

ジャンプ過程を含む変動要因で記述される投資・事業モデルのリアルオプション手法による評価とその応用

儲, 梅芬
九州大学大学院経済学府

<https://doi.org/10.15017/3000401>

出版情報 : 経済論究. 125, pp. 41-56, 2006-07. 九州大学大学院経済学会
バージョン :
権利関係 :

ジャンプ過程を含む変動要因で記述される投資・事業モデルの リアルオプション手法による評価とその応用

儲 梅 芬

1 まえがき

インターネットを基盤とする情報ネットワークの整備は、企業間の情報通信のオープン化を促進させているとともに、電子調達など企業間の関係を拡大させている[1]-[4]。また、サプライチェーン形成やモジュール生産の広がりなど、部品や半製品を企業間で調達するシステムも一般化している。このような企業活動の拡大にともない、投資や事業に影響を与える変動要因の種類も多様になっている。特に、自動車産業に見られるような、メーカーがサプライヤから部品を調達するケースにおいては、一部の部品供給がストップするだけで、生産ライン全体に重大な影響を与えることが、すでに経験されている。投資や事業の評価に関して、従来の株式投資におけるオプション理論を応用する、いわゆる、リアルオプション手法は一般化しているが、このような急激な要因変動を考慮した分析は行われていない[5]-[8]。

本論文では、ジャンプ過程を含む変動要因で記述される投資・事業モデルのリアルオプション手法による評価と、その応用について述べる[9]。これまで、リスク分析に関連して資金貸付など金融分野でのリスク評価手法が主として議論され、デフォルトリスクの指標化や、クレジットデリバティブなどのリスクプレミアムの評価に、従来の株式オプションの理論を援用することが行われてきた[5]-[8][16][17]。同時

に、投資や事業に関連するリスクについても、同様な手法で定式化し、評価することが行われている[10]-[14]。しかし、現実には、このような変動要因を記述する場合に、プラン運動など比較的取り扱いやすいモデルが用いられており、急激な変動は考慮されていない。また、株式オプションの理論式を形式的に適用する方法論がクレジットデリバティブなどについては示されているが、これを一般的な製造業にまで拡張することには問題がある。

このような課題に対して、本論文では、ジャンプ過程を含む変動要因で記述される事業モデルを対象として、リアルオプション手法によるリスク分析を行う[9][19]。具体的には、市場における商品価格の変動や、取引相手の倒産などをジャンプ状の確率的な事象として取り入れ、モデル化をすることである。このような確率変動を取り入れた場合の投資・事業のリスクは、株式オプションの評価と同様に、形式的には確率微分方程式で記述することが可能である。しかし、これを解析的に解くことは困難であるので、本論文では、最初に示す手法において、動的計画法による評価方法を用いる。確率変動のモデル化においては、通常のブラウン運動と同時に、スパイク状の変動を含むジャンプ過程を含むモデルを導入する。動的計画法においては、変動要因の変化が与えられた場合に、最適な生産を継続することが可能である場合のコストや利益を推定できるので、これを実施することができない場合（評価方法としては、現

在価値法にあたる)との差を求めることにより、リスクプレミアムを予測する。

次に、より正確な投資・事業のモデルを微分方程式により記述し、これを解析する方法を示す。この場合、確率的モデルにおける変動要因としては、通常のブラウン運動だけではなく、突発的なジャンプ過程(パルス状の変化)を含むケースを導入する。分析の目的を明らかにするため、発電事業に代表される資本や費用の投入による事業で利益を最大化する問題を取りあげ、条件により2つのタイプについて論じる。このような確率モデル分析では、やや複雑な確率過程を変動要因とするため解析的な解を得ることは極めて難しいので、有限差分(finite difference)による数値解法を用いる[21]。また、利益の評価関数そのものではなく、その損失が極めて大きくなるケースを推定する問題を考察している[19]。

以下、2.では企業間取引リスク評価とその応用の概要について述べ、3.ではジャンプ過程を含む変動要因によりプロジェクトをモデル化した場合における、動的計画法による最適生産のモデル化、およびリスク評価を示す。また、4.では、ジャンプ過程を含む変動要因により記述される事業の例として発電事業を取りあげ、5.では、そのリスク評価を行う。

2 投資・事業に関連した企業間取引リスク

2.1 企業間取引におけるリスクと課題

企業間取引が議論されはじめた当初、NECやソニーなどの大手電機メーカーは自社の調達システムをオープンネットワークとして構築することを開始したが、数年でサイトを閉鎖している[4]。また、大きな話題となったeMPは、現在では、主として、それぞれの金額が小額である

間接財の取引が主体となっている。このようなeMPにおいては、商社が介在することが通例となっている[1][2]。また、日本の鉄鋼メーカーは、自社で生産した製品を市場で直接販売するのではなく、商社に販売し、間接的な販売体制をとっており、商社の存在は日本に固有のものであるとも言える。

このように、企業間取引において、自社が直接行うのではなく商社を通じた間接的なものになること、あるいは取引が経常的で、安定している相手企業に限定する背景には、次のようなことがある。(1)自社でサイトを運用するコストが高い、(2)告知を徹底できない、(3)相手企業の信用調査にコスト時間がかかる、(4)機密保持に課題が残る。

しかしながら、長期的にはオープンネットワークによる販売・調達が行進するのは明らかである。これまで、この種のリスクについては、具体的な評価はなされておらず、例えば鉄鋼業界では、商社にまとめて倉庫運用を任せ、その代価を支払いなどにより、リスク回避の方策がとられている。以下では、このようなB2B取引や類似の事例におけるリスクの発生と、その評価などに関する主な話題を整理している[18][20]。

爆発火災事故

新日本製鉄名古屋製鉄所での爆発事故発生により、ここより自動車鋼板などを調達していた自動車製造企業での在庫確保が難しくなり、生産の縮小を余儀なくされた。自動車産業の高度な要求にこたえる必要性があり、製品代替が極めて困難とされている。同様に、ブリヂストン栃木工場の火災事故においても、タイヤ在庫不足が見込まれ、大型トラック製造縮小などがなされた。

半導体製品

CCDなどの高度な技術をもったデバイスを提供する企業は、少数に限定される傾向にあり、それによってリスクも増大している。ソニー、三菱電機など電機メーカーでは、調達先の分散化をはかることにより対処しているが、高度デバイスを製造できる会社が少ないのが基本的な課題となっている。

