家計の動態的システムに関する一考察 : 先行研究における関数の形状についての反例

村田, 慶
九州大学大学院経済学府

https://doi.org/10.15017/3000446

出版情報：経済論究. 133, pp.123-131, 2009-03. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

家計の動態的システムに関する一考察

—先行研究における関数の形状についての反例—

村　田　　　慶*

1　はじめに

本稿は，Galor and Tsiddon (1997) において示されている家計の動態的システムを表すグラフの形状について，その反例を示すものである。Galor and Tsiddon (1997) においては，完全競争下の小国開放経済を設定し，3期間の世代間重複モデルを用い，人的資本配分および内生的技術進歩と経済成長パターンとの相互関係について理論的分析がなされている。世代間重複モデルに関する代表的な論文としては，Samuelson (1958) およびDiamond (1965) が挙げられる。この二つの論文は，世代間重複モデルの最も古典的な論文である。Samuelson (1958) においては，純粋交換経済が仮定されており，3期間分析が行われている。但し，生産者については議論されていない。Diamond(1965) においては，生産者を組み入れ，2期間分析を行っている。その後の基本的な世代間重複モデルは，このダイヤモンド型が種々の形で応用されている。人的資本と内生的経済成長に関する論文においても，世代間重複モデルが応用されており，その代表的な論文としては，Galor and Tsiddon (1997) の他に，Galor (1996) を挙げておく。Galor (1996) においては，経済成長理論における定常状態均衡への収束に関する論争について，各仮説の捉え方の違いについて考察がなされており，そこにおいては人的資本や所得配分についての分析が取り扱われている。

上述の先行研究に対する本稿の位置付けについて説明する。Galor(1996)およびGalor and Tsiddon (1997) における大きな特徴としては，家計の動態的システムを表すグラフの形状がS字型であることが挙げられる。この意味するところとしては，親世代の人的資本水準および教育投資水準の進歩と子供世代の人的資本水準に与える効果として，あまりに親世代の人的資本水準が低いときはそれほどの影響はなく，ある水準以上になると急激に反映され，やがて一定水準以上になると子供の能力の限界から影響が再びなくなってくる，という現実的な事象を組み入れようとしたものであると考えられる。しかしながら，家計の動態的システムのグラフの形状については，Galor and Tsiddon (1997) による設定の下では，一般的関数としてであれば一ケースとして有り得るが，具体的関数例では，設定が同じであってもグラフの形状が異なるケースが存在し，しかもそれは複数パターンある。Galor and Tsiddon (1997) においても具体的関数例が設定されているが，その可能性については示されていない。本稿では，先行研究と同じ条件の下で，家計の動態的システムを表すグラフの形状が異なる形を持つケースを示し，先行研究に対する反例を示す。

* 九州大学大学院経済学府経済工学専攻博士後期課程　連絡先：福岡県福岡市東区箱崎6-19-1　E-mail：kmurata@en.kyushu-u.ac.jp

本稿の構成について説明する。第2節においては，Galor and Tsiddon（1997）における家計の動態的システムについて，一般的関数による説明を行い，S字型のグラフの導出過程について説明する。第3節においては，家計の動態的システムについて，第2節における設定を下に具体的関数を設定し，第2節とは異なるグラフの形状のパターンを示し，先行研究に対する反例を示す。最後に，第4節において，第2節および第3節における議論のまとめを行い，本稿における分析について今後の展望を示す。

2　一般的関数による分析

本節においては，Galor and Tsiddon（1997）において展開されている，親世代の人的資本水準と子供世代の人的資本水準との関係についてサーベイを行う。

2.1　家計の動態的システム

Galor and Tsiddon（1997）において，親世代の人的資本水準と子供世代の人的資本水準との関係は，次の式で表されている。

$$h^i_{t+1}=\phi(h^i_t,\ x^i_t) \tag{1}$$

(1)式について，h^i_t，h^i_{t+1} はそれぞれ，t 世代および $t+1$ 世代の個人 i が持つ人的資本水準，x^i_t は，t 世代の個人 i が自身に対して行う教育投資水準である。(1)式は，以下のような性質を満たしている。

$$\phi_1(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial\phi(h^i_t,\ x^i_t)}{\partial h^i_t}>0 \tag{2}$$

$$\phi_2(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial\phi(h^i_t,\ x^i_t)}{\partial x^i_t}>0 \tag{3}$$

$$\phi_{12}(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial^2\phi(h^i_t,\ x^i_t)}{\partial h^i_t\partial x^i_t}>0 \tag{4}$$

$$\phi_{11}(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial^2\phi(h^i_t,\ x^i_t)}{\partial(h^i_t)^2}<0 \tag{5}$$

$$\phi_{22}(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial^2\phi(h^i_t,\ x^i_t)}{\partial(x^i_t)^2}<0 \tag{6}$$

