

## 経済時系列のカオス性の検証：カオスニューラルネットワークによる力学系の学習と予測

池田，欽一

<https://doi.org/10.15017/3052490>

---

出版情報：経済論究. 102, pp.53-66, 1998-11-30. 九州大学大学院経済学会  
バージョン：  
権利関係：

# 経済時系列のカオス性の検証

—— カオスニューラルネットワークによる力学系の学習と予測 ——

池 田 欽 一

## 1 まえがき

カオスとは決定論にしたがうが不規則で乱雑な挙動を示し、初期値に敏感ではじめ十分に近い値をとったとしても、その軌道が時間とともに指数関数的に乖離していくものであるといえる。

本論文では平均株価からいくつかの特性値の計算を行ない、カオス性の検証と予測を行なった。しかし、物理学の場合と違って、経済では株価などの変動の基となる運動方程式は分かっていない。よって、得られた時系列からダイナミクスを推定する方法しかない。それには高い精度の長い時系列が必要になるが、経済時系列の場合必ずしも可能ではない。さらに、多くの場合基礎方程式そのものが時間とともに変化していくとも考えられる。

カオス性を検証するのに最も簡単な方法は、スペクトルの形状によって判断をする方法である。周波数領域にいくつかの鋭いピークを持つ場合、時間領域で見るといくつかの周期的な変動が重なった波形である。帯状に広がったスペクトルを持つ場合、振動数が密集した無限個の成分波を持っていると考えられ、カオスである可能性が強いと思われる。しかし、カオスは単なる重ね合わせでは理解できない現象で非線形領域に属するものである。

図1には、日経225 (1989.1.4~97.12.18) のパワースペクトルを示している。

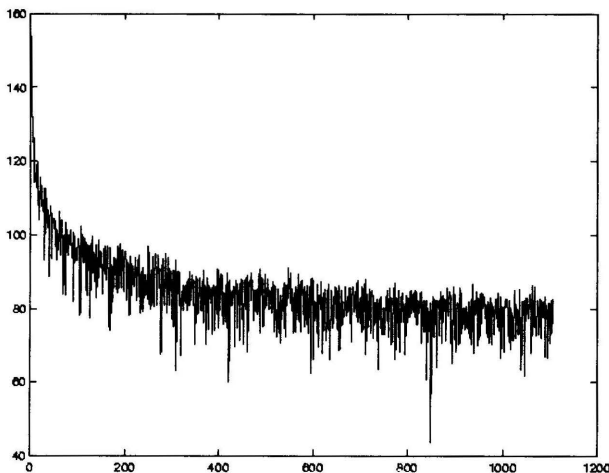


図1：日経225のスペクトル

角周波数軸全体に広がった形状をしており、単純な周期的時系列ではないと考えられる。また、ス

ベクトル成分波の強さが周波数  $f$  の逆数、(または、逆数の  $\alpha$  乗,  $\alpha \in R$ ) に比例しているとも見ることができ、 $\frac{1}{f}$  ノイズと言われるようなフラクタル性を有した系列であるとも考えられる。

経済時系列などの多くは 1 変数である。この観測列を高次元システムからの観測値であると考え、1 次元の観測系列から多次元の状態空間を再現する方法について 2 章でまとめている。状態空間を再構成する場合、問題となるのが観測系列に含まれるノイズ成分であり、3 章ではウェーブレット変換によるガウス分布に従う高周波ノイズの除去方法を述べる。また、多次元化する場合、元の状態空間の次元を知ることができず推定を行なう必要がある。4 章ではこのいくつかの方法について述べている。再構成を行なう際に次元の推定と同様に重要なものに時間遅れというものがある。時系列内の部分系列の情報量の重畳度がもっとも少なくなるような相互情報量による基準について 5 章でまとめている。6 章では自己相似性を判断する相関次元解析、7 章ではカオスの特徴的な性質である軌道の不安定度を与えるリヤプノフスペクトル解析についてまとめ、8 章では再構成された状態空間から状態遷移関数をカオスニューラルネットワークによって学習し、予測を行なう方法について述べた。

## 2 状態空間の再構成

株価の変動が、 $M$ 次元の非線形離散力学システムで、次のように与えられると仮定する。

$$x_{t+1} = F(x_t), x_t \in R^M. \quad (1)$$

ここで、 $\{x_t\}$  は離散時間  $t$  における状態、 $F$  は  $M$ 次元写像である。株価など、経済の時系列データの多くは、離散的なスカラー  $\{x_k\}$ ,  $k=0, 1, \dots, N$  である。よって、観測から式 1 の  $\{x_t\}$  のような  $M$ 次元空間内の状態ベクトルを得ることは不可能となる。また、式(1)のダイナミクスを完全に知ることもできず、時系列  $\{x_t\}$  を観測値として与えるようなアトラクターを構成することもできない。よって、ここでは元の未知のアトラクターの性質をもったアトラクターを、観測時系列から再構成する必要がある。ここでは、Takensの埋め込み定理を用い、スカラーの時系列から時間遅れの差分を用いて再構成する。時間遅れの大きさを  $\tau$ , 埋め込み次元を  $m$  とすると、再構成状態ベクトル  $\{v_i\}$  は、次のように表現できる。

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_1, x_{1+\tau}, \dots, x_{1+(m-1)\tau}), \\ v_2 &= (x_2, x_{2+\tau}, \dots, x_{2+(m-1)\tau}), \\ &\vdots \\ v_{N-(m-1)\tau} &= (x_{N-(m-1)\tau}, x_{N-(m-2)\tau}, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (2)$$

