

下方部分積率に基づく可変ヘッジの適用

森田, 充

<https://doi.org/10.15017/3000371>

出版情報 : 経済論究. 121, pp.145-158, 2005-03-31. 九州大学大学院経済学会
バージョン :
権利関係 :

下方部分積率に基づく可変ヘッジの適用

森 田 充

1 はじめに

先物を利用した現物資産の価格変動のヘッジに関する研究は数多く報告されており、近年では、固定ヘッジ比率を用いた場合と比較して2変量GARCHモデルによる可変ヘッジ比率を適用したヘッジの有効性が報告されている。それらの分析では、平均—分散モデルをもとに分散をリスク尺度として、ヘッジポートフォリオの分散最小化か、あるいは効用関数に2次関数を仮定し、期待効用を最大にするようにヘッジ比率を決定している。しかし、ヘッジという性格を考慮するとヘッジャーは、何らかの目標収益をもってヘッジを行っているはずである。実際、投資家にとって関心があるのは下方リスクであるということが報告されており、リスクの尺度として、目標収益を下回ること自体をリスクと捉えるほうが自然な定義であるだろう。

下方リスクをリスク尺度とする理論的な展開はMarkowitzによる平均—分散分析とほぼ同時期から始まっている。目標収益を下回るものをリスク尺度とする下方部分積率 (Lower Partial Moment 以下LPM) はFishburn (1977) により提唱され、Bawa and Lindenber (1977) により、LPMをリスク尺度とした平均—LPMによるポートフォリオ選択やLPMに基づくCAPMは、平均—分散モデルと比較して緩い仮定のもとで期待効用理論と整合性をもつことが示された。しかし平均—分散モデルの方が取扱いが容易なため比較的注目されることがなかった。

LPMによるヘッジ比率を適用した先行研究としては、Jong, Roon and Veld (1997), Lien and Tse (1998, 2001), Demirer and Lien (2003) が挙げられる。Jong et al. (1997) では通貨先物に関してLPMをリスク尺度としたヘッジについて報告している。Lien and Tse (2001) ではオプションと先物のヘッジ効率の比較、Demirer and Lien (2003) では、ポジションの違いに依存する最適ヘッジ比率の差異についてLPMをリスク尺度として研究を行っている。これらの研究では標本LPMを最小にするようにヘッジ比率を決定するか、または、カーネル密度を適用したノンパラメトリック法により時点間で一定のLPMに基づくヘッジ比率を導出している。しかし、分散をリスク尺度としたヘッジ比率と同様にLPMをリスク尺度とした可変ヘッジ比率に関して研究しているものは、非常に少なく、Lien and Tse (1998) の日経平均先物に適用した分析にとどまっている。

平均—分散モデルによる可変ヘッジ比率は、Baillie and Myers (1991) が商品先物について2変量GARCHモデルを用いて分析を行ったのが始まりで、その後、数多く2変量GARCHモデルを適用した可変ヘッジの分析が行われている。¹⁾それらの研究で、一般に現物と先物の収益率の過去の情報に基づく条件付分散、条件付共分散は変動していることが支持されている。その結果、ヘッジ比率も変動し、

時点ごとの利用可能な情報をもとにした可変ヘッジ比率を適用したヘッジは固定ヘッジと比較して有効であると指摘されてきている。以上より、LPMをリスク尺度としたヘッジについても2次のモーメントが変動しているという意味で、条件付分布は変動していると考えられるため、条件付分布の変動を考慮した可変ヘッジが有効であると考えられる。また、Jong et al. (1997) では1977年から1993年にかけてシカゴ・マーカント取引所（以下CME）のドル円通貨先物に関して標本期間を分割し、標本LPMを最小にするように固定LPMヘッジ比率を導出している。分析結果によると、期間によってLPMヘッジ比率が異なり、平均一分散モデルによるヘッジ比率と同様にLPMによるヘッジ比率も変動していると考えられる。つまり、LPMについても可変ヘッジ比率の適用可能性を示している。