(2)式は，親世代の人的資本水準が高ければ子供世代の人的資本水準も高まること，(3)式は，親世代の教育投資水準が増えれば子供世代の人的資本水準も高まること，(4)式は，親世代の人的資本水準および教育投資水準は互いに補完性を持つこと，(5)および(6)式は，親世代の人的資本水準が過剰に高かったり，自身への教育投資水準が過剰に増えると，子供世代の人的資本水準はそれに見合うほど高まらなくなること，を意味している。

2.2　人的資本の進歩

本節においては，人的資本の進歩についての定常状態均衡を分析し，人的資本が時間の経過とともに進歩していく際，家計の動態的システムに及ぼす影響について検討する。本節では，技術水準を一定として議論を展開する。

人的資本投資の進展は，λをパラメータとする非線形の差分方程式によって決定される。家計の動態的システムについては，Galor and Tsiddon (1997) に倣い，次のように定義する。

$$h^i_{t+1}=\phi(h^i_t,\ \xi(h^i_t;\lambda_{t+1}))\equiv\Psi(h^i_t;\lambda_{t+1})\ ;\ x^i_t\equiv\xi(h^i_t;\lambda_{t+1}) \tag{7}$$

(7)式について，$h^i_{t+1}=\Psi(h^i_t;\lambda_{t+1})$ は h^i_t についての連続関数であるとする。家計における人的資本の発展は，自励系の一階非線形差分方程式によって決定される。

ここで，技術係数 λ_t について定義を行う。ある期において使用される技術水準は，その前の期における平均的な人的資本水準と同等もしくはそれを上回ると仮定する。また，ある期における技術水準は，その前の期における平均的な人的資本水準についての単調な非減少の凹関数であるとする。よって，$t+1$ 期における技術水準と t 期における技術水準の関係は次のように定義される。

$$\lambda_{t+1}=\max[\lambda(h_t),\ \lambda_t]\ ;\ h_t\equiv\frac{H_t}{N} \tag{8}$$

(8)式において，h_t は t 期における平均的な人的資本水準，Nはある一世代の人口を表している。また本稿では，Nは全世代一定と仮定する。

(7)式について，本節では技術水準を一定とし，それを λ とおくと，以下のことが成り立つとする。

$$\Psi(0;\lambda)=\mu\geq 0$$

$$\Psi'(h^i_t;\lambda)=\phi_1(h^i_t,\ \xi(h^i_t;\lambda))+\phi_2(h^i_t,\ \xi(h^i_t;\lambda))\xi'(h^i_t;\lambda)>0,\ \ \forall h^i_t>0$$

$$\Psi''(h^i_t;\lambda)=\phi_{11}-\frac{(\phi_{12})^2}{\phi_{22}}-\frac{\phi_2}{(\phi_{22})^2}\left[\left\{\phi_{211}-\phi_{212}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right\}\phi_{22}-\left\{\phi_{221}-\phi_{222}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right\}\phi_{21}\right]\ \text{（付録）}$$