ここで再構成状態空間の埋め込み次元  $m$  は、 $[d]+1$  (ここで、 $d$  は元のアトラクターの次元) とは違った値となる。

$$m \geq 2d + 1, \quad (3)$$

ならば、Takensの埋め込み定理を満たし、状態空間は交差することなく再構成される。ただし、Takensの埋め込み定理は、十分条件であり、必要条件ではない。つまり、埋め込み次元が  $[d]+1$  より小さい

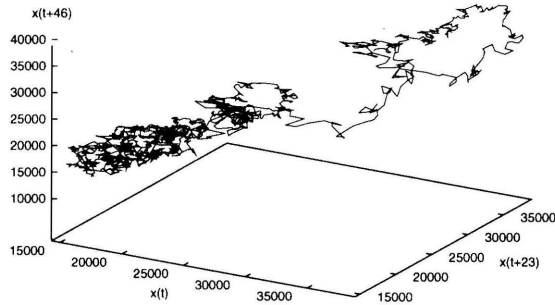


図2：日経225の再構成状態空間の3次元射影

場合でも、交差しないアトラクターが再構成されることがある。

有限のノイズを含む時系列の場合、アトラクターを特徴づける次元  $d$  と、リヤプノフ指数は、埋め込み次元  $m$  と時間遅れ  $\tau$  の影響を大きく受ける。

株価の場合、無限の系列を観測することはできないので、ノイズ成分の除去、および、適切な  $m, \tau$  の選択をしなければならない。

図2には、日経225 (1989.1.4~97.12.18) の時系列から、 $\tau=23$  として再構成した状態空間の3次元空間への射影を表している。図によると、ある種のアトラクターが形づくられていると考えることができるが、バブル期のデータを含んでいるために、バブル期、バブル期からの過渡期、バブル以降の比較的安定した状態の3つの区分に分かれていることが観測できる。安定期からバブル期、バブル期から過渡期などの遷移もカオスによって説明を行なうことができるかも知れないが、本論文では、外生的なショックを考慮しないことにする。よって4章以下では比較的安定した期間 (1991.11.28~97.12.18) のみを考えることとする。

### 3 ウェーブレット変換によるノイズ除去

時系列  $\{x_t\}$  に対するウェーブレット変換、逆変換は、

$$x_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} x_t \psi_n^m(t) dt, \quad (4)$$

$$x_t = \sum_m \sum_n x_n^m \psi_n^m(t), \quad (5)$$

と表される。ここで、 $\psi(t)$  は、スケール  $m$ 、トランスレート  $n$  について正規直交系をなす基本ウェーブレットである。

$$\psi_n^m(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - n). \quad (6)$$

このウェーブレット変換を用いてホワイトノイズを除去するために、ガウス過程の平均自乗誤差基



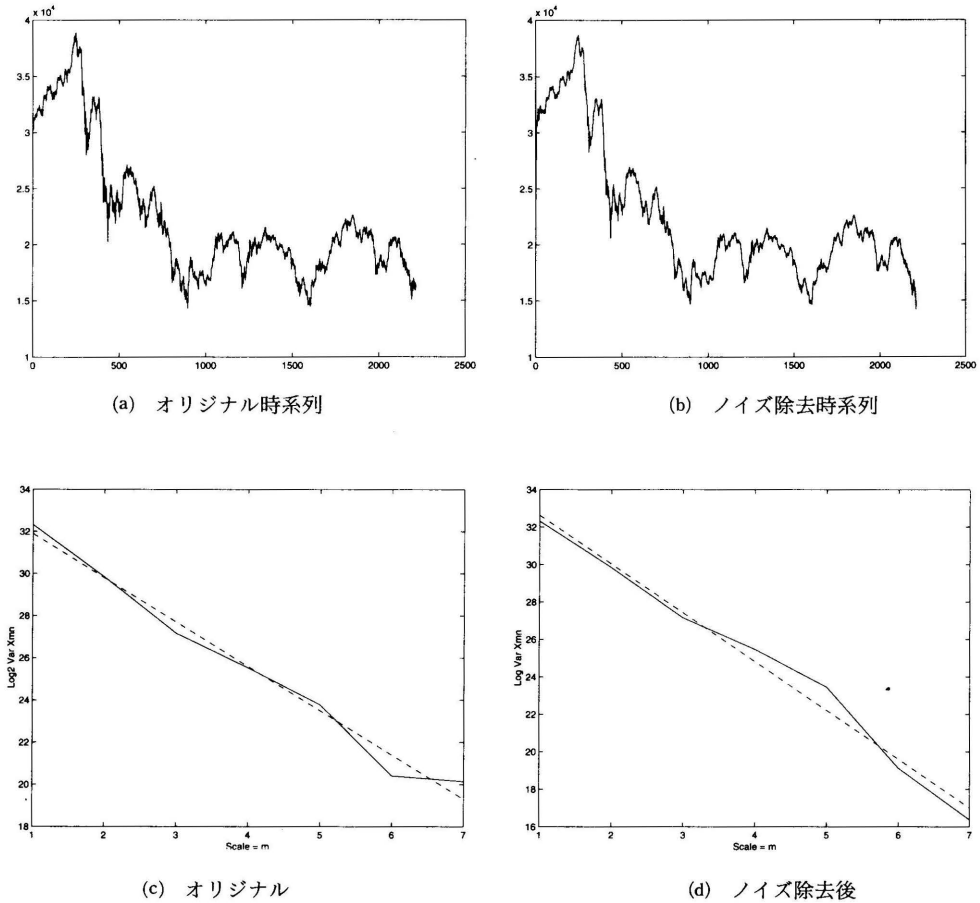


図3：ノイズ除去

準を与えるBayesian推定法を用いる。

まず、観測時系列にノイズが含まれた観測値を、

$$r_t = x_t + w_t, \tag{7}$$

とする。ここで、 $\{x_t\}$  は平均0のフラクタル過程、 $\{w_t\}$  は独立の平均0のGaussianホワイトノイズである。この $\{r_t\}$ のウェーブレット係数を、

