3, 687–704.

[7] S. Iwamoto, Recursive programming approach to inequalities, *Mem. Fac. Kyushu Univ. Ser. A, Math.* **32** (1978), no. 2, 165–190.

[8] 岩本誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[9] 岩本誠一，動的計画と不等式について，研究集会「作用素論とその周辺」，京大数理研講究録653，1988年4月，109–129.

[10] 岩本誠一，動的計画による不等式論，経済学研究（九大経済学会），第54巻（1988年）1・2号，119–161.

[11] S. Iwamoto, R.J. Tomkins and C.-L. Wang, Some theorems on reverse inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **119** (1986), no. 1, 282–299.

[12] S. Iwamoto, R.J. Tomkins and C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming III, Proceedings of the 5th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, West Germany, May 1986, *General Inequalities* **V**, Ed. W. Walter, Bikhauser Verlag, Basel and Stuttugart, ISNM (1987), 419–432.

[13] S. Iwamoto, R.J. Tomkins and C.-L. Wang, A generalization of Hölder inequalities through dynamic programming approach, *J. Math. Anal. Appl.* **135** (1988), no. 1, 8–33.

[14] S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic programming approach to inequalities I, II, *J. Math. Anal. Appl.* **96** (1983), no. 1, 119–129; **118** (1986), no. 2, 276–286.

[15] 近藤次郎，最適化法，コロナ社，1984.

[16] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities,* Springer, New York, 1970.

[17] 日本数学会（編），数学辞典 第3版，岩波書店，1985.

{九州大学大学院経済学研究院　教授}