ここで，家計の動態的システムが以下の条件を満たすとする。

$$\lim_{h_t\to 0}\Psi'(h^i_t;\lambda)=0$$

$$\lim_{h_t\to\infty}\Psi'(h^i_t;\lambda)=0$$

$$\Psi(h^i_t;\lambda)>h^i_t\quad (h^i_t>0 \text{ となる } h^i_t \text{ が存在する場合})$$

この場合，家計の動態的システムは複数の定常状態均衡を持つことになる。これは，図1のように描かれる。

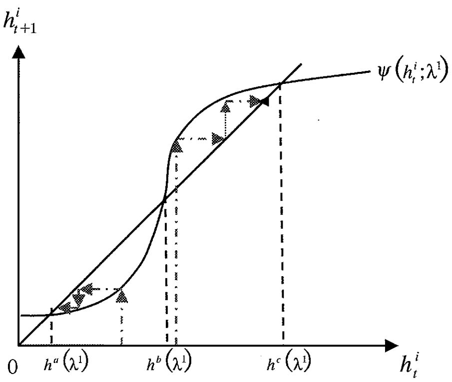

図1　定常状態均衡が複数存在するケース

図1のケースでの技術水準を λ^1 とおく。$\Psi(h^i_t\,;\lambda_{t+1})$ は連続関数であるので，もちろん閉区間 $[h^a(\lambda^1),\ h^c(\lambda^1)]$ においても連続である。さらに，$\Psi(h^a(\lambda^1)\,;\lambda^1)$ と $\Psi(h^c(\lambda^1)\,;\lambda^1)$ は異なる値をとるので，中間値の定理より，この2点の間の任意の値に対して，$h^a(\lambda^1)<h^b(\lambda^1)<h^c(\lambda^1)$ となるような $\Psi(h^b(\lambda^1)\,;\lambda^1)$ が少なくとも一つは存在する。

Galor and Tsiddon (1997) においては，定常状態均衡が3つのケースが考えられている。図1に示されているように，3つの定常状態均衡のうち，$h^a(\lambda^1)$，$h^c(\lambda^1)$ は安定的であり，$h^b(\lambda^1)$ は不安定的である。また，$\Psi(h^i_t\,;\lambda)$ は h^i_t についての単調増加関数であり，親世代の人的資本と子供世代の人的資本の間にはプラスの相関がある。しかし，x^i_t と h^i_t の間に存在する相互補完性および $\Psi''(h^i_t\,;\lambda)$ から，ひずみが生じていることが分かる。それによって，凹凸あるいは凸凹を繰り返すような形状になる。

一方，技術水準が λ^2 と十分高くなると，グラフの上がり方は大きくなり，45度線と交わる点は一つだけとなる。これは図2のように描かれる。

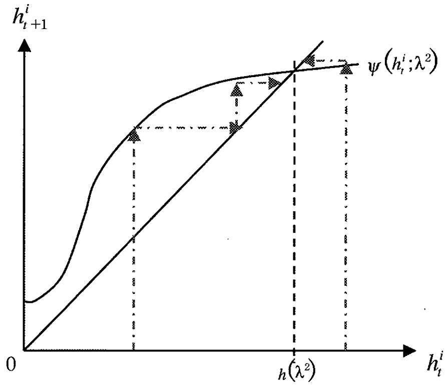

図2　定常状態均衡が単一しか存在しないケース

図2で描かれているように，定常状態均衡 $h(\lambda^2)$ は，安定的な定常状態均衡である。また図1と比較すると，技術水準が λ^1 のケースに比べて，45度線との幅が大きくなっていることが分かる。すなわち，技術水準の変化は，45度線との幅で示されるわけである。

また，定常状態均衡が単数・複数，両ケースともに，h^i_t が無限大に増加していくと，グラフの傾きがゼロになっている。これはどれだけ人的資本水準を高めようと努力し，教育投資 x^i_t を増加させたとしても，一定水準になると無駄であるという現実的内容を反映させたものである。

3　具体的関数の設定

第2節における分析では，一般的関数によって行ったが，本節においては，具体的関数を設定して議論を展開する。Galor and Tsiddon (1997) においても具体的関数例が示されているが，必ずしも図1および図2のような形状をとると言うには議論が弱い。そこで本節においては，Galor and Tsiddon (1997) における設定と同じ条件の下で，別の具体的関数を設定することによって，動態的システ

ムが図１および図２のような形状をとるのはあくまで一ケースに過ぎないということを具体的に示す。本稿では特殊ケースを取り扱う。さらに，具体的関数を設定するにあたり，一般的関数における μ についての解釈も行う。Galor and Tsiddon (1997) において，μ についての定義は明確になされていないが，具体的関数の分析の中でその点についても一つの解釈を与え，本稿ではそれを「義務教育」として捉えてみたい。本節においては，その義務教育を含むケースおよび含まないケースを取り上げ，Galor and Tsiddon (1997) との対比を行うことを目的とする。

[義務教育が存在しないケース]