$$r = \{r_n^m, m \in M, n \in N(m)\}, \tag{8}$$

とする。 $\{x_t\}$  と  $\{w_t\}$  は独立であるので、 $r$  の分散を求めると、次の関係式が成り立つ。

$$\text{Var } r_n^m = \sigma_m^2 = \sigma^2 2^{-7m} + \sigma_w^2. \tag{9}$$

ここで、 $\sigma^2$  はノイズを除いた時系列 $\{x_t\}$ の分散、 $\sigma_w^2$  はホワイトノイズの分散である。

対応する対数ゆう度関数は、

$$L(\gamma, \sigma^2, \sigma_m^2) = \ln \text{pr}(r | \gamma, \sigma^2, \sigma_m^2) \\ = -\frac{1}{2} \sum_{m \in M} N(m) \left\{ \frac{\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2} + \ln(2\pi\sigma_m^2) \right\}. \quad (10)$$

(11)

となる。ここで、 $\hat{\sigma}_m^2$  はサンプル平均であり、次の式で計算される。

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{N(m)} \sum_{n \in N(m)} (r_n^m)^2. \quad (12)$$

いま、ノイズがない、つまり  $\sigma_w^2 = 0$  であるとする、ゆう度関数を最大にするパラメーターは、 $\beta = 2^{\hat{H}}$  の解になる。特に、

$$\hat{\beta}_{ML} \leftarrow \sum_{m \in M} \left[ \frac{mN(m)}{\sum_{m \in M} mN(m)} - \frac{n(m)}{\sum_{m \in M} N(m)} \right] \hat{\sigma}_m^2 \beta^m = 0. \quad (13)$$

これから、

$$\hat{\gamma}_{ML} = \log_2 \hat{\beta}_{ML}, \quad (14)$$

$$\hat{H}_{ML} = (\hat{\gamma}_{ML} - 1)/2, \quad (15)$$

$$\hat{D}_{ML} = 2 - \hat{H}_{ML}. \quad (16)$$

を得る。ここで、 $\hat{H}_{ML}$  はハースト指数、 $\hat{D}_{ML}$  の最ゆう推定値である。

一般的に、 $\sigma_m^2 \neq 0$  の場合にも、この方法を繰り返すことによって、最ゆう推定値を得ることができる。

ノイズパラメーター  $\gamma, \sigma^2, \sigma_m^2$  を用いて、ノイズの含まれていない時系列  $\{x_t\}$  のウェーブレット係数を次のように推定することができる。

$$\hat{x}_n^m = \sum_{m, n \in R} E[x_n^m | r_n^m] \psi_n^m(t) \\ = \sum_{m, n \in R} \left[ \frac{\sigma^2 \beta^{-m}}{\sigma^2 \beta^{-m} + \text{sigma} a^2 w} \right] r_n^m \psi_n^m(t). \quad (17)$$

(18)

このウェーブレット係数  $\{\hat{x}_n^m\}$  の逆変換をすることによって、ノイズの含まれた観測値  $\{r_i\}$  からノイズを除去することができる。

図3には日経225の時系列(a)、日経225のウェーブレット係数の分散の対数プロット(c)、ノイズの除去を行なった後の時系列(b)、そのウェーブレット係数の分散の対数プロットを示している。図3(c)の  $m=6 \sim 7$  において分散が水平を示している部分が高周波ノイズ成分であり、図3(b), (d)では、係数の修正によって取り除かれている。

#### 4 埋め込み次元 $m$ の選択

埋め込み次元  $m$  の適切な選択は、ノイズの除去とともに、アトラクターの再構成にとって重要である。ここでは、[6]に示されている手法をまとめる。まず、Takensの理論値よりも大きいと考えられる  $m$  を適当に決める。状態ベクトル  $\{v_k\}$  から  $m \times n$  行列  $V = X^T X$  を求める。ただし、行列  $X$  は、状態ベクトルから次のように構成される。

1	64.44	11	7.69e02	21	2.08e02	31	5.74e03	41	1.11e03
2	8.95	12	7.56e02	22	1.81e02	32	5.13e03	42	9.42e04
3	2.29	13	5.78e02	23	1.47e02	33	4.49e03	43	7.51e04
4	0.85	14	5.01e02	24	1.24e02	34	3.74e03	44	6.33e04
5	0.54	15	4.51e02	25	1.21e02	35	3.35e03	45	3.86e04
6	0.43	16	3.74e02	26	1.15e02	36	2.91e03	46	2.54e02
7	0.33	17	3.47e02	27	1.08e02	37	2.57e03	47	2.03e04
8	0.21	18	3.29e02	28	8.79e03	38	2.07e03	48	1.47e04
9	0.10	19	2.55e02	29	8.57e03	39	1.57e03	49	3.46e05
10	9.54e02	20	2.27e02	30	7.21e03	40	1.35e03	50	4.31e06