債権回収代行・ファクタリング

顧客企業に対する売掛金の回収にあたり、この業務を代行する金融機関サービスがある。企業は、顧客企業に対する売掛債権を金融機関に譲渡・売却し（いわゆるファクタリング）、その代金をあらかじめ得ることにより、リスクを回避する。また、系列企業などに限定される範囲では、いわゆる決済専用の子会社を設立して、債権処理を一元化し、効率化することが多くの企業で行われており、これもリスクの拡大を防止する効果がある。

貸倒リスク保証商品

金融機関の商品として貸倒リスク保証商品があり、企業が販売する商品やサービスなどの対価・費用を回収できない場合に、これを保証する業務を行う。債務不履行が発生した場合に、これにより発生するリスクを負担するかわりに、平常時におけるプレミアムを支払う方式となっている。

倉庫貸し・一次製品の販売

鉄鋼メーカーでは、自社で製造した一次製品を直接加工メーカーに販売することはなく、商社に売り渡すことを行う。これは、加工メーカーが自社系列の企業である場合にも、同様に行われる。同時に、鉄鋼メーカーの敷地にある倉庫を、商社が利用し製品を管理することも行われる。これにより、加工メーカーが倒産した場合のリスクを回避できる効果と、商社による企業の信用度調

査を活用できる効果がある。

天候デリバティブ

保険会社の提供する天候デリバティブの種類も、拡大する傾向にあり、直接天候に関連する冷夏、猛暑、暖冬、長雨、カラ梅雨、梅雨あけ、台風などの、現象に付随するデリバティブと同様に、桜前線、お花見、流水などの各種の行事や、イベントの開催がスケジュールどろりにできなかった場合のリスク回避の商品も存在する。

これらの事例で示すように、極限まで効率化されたサプライチェーン形成においては、微小な事故の発生においても、重大な結果をまねくことになる。そのため、リスク分散などの手段が考慮されているが、発生の頻度とリスク回避のコストを見積もることがポイントとなっている。本論文で示すリアルオプションにより投資・事業リスクの評価手法は、このように明確でなかったリスク回避の金額（プレミアム）を求める方法を与えることを目的としている。

2.2 変動要因と企業価値評価モデル

すでに述べたように、リアルオプションの分野では株式オプションによるアプローチも可能であるが、よりモデルを拡張し、カバーできる範囲を広げることが行われている。リアルオプションの研究は1980年代から1990年代にかけて、McDonald and Siegel, Dixit, Pindrickなどの研究者により開始されている[10][11]。これらの問題は、いわゆる投資選択問題として定式化され、投資を休止するか、投資により市場に参入する時期を決定する問題として議論されて、投資決定問題 (irreversibility, uncertainty in investment) とか参入撤退問題 (entry and exit under uncertainty) と呼ばれている[11]。これらの研究においては、連続型のベルマン方

程式を基礎として、関数解析から決定の性質を議論している。

その後、為替レート変動を前提として、工場の立地を国内に求めるか海外に求めるかの決定を、動的計画法の問題として定式化し、数値的な計算と決定の性質を議論する研究がなされている[12]-[15]。このような問題の定式化においては、変動要因が複雑な動きをするケースが少なくないことや、海外からの資源調達や生産拠点の選択など、いわゆるシナリオが多様となるなどの理由から、解析的な方法ではなく、動的計画法による解法が用いられている。また、生産拠点の切り替えなどのコストを導入した場合の、コスト比較などを行い、為替レート変動を前提とした、生産の柔軟化の効果を分析している。

3 動的計画法によるリアルオプション評価

3.1 プロジェクトにおけるコスト変動

リアルオプション手法によるリスク評価の最初の方法として、動的計画法によるリアルオプションを用いたプロジェクト評価をとりあげる。この手法は、動的計画法に基づいてはいるが、比較的取り扱いやすく、結果の表現も容易なものとなっている。ただし、通常の動的計画法によるプロジェクト評価において、投資に関連したコストが非定常的な変動を含む場合を考察している。具体的には、例えば、施設の建設プロジェクトなどにおいて、急激なコストの増加が発生したりする変動を考慮した手法である。

このような事例は、企業間取引における販売・調達におけるリスクとしても、発生する可能性がある。例えば、メーカーがサプライヤから部品を調達するシステムをとっている場合に、

火災などの事故により、部品供給が一時的にストップして、代替するためのコストが急速に上昇するなどの事態である。あるいは、販売側から見た場合に、取引先の企業が倒産し、商品の代金を回収できないケースなどが考えられる。

このような事象をモデル化する方法には、さまざまなものが可能であるが、以下では、代表的なモデルとして、プロジェクトにおける投資選択の問題としてモデル化する。しかし、この基本的なモデルを修正することは可能であり、販売にともなう回収リスク評価などへも適用することができる。モデル化の概要は、次のようにまとめられる。

(1) プロジェクトの初期値

プロジェクトが開始されたときに、プロジェクトがもつべき価値が与えられる。例えば、何も付加的な投資を行っていない場合のプロジェクトの価値と考えられる。

(2) プロジェクト期間における投資選択

プロジェクトが進行するにともなって、プロジェクトの価値を高めるための投資を行っていく。しかしながら、行う投資はプロジェクトの現状とまわりの環境により変動するので、いくつかの選択肢から選ぶ方法をとる。具体的には、投資中止、投資継続、投資増強の3つの選択肢から1つを決定する問題となる。一般的には、投資の増強におけるコストが最大となる。また、投資中止を選択した場合には、プロジェクトの価値はゼロになる。

(3) 投資増強投資でのコストの急激な変動

3つの可能な選択肢のいずれにおいても、コストの変動が発生すると仮定することができる。しかし、以下では、投資増強の場合にコストに急激な変動が含まれるケースだけを議論する。このような単独の変動を含む場合を、複数の変動を含む場合へと拡張することは容易であ

る。

(4) プロジェクトの選択投資の評価

このような、プロジェクトにおける投資問題は、時間の進行方向に解いていく方法を用いた場合には、途中の選択肢が急増するので、計算時間が膨大となる。そのため、動的計画法を用いることにより、最終段階から時間方向を逆向きにする方法で、解いていく。動的計画法の一般論については省略するが、ここでとりあげている問題においては、投資中止、投資継続、投資増強のどれを選択するかを、プロジェクトの価値の最大化問題として決定していくことになる。