本稿においては，具体的関数を次のように設定することにする。

$$h^i_{t+1}=(h^i_t \cdot x^i_t)^\alpha,\ 0<\alpha<1 \tag{9}$$

(9)式について，これは親世代の人的資本水準および教育投資水準が相乗的に子供世代の人的資本水準に影響を及ぼすケースを考えている。

この動態的システムの性質について，(2)〜(5)式と同様に検討してみる。

$$\phi_1(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial h^i_{t+1}}{\partial h^i_t}=\alpha(h^i_t)^{\alpha-1}(x^i_t)^\alpha>0 \tag{10}$$

$$\phi_2(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial h^i_{t+1}}{\partial x^i_t}=\alpha(h^i_t)^{\alpha}(x^i_t)^{\alpha-1}>0 \tag{11}$$

$$\phi_{12}(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial^2 h^i_{t+1}}{\partial h^i_t \partial x^i_t}=\alpha^2(h^i_t)^{\alpha-1}(x^i_t)^{\alpha-1}>0 \tag{12}$$

$$\phi_{11}(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial^2 h^i_{t+1}}{\partial (h^i_t)^2}=\alpha(\alpha-1)(h^i_t)^{\alpha-2}(x^i_t)^{\alpha}<0 \tag{13}$$

$$\phi_{22}(h^i_t,\ x^i_t)=\frac{\partial^2 h^i_{t+1}}{\partial (x^i_t)^2}=\alpha(\alpha-1)(h^i_t)^{\alpha}(x^i_t)^{\alpha-2}<0 \tag{14}$$

(10)〜(14)式より，本節で設定した具体的関数は，(1)式と同様の性質を持っており，Galor and Tsiddon (1997) において示されている動態的システムとの比較が可能であることが分かる。

ここで，(11)式について，$\alpha(h^i_t)^\alpha(x^i_t)^{\alpha-1}$ が一定であるとする。これを次のように定義する。

$$\alpha(h^i_t)^\alpha(x^i_t)^{\alpha-1}\equiv\tilde{C}\ ;\ 0<\alpha<1,\ \ \tilde{C}>0 \tag{15}$$

(15)式を書き換えると，次のことが成り立つ。

$$(x^i_t)^{\alpha-1}=\frac{\tilde{C}}{\alpha}\cdot(h^i_t)^{-\alpha}$$

$$x^i_t=\left(\frac{\tilde{C}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\cdot(h^i_t)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\equiv\bar{C}\cdot(h^i_t)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\ ;\ \left(\frac{\tilde{C}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\equiv\bar{C} \tag{16}$$

(16)式について，x^i_t と h^i_t の関係式をグラフで表してみる。グラフの形状や歪み具合は，α の値の範囲によって変化するが，大きく分類すると，「一定型」，「逓増型」，および「逓減型」の３パターンとなる。これらは，次のようになる。

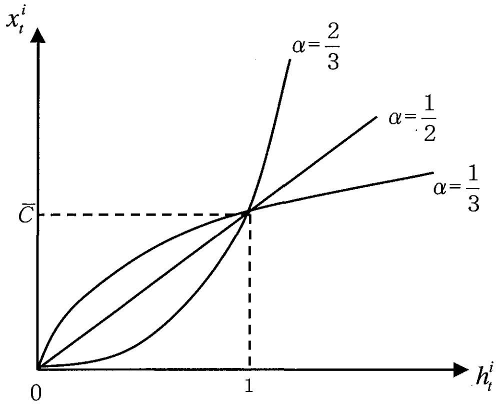

図 3　人的資本水準と教育投資水準の関係

一定型となるのは $\alpha=\frac{1}{2}$ のときであり，x_t^i は次のようになる。

$$x_t^i=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}}=\bar{C}\cdot h_t^i$$

すなわち，グラフは一次関数の形状となる。

$\alpha<\frac{1}{2}$ の場合は，逓減型のグラフとなり，$\alpha>\frac{1}{2}$ の場合は，逓増型のグラフとなるわけであるが，ここではイメージを捉え易くするため，$\alpha<\frac{1}{2}$ の場合については，$\alpha=\frac{1}{3}$ を，$\alpha>\frac{1}{2}$ の場合については，$\alpha=\frac{2}{3}$ を，代表的なケースとして描いている。

$\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，x_t^i は次のようになる。

$$x_t^i=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}}=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{1}{2}}=\bar{C}\sqrt{h_t^i}$$

すなわち，グラフは無理関数の形状になる。

$\alpha=\frac{2}{3}$ のとき，x_t^i は次のようになる。

$$x_t^i=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}=\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-1}}=\bar{C}\cdot(h_t^i)^2$$

すなわち，グラフは二次関数の形状になる。

ここで，Galor and Tsiddon (1997) においては，家計の動態的システムを $h_t^i-h_{t+1}^i$ 平面で表しているので，本稿でもそれに倣うことにする。