表 1 :  $V$  の固有値

$$X = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \tag{19}$$

$V$  の最大固有値に対応する固有ベクトルは、再構成された状態空間のなかの最も大きな変移の方向を示している。カオスの影響でデータに大きな変移が生じていると考えると、 $m$  を比較的大きな固有値の数に応じて選べばよいことになる。しかし、どの程度大きな固有値のカウントするかの明確な基準は与えられていない。さらに、固有値の相対的な大きさは  $V$  の要素の大きさに依存している。また、この手法による再構成は常に最適であるとは限らず、そして、フーリエ変換と同様にノイズとカオス時系列を適切に区別することができない。

表 1 には日経 225 の固有値の計算結果を示している。どの値までを取ればいいという基準がないため適切な値を得ることはできないが、8 章では  $m=12$  として予測を行なった。

その他の方法としては、大きな次元に埋め込まれたアトラクターの幾何学的構造によって  $m$  を推定する方法が示されている [11][12]。もし、埋め込み次元  $m$  が小さい場合、アトラクターには交差する点が生じる。 $m$  を大きくしていくにつれ、この交差は解消されていくので、 $m$  を大きくしていき、すべての交差がなくなる埋め込み次元の閾値を求めればよい。[11] では、ノイズが含まれたデータの場合、推定埋め込み次元が大きくなるという結果が示されているので、この手法を行なうまえにノイズの除去などの前処理をしておく必要がある。

## 5 時間遅れ $\tau$ の選択

ノイズのない無限のデータの場合、時間遅れ  $\tau$  をどのようにとっても、アトラクターの再構成を行なうことができる。しかし、経済時系列など有限でノイズの含まれている場合、時間遅れ  $\tau$  が小さ過ぎる場合、再構成された状態空間の  $\{v_i\}$  の座標は似たものとなり、アトラクターは対角線方向に引き延ばされ、ノイズが含まれている場合には不明瞭となってしまう。よって、 $\tau$  の選択は座標が時間的に独立になるように選択しなければならない。しかし、あまりに時間遅れ  $\tau$  を大きくすると時系列の情報を失うことになる。特にサンプル数が少ない系列の場合、再構成状態空間の相点の個数が  $\tau$  の増加とともに減少していき、アトラクターの適切な再構成が行なわれないことになる。

単純な  $\tau$  の選択方法としては、時系列の自己相関関数が最初に 0 になる時刻を選択する方法がある。

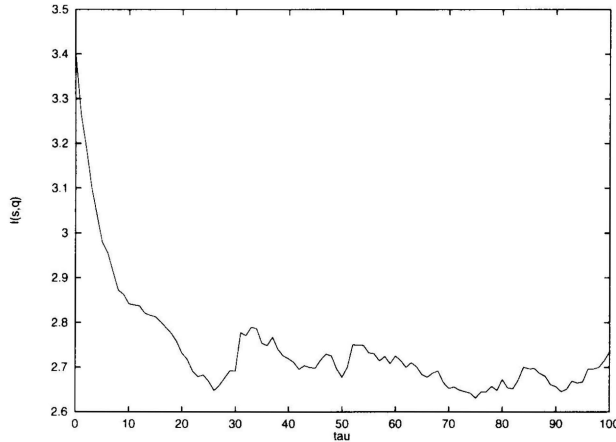


図 4：相互情報量

その他の方法として、よりよい選択基準として相互情報量を用いた選択基準が示されている(8)。

まず、時系列から長さ  $M$  の系列  $S_k \{k=1, 2, \dots, M\}$  を切りとり、この  $S_i$  の確立分布を  $P_s(s_1), P_s(s_2), \dots, P_s(s_n)$  とする。ここで、 $s_1, s_2, \dots, s_n$  は可能性のあるメッセージ群、時系列の場合はそれぞれの値を階級に分けた場合の対応する階級値となり、 $P_s(s_i), i=1, 2, \dots, n$  はヒストグラムから推定される確率となる。同様に、 $T$  時刻だけ移動した系列  $Q_l \{l=1+T, 2+T, \dots, M+T\}$  の確率分布を  $P_q(q_1), P_q(q_2), \dots, P_q(q_n)$ 、階級値を  $q_1, q_2, \dots, q_n$  とする。また、 $S$  と  $Q$  の相互確率を  $P_{sq}(s_i, q_j), i, j=1, 2, \dots, n$  とする。 $P_s(s_i)$  と同じように、 $P_{sq}(s_i, q_j)$  は 2 次元のヒストグラムから推定される。この時、相互情報量  $I(S, Q)$  は、

$$I(S, Q) = \sum_i \sum_j P_{sq}(s_i, q_j) \log \frac{P_{sq}(s_i, q_j)}{P_s(s_i)P_q(q_j)}, \tag{20}$$

と定義される。そして、時間差  $T$  を変化させ、 $I(S, Q)$  が最初に極小値をとる時刻を再構成時の時間遅れ  $\tau$  とする。

図 4 には日経 225 の相互情報量の計算結果を示している。最初に極小値を取るのは  $\tau=23$  の時であり、相互情報量は 2.66 ビットであった。状態空間の再構成にはこの  $\tau=23$  を用いて行なった。