3.2 プロジェクトの状態遷移と投資

以下では、投資や資産運用におけるリスク回避を考慮した場合の状態遷移をもとにして、プロジェクトリスクのリアルオプション手法によるプレミアムの分析について示す。多段的に投資を実施することにより、最終的に市場で評価される製品製造による企業価値を実現した場合の最適解と現実には得られる解との差を、動的計画法により求める。具体的には、製品を製造するまでのリードタイム T が存在すると仮定し、この時間経過とともに、どのような投資をするかの選択肢が複数存在すると仮定し、この最適解を推定する。

最初に、企業の投資問題における投資の時間的選択（継続、増強および停止の選択）の効果の定式化する方法についてまとめておく。このような最適化問題においては、時間経過にあわせて最初から解いていくと、選択肢が急激に増加し計算時間を要するため、時間の終点から最適な経路を推定する動的計画法を用いる。

以下では、リスク回避戦略の有効性を確認することが主要な課題であるので、これら変動要

因を、ただ1つの時間変動の変数 i により代表させることにする。

いま、時刻 t におけるレベルが i である企業価値を $V_i(t)$ とする。例えば、 $t=T$ における $V_i(T)$ は、製品として評価される価格合計であるとか、設備の完成時の価格であり、途中の時間における値 $V_i(t)$ は、その中間における状態である。

数値 i は整数に限定されないが、以下で用いるモデルを簡単化するために、 i は整数に限定する。しかし、このモデルは容易に状態が連続値をとる場合に一般化できる。更に、設備の能力が高いほど市場でのペイオフは大きくなる傾向にあるので、これを1つの分布関数 Π_i により表現する。関数 Π_i の代表例は正規分布関数（密度関数の積分）であり、状態 i が増加するに従って、関数値は単調に増加する。投資の最終時刻を T とすると、投資の最終価値は

$$V_i(T) = \Pi_i \quad (1)$$

により表現される。

次に、このように中間段階におけるプロジェクトの状態は変動過程に従って変化するので、これを制御する方法について考察する。プロジェクトを進行する管理者は、初期投資と、このような追加投資を考慮し、次に示す3つの投資の状況のいずれかを選択すると仮定する。

- 1) 投資をあきらめる (abandon)
- 2) 通常の投資をする (continue)
- 3) 追加投資をする (improve)

投資をあきらめた場合には、この時点までの企業価値はゼロに戻ってしまうが、投資を継続しても意味がないと判断した場合にはこれを選択する。追加投資により、プロジェクトの価値 $V_i(t)$ がたかまることが予想されるので、以下では、追加投資と状態遷移には相関があると仮定する。通常投資の費用を $c(t)$ 、追加投資の費

用を $a(t)$ とする。

次に、状態遷移の定義について述べる。状態の遷移には不確実性があり、時刻 t において状態 i にある投資は、次の時刻 $t+1$ では $2N+1$ 個の状態の、どれかに遷移すると仮定する。通常の投資では、式(2)に示すようなプロジェクトの状態遷移が実現する。

$$j = i + k, k = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N \quad (2)$$

更に、追加投資を選択した場合には、式(2)に示す状態遷移ではなく、一般にプロジェクトの状態が改善されるような、次に示す遷移を行うと仮定する。

$$j = i + 1 + k, k = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N \quad (3)$$

プロジェクトの進行にあわせて、どの状態を選択することが有利であるかを求める問題となる。

中止の場合には

$$V_i(t) = 0 \quad (4)$$

投資の期間(長さ T)を通じて、状態を表す添字である i を仮定すると、この企業価値最大化の最適解は、以下に示すような動的計画法により求めることができる。

$$V_i(T) = \Pi_i \quad (5)$$

$$V_i(t) = \max \begin{cases} 0, & \text{投資中止;} \\ -c(t) + \eta \sum_{j=-N}^N q_{ij} V_j(t+1) & \text{投資継続;} \\ -c(t) - a(t) + \eta \sum_{j=-N}^N r_{ij} V_j(t+1) & \text{投資増強;} \end{cases} \quad (6)$$

ただし、 $\eta = 1/(1+\rho)$ (ρ は割引率)、 p_{ij} 、 q_{ij} 、 r_{ij} は、式(2)、(3)、(4)に示す状態推移に対応する確率であり、それぞれ、通常投資、投資増強における状態変化の確率である。 Π_i はプロジェクト終了時における状態 i に対する評価値(ペイオフ)である。以下のシミュレーションでは正規分布の累積関数(分布関数)を用いている。

上に示したモデルにおいて、投資にともなう調達リスクは、通常投資の費用を $c(t)$ 、追加投資の費用を $a(t)$ により代表させることができるであろう。例えば、協力会社(サプライヤ)の火災により製造に必要な部品を急遽別のルートで取り寄せる必要が発生する場合などでは、これらの費用が高騰することで表現できる。本来なら、多数のサプライヤとこれらが供給する部品が存在するが、本論文では1つの関数で代表させて、問題を簡単化している。

以下では、これまで述べた投資選択のモデルを理解するため、簡単な例を考察する。投資増強のコストにおいて、 $1/20 = 0.05$ の確率で、幅



図1 投資選択と状態遷移の関係

が $N(10, 2)$ に従うパルス状 (ジャンプ状) の変動が加算されている。ただし、 $c(t) + jump$ 値 < 0 となるときには、コストが安価な方向に変動したと考え、そのまま $c(t)$ と同じであるとしている。

シミュレーションの条件を、次のように決める。

Π_i : 平均0, 標準偏差 σ の正規確率分布の積分
 最大値 $M=300$, 最小値 $m=0$ とする。また、通常投資などの大きさを時間の関数として、表1に示すように与える。シミュレーションの条件は次のように与える。

$m=0, M=300, \sigma=2$

$T=6$, 割引率 $\rho=7\%$, 初期投資 $I=50.0$

図2は投資の進行にともなう状態数の増加を示す樹状図であり、動的計画法による最適化の過程を示している。図の中で示された記号は、この時刻における最適な投資方法であり、記号の A, C, I は、それぞれ、投資停止、継続投資、投資増強に対応している。また、示された数値は、この時刻におけるプロジェクトの期待値である。この図より分かるように、このプロジェクトの期待値は $74.02 - 50.0 = 24.02$ である。

投資選択を実施する効果を、通常投資と比較するための計算としては、通常投資を継続した投資する場合があげられる。この場合には、いわゆる、NPV (Net Present Value) による投資の期待値評価が得られる。この例では、NPVによる投資の期待値は $36.15 - 50.0 = -13.85$ である。従って、投資選択を実施する場合の効果、すなわち、投資におけるリアルオプション