Lien and Tse (1998) は、LPM に基づく可変ヘッジについて2変量GARCHモデルを適用して分析を行っている。分析では、条件付分布に正規分布を仮定している。しかし正規分布を仮定した場合、平均一分散モデルは期待効用理論と整合的であり、この点を考慮すると歪みをもつような分布に従う場合にLPMをリスク尺度とする意義があると考えられる。正規分布の場合には、Lien and Tse (1998) によってヘッジ比率の導出法が示されているが、非正規の場合には、ヘッジ比率を導出する方法は示されていない。そこで本研究では、Lien and Tse (1998) による条件付正規の場合のヘッジ比率の導出法を再考する。加えて条件付分布にBauwens and Laurent (2002) によるSkew-Student分布を2変量GARCHモデルに適用し、LPMをリスク尺度とした可変ヘッジ比率に関してCMEにおけるドル円通貨先物を対象に検証を行っていくこととする。

2 LPMとヘッジ比率

平均一分散モデルが期待効用理論と整合性をもつためには、投資家の効用関数が2次関数であるか、または収益率の分布が正規分布、さらに一般的には楕円分布であるという仮定が必要である。2次効用関数と仮定した場合、増加絶対リスク回避型であるため、現実的にはこの仮定は問題があると考えられている。また、一般的に収益率の分布に関しても正規分布より先が尖り、裾が厚いという研究結果が示されている。さらに、歪んだ分布をもつような資産も報告されている。このような問題は、古くからとりあげられてきており、それらの問題を考慮した、平均一下方半分散モデルや平均一分散一歪度モデルなどが展開されてきた。その中でFishburn (1977) により提唱された平均-LPMモデルは確率優越と非常に密接な関係をもっており、LPMをリスク尺度として用いることが、平均一分散モデルと比較するとさらに緩い仮定のもとで期待効用理論と整合的であることを示した。

ここである確率分布に従う収益率 X の n 次のLPMは次のように定義される。

$$l(c, n, X) = \int_{-\infty}^c (c-x)^n f(x) dx \quad (1)$$

ただし、 $f(x)$ は X の確率密度関数、 c は目標収益率でこの目標収益率を下回るものに関して下方リスクを定義している。また n は個々の投資家のリスク回避度を表すパラメータで $n < 1$ のときリスク愛好的、 $n = 1$ のときリスク中立的、 $n > 1$ のときリスク回避的である。

$n = 2$ 、 $c = \mu_x$ の場合は、Markovitzの下方半分散となる。さらに X が左右対称の分布に従う場合、

LPMは、 $\sigma_x^2/2$ となる。したがって $n=2$, $c=\mu_x$ で対称の分布に従うときにはLPMをリスク尺度とした最適ヘッジ比率は、分散をリスク尺度とした最適ヘッジ比率と一致することになる。

次にLPMをリスク尺度としたヘッジ比率を概観する。まず、一期間モデルを想定し、時点0において W_0 の初期富とヘッジの対象となる Q 単位の現物のポジションを構成しているとする。このとき現物資産の価格変動リスクを先物によりヘッジするため kQ 単位の先物契約のポジションをとることとする。 s_0, f_0 を時点0での現物価格、および先物価格、 s_1, f_1 を時点1での現物価格、および先物価格とし、 $\Delta s = s_1 - s_0$ を現物価格の変化、 $\Delta f = f_1 - f_0$ を先物価格の変化とすると、時点1におけるこのポートフォリオの価値 W_1 は、

$$W_1 = W_0 + (\Delta s + k\Delta f)Q = W_0 + (r_s + \theta r_f)s_0Q \quad (2)$$

である。ただし、 $r_s = \Delta s / s_0$, $r_f = \Delta f / f_0$ であり、それぞれ現物の収益率、および先物の収益率である。ここで、 $\theta = kf_0 / s_0$ をヘッジ比率とする。このとき W_1 に関してLPM最小化を行い最適ヘッジ比率を求めることとなるが、所与の W_0, s_0, f_0, Q に対して W_1 のLPM最小化はヘッジポートフォリオの収益率である、 $r_s + \theta r_f$ のLPMを最小化すればよい。

$r_s + \theta r_f$ の n 次のLPMは、

$$l(c, n, r_s + \theta r_f) = E[(\max(0, c - r_s - \theta r_f))^n] \quad (3)$$

である。このLPMを最小にするような θ をLPMヘッジ比率とする。このとき、 $n > 1$ に対して、 θ に関する一階条件は、

$$-E\left[n(\max(0, c - r_s - \theta r_f))^{n-1} r_f\right] = 0 \quad (4)$$

であり、二階条件も満たす。しかし(4)式を解析的に解くことは不可能なので、数値解法を適用することになるが、数値解法によりLPMを評価する場合は、 r_s と r_f の結合分布が問題となってくる。