## 6 相関次元解析

相関次元解析とは Grassberger-Procaccia (GP) 法とも言われ、カオスアトラクターの自己相似性を検証する方法である。

相関次元は情報次元の簡略されたものと考えることができ、

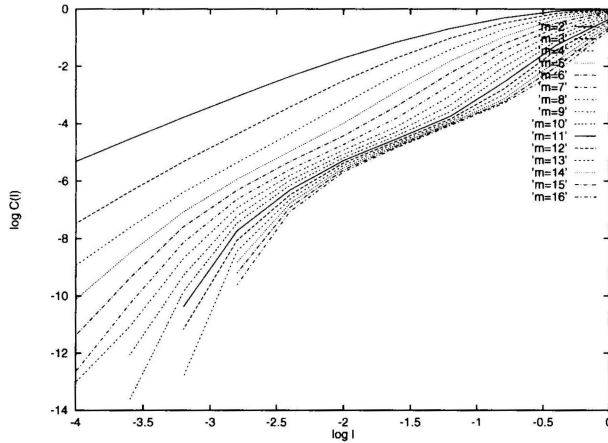


図 5：日経225の相関積分

$$v = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \langle \mu_l \rangle x}{\log l}, \tag{21}$$

と定義される。 $\mu_l$  は  $v_k$  を中心とする直径  $l$  の小球に含まれる点の数であり、 $\langle \cdot \rangle x$  はすべての点についての平均を表している。

相関次元を求めるために、まずは相関積分関数  $C(l)$  を定義する。

$$C(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \theta(l - |v_i - v_j|). \tag{22}$$

ここで、 $\theta(x)$  はHeaviside関数であり、次のように定義される。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{23}$$

半径  $l$  により  $C(l)$  が、

$$C(l) \propto l^v \tag{24}$$

とスケーリングされる時、アトラクターはフラクタル性（自己相似性）を持っていることになる。

もし、時系列がカオスである場合、埋め込み次元  $m$  の増加に伴い  $\log l$  に対する  $\log C(l)$  の傾きは相関次元  $v$  に収束する。

アトラクター再構成の時に、埋め込み次元  $m$  が小さい場合、状態空間はデータに埋めつくされることになり、また、傾きは  $m$  に等しくなる。 $m$  がTakensの理論値に近づくにつれ傾きはアトラクターのフラクタル次元に近づいていき、その後は傾きを維持することになる。よって、傾きが収束したと考えられる  $m$  の値をアトラクター再構成に必要な埋め込み次元とすることができる。

図 5 には日経225の相関積分の結果を示している。状態空間の再構成に用いたサンプル数は1500サンプルであり、アトラクターを構成する点が十分でなく、 $l$  が微小な場合、相関積分を正確に計算することはできなかったが、推定で10次元以上であると考えられる。

## 7 リヤプノフ解析

リヤプノフ指数とは、状態空間内のある2点間の一つの座標系に対する距離の時間についての指数的拡大率と解釈することができる。

状態空間内の2つの点を  $V_0, V_{0+\Delta V_0}$  とする。この2点は時間の経過とともにアトラクター上をシステムの力学系によって移動していく。それらの軌道はある種の時間の関数としてとらえることができる。そうすると、2点間の乖離についても時間の関数と考えることができ、 $\Delta V(V_0, t)$  と定義する。2点間の距離が時間とともに減少する場合、アトラクターが周期的軌道、不動点をもっている。もし、力学系が不安定であるならば2点の軌道の乖離は指数的に大きくなり、その後ある値に落ち着く。カオス性がある地点では2点間の距離  $\Delta V(V_0, t)$  は不規則にふるまう。このように、はじめは近接している2点間軌道の距離の指数的变化率の平均はカオス性の判断するのに適している。状態空間のある軸方向を  $i$  とし、 $i$  軸方向の2点の距離の時間変化を  $\Delta V^i(V_0, t)$ 、 $i$  軸方向の2点の距離の初期値を  $\Delta V_0^i$  とすると、リヤプノフ指数は、次のように定義される。

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty, |\Delta V_0^i| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta V^i(V_0, t)|}{|\Delta V_0^i|} \quad (25)$$

この指数を用いることにより、軌道の性質を判断することができる。

$\lambda_i < 0$  の時：アトラクターの軌道は  $i$  軸方向について周期的、または不動点におちつく。負のリヤプノフ指数は散逸的システムに特有なものであり、そのようなシステムは漸近的な安定性を示し、指数の絶対値が大きくなるほど安定になる。

$\lambda_i = 0$  の時：アトラクターの2点の軌道の距離は、 $i$  軸方向について、時間が経過しても変化しない。

$\lambda_i > 0$  の時：軌道は不安定になり、カオス的になる。初期において十分近接した2点であっても全く違った軌道をたどることになる。力学系は決定論的であるが、一見すると、ブラウン運動のようにふるまうことになる。

ここまでは、再構成状態空間の1つの軸方向のみに注目して来たが、 $m$ 次元空間の各軸方向のリヤプノフ指数を考えることができる。これらの組はリヤプノフスペクトラムと呼ばれる。そして、リヤプノフスペクトラムのうちの少なくとも最大の指数が正の値をとれば、対応する軸方向にカオス特有の軌道不安定性をもっていることになる。