の期待値は、これらの差である37.87になる。表2には、 σ の値をいくつかのケースについて与えた場合の、時刻 $t=0$ におけるプロジェクトの値 V_0 , すなわち投資選択の木構造の、ルートの値を求めている。これより分かるように、 σ の値が大きくなるに従って、プロジェクトの価値は減少している。

3.3 投資増強のコストが急激に変動する場合

次に、同じようなプロジェクト評価の例を考えるが、投資期間が長くしかもパルス状の変動の含まれるシミュレーションの期待値をとるケースを考える。投資増強のコストである $c(t)$ において、急激な変動が含まれていると仮定する。シミュレーションの結果だけを、以下にまとめしておく。具体的には、次のようになる。

投資期間を $T=20$ とし、これらを $t=0$ から $t=19$ までとして区別する。これらの時刻における $c(t), \alpha(t)$ の値を表3に示している。投資増強のコストにおいて、 $1/20=0.05$ の確率で、幅が $N(10,2)$ に従うパルス状 (ジャンプ状) の変動が加算されている。ただし、 $c(t) + jump$ 値 < 0 となるときには、コストが安価な方向に変動したと考え、そのまま $c(t)$ と同じであるとしている。

このようなパルス状の変動は、確率的な変動であるので、期待値の計算を行う必要がある。確率分布を用いて解析的に評価する方法がないため、シミュレーションを繰り返して計算する方法を適用している。シミュレーションの条件は次のように与える。

$M=280, \rho=8\%, \sigma=3$

表1 期間ごとの投資金額データ

投資	$t=1$	2	3	4	5	6
$c(t)$	100	100	150	200	300	300
$\alpha(t)$	50	50	30	50	50	50

このシミュレーションによる評価を実施した結果、10000回での計算によるプロジェクトの評価値の期待値すなわち動的計画法の決定過程を

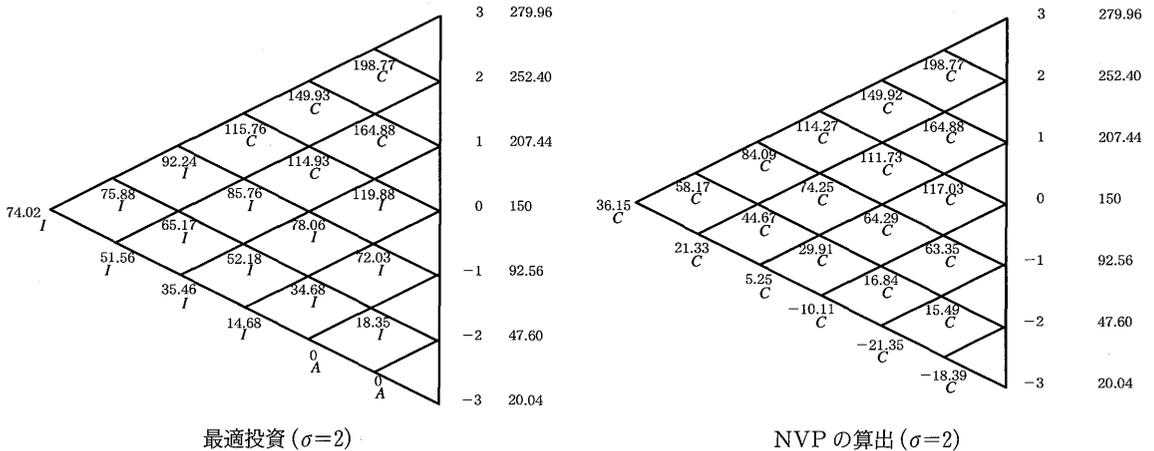


図2 投資選択を実施した場合の状態推移と価値

表2 σ による V_0 の変化

σ	2	3	4	5	6
V_0	74.02	57.85	49.02	45.54	43.12

表3 期間ごとの投資金額データ

	$t=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(t)$	11	12	14	15	17	18	19	21	24	27
$\alpha(t)$	6	11	22	25	30	32	36	38	41	41
	$t=10$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$c(t)$	31	35	37	39	41	43	45	48	52	55
$\alpha(t)$	43	45	46	48	50	55	58	60	61	64

示す木構造のルートにおける値は、161.52となる。なお、このシミュレーションと比較するため、常に投資継続だけを選択する場合、すなわちNPVによる投資効果を測定する。このNPVによる評価での、ルートにおける値を求めると101.9となる。従って、これらの数値の差である59.62がリアルオプションの評価値となる。

4 ジャンプ過程を含む変動要因で記述される事業モデル

4.1 ジャンプ過程を含む変動要因とリスク分析

確率的な変動要因により記述される動的システムにおいて、評価関数を推定する問題がしばしば発生する。確率分布の推定の1つの方法として、モンテカルロシミュレーションを適用する場合の大きな問題点として、確率的な変動要因は、通常のブラウン運動だけではなく、突発的なジャンプ過程（パルス状の変化）を含む場合が少なくないので、これを考慮したモデルの導入が必要である。

本論文では、ジャンプ過程変動を含む時系列で記述される確率モデルにおける推定とその応用について述べる。これまでの確率的な変動要因により記述される動的システムに関する研究では、変動過程を通常のブラウン運動で記述することが多い[1]-[6][8][9]。しかしながら、実際に自由化された電力市場で観測される電力価格などで発生することが知られているジャンプ状のモデルを用いた例はない。

この場合に、変動要因の記述モデルに突発的なジャンプ過程を含むモデルを仮定する[15][19]。このようなシミュレーション手法の拡張を行うことにより、広い範囲の確率モデルの評価関数の確率分布の評価が可能となる。分析の目的を明らかにするため、発電事業に代表される資本や費用の投入による事業で利益を最大化する問題をとりあげ、条件により2つのタイプについて論じる。なお、このような一般的な確率モデルの定式化において、解析的な解を得ることは極めて難しいので、本論文では有限差分 (finite difference) による数値解法を用いている。

最初に変動要因をランダムに生成し、モデルの挙動について整理する。次に、ジャンプ過程を含む時系列を変動要因として含む確率モデルを導入し、得られる利得を最大化する行動を導出する関係式を示す。この場合、最大化するためのパラメータを含む項目を分離することにより、変動要因により記述される偏微分方程式を得ることができる。このように、やや複雑な変動過程により記述される偏微分方程式を、解析的に解くことは不可能であるので、本論文では有限差分法による解法を用いる。応用例として、価格変動においてジャンプ過程の変動を含む場合の電力事業における利益損失評価の事例を示す。

