質量減弱係数の補間に関する一考察 : 低次多項式補間法について

小段, 謙一
九州大学医学部保健学科放射線技術科学専攻

https://doi.org/10.15017/3277

出版情報：九州大学医学部保健学科紀要. 7, pp.77-82, 2006-03. 九州大学医学部保健学科

九州大学医学部保健学科紀要，2006，第７号，77－82
Memoirs Dep. of Health Scis. Sch. of Med Kyushu Univ., 2006, vol.7, 77－82

原　　著

質量減弱係数の補間に関する一考察
－低次多項式補間法について－

小段謙一

A Study on Interpolation for Mass Attenuation Coefficient Data
－On Interpolation with Polynomial Expression of Lower Degree －

KODAN Ken-ichi

Abstract

In general, the data interpolation necessary for the research is received as one process to this research and it is rare to be publicized. Then the researchers have to make original works. So it is expected that the publication of the method and results of the interpolation with polynomial expression of lower degree will save troubles of many researchers.

key words: data interpolation, spline function, polynomial expression of low degree
modified spline interpolation

和文抄録

一般に，研究の中で必要なデータの補間は研究の一つの途中段階として扱われ，表に出て来ることは稀である。研究者は独自にこの作業を行なわなければならない。

そこで，より簡単な低次多項式での補間法とその結果の公表は，研究者の手間の軽減に寄与できるものと期待される。

１）九州大学医学部保健学科放射線技術科学専攻

1．まえがき

X線と聞いて第一に思い浮かべるのは，その透過力の強さであろう。X線の透過力は，入射する物質の種類とX線のエネルギーにより決定される。透過と同時にX線は物質との相互作用により，その強度を減弱させる。これを式で表わすと次の様になる。

$$I = I_0\exp(-\mu x) \qquad (1)$$

ここで，IはX線の強度，xは物質の厚さ，I_0はx=0の時のX線の強度である。また，μは減弱係数と呼ばれ，入射X線のエネルギーと物質の原子番号などで決まる複雑な関数で表わされる[1)]。

この減弱係数は物質の厚さの単位の採り方により種々の名称を有する。物質の厚さの単位は通常g/cm^2(物質の厚さに，その密度を乗じたもの)に採られ，この時は，質量減弱係数と呼ばれる。単位はcm^2/gとなる。

X線の減弱に関する研究をする時は，任意のエネルギーに対する減弱係数の値が必要になる。これは，いくつかの光子エネルギーに対してのみ表として与えられている[2)]。例として，光子エネルギーが10keVから300keVまでのAℓの質量減弱係数を表1に示す。

表1　質量減弱係数データの例（Aℓ）

光子エネルギー (keV)	10	15	20	30	40	50
質量減弱係数 (cm^2/g)	26.3	7.93	3.41	1.12	.567	.369
光子エネルギー (keV)	60	80	100	150	200	300
質量減弱係数 (cm^2/g)	.280	.203	.171	.138	.122	.104

表に記載されていないエネルギーでの減弱係数を得るには，補間が必要となる。

一般に，研究の中で必要なデータの補間は研究の一つの途中段階として扱われ，表に出て来ることは稀である。出てもせいぜい，「～により補間した」と書かれるだけで詳細は明らかでない。

計算機により減弱データからX線のスペクトルを求める逆問題の研究にも減弱係数の補間が必要であったが，共同研究者が既に独自の方法で補間しておりそれを受け継いだので知り得た訳である。また，その補間関数は大変複雑なものであった。すなわち高次多項式（10次程度）の対数を取ったもので，しかも単一の関数ではなかった[3)]。その時研究に用いていた吸収板の材質はAℓであったが，その質量減弱係数を係数表からグラフにプロットしてみると，特異な点も無く，それ程複雑な関数で補間する必要はない様に思えた(図1)。

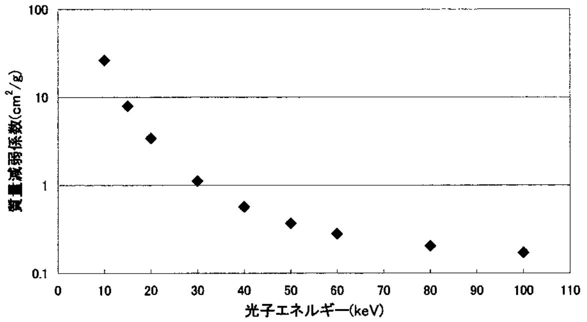

図1　Aℓの質量減弱係数

そこで著者は，より簡単な低次多項式で補間する方法と，その結果である補間多項式の係数を公表すれば研究者がそれぞれ独自の方法で行なう手間を軽減できるのではないかと考えた。これが本研究の端緒である。