解決法としては、Lien and Tse (2000, 2001) で分析されているように結合分布の推定に、カーネル密度を適用したノンパラメトリック法によるか、または、Jong et al. (1997) で適用されているように標本LPMを最小にしてヘッジ比率を求めるものがある。これらの分析では、過去の情報に基づく条件付分布は一定と仮定しているため、ヘッジ期間を通じて一定の固定LPMヘッジ比率のみ得られることになる。

Lien and Tse (1998) では r_s と r_f に2変量GARCHモデルを適用し、条件付分布を求め、一期間モデルを連続的に適用することにより、可変LPMヘッジ比率を導入している。そこで、以下では、Lien and Tse (1998) に従い、 r_s と r_f の条件付分布が2変量正規分布に従うと仮定した場合の可変LPMヘッジ比率の導出法について概観する。

3 Lien and Tse (1998) による分析の再考

3.1 条件付分布に正規分布を仮定したときのLPMヘッジ比率の導出

始めに現物収益率と先物収益率 r_s と r_f が正規分布に従うと仮定すると、ヘッジポートフォリオのLPMは、

$$l(c, n, r_s + \theta r_f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\max(0, c - r_s - \theta r_f))^n f(r_s, r_f) dr_s dr_f \quad (5)$$

となる。ただし、 $f(r_s, r_f)$ は、2変量正規分布の密度関数である。また μ_s, μ_f をそれぞれ現物と先物の期待収益率、 $\sigma_{ss}, \sigma_{ff}, \sigma_{sf}$ をそれぞれ現物、先物の収益率の分散、および共分散とする。このとき、Lien and Tse (1998) は、(5)式が

$$l(c, n, r_s + \theta r_f) = \int_{\mu}^{\infty} \gamma^{-n} (w - \mu)^n \phi(w) dw \quad (6)$$

となることを示している。ただし、 $\gamma = (\theta^2 \sigma_{ff} + 2\theta \sigma_{sf} + \sigma_{ss})^{-1/2}$ 、 $\mu = (\mu_s + \theta \mu_f - c)\gamma$ 、 $w = (x - c + \mu_s + \theta \mu_f)\gamma$ 、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数である。²⁾

(6)式を評価するため、分析で適用する条件付平均、条件付共分散行列の定式化は後述するが、一般的に2変量GARCHモデルを次のように定式化する。

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\lambda}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2}(\boldsymbol{\lambda}_2) \mathbf{z}_t \quad \mathbf{z}_t \sim i.i.d.(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \quad (7)$$

ただし、ここでは、 $\mathbf{z}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ とする。さらに $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ はそれぞれ条件付平均、条件付分散に関するパラメータベクトルであり、 $\mathbf{y}_t = (r_{s,t}, r_{f,t})'$ 、条件付平均は $\boldsymbol{\mu}_t = (\mu_{s,t}, \mu_{f,t})'$ 、条件付共分散行列は \mathbf{H}_t で (1, 1) 要素は $\sigma_{ss,t}$ 、(2, 2) 要素は $\sigma_{ff,t}$ 、非対角要素は $\sigma_{sf,t}$ である。ここで、(6)式の $\mu_s, \mu_f, \sigma_{ss}, \sigma_{sf}, \sigma_{ff}$ を2変量GARCHモデルにおいて推定された条件付平均、条件付分散、条件付共分散に置き換えて過去の情報に基づく条件付のLPMを評価する。

(6)式を評価するには、

$$I_n(\mu) = \int_{\mu}^{\infty} w^n \phi(w) dw \quad (8)$$

に関して、 $I_0(\mu) = 1 - \Phi(\mu)$ 、 $I_1(\mu) = \phi(\mu)$ 、 $n \geq 2$ に対しては、

$$I_n(\mu) = \mu^{n-1} \phi(\mu) + (n-1) I_{n-2}(\mu)$$

という関係を利用する。(ただし $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数) 結果、 n, c, θ 、および t 時点における2変量GARCHモデルの推定結果から得られた条件付平均、条件付分散、条件付共分散を所与としたときの条件付LPMが導出できるので、このLPMを最小にする θ_t を(6)式の最小化により導出する。この θ_t を t 時点におけるLPMに基づく最適ヘッジ比率とし、各時点における過去の情報をもとにした条件付平均と分散共分散行列により一期間モデルを連続的に適用し、最適ヘッジ比率を求め、先物契約のリバランスを行う。