4.2 確率過程の記述

変動要因で記述される確率モデルに関して、これまでの研究では、変動要因としてはブラウン運動や類似の確率過程を用いることがなされている。代表的な例として、株式の売買の権利を取引する、いわゆるオプション価格の推定において、もとの株式 (原株) の変動をブラウン運動でモデル化することがなされている[10]

[16][17]。

しかしながら、現実の世界では、このような緩やかな変動だけではモデル記述ができないことが見出され、変動要因を記述する方法の拡張がなされている。例えば、文献[15]においては、自由化された電力市場での売価変動をモデル化する場合において、特に、需要期などでは、ジャンプ過程 (スパイク状の急激な高騰) に従って価格が変動することが存在することを考慮している。

このようなジャンプ過程は、一般的な確率微分方程式により記述される。例えば、変動要因 $P(t)$ の挙動は、次のように記述される。

$$dP = \mu(P, t)dt + \sigma(P, t)dA_1 + \sum_{k=1}^M \gamma_k(P, t, J_k)dq_k \quad (7)$$

$$dq_k = \begin{cases} 0, & 1 - \varepsilon_k(P, t)dt \text{ の確率で} \\ 1, & \varepsilon_k(P, t)dt \text{ の確率で} \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $\mu(\cdot)$ 、 $\sigma(\cdot)$ 、 $\gamma_k(\cdot)$ は任意の P 、 t に関する関数である。 dA_1 はブラウン運動の微分値であり、 dq_k はある、定められた確率分布から生成される確率変数 J_k に従って0あるいは1をとる変動に従うポアソン過程である。最後の項が、スパイク状の価格変動に対応している。

4.3 確率微分と2次の偏微分方程式

最初に述べたように、本論文では投資問題など限定された分野での確率モデルにおける評価関数の確率分布のテイル分布推定を目的としているので、これに応じた条件を加えたモデルを考察する。この分野では、発電設備の運転や株式や債券運用、あるいはこれに関連した証券であるオプションや先物運用におけるリスク評価を対象としたケースが多いことを考慮し、以下で示す具体的な定式化においては、問題を簡単にするための事例を取り上げる。

操業による利益評価や所有する資産利得をどのようにモデル化するかについて、さまざまな方法があるが、以下では、その1つとして、電力事業における水力発電最適化モデルにならって定式化を行う。この問題では、発電機に流す最適な水の流量 c を決める問題となっている。以下では、これを Case 1 と呼んでおく。

Case 1 のモデル

この定式化においては、 c のほかに、次のようなパラメータがある。なお、電力の市場価格 P は、式(7)(8)における P で与えられると仮定する。

f : ダムへの流入水量, $H(W, c)$: 発電量

W : ダムの総水量, ρ : 割引率

ここで、 f は、次に示すプロセスに従うと仮定する。

$$df = \mu_2(f, t) + \sigma(f, t) dA_2 \quad (9)$$

dA_2 はブラウン運動の微分値である。なお、 W と f, c との間には次の関係がある。

$$dW = (f - c) dt \quad (10)$$

現在の時刻 t から最終の時刻 T までの発電による価値は、次のようになる。

$$V(P, W, f, t) = \max_c E \left[\int_t^T e^{-\rho(\tau-t)} H(W, c) P d\tau \right] \quad (11)$$

この式を、時間 t の微小変化を用いて書き直すと、次のようになる。

$$V = \max_c E \left[\int_t^{t+dt} e^{-\rho(\tau-t)} H(W, c) P d\tau + e^{-\rho dt} V(P + dP), W + dW, f + df, t + dt, c(t + dt) \right] \quad (12)$$

この式に対して、多次元変数に対する Ito のレナマを用いて確率変数の 2 次微分を求めたあと、代入を繰り返して、式(9)を用いて変形すると、 dt より早く減衰する項目を除去し、期待値を取り微小量 dt により割ったあとには、次の偏微分

方程式が得られる。

$$\max_c [G(V) + (f - c)V_w + H(W, c)P] = 0 \quad (13)$$

$$G(V) = V_t + \frac{1}{2} \sigma_f^2 V_{ff} + \frac{1}{2} \sigma_c^2 V_{cc} + \mu_1 V_P + \mu_2 V_f - \rho V \sum_{k=1}^M \epsilon_k E[V_k^+ - V] \quad (14)$$

$$V^+ = V(P + \gamma_k(P, t, J_j), W, f, t) \quad (15)$$

ただし、 V^+ はジャンプ k が発生した場合の $V(\cdot)$ の値である。

この式の中で、決定変数 c に関する項だけをまとめると次のようになる。

$$\max_c [H(W, c)P - cV_w] \quad (16)$$

$$c_{min}(W, f, t) \leq c \leq c_{max}(W, f, t) \quad (17)$$

このように決定された c を代入して、利益 $V(\cdot)$ に関する偏微分方程式を得ると、式(13)において \max_c をはずした、以下の偏微分方程式になる。

$$G(V) + (f - c)V_w + \mu_2 V_f - \rho V + H(W, c)P = 0 \quad (18)$$

以上のような確率部分方程式を、境界条件を定めることにより解けば、価格が決定される。この偏微分方程式の解の終端条件は次のようになる。

$$V(P, W, f, T; c) = 0 \quad (19)$$

これまでの導出手順を用いると、変動要因に関する偏微分方程式が得られるので、これを解くことにより評価関数のテイル分布の推定を行うことができる。しかしながら、一般には、変動要因の数が増加したり係数の形状が複雑になると、解析的に解を求めることは極めて困難になる。このようなことを考慮して、以下では、偏微分方程式を数値的に解く方法として、よく用いられる有限差分による計算法を使用する（この解法の概要については、付録に示す [21]）。

4.4 生産コストが分離されるモデル

次に、製品として生産する場合に、コストをともなうモデルへと拡張した場合に得られる関係式を求める。これは、一般に行われる製品製造に共通する、コストをかけて製品を生産するモデルに対応している。以下では、これをCase 2と呼んでおく。