著者は，データ間ごとに関数が違うスプライン関数のソフトウェアを保有しており，これを使って補間することにした。次章に，スプライン補間関数の概要を述べる。

2．スプライン関数補間

2.1　スプライン関数

スプライン関数とは簡単に言えば，データ点を必ず通る滑らかな曲線である。但し，隣接するデータ点の間ごとに次数は同じであるが係数は異なる多項式で表わされる。

滑らかさは，隣接する二つの区間の曲線がデータ点において共通の導関数（次数は多項式の次数—1まで）を有することで保障される。先に述べたスプライン関数のソフトウェアはスプライン関数の一種である自然スプライン関数のものであった。次節では，これについて少し詳しく述べる。

2.2　自然スプライン関数

先ず，一般的なスプライン関数について述べ，次に，自然スプライン関数の特徴を述べる。

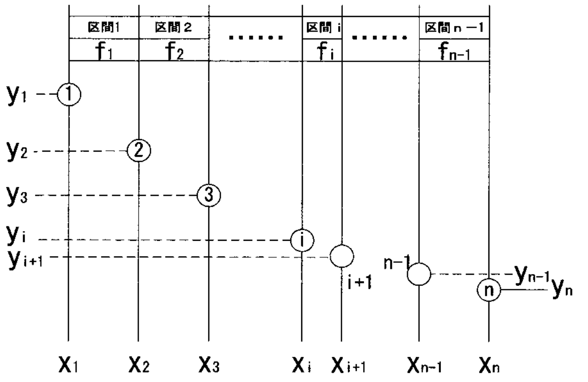

図2　スプライン関数補間の区間と関数

データ点とその座標，区間と区間内の関数を図2の様に定める。データ点は円で表わした。区間iはデータ点i（x_i, y_i）とデータ点ｉ＋１の間とし，この区間の関数は f_i とする。

ここで，スプライン関数の次数をｍ，データの個数をｎとする。データ点の値に関して次のｎ個の式が成立する。

$$y_i = f_i(x_i) \qquad \text{(n個)} \quad (2)$$

隣接する区間の関数と導関数の値は境のデータ点で一致しなければならないので，次のｍ（ｎ－２）個の式が成り立つ。

$$f_i(x_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \text{(n−2個)}$$
$$f'_i(x_{i+1}) = f'_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \text{(n−2個)}$$
$$\vdots \qquad (3)$$
$$\vdots$$
$$f^{(m-1)}{}_i(x_{i+1}) = f^{(m-1)}_{i+1}(x_{i+1}) \qquad \text{(n−2個)}$$

従って，関数の次数がｍでデータの個数がｎの時に得られる式の個数はｎ＋ｍ（ｎ－２）

となる。未知数であるｍ次多項式の係数の数はｍ＋１個，それがｎ－1区間分あるので全部で（ｍ＋１）（ｎ－１）個となる。両者の間には差があり，しかも未知数のほうが多い。すなわち未知数は一意的に決まらないことになる。差は（ｍ＋１）（ｎ－１）－｛ｎ＋ｍ（ｎ－２)｝＝ｍ―１で，データの個数には関係ない。あとｍ―１個余分に式が必要となる。これはできるだけ少ないほうが良く，第1章で述べた様に低次多項式による補間を目指しているので，ここでは補間に適する最低次数の３次式を選ぶことにした。ｍ＝３であるので2個の式が要る。通常は簡単のた両端のデータにおける傾きをゼロとしている。

これが自然スプライン関数である（４式)。

$$f'_1(x_1) = 0 \qquad (4)$$
$$f'_{n-1}(x_n) = 0$$

2.3　自然スプライン関数の欠点とその修正

表１のデータを自然スプライン関数ソフトウェアで補間してみたところ，以下の欠点が見つかった。

図３に結果の模式図とその修正法を示す。暫定曲線と記してあるのが最初のデータ点１と最後のデータ点ｎにおける曲線の傾きをゼロとして計算させた自然スプライン補間曲線である。図を見て分かる様にこの曲線は確かにデータ点を通り，しかも滑らかである。但し，求めるべき曲線の上下にデータ点を節とする振動を起こしている。これはデータ点１における求めるべき曲線の傾きがゼロでないことに起因する。データ点１を傾きゼロで始まった補間曲線は求めるべき曲線の上か下を通り，次のデータ点２を通らねばならないので必然的に振動してしまう。以下，これが繰り返される。使用した自然スプライン補間のソフトウェアは補間するデータとデータの個数だけが変えられるようになっていた。従って，データ点１における傾きを変えることはできない。そこで，ソフトウェアはこのままにして，データ個数を変更できるところだけを利用して振動を打ち消す方法はないかと考えた結果,次の修正法に思い至った。データの個数を一個減らしてデータ点２から補間すると振動の位相が逆になる。位相が逆のものを加え合わせると振動は消滅する。この方法で修正して