上述の議論のように条件付正規を仮定すれば、解析的に所与の θ に対して、LPMを求めることは可能である。しかし条件付非正規である場合、解析的にLPMを導出することは非常に困難になる。また(6)式の最小化を行う際に比較的時間を必要とする。そこで、以下では数値積分を用いて(5)式の積分を評価する方法を構築する。

3.2 モンテカルロ法によるヘッジ比率の導出

Lien and Tse (1998) は2変量GARCHモデルの条件付分布に正規分布を仮定することで解析的にヘッジ比率 θ が所与のもとでの(3)式の解析的な導出法を示しているが、 r_s と r_f の分布を正規分布と異なる分布を仮定した場合、解析的にこれを評価することは非常に困難になる。そこで、モンテカル

口法により、2変量GARCHモデルの推定結果をもとに(3)式の評価を行う。

具体的には、ある時点 t におけるヘッジ比率を得るために、設定した標準化分布から(7)式における z_t を M 個サンプリングする。

次に推定結果から得られる、時点 t における条件付平均 $\hat{\mu}_t$ と条件付分散 $\hat{\mathbf{H}}_t$ により、 \mathbf{y}_t を M 個サンプリングする。結果としてヘッジ比率 θ 、リスク回避度パラメータ n と目標収益率 c を所与としたもとの、(5)式は、

$$Q = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(0, c - r_{s,i} - \theta r_{f,i})^n \quad (9)$$

と近似することが可能である。したがって Q を最小にするような θ をシミュレーションごとのヘッジ比率とする。

以上の手順を N 回繰り返す、抽出された N 個のヘッジ比率の平均をLPMに基づくヘッジ比率とする。

4 条件付分布へのSkew-Student分布の適用

GARCHモデルの条件付分布は一般に正規分布が適用されているが、パラメータから得られる無条件尖度は標本尖度と比較して、実際の無条件分布の尖度を十分に捉えきれていないと考えられるため、正規分布ではなく t 分布や一般化誤差分布 (GED) が用いられてきている。近年、尖度だけでなく、歪度を考慮した分布を適用した分析が行なわれており、実際、歪度が0でないような資産も報告されている。

Fernandez and Steel (1998) は歪みのない対称の分布をもつ確率変数から、歪度のある分布をもつ確率変数への変換を提示しており、この変換を適用して、Skew-Normal, Skew-Student, Skew-GEDなどの歪みをもつ分布を構築することを可能とした。Lambert and Laurent (2001) は t 分布に歪みを考慮したSkew-Student分布を単変量のGARCHモデルに適用して分析を行っており、³⁾ また Bauwens and Laurent (2002) では、Skew-Student分布を多変量に拡張した、多変量Skew-Student分布を多変量GARCHモデルに適用し、その有効性を指摘している。

以下では、歪度や尖度を考慮した多変量Skew-Student分布を概観した後、現物と先物の2変量GARCHモデルの条件付分布に適用し、LPMをリスク尺度としたヘッジ比率を導出する。

4.1 多変量Skew-Student分布

Bauwens and Laurent (2002) はFernandez and Steel (1998) が提示した単変量の歪みをもつ確率変数に対して、以下のような拡張を行い、多変量の歪みをもつ確率変数ベクトルの導出を行っている。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^* &= \lambda(\boldsymbol{\tau})|\mathbf{x}| \\ \lambda(\boldsymbol{\tau}) &= \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{I}_k - \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\xi}^{-1} \\ \boldsymbol{\tau} &= \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_k) \end{aligned}$$

$$\tau_i = \begin{cases} 0 & \text{with probability } 1/(1+\xi_i^2) \\ 1 & \text{with probability } \xi_i^2/(1+\xi_i^2) \end{cases}$$