Case 2のモデル

前節の議論と同様に発電事業を考えるが、例として火力発電をとりあげる。あらたに導入される変数は、ボイラーの温度 K と、燃料の単価 f と数量 c である。式の記述を簡単化するために、前節と同じ記号 f, c を、別の意味で使用している。ボイラーの温度 K は、発電できるまでの時間や冷えて休止できるまでの時間などを考慮して、次のような方程式でモデル化される。

$$dK = \eta(K, c)(\bar{K}(c) - K)dt \quad (20)$$

ここで、 $\bar{K}(c)$ は燃料の投入 c のもとで得られるボイラーの均衡温度である。

以上のような仮定のもとで、利益最大化の目的関数は次のようになる。

$$\max_c E \left[\int_0^T e^{-\rho t} (H(K)P - fc) dt \right] \quad (21)$$

前節と同様に、変数を代入し整理すると次が得られる。

$$G(V) + \delta \sigma_1 \sigma_2 V_{Pf} + \eta(\bar{K}(c) - K) V_K + PH(K) - fc = 0 \quad (22)$$

ただし、 δ は電力価格と燃料価格の変数の間の相関係数である。この偏微分方程式について燃料に関する項をまとめたあと、最適な燃料投入を求めること次のようになる。

$$\max_c [\eta(\bar{K}(c) V_K - fc)] \quad (23)$$

この最適な燃料投入が得られたとして、偏微分方程式を整理すると、企業価値について、式(20)と同様な偏微分方程式が得られる。

5 応用例

5.1 VaRによる最大損失評価

以下では、発電事業における利益の評価関数を推定することよりも、この最大損失を求めることに主要な力点をおく。すなわち、発電により得られる利益が、時間の経過とともに変動するが、この変動の範囲の中で、確率分布の最悪のケースから累計で5%ないしは1%となる点を求めることを行う。これにより、利益そのものを評価する方法に比べて、投資・事業により得られる利益がこうむるリスクを、直接的に評価することができる。

本論文で用いる評価関数分布のテイル分布推定を行う方法は、いわゆる、モンテカルロシミュレーションにおけるデルタ法である。評価関数分布のテイル部分の推定は、例えば、時間の経過とともに資産や投資における最大損失がどの程度になるかを予測することがあり、以下では分かりやすくするため資産変化を事例として説明する。

時刻 t における i 番目の変動要因を $X_i(t)$, $i=1, 2, \dots, N$ とし、これらの変動要因で記述される時刻での評価関数である資産を $V(X(t), t)$, $X(t)=[X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)]$ とする。時刻が Δt だけ進んだ場合の資産変化を $L = V(X(t), t) - V(X(t+\Delta t), t+\Delta t)$ とすると、変動要因の2次微分まで考慮した場合には、次のように記述される。

$$L = a_0 + a^T \Delta x + \Delta X^T A \Delta X, \quad \Delta X = [X(t+\Delta t) - X(t)]^T \quad (24)$$

ただし、スカラー a_0 , ベクトル a , 行列 A は変動要因に関する変微分で記述される量であり、次のようになる。

$$a_0 = -\Theta \Delta t, a = [-\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N], A = -\frac{1}{2} \Gamma \quad (25)$$

$$\Theta = \partial V / \partial t, \delta_i = \partial V / \partial X_i, \Gamma_{ij} = \partial^2 V / \partial X_i \partial X_j \quad (26)$$

資産が変動要因の式で得られている場合には、式(24)に含まれる a_0, a, A は単純な代入により定数として計算できる。しかし、 $V(X(t), t)$ について解析解が得られない場合には、数値計算により偏微分値の推定値を求め、これらを a_0, a, A とする。

所有する資産の損失を評価する方法として、一般的に用いられるデルタ法とよばれるものは、 ΔX を平均がゼロで共分散が Σ である正規乱数を用いて生成することで近似する。

$$\Delta X = \hat{C}D, \hat{C}\hat{C}^T = \Sigma \quad (27)$$

ここで、 D は独立した正規乱数であり、 \hat{C} は変動要因の変化分の共分散行列 Σ をコレスキー分解した行列である。この分解により、相関のある乱数 ΔX は無相関の乱数 D で生成できる。

更に、正規直交行列 U を導入して、 $C = \hat{C}TU, U^T U = I, CC^T = \hat{C}U U^T \hat{C}^T = \Sigma$ としておくと、式(24)に含まれる第 2 項、第 3 項の和の部分は、次のように簡単化できる。

$$Q = b^T Z + Z^T \Lambda Z = \sum_{i=1}^N (b_i Z_i + \lambda_i Z_i^2) \quad (28)$$

$$b^T = a^T C, \Lambda = C^T A C = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_N], \lambda_i \geq \lambda_{i+1} \quad (29)$$

ここで、 Z は標準正規分布のベクトルであり、 $\Delta X = CZ$ となる。

このような確率分布の端の部分の推定することは全体のサンプル数から極めて少ない数を用いることになり効率が良くない。そこで Importance Sampling によるテイル部分評価が用いられる。本論文の目的は、資産などの評価関数について時刻が Δt 経過した場合の損失 L が極めて大きくなる分布確率、すなわち、大きな L ,

x に対して $P(L > x)$ をシミュレーションにより推定することである。これにより推定される x の値は、資産の予測される最大損失を推定するという意味で、Value at Risk (VaR) とよばれる。実際には、ある損失の分布確率 (5%, 1% など) をあらかじめ設定しておいて、 $P(L > x) = 0.05$ あるいは $P(L > x) = 0.01$ となるような値 x を推定することが行われる。

モンテカルロシミュレーションにより x を推定する場合には、通常の設定では極めて大きな L が発生する確率が極めて小さくなるので、シミュレーションは効率的ではない。そこで、IS手法により、大きな x をとる確率が相対的に大きくなるような工夫を行う。具体的には、 $a_0 + Q$ の平均が x となるようにすることである。

なお、このIS手法についての詳細は、文献 [19] に示しているのので、ここでは省略する。

5.2 Case 1のVaR評価への応用

以下では、これまで述べた発電事業における利益の計算と、この評価関数のテイル部分の推定を行ってみる。最初に、Case 1におけるシミュレーションの結果を示す。Case 1においては、変動要因は、 P, W, f の3つの要因である、 W, f は、水位 h を導入することにより、1つの変数にまとめて簡単化している。従って、 P, h の2つが変動要因となる。