⒃式を⑼式に代入すると，⑼式は次のように変形できる。

$$h_{t+1}^i=\{h_t^i\cdot\bar{C}\cdot(h_t^i)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\}^\alpha=(\bar{C})^\alpha(h_t^i)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\equiv\hat{C}(h_t^i)^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}}\,;\,(\bar{C})^\alpha\equiv\hat{C} \tag{17}$$

⒄式について，グラフで表すと，図 4 のように描かれる。定常状態均衡については，本稿における分析には影響しないので，ここでは議論しない。

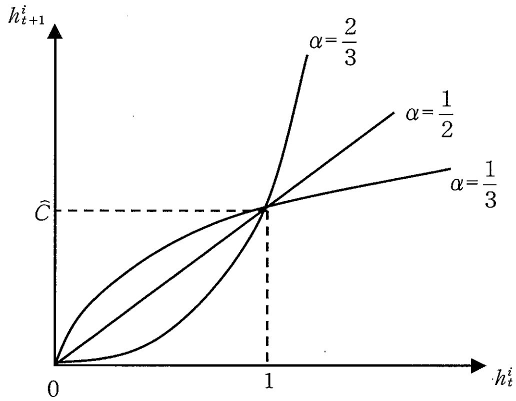

図 4　義務教育を含まないケース

$h^i_t=1$ のときは，3 パターンともに $h^i_{t+1}=\hat{C}$ となる。図 4 から分かるように，先行研究とは異なる形状のグラフが描かれることが分かる。特に $\alpha=\frac{2}{3}$ のケースについて，Galor and Tsiddon (1997) においては，図 1 に見られるように，子供世代の人的資本水準は，親世代の人的資本水準がある一定水準以上に高まると逓減していくわけであるが，このケースでは逓増していくことが分かる。さらに，$\alpha=\frac{1}{3}$ のケースについては，親世代の人的資本水準に対して，子供世代の人的資本水準の増加率は逓減していくケースのみである。すなわち，Galor and Tsiddon (1997) におけるグラフの形状は，具体的関数を設定すると，一ケースに過ぎないということが確認される。

[義務教育が存在するケース]

図 4 から分かるように，このケースでは，$h^i_t=0$ のとき $h^i_{t+1}=0$ となる[*1]。しかしながら，図 1 あるいは図 2 を見て分かるように，Galor and Tsiddon (1997) においては，$h^i_t=0$ のとき，$h^i_{t+1}>0$ となるケースを考えており，図 4 のケースでは，図 1 および図 2 との正確な対比ができない。

そこで，(9)式に義務教育 $\tilde{\theta}$ を加え，次のように修正してみる。

$$h_{t+1}{}^{i}=(h^i_t \cdot x^i_t)^{\alpha}+\tilde{\theta}\ ;\ 0<\alpha<1,\quad \tilde{\theta}>0 \tag{18}$$

ここで，$\tilde{\theta}$ は定数とする。(18)式について，グラフを描くと，図 5 のようになる。

[*1] これは(9)式からも明らかである。

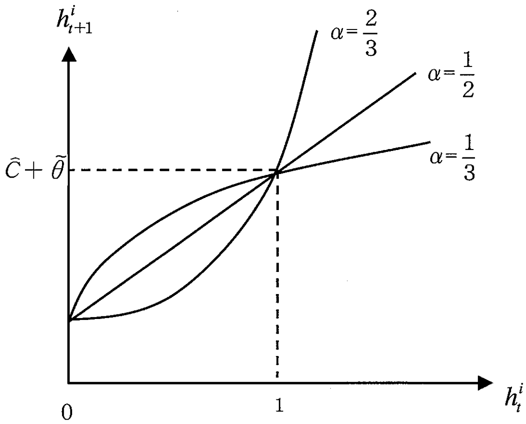

図5　義務教育を含むケース

図5では，図1および図2との対比を行うため，$\tilde{\theta}>0$のケースを描いている。形状は図4と同じであるが，義務教育 $\tilde{\theta}$ が加えられたため，図4のグラフが $\tilde{\theta}$ 分だけ上方シフトしたものになる。Galor and Tsiddon（1997）においては，動態的システムについて，$\Psi(0;\lambda)=\mu\geq0$ と定義されており，本稿における $\tilde{\theta}$ は先行研究における μ に相当する。Galor and Tsiddon（1997）において，μ についての経済学的なインプリケーションは明示されていないが，本稿における設定のように義務教育と捉えても妥当性はあると思われる。