$$\xi = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k) \tag{10}$$

ただし、 $\text{diag}(\cdot)$ は (\cdot) の要素を行列の対角要素とした行列であり、 $|\mathbf{x}| = (|x_1|, \dots, |x_k|)'$ で \mathbf{x} は M-Symmetry のクラスに属する確率変数ベクトルである。⁴⁾ また ξ_i は歪みを表すパラメータであり、 $\xi_i = 1$ $i = 1, \dots, k$ の場合は、M-Symmetry な分布となる。個々の変数の周辺分布は $\log(\xi_i) < 0$ の場合、歪度が負で、左に歪み、 $\log(\xi_i) > 0$ の場合、歪度が正で、右に歪んでいることを表している。このとき確率変数ベクトル \mathbf{z}^* の結合密度関数は、

$$f(\mathbf{z}^*|\xi) = 2^k \left(\prod_{i=1}^k \frac{\xi_i}{1+\xi_i^2} \right) g(\mathbf{k}^*) \tag{11}$$

ただし、

$$\mathbf{k}^* = (k_1^*, \dots, k_k^*)$$

$$k_i = z_i^* \xi_i^{-I_i} \quad \text{for } i = 1, \dots, k$$

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{if } z_i^* \geq 0 \\ -1 & \text{if } z_i^* < 0 \end{cases}$$

で与えられることが、Bauwens and Laurent (2002) によって示されている。ただし、 $g(\cdot)$ は M-Symmetry のクラスに属する結合密度関数である。また z_i^* のモーメントについては、

$$E(z_i^{*r}|\xi) = M_{i,r} \frac{\xi_i^{r+1} + (-1)^r \xi_i^{-(r+1)}}{\xi_i + \xi_i^{-1}} \tag{12}$$

となることが示されている。ただし、 $M_{i,r} = \int_0^\infty 2u^r g_i(u) du$ であり、 $g_i(\cdot)$ は z_i^* の密度関数である。ここで \mathbf{z}^* は、平均が 0 ベクトルで、分散共分散行列が単位行列ではない。したがってそのまま GARCH モデルにおける \mathbf{z}_i の分布とすることはできないので、 \mathbf{z}^* に対して標準化を行う必要がある。

Bauwens and Laurent (2002) では M-symmetry のクラスに属する分布を次の標準化多変量 t 分布を適用している。

$$g(\mathbf{z}|v) = \frac{\Gamma((v+k)/2)}{(\pi(v-2))^{k/2} \Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{\mathbf{z}'\mathbf{z}}{v-2} \right)^{-(v+k)/2} \tag{13}$$

ただし、 v は自由度である。(11)式に(13)式を適用し、標準化を行い、 \mathbf{z} を標準化多変量 Skew-Student に従う確率変数とするとその結合密度関数は、

$$f(\mathbf{z}|\xi, \nu) = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^k \left(\prod_{i=1}^k \frac{\xi_i s_i}{1+\xi_i^2} \right) \frac{\Gamma((\nu+k)/2)}{(\Gamma(\nu/2)(\nu-2))^{k/2}} \left(1 + \frac{\mathbf{k}'\mathbf{k}}{\nu-2} \right)^{-(\nu+k)/2}$$

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_k)'$$

$$k_i = (s_i z_i + m_i) \xi_i^{-I_i}$$

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{if } z_i \geq 0 - m_i/s_i \\ -1 & \text{if } z_i < -m_i/s_i \end{cases}$$

$$m_i = \frac{\Gamma((\nu-1)/2) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu/2)} \left(\xi_i - \frac{1}{\xi_i} \right)$$

$$s_i^2 = \left(\xi_i^2 + \frac{1}{\xi_i^2} - 1 \right) - m_i^2 \tag{14}$$

となることを示している。

以下では(7)式の z_t の分布に標準化2変量正規分布, 標準化2変量 t 分布, 標準化2変量Skew-Student分布を適用した2変量GARCHモデルの推定を行い, 3.2節での議論をもとに可変LPMヘッジを導出し分析を行っていく。

5 分析モデルと実証結果

ここでは, 1995年7月3日から2000年6月30日までのCMEにおけるドル円通貨先物によるヘッジについて検証を行う。先物と現物それぞれ日次終値を円ベースで使用し, %表示での対数収益率に変換し使用している。先物のデータについてはCMEにおけるドル円通貨先物は, 6限月制で同時点に6つの異なる限月の先物が取引されているが, 以下で使用するデータは, 期近の限月の先物とし, さらに, 期先の出来高が期近の出来高を越えた翌営業日に, 期先の限月の先物にデータを接続させている。