第4節で述べたモデルに対して、次のような関数を与えた場合のシミュレーション結果を示す。

$$dP = 0.4(15\sin(2\pi t - 15.4\pi)/24) + 27 - P) dt + 0.2P dx + (J_1 - P) dq_1 + (J_2 - P) dq_2 \quad (30)$$

$$J_1 \sim N(700, 100), J_2 \sim N(100, 100) \quad (31)$$

dq_1, dq_2 は、それぞれ、次の確率 $\lambda_{up}(P)dt, \lambda_{down}(P)dt$ で1になる。

$$\lambda_{up}(P) = \begin{cases} 0.0001P; & P \leq 100; \\ 0.01; & P > 100; \end{cases} \quad (32)$$

$$\lambda_{down}(P) = \begin{cases} 0.85; & P \geq 100; \\ 0; & P < 100; \end{cases} \quad (33)$$

図3にはこのような生成された価格時系列の例を示す。このほかの関数については、以下のように与えられる。

$$W = 20000(h - 100) \quad (34)$$

$$H(h, c) = \begin{cases} 0.0098hc\eta(c, h); & c \leq c_{max}, 100 < h \leq 150; \\ -15; & c = c^*, 100 < h \leq 150; \end{cases} \quad (35)$$

$$\eta(h, c) = -0.85(0.0098hc/60 - 1)^2 + 0.85 \quad (36)$$

これらを代入して偏微分方程式を整理すると次のようになる。

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma_1 V_{PP} + \mu_1 V_P - 3600cV_h/20000 - (\rho + \lambda_{up} + \lambda_{down})V + H(c, h)P + \lambda_{up}I_1 + \lambda_{down}I_2 = 0 \quad (37)$$

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} V(J_k, h, t) r_k(P) dJ_k$$

ただし、関数 $r_k(P)$ は、それぞれ、 $N(700, 100)$ 、 $N(100, 10)$ に対応する変数 P についての正規確率密度関数である。この積分は、台形則により簡易計算される。

この偏微分方程式を解きながら、利益の評価関数を求めていく。具体的にはVaR評価手法に基づいて最大損失の発生する確率が、それぞれ、5%、1%となるところの数値を推定する。

IS手法によるサンプルの有効活用に加えて本論文では層化サンプリング (stratified random sampling) を併用することにより、更に効率を高めている。この方法を用いることにより同じサンプル数ならば、単純無作為抽出法よりも標本誤差を小さくすることができる。母集団を層 (stratum) の中では均質で層と層の間は異質になるように分けておいて、各層から無作為に系統抽出を行う。

層化を行うための確率変数 Y が j 番目の層を R_j 、この層に入る確率を $p_j, j=1, 2, \dots, k$ とし、この層 j から n_j 個のサンプルを選択する場合 ($n_j = p_j n$, n はサンプルの総数) には、層化サンプリングによる注目する確率変数 S の期待値は $E[S] = \sum_{j=1}^k E[S|Y \in R_j] p_j = \sum_{j=1}^k \bar{S}_j p_j$ となり、この分散は層化を実施しない場合よりは低下する。ただし、 \bar{S}_j は j 番目の層から得られる期待値であり、この S についての分散は、 $\hat{\sigma}^2 = \sum p_j^2 \sigma_j^2 / n_j$ となる。ただし、 $\sigma_j^2 / n_j = \text{var}[S|Y \in R_j]$ は j 番目の層における変数 S の分散である。

偏微分方程式を解きながら、VaRの推定を行う。表4には、1%および5%のパーセンタイル点におけるVaRの評価値を示している。ただし、評価値として用いられている分散比 (Variance Ratios) を改善の割合として示している。すなわち、ISを用いないでそのままVaRを計算した場合の分散と、ISを適用して計算した場合の比を求めている。なお、表4には、層化サンプリングの方法 (ISS) に関してこの例では、40分割

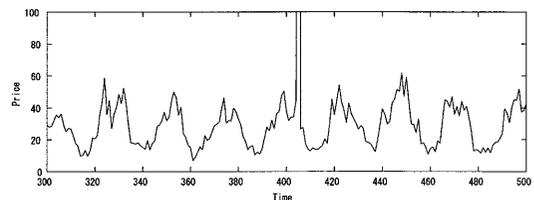
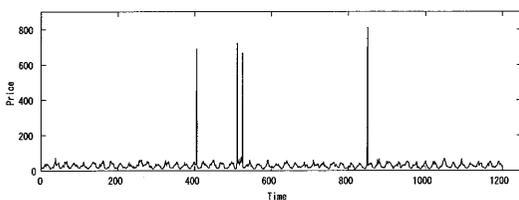


図3 パルス状の価格変動の例

表4 分散比によるVaR推定値の比較 (Case 1)

改善最小	$P(L > x)$	IS	ISS
	5%	1.38	9.69
	1%	6.52	8.27
改善最大	$P(L > x)$	IS	ISS
	5%	18.21	33.47
	1%	29.30	41.83
改善の平均	$P(L > x)$	IS	ISS
	5%	3.71	11.78
	1%	7.93	15.25

表5 分散比によるVaR推定値の比較 (Case 2)

改善最小	$P(L > x)$	IS	ISS
	5%	2.43	6.15
	1%	5.94	7.32
改善最大	$P(L > x)$	IS	ISS
	5%	11.37	28.21
	1%	19.23	32.74
改善の平均	$P(L > x)$	IS	ISS
	5%	6.90	17.18
	1%	12.59	20.03

×3000回=120000回のサンプルを用いている。

表5では、このような分散比で示したVaR推定の改善率が最大となるケース、最小となるケース、およびこれらの平均を示している。この例より分かるように、IS手法によるVaR評価の方法は極めて有効であることが示されている。

5.3 Case 2のVaR評価への応用

次に、応用例として、Case 2についての利益の分布関数推定へ、本論文の手法を適用する。Case 2においては、変動要因は、 P, f の2つである。シミュレーションのための条件は、前節と同じとする。

結果については、簡潔に表5にまとめている。前節と同様に、分散比を改善の割合として示している。表5では、このような分散比で示したVaR推定の改善率が最大となるケース、最小となるケース、および、これらの平均を示している。この例より分かるように、Case 1の場合と同様にIS手法によるVaR評価の方法は、推定の誤差を小さくする方法として、極めて有効であることが示されている。

6 むすび

本論文では、ジャンプ過程を含む変動要因で記述される投資・事業モデルのリアルオプション手法による評価と、その応用について述べた。最初に示す手法において、確率変動のモデル化において、通常のブラウン運動と同時に、スパイク状の変動を含むジャンプ過程を含むモデルを導入し動的計画法によりリスクプレミアムを予測した。次に、より正確な投資・事業のモデルを微分方程式により記述し、これを解析する方法を示した。応用例として、発電事業に代表される資本や費用の投入による事業で利益を最大化する問題をとりあげ、条件により2つのタイプについて論じた。

今後、本論文の手法を製造業における現実の変動要因分析とリスク評価へと適用し検証する予定である。

参 考 文 献

- [1] (財)日本情報処理開発協会電子商取引推進センター、電子商取引推進協議会、“EC/IT利活用に関する調査研究報告書-B2B ECの動向と決済サービス-”，2005.
- [2] 電子商取引推進協議会，“米国における企業間電子商取引に関する事例調査”，2000.