さらに，$\alpha=\frac{2}{3}$ のケースについては，$h^i_t=1$ まではGalor and Tsiddon（1997）と全く同じ形状であることが興味深い。Galor and Tsiddon（1997）による設定は，図4における $h^i_t=1$ 以上の部分について，逓増していく形状を逓減型に押さえ込もうというものであると考えられる。第1節においても述べたように，これは人間の能力の限界というものをモデルに反映させようとしたものであるが，具体的関数として示すと，このような反例が出てしまうことが分かる。

4　結語

本稿では，Galor and Tsiddon（1997）で展開されている人的資本配分と内生的経済成長に関するモデルについて，家計の動態的システムを表すグラフの形状について，具体的関数を同じ条件の下で与えると，反例があることが証明された。この分析結果のインプリケーションとしては，家計の動態的システムが，人的資本水準および教育投資水準の相乗効果によって決定される場合，親世代の人的資本水準および教育投資水準が非常に高い家計では子供世代の人的資本水準の上昇率は急激に高まっていくが，両方が非常に弱い家計においては，子供世代の人的資本水準の上昇率は弱まっていくというものである。Galor and Tsiddon（1997）における分析では，ある時点で急激に子供世代の人的資本水準が上昇し，ある時点からは一定になっていくという特殊な形状が描かれているが，これは非常

に興味深い形状であり，詳細に検討する余地はあるものの，具体的関数例を示すと，本稿で見られるように判例が数多く存在することが分かる。世代間における人的資本水準および教育投資水準の効果については，世代間重複モデルを用いて人的資本と内生的経済成長を考察する上では詳細に検討すべきものであろう。

以上を踏まえ，分析結果について今後の展望を述べる。世代間における人的資本水準の関係性については，家計の動態的システムの設定によっては，大きく分類して，一定型，逓減型，逓増型の3パターンが考えられる結論が本稿における分析で得られたが，各々のパターンは実証的にどのようなケースであるかということである。特に逓増型のケースについては，現実的に人間の能力には限界があるので，やや考えにくいところも否定できず，あるいは，もしこのケース，すなわち無限に能力が進歩し続けるということが有り得るとすれば現実的にどのようなものであろうか。この点については，今後の課題としたい。

付録

（注1）．この式は，以下のように導出される。

$$
\begin{aligned}
\Psi''(h_t^i\,;\,\lambda) &= \left(\phi_1-\phi_2\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)' \\
&= (\phi_1)'-\left(\phi_2\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)' \\
&= \phi_{11}+\phi_{12}\xi'-\left\{(\phi_2)'\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}+\phi_2\left(\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)'\right\} \\
&= \phi_{11}+\phi_{12}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}-\left[(\phi_{21}+\phi_{22}\xi')\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}+\phi_2\left\{\frac{(\phi_{21})\phi_{22}+\phi_{21}(\phi_{22})}{(\phi_{22})^2}\right\}\right] \\
&= \phi_{11}+\frac{(\phi_{12})^2}{\phi_{22}}-\left[\left(\phi_{21}-\phi_{22}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}+\frac{\phi_2}{(\phi_{22})^2}\{(\phi_{211}+\phi_{212}\xi')\phi_{22}+\phi_{21}(\phi_{221}+\phi_{222}\xi')\}\right] \\
&= \phi_{11}+\frac{(\phi_{12})^2}{\phi_{22}}-\left[\frac{\phi_2}{(\phi_{22})^2}\left\{\left(\phi_{211}-\phi_{212}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\phi_{22}+\left(\phi_{221}+\phi_{222}\frac{\phi_{21}}{\phi_{22}}\right)\phi_{21}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

参　考　文　献

[1] Diamond, P.A. (1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review, Vol. 55, No.5., Part1., pp.1126-1150.*

[2] Galor, O. (1996) "Convergence ? Inferences from Theoretical Models", *Economic Journal, Vol.106, No. 437., pp.1056-1069.*

[3] Galor, O. and D.Tsiddon. (1997) "The Distribution of Human Capital and Economic Growth", *Journal of Economic Growth, Vol.2, No.1., pp.93-124.*

[4] Mark Gradstein (2007) "Inequality, Democracy and The Property Rights", *The Economic Journal*, Vol. 117, No.516., pp.252-269.

[5] Samuelson, P.A. (1958) "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy, Vol.66, No.6., pp.467-482.*