リヤプノフスペクトルを求めるために[5]、[7]、式1の力学系で、 $x_t$ における微小変位を  $\delta x_t$  とすると、

$$x_{t+1} + \delta x_{t+1} = F(x_t + \delta x_t) \quad (26)$$

と表せる。テイラー展開し高次の項を切り捨てて線形近似することにより、

$$\delta x_{t+1} = DF(x_t) \delta x_t \quad (27)$$

というような  $\delta x_t$  に関する写像とすることができる。ここで、 $DF$  は  $F$  のヤコビ行列で、その第  $ij$  成分を  $f_{ij}$ 、 $F$  の第  $i$  成分を  $F_i$ 、 $x_t$  の第  $j$  成分を  $x_j$  とすれば、

$$f_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \tag{28}$$

となる。初期値として  $\delta x_0$  を与え、これを  $DF$  によって  $N$  回写像すると、

$$\delta x_N = DF(x_{N-1})DF(x_{N-2}) \cdots DF(x_0) \delta x_0, \tag{29}$$

となる。

$$DF_N = DF(x_{N-1})DF(x_{N-2}) \cdots DF(x_0), \tag{30}$$

と定義すると、この行列の固有値  $\sigma_i(N)$  を用いてリヤプノフスペクトル  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, M)$  は、

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log |\sigma_i(N)|, \tag{31}$$

となる。

また、リヤプノフ指数を大きい方から順次加算していき、負とならない最大の整数を  $j$  とすると、アトラクターのフラクタル次元  $d$  を、

$$\hat{d} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \tag{32}$$

と推定することができる。

式(1)のように力学系が定式化されている場合、ヤコビ行列  $DF$  を直接計算することができ、式(31)からリヤプノフスペクトルを求めることができる。1変数データとして観測された時系列からは、直接  $DF$  を計算することができないので、再構成された状態空間のアトラクターの軌道から  $DF$  を推定する必要がある。再構成されたアトラクター上の1つの点を  $v_t$  とし、この点を中心とする半径  $\varepsilon$  の  $m$  次元微小超球に入るアトラクター上の点  $\{v'_i\} (i=1, 2, \dots, N)$  を選び出す。このとき、 $v_t$  から見た各点への変位ベクトル  $\{y_i\}$  は、

$$y_i = v'_i - v_t, \tag{33}$$

となる。時間が  $\Delta t$  だけ経過すると、 $v_t$  は  $v_{t+\Delta t}$  に、超球内の各点は  $\{v'_{i+\Delta t}\}$  に変化する。この時の変位ベクトル  $\{z_i\}$  は、

$$z_i = v'_{i+\Delta t} - v_{t+\Delta t}, \tag{34}$$

となる。経過時間  $\Delta t$  と超球の半径  $\varepsilon$  が十分に小さい時、

$$z_i = A_t y_i, \tag{35}$$

が近似的に成立する。この  $A_t$  は式(27)のヤコビ行列を近似表現したものとなる。表 2 には日経 225 (1991.11.28~97.12.18) から再構成された状態ベクトルのリヤプノフスペクトルの計算結果を示している。時間遅れ  $\tau$  は 23、再構成次元  $m$  は 30 とした。この結果から、最大固有値は 4.65 で少なくとも 1 つの軸方向については軌道不安定性を有していると考えられる。 $m=30$  の時は  $\lambda_{16}$  まで正の値を示しており、株価は低次元の力学系ではないようである。累積値については負になることはなかった。これは、サンプル点が少なく、ヤコビ行列の推定を行なう時に近傍の点が十分に取れなかったことが原因と考えられる。

	固有値	累積値		固有値	累積値		固有値	累積値
$\lambda_1$	4.65	4.65	$\lambda_{11}$	0.66	21.85	$\lambda_{21}$	-0.52	21.46
$\lambda_2$	3.35	8.00	$\lambda_{12}$	0.48	22.34	$\lambda_{22}$	-0.67	20.79
$\lambda_3$	2.74	10.74	$\lambda_{13}$	0.41	22.75	$\lambda_{23}$	-0.99	19.79
$\lambda_4$	2.28	13.03	$\lambda_{14}$	0.27	23.03	$\lambda_{24}$	-1.17	18.62
$\lambda_5$	1.98	15.01	$\lambda_{15}$	0.14	23.17	$\lambda_{25}$	-1.53	17.08
$\lambda_6$	1.68	16.70	$\lambda_{16}$	0.01	23.18	$\lambda_{26}$	-1.71	15.37
$\lambda_7$	1.45	18.15	$\lambda_{17}$	-0.09	23.18	$\lambda_{27}$	-2.05	13.32
$\lambda_8$	1.18	19.34	$\lambda_{18}$	-0.28	22.80	$\lambda_{28}$	-2.61	10.70
$\lambda_9$	1.00	20.35	$\lambda_{19}$	-0.34	22.45	$\lambda_{29}$	-3.34	7.36
$\lambda_{10}$	0.84	21.19	$\lambda_{20}$	-0.47	21.98	$\lambda_{30}$	-4.49	2.86

表2：リヤプノフスペクトル

## 8 力学系の推定と予測

1次元の観測時系列から再構成された状態ベクトルから、式(1))に示されている非線形写像 $F$ の推定を行なう。その方法としては、写像関数 $F$ の大域的な推定を行なう方法、局所的な推定を行なう方法がある。

大域的推定法としては、多項式(ARモデルなど)による写像関数の推定[15]、階層的ニューラルネットワークによる方法などがある。しかし、多項式による推定では、独立変数の数は $m+pC_m$ となり、モデルの次元数 $p$ を増やすことによって急激に大きくなる。また、独立変数が多くなることによってノイズの含まれたデータに過剰な推定を行なったり、高次元の多項式による推定は部分的サンプルの影響を受けやすくなる。階層的ニューラルネットワークによる推定法の問題点としては、多項式と違い、ネットワークのパラメーター(ウェイト)には学習と言われる繰り返し計算が必要で、パラメーター推定に時間がかかることや、学習の際、局所最適解に陥りやすい点があげられる。これらの問題点を改良するアルゴリズムとして、モーメント法による学習の高速化、シミュレーテッドアニーリングによる確立的学習法などが提案されている[16]、[13]。