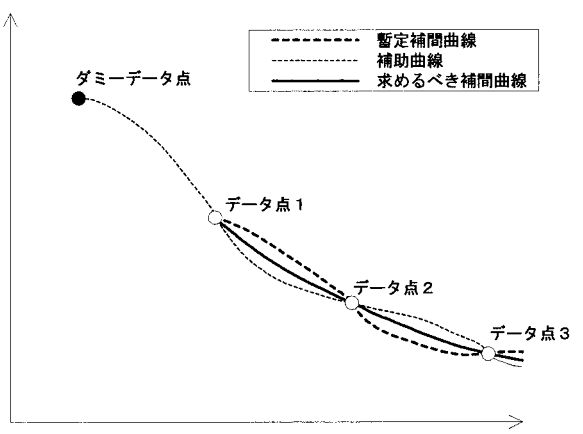

図3　自然スプライン補間の欠点とその修正法

みると確かに求めるべき補間曲線になることが分かった。但し，区間1は補間できない。補間範囲を確保するためには，データ区間の外側にダミーデータを作り，その点から傾きゼロで出発する曲線が必要となる。これが図３の補助曲線である。この補助曲線と，通常の自然スプライン関数で補間した暫定補間曲線を加え合わせればデータ点を必ず通り，しかも滑らかで振動もない理想的な補間曲線が全データ範囲で得られると予想される。加え合わせは単純な相加平均であり，線形の加え合わせのため，データ点での値は当然不変で，傾きも隣接する区間に入っても変わることは無い。これを「修正スプライン補間」と呼ぶことにする。次の章では，ダミーデータを得る方法も含めた，修正スプライン補間の方法について述べることにする。

3．修正スプライン補間の方法

3.1　ダミーデータ点の設定

ダミーデータ点の座標を（x_0, y_0）とする。先ず，$x_1 - x_0 = x_2 - x_1$となる様にx_0を決める。y_0の方はダミーなので一般の外挿の場合とは違って実際の値とは違っていても構わないが，x_0の様に簡単には決められない。補助曲線の振動の大きさに影響するからである。先ず，y座標の対数をとるなどしてダミーデータ点の大まかな値を求める。次に，この値を中心にダミー点のy座標を種々変化させ修正スプライン補間をする。その中で，端点から少しはなれた点の傾きが予め推定した値と等しくなるものをダミー点と決める。

3.2　傾きの推定

曲線ではなくデータの点しかないものからそれらの点を通ると推定される曲線の傾きは次の様にして求めた。最初に思いつくのは，データ点を折れ線で結び，それぞれの折れ線の傾きから推定する方法であるが，容易ではない。そこで，ここでは次式で表わされる方法を採ることにした。

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = \lim_{j \to i} \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \qquad (5)$$

この式は，傾きを求めたい点と周囲の任意の

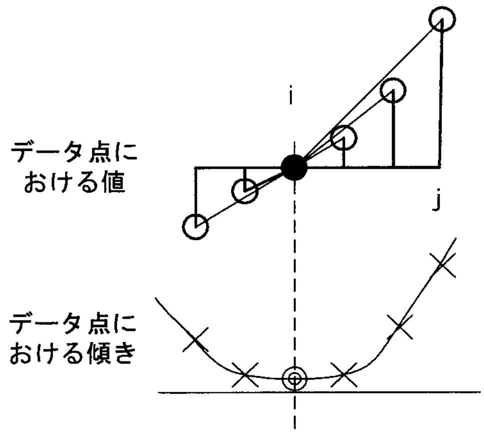

図4　データ点における傾きの求め方

データ点を結ぶ線分の傾きが，任意の点が曲線に沿ってデータ点iに近づくに従って，求めたい点の傾きに近づくことを意味する。　これを次の方法で実現する。すなわち，図４上側に示す様なデータがあったとする。黒丸が傾きを求めたいたデータ点iである。白丸は周辺のデータ点 j（≠i）で，データ点 i と j を結ぶ線分の傾きは下側の×で表わしてある。j → i となった時の傾きは×点を結ぶ曲線が i を通るところと考えられる。これが図下の二重丸であり，データ点のみから推定したデータ点iにおける傾きである。×点を結ぶ曲線はデータ点の補間曲線を３次多項式で表わすことにしたので，傾きは２次式となり，３次式で補間すれば充分である。これはあくまで推定であり表計算の３次式近似で良い。