表1に基本統計量を示しているが標本期間において現物, 先物の収益率はともに有意に歪度が0ではなく, 右に歪んでいることが示された。したがって, GARCHモデルの条件付分布に歪みを考慮した分布を適用することを支持するものと考えられる。

(7)式の条件付平均については以下のように定式化を行っている。

$$r_{s,t} = \varepsilon_{s,t}$$

$$r_{f,t} = \alpha_f \text{maturity}_{t-1} + \alpha_{f1} b_{t-1} + \alpha_{f2} r_{s,t-1} + \alpha_{f3} r_{f,t-1} + \alpha_{f4} \text{DUM}_t + \varepsilon_{f,t} \quad (15)$$

ただし, maturityは取引最終日までの日数, $b_t = 100(f_t - s_t)$, DUMはデータを接続させた日に1をとるようなダミー変数である。上記の定式化において日米の無リスク金利の格差は変動しないものと仮定している。図1をみると, 日米LIBOR金利から日米の無リスク金利の格差が比較的一定である期間は1995年の下半期から2000年の上半期であると判断できるので, その期間を標本期間とした。さらに $r_{s,t}$ の説明変数に関する係数はどれも有意ではなかったのですべての変数を除去している。

条件付共分散行列のモデル化は, Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988) のVECHモデルに始まり数多くのモデルが提示されているが, 近年, 条件付共分散行列の非対称性を考慮したモデルについて考察されている。そこで条件付共分散行列の非対称性を考慮し Bollerslev (1990) のConstant Correlation (CCORR) モデルをもとに, 各条件付分散については, Ding, Granger and Engle (1993) によるAPARCH (Asymmetric Power ARCH) モデルを適用する。APARCHモデルは, 7つの

表1 基本統計量

	平均	分散	歪度	超過尖度	JB
r_s	-0.01786	0.6814	0.9150**	7.7280**	33113**
r_f	-0.01738	0.7671	1.1570**	9.0720**	46019**

歪度または超過尖度が0という帰無仮説に対して検定を行っており, **は有意水準1%で棄却されていることを表している。JBはJarque-Bera統計量で, 有意水準1%で正規性をもつという帰無仮説は棄却されている。

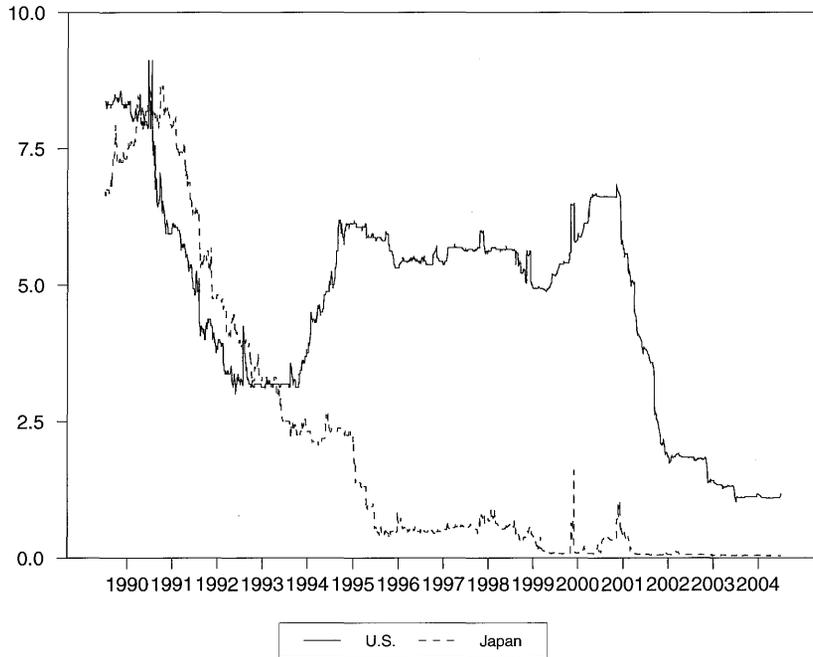


図1 日米LIBOR 1ヶ月もの金利 (%)