また、大域的推定法全体の問題点としては、新しいサンプル点を与えられたとき $F$ の推定を再度行なわなければならない点である。この解決するものが、予測を行なう点の近傍のサンプル点にのみ注目する局所的な写像 $F$ の推定法である。局所推定法は大きく分けて、近傍のサンプル点を予測に直接用いる方法、限られたサンプルにより写像関数 $F$ を推定し、それをを用いて局所的な予測を行なう方法がある。

このように、局所的な推定法は短期的予測と言う観点から見ると、大域的手法に比べて誤差が小さいと考えられる。しかし、株価など、経済時系列の場合、用いることができるサンプル数は一般的に少なく、式(2)による状態空間の再構成によっても完全なアトラクターの再構成はできず、予測を行なう時点の近傍のサンプルが十分に取れないことが考えられる。

よって本論文では、大域的手法のニューラルネットワークによる方法に、神経細胞の自己の過去の出力による不応性、他のニューロンからのフィードバック入力を考慮したカオスニューラルネット



ワークの手法を用い、状態空間ベクトルの学習による式(1)の力学系の記憶、学習されたネットワークによる次の時刻の状態点の予測を行なう。

### 8.1 カオスニューラルネットワーク

カオスニューロンは次のように定式化することができる。

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^N w_{ij} \sum_{d=0}^t k_m^d y_j(t-d) - \alpha \sum_{d=0}^t k_r^d y_i(t-d) - \theta_i + \sum_{j=1}^M v_{ij} \sum_{d=0}^t k_s^d I_j(t-d), \quad (36)$$

$$y_i(t+1) = F(u_i(t+1)). \quad (37)$$

ここで、 $y(t+1)$ ： $t+1$ での出力、 $u(t+1)$ ： $t+1$ でのニューロンの内部状態、 $k_m$ 、 $k_r$ 、 $k_s$ ：それぞれ他のニューロンからのフィードバック、不応性を表す自己からのフィードバック、入力についての記憶定数で指数的に減少、 $\alpha$ ：不応性定数、 $I_j(t)$ ： $t$ での  $j$ ニューロンへの外部入力、 $\theta$ ：第  $i$ ニューロンのしきい値、 $w_{ij}$ ：第  $j$ ニューロンから  $i$ ニューロンへのシナプス結合の強さ、 $v_{ij}$ ：第  $j$ の外部入力から  $i$ ニューロンへのシナプス結合の強さ、 $F$ ：出力関数で、ここでは式38で表されるシグモイド関数を用いる。

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\frac{x}{\varepsilon})}. \quad (38)$$

ここで、 $\varepsilon$  は温度パラメーターと呼ばれ、シグモイド関数の形状を決める。 $\varepsilon$  が、大きくなれば、裾が広がった形になり、線形関数に近くなる、小さくすると、式39で表されるステップ関数に近くなる。

$$H(x) = 1[x] = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{if } x \leq 0 \end{cases}. \quad (39)$$

式36において、右辺の第1項は、他のニューロン  $j$  からの入力に、指数的に減少する定数  $k_m$  を掛け、その線形加重和をとり、ニューロン  $j$  からニューロン  $i$  への結合強度を表すウェイトを掛けて、さらにその和をとった形になっている。よって、これは、他のニューロンからニューロン  $i$  への興奮性、抑制性信号の総量を表している。第2項は、指数的に減少する定数  $k_r$  を自己の過去の出力値に掛け、その和をとり、その値に  $\alpha$  を掛け、負値とし、さらに、第3項の  $-\theta$  まで考慮すると、実際の脳神経細胞に見られるような発火後しばらくは新たに発火を行ないにくくなる不応期を模擬することができる。よって、第2、3項は不応性を表している。第4項はネットワークに対する外部からの入力となる。ここで、第1項を相互作用項 ( $\eta$  で表す.)、第2、3項を不応性項 ( $\zeta$  で表す.)、第4項を外部入力項 ( $s_i$ ) と置くことで、式36は、

$$u_i(t) = \eta_i(t) + \zeta_i(t) + s_i(t), \quad (40)$$

ただし、

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij} \sum_{d=0}^t k_m^d y_j(t-d), \quad (41)$$

$$\zeta_i(t) = -\alpha \sum_{d=0}^t k_r^d y_i(t-d) - \theta_i, \quad (42)$$

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^M v_{ij} \sum_{d=0}^t k_s^d I_j(t-d). \quad (43)$$

さらに、 $\eta$ ,  $\zeta$  は、

$$\eta_i(t+1) = k_m \eta_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} y_j(t), \quad (44)$$

$$\zeta(t+1) = k_r \zeta_i(t+1) - \alpha y_i(t) - \Theta_i(t), \quad (45)$$

$$\Theta_i(t) = \theta(t) - s_i(t) - \theta(t-1) - s_i(t-1) k_r, \quad (46)$$

と書ける。

上で定義したカオスニューロンを構成要素とするニューラルネットワークをカオスニューラルネットワークと呼ぶ[1]。カオスニューラルネットワークは個々の構成要素自体がカオスを生成する能力をもっており、自己相起型連想メモリとしての応用がなされている。