この方法はデータ点を折れ線で結んで傾きを推定する方法よりも，傾きが大きく変化する場合にも対応できる。

4．結果と考察

前章で述べた修正スプライン補間法の例として，表１に示したＡℓの質量減弱係数を補間してみた。決定したダミーデータ点は光子エネルギー5keV，質量減弱係数exp(4.463)=86.75(cm^2/g)の点で，この時10keV,15keV,20keVの3データ点での補間曲線の傾きが，データ点から推定されたものとほぼ等しくなった。

そこで，このダミーデータ点から始まる修正スプライン法による補間を実行して，文献3)で用いた高次多項式による補間曲線と比較してみた。結

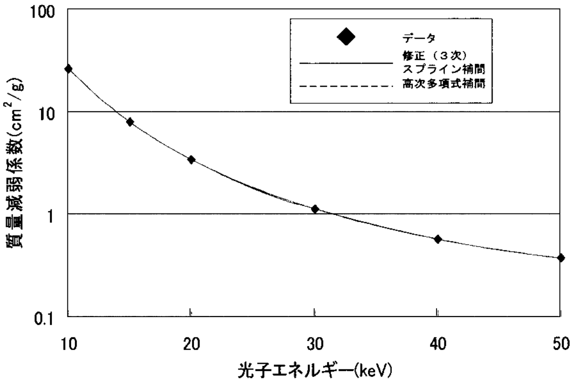

図5　多候式補間と修正（3次）スプライン補間

果を図５に示す。

この図では光子エネルギーを，質量減弱係数が大きく変化する50keVまでとした。二つの補間曲線は殆ど一致して見分けが付かない。僅かに光子エネルギーが25keV付近と35keV付近に違いが見られる程度である。縦軸は対数で目盛ってあるが，そのま表わしても差は殆ど無い。差の大きさは，高次多項式の値を基準にすると，最大で3％程度である。これは少し大きい様に思えるが，高次多項式との比較であり，正確な値との比較ではない。

また，この他にも，ここでは示していないが，空気の質量エネルギー吸収係数を補間して良好な結果を得ている[4)]。

今後の課題としては次のことが挙げられる。

先に良好な結果が得られたと書いたが，これはあくまで見た目であり，適切な評価法が必要である。データ点を必ず通ることや滑らかであることは問題ないので，振動が残っているかどうかが問題となる。これについては現在，曲率を使った評価法を検討中である。また，今まで述べてきた修正スプライン法は，加え合わせを単純な相加平均（50%ずつの加え合わせ）としてきたが，振動が上下に同じ大きさで起きるとは限らないので，評価法により加え合わせのパーセンテージを変更する必要があるかも知れない。

区間が等間隔でないことの影響も検討しなければならない事項の一つである。

以上が，残された検討課題である。

５．結論

修正スプライン補間法の適用により，必ずデータ点を通り，滑らかで振動のない，複雑な高次多項式による補間と遜色のない良好な補間曲線が低次多項式で実現できることが示された。

前章の章末にも書いた様に，まだ評価法が確立していないので，Ａℓの質量減弱係数については，3次式の係数をここに記すことは控える。評価法が定まり3次式の係数が決まり次第，発表する予定である。これを使えば，任意の光子エネルギーに対する質量減弱係数は，例えば表計算ソフトの関数（LOOKUPなど）を使って容易に求めることができ，研究者ごとに補間を行なうという手間を軽減できると予想される。

参考文献

１）竹井力：放射線物理学.南山堂　診療放射線技術選書：98-115,1982

２）RadiologicalHealthHandbook:137-140,1970

３）川上弘泰,武井力：減弱データによるＸ線スペクトルの算出.日本医学放射線学会物理部会誌 第５巻第２号：71-82,1985

４）小段謙一：減弱データによるＸ線スペクトルの算出（その４）.九州大学医療技術短期大学部紀要　第２６号：79-83,1999