- [3] 松野成悟, 時永祥三, “企業間連携における情報共有のモデル分析-企業間電子商取引とEDIアンケートを中心として,” 経営情報学会論文誌, vol.11, no.4, pp.79-93, 2003.
- [4] 時永祥三, 松野成悟「オープンネットワークと電子商取引」白桃書房, 2004.
- [5] L.V.Carty and J.S. Fons, “Measuring changes in corporate credit quality,” Journal of Fixed Income, vol.4, pp.27-4, 1994.
- [6] T.R.Bielecki and M. Rutkowski, Credit Risk : Modeling, Valuation and Hedging, Springer-Verlag, 2002.
- [7] C.Chapman and S. Ward, Managing Project Risk and Uncertainty, John Wiley & Sons, LTD, 2002.
- [8] P. Jolion, Value at Risk, McGraw-Hill, New York, 1997.
- [9] 時永祥三, 呂建軍, “リアルオプションによるB2B取引における販売・調達リスク評価とその応用,” 経営情報学会2005年春季全国研究発表大会予稿集, pp.364-367, 2005.
- [10] R.L. McDonald and D.R. Siegel, “Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down”, International Economic Review, vol.26 (June), pp.331-349, 1985.
- [11] A. Dixit, “Entry and exit decision under uncertainty”, Journal of Political Economy, vol.97, no. 3, pp.620-638, 1989.
- [12] B.Kogut and N. Kulatilaka, “Operational flexibility, global manufacturing and the option value of a multinational networks”, Management Science, vol.40, no.1, pp.123-139, 1994.
- [13] A. Huchzermeier and C.H. Loch, “Project management under risk : Using the real options approach to evaluate flexibility in R&D”, Management Science, vol.47, no.1, pp.100-113, 1996.
- [14] N. Takagi and S. Tokinaga, “Prediction of chaotic time-series by using the multi-stage fuzzy inference systems and its applications to the analysis of operating flexibility, JORSJ, vol. 20, no.3, pp.243-259, 2002.
- [15] M. Thompson, M. Davison and H. Rasmussen, “Valuation and optimal operation of electric power plants in competitive markets”, Operations Research, vol.50, no.4, pp.546-562, 2004.
- [16] F. Black and M. Scholes, “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy, vol.81, pp.637-659, 1973.
- [17] M. Scholes, “Taxes and the pricing of options,” Journal of Finance, vol.31, pp.319-332, 1976.
- [18] 呂建軍, 時永祥三, “エージェントシステムを用いた企業間連携のクラスタ形成モデル分析とMOT,” 経営情報学会論文誌, vol.11, no.4, pp. 79-93, 2003.
- [19] 譚康融, 岸川善紀, 時永祥三, “ジャンプ過程を含む時系列で記述される確率モデルにおける Importance Samplingによる評価関数のテイル分布推定とその応用”, 信学技報CAS2005-47, pp.79-84, 2005.
- [20] P. Embrechts, C. Kluppenberg and C. Mikosch, Modeling Extreme Events for Insurance and Finance, Springer, 1999.
- [21] A.J.G. Cairns, Interest Rate Models : An Introduction, Princeton University Press, New Jersey, 2004.

付録 有限差分法による偏微分方程式の解法の概要
 分かりやすくするため, $V(X, t)$ の変数は時刻 t と, 1つの変動要因 $X(t) = X_1(t)$ だけであるケースを議論する。まず, 時刻 t と変動要因 $X(t)$ は離散的な値をとると仮定し, 次のように, それぞれの変数についての差分 ΔX , Δt に整数をかけたものと仮定する。

$$X = i\Delta X, \quad t = j\Delta t \quad (A1)$$

この置き換えにより, 評価関数 $V(X, t)$ は2つのインデックスにより表現される。インデックスを, 2次元平面上の格子点とみなす。

このような準備のもとで, 微分および偏微分を, 次のように離散近似する。

$$\frac{\partial V(i, j)}{\partial t} = [V(i+1, j) - V(i, j)] / \Delta t \quad (A2)$$

$$\frac{\partial V(i, j)}{\partial X_1} = [V(i, j+1) - V(i, j-1)] / 2\Delta X \quad (A3)$$

$$\frac{\partial^2 V(i, j)}{\partial X_1^2} = [V(i, j+1) - 2V(i, j) + V(i, j-1)] / (\Delta X)^2 \quad (A4)$$

領域の境界における処理は, 次のようにする。

$$\frac{\partial V(i, 0)}{\partial X} = [-V(i, 2) + 4V(i, 1) - 3V(i, 0)] / 2\Delta X \quad (A5)$$

$$\frac{\partial^2 V(i, 0)}{\partial X_1^2} = [V(i, 2) - 2V(i, 1) + V(i, 0)] / (\Delta X)^2 \quad (A6)$$

$$\frac{\partial V(i, n)}{\partial X} = [3V(i, n) - 4V(i, n-1) + V(i, n-2)] / 2\Delta X \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 V(i, n)/\partial X_i^2 \\ = [V(i, n) - 2V(i, n-1) + V(i, n-2)]/(\Delta X)^2 \end{aligned} \quad (A8)$$

以上のような有限変動への離散化により、式は未知数を $V(i, 0) \sim V(i, n)$ 、既知数を $V(i+1, 0) \sim V(i+1, n)$ とする連立方程式になる。このようにして得られる連立方程式の解すなわち 2 次元平面上の格子点における評価関数の値を用いて、再度、偏微分を数値計算する。数値計算により、これらの変動要因についての数値偏微分を求める。すなわち、ある変動要因がある場合、この値を初期値 a に設定した場合の解の計算を行う。次に、この変動要因を Δa だけ増加した場合の解の値を数値計算により求め、これらの数値変分の比により偏微分を推定する。