GARCHモデルを包含するより一般的な定式化となっている。具体的には、ARCHモデル、GARCHモデル、Taylor/Schwert's GARCHモデル、GJRモデル、TARCHモデル、NGARCHモデル、log-ARCHモデルを包含している。CCORRモデルは、それぞれの条件付分散を単変量のGARCHで定式化しているため、BEKKモデルなどと比べると非線形の最適化において初期値を設定することが容易であり、かつ収束が速いという利点をもっている。そこで本稿では次のようにCCORR-APARCHモデルで条件付共分散行列を設定した。

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t \tag{16}$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{ss,t} & \sigma_{sf,t} \\ \sigma_{sf,t} & \sigma_{ff,t} \end{pmatrix}, \mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{s,t} & 0 \\ 0 & \sigma_{f,t} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{sf} \\ \rho_{sf} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{i,t}^{\beta_{i4}} = \beta_{i0} + \beta_{i1} (|\varepsilon_{i,t-1}| - \beta_{i2} \varepsilon_{i,t-1})^{\beta_{i4}} = \beta_{i3} \sigma_{i,t-1}^{\beta_{i4}} \quad i = s, f \tag{17}$$

ただし、 $\sigma_{i,t}$ は t 時点における条件付標準偏差とする。このとき、 $\beta_{i4}=2, \beta_{i2}=0, \beta_{i3}=0$ のときARCHモデルであり、 $\beta_{i4}=2, \beta_{i2}=0$ のときGARCHモデル、 $\beta_{i4}=1, \beta_{i2}=0$ のときTaylor/Schwert's GARCHモデル、 $\beta_{i4}=2$ のときGJRモデル、 $\beta_{i4}=1, \beta_{i3}=0$ のときTARCHモデル、 $\beta_{i2}=0, \beta_{i3}=0$ のときNARCHモデル、 $\beta_{i4} \rightarrow 0$ のときlog-ARCHモデルとなる。

本稿ではドル円レートに関して分析を行っているので、条件付分散の非対称性のモデル化は、条件付平均からの正の乖離が、円高ドル安のショックであり、負の乖離が、円安ドル高のショックを意味している。これらのショックに対して条件付分散は非対称性があるかどうかを検証していることとなる。

z_t に 2 変量の標準正規分布, 標準化 t 分布, 標準化Skew-Student分布を設定し, 最尤法により推定した結果は表 2 に示している。⁶⁾どの分布においても条件付分散の非対称性を表すパラメータ β_{2s}, β_{2f} は現物, 先物ともに有意でなく円安ドル高のショック, または, 円高ドル安のショックによる非対称性は確認できなかった。その他のパラメータは有意水準 1% で有意であり, 条件付共分散行列は時間に依りて変動していることが確認できた。また標準化 t 分布を仮定した場合の ν , さらに標準化Skew-Student分布を仮定した場合の ν , $\log \xi_s, \log \xi_f$ は有意であった。

設定した分布について検証するため, Lambert and Laurent (2001) による ζ -ヒストグラムとPearsonの適合度検定を行う。 ζ -ヒストグラムは, 仮定した分布が真のとき,

$$\zeta_t = \int_{-\infty}^{z_t} f(k) dk \quad (18)$$

が互いに独立で同一の区間 (0, 1) の一様分布に従うことから, 各分布を仮定した 2 変量GARCHモデルの推定により得られた標準化残差 $\tilde{z}_{s,t}, \tilde{z}_{f,t}$ について仮定した周辺分布に基づき, $\hat{\xi}_{s,t}$ と $\hat{\xi}_{f,t}$ の系列を導出し, この系列をヒストグラムに表わすことにより, 仮定している分布の当てはまりが良いか視覚的に検討することができる。また, Pearsonの適合度検定は ζ_t の大きさごとに k グループに分類し, ζ_t が一様分布しているならば,

$$P(k) = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - E(n_i))^2}{E(n_i)} \quad (19)$$

は, 漸近的に自由度 $k-1$ の χ^2 分布に従うことから, $P(k)$ を用いて検定を行う。ただし n_i は i 番目のグループに属している個数である。