## 8.2 カオスニューラルネットワークによる写像関数 $F$ の学習と予測

次に、カオスニューラルネットワークを用いて、式(1)の非線形写像関数  $F$  を推定する方法について述べる。

外部入力としては再構成された状態空間の時刻  $t$  における相点  $\{v_i\}$  を与え、ネットワークの出力には1時刻先の値、つまり  $\{v_{t+1}\}$  の状態ベクトルが出力されるようにバックプロパゲーション法によって学習を行なう。また、学習の収束の高速化のためにモーシオン法を用いる。

カオスニューラルネットワークによる力学系の学習と予測シミュレーション結果をまとめる。

用いたシステムはM-1800/20Uで、プログラム言語はFortran、ネットワークは株価の値を外部入力としてそのまま受けとる入力層、カオスニューロンを用いた第一隠れ層、第二隠れ層、線形荷重和を非線形関数によって写像した値を出力する通常のニューロンを用いた出力層の4層からなるとした。

予測誤差の定義は平均2乗予測誤差の平方根を全体の時系列の標準偏差で基準化したものとする。なお、比較のためにARモデルによる予測方式の誤差を併記した。

	1時刻先	5時刻先	10時刻先
カオスネット	0.245	0.354	0.431
ARモデル	0.263	0.442	0.623

表3：カオスニューラルネットワークによる予測誤差

表3より、ARモデルの予測誤差は予測する時刻に比例して増大していくが、カオスニューラルネットワークによる予測はARモデルに比べて誤差の増大率が小さいようである。しかし、どちらの場合も予測の精度はあまり良くないようである。これは時系列のカオス性により、線形予測が適切でないこと、または、時系列のカオス性に対する雑音の振幅が大きいためと考えられる。

## 9 おわりに

本論文では、1次元時系列のカオス性を検証するいくつかの手法を示し、日経225に対する検証を実際に行なった。その結果、最大リヤプノフ指数は正となり、少なくとも1つの軸方向に対してはカオ

スの特性である軌道不安定性を有していることを示した。日経225に対する相関次元解析では、株価のデータの有限性により、再構成状態空間の相点が少なく、微小な超球を用いた場合の相関積分を正確に計算することができず、収束する次元を推定することはできなかった。しかし、10次元以上の状態空間を形成している可能性が強く、低次元の比較的簡単な力学系では表されないように考えられる。

再構成した状態空間の非線形写像関数をカオスニューラルネットワークにより学習し、それを用いた予測手法を示し、シミュレーションを行なったところ、予測時刻を伸ばしていった時のARモデルの誤差拡大率よりは、カオスニューラルネットワークの誤差拡大率が小さいという結果はでたものの、誤差の大きさ自体は大きなものであった。

これからの課題としては、経済の状態遷移が写像関数で記述できると仮定しても、物理現象とはことなり、時間とともに写像関数が増加していくと考えられるので、そのことも考慮した予測方法を考えていきたい。

### 参 考 文 献

- [1] 合原一幸編：“カオス——カオス理論の基礎と応用——”，サイエンス社， Sep. 1990.
- [2] 小河清隆，中川匡弘：“脳波におけるカオスとフラクタル性”，信学論A, Vol.J78-a, No.2, pp.161-168, Feb. 1995.
- [3] 寺崎健，池口徹，合原一幸，田中智：“経済時系列データの決定論的非線形ダイナミカル特性に関する解析”，信学論A, Vol.J78-a, No.2, pp.1601-1627, Dec. 1995.
- [4] 南敏：“情報理論”，産業図書， Dec. 1988.
- [5] H. D. I. Abarbanel, R. Brown and M. B. Kennel : “Lyapunov exponents in chaotic systems : their importance and evaluation using observed data”, *International Journal of Modern Physics B*, Vol.5, pp.1347-1375, 1991.
- [6] D. S. Broomhead and G. P. King : “Topological dimension and local coordinates from time series data”, *Physica D*, Vol.20, pp.217-236, 1986.
- [7] S. O. Eckman, J. P. Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto : “Lyapunov exponents from time series”, *Physical Review A*, Vol.34, pp.4971-4979, 1986.
- [8] A. M. Fraser : “Reconstructing attractors from scalar time series : a comparison of singular system and redundancy criteria”, *Physica D*, Vol.34, pp.391-404, 1989.
- [9] A. M. Fraser and H. Swinney : “Independent coordinates for strange attractors from mutual information”, *Physical Review A*, Vol.33, pp.1134-1140, 1986.
- [10] P. Frederickson, J. L. Kaplan, E. D. Yorke, and J. A. Yorke : “The lyapunov dimension of strange attractors”, *Journal of Differential Equations*, Vol.49, pp.185-207, 1983.
- [11] M. B. Kennel, R. Brown and H. D. I. Abarbanel : “Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction”, *Physical Review A*, Vol.45, pp.3403-3411, 1992.
- [12] W. Liebert, K. Pawelzik and H. G. Schuster : “Optimal embeddings of chaotic attractors from topological considerations”, *Europhysics Letters*, Vol.14, No.6, pp.521-526, 1991.
- [13] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr. and M. P. Vecchi : “Optimization by simulated annealing”, *Science*, Vol.220, No.4598, pp.671-680, May 1983.
- [14] D. Kugiumtzis, B. Lillekjendlie and N. Christophersen : “Chaotic time series, part I, estimating”, *Modelling, Identification and Control*, 1993.
- [15] M. B. Priestley : “*Spectral Analysis and Time Series*”, Academic Press, Inc., London, 1981.
- [16] D. M. Wolpert and R. C. Miall : “Detecting chaos with neural network”, *Proc. R Soc. London*, B(242), pp. 82-86, 1990.