図 2 から正規分布では, 逆U字型をしているので, 分布の裾を過小評価していることが分かる。Skew-Student分布を設定したモデルは, 95%信頼区間にすべてはいっているため, 一様分布していると考えられる。したがって, Skew-Student分布を支持する結果が得られた。また, Pearsonの適合度検定においても正規分布では z_s, z_f のいずれも棄却されており, また t 分布では $\zeta_{f,t}$ が一様分布しているという仮説が棄却されている。Skew-Student分布では, z_s, z_f のいずれも ζ_t が一様分布しているという仮説が棄却されず, Skew-Student分布の当てはまりが良いという結論が得られた。

5.1 ヘッジ効果の比較

ここではまず, 3.2節で議論したモンテカルロ法により(3)式の評価し, ヘッジ比率の導出を行う。具体的には, 各分布に基づくCCORR-APARCHモデルから, 条件付平均と条件付共分散行列が得られるが, 目標収益率を $c = -0.1\%, -0.01\%, 0.0\%, 0.01\%, 0.1\%$ と設定し, リスク回避度のパラメータを $n=2, 3, 4$ と設定した場合の各ヘッジ比率を導出する。

手順としてまず, 2 変量標準正規分布に従う z_{nt} のサンプルを生成する。標準化 2 変量 t 分布については, 標準化 t 分布を仮定したGARCHモデルより得られる ν の推定値に基づいて

$$\sqrt{\hat{\nu}/\chi^2(\hat{\nu})} z_{nt} \quad (20)$$

により, 2 変量 t 分布を生成して, 各要素を 2 変量 t 分布に従う確率変数のそれぞれの分散である $\hat{\nu}/(\hat{\nu}-2)$ で除して標準化 2 変量 t 分布からのサンプルを生成している。

表2 各分布に基づくCCORR-APARCHモデルの推定結果

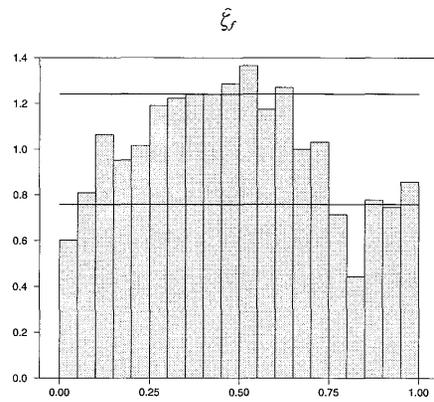
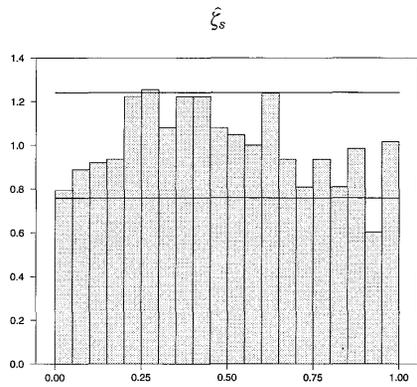
	Normal		Student		Skew-Student	
	Coeff.	S.E.	Coeff.	S.E.	Coeff.	S.E.
α_{f0}	3.4681	0.1487	3.3007	0.1530	3.3506	0.1215
α_{f1}	-0.6528	0.0274	-0.6256	0.0286	-0.6325	0.0224
α_{f2}	0.0977	0.0195	0.1086	0.0177	0.1066	0.0168
α_{f3}	-0.0801	0.0194	-0.0818	0.0172	-0.0951	0.0162
α_{f4}	1.3633	0.0260	1.3640	0.0355	1.3436	0.0363
β_{s0}	0.0053	0.0024	0.0081	0.0010	0.0084	0.0010
β_{s1}	0.0383	0.0037	0.0334	0.0019	0.0347	0.0019
β_{s2}	-0.0862	0.1041	-0.0817	0.0808	-0.0032	0.0730
β_{s3}	0.9644	0.0026	0.9623	0.0012	0.9605	0.0021
β_{s4}	1.0285	0.2088	1.3640	0.0743	1.4261	0.2741
β_{f0}	0.0048	0.0026	0.0086	0.0012	0.0090	0.0009
β_{f1}	0.0404	0.0039	0.0341	0.0010	0.0352	0.0020
β_{f2}	-0.0228	0.1162	-0.1200	0.0810	-0.0343	0.0766
β_{f3}	0.9641	0.2659	0.9625	0.0010	0.9615	0.0018
β_{f4}	0.9905	0.0026	1.2193	0.0793	1.2864	0.3281
ρ_{sf}	0.9848	0.0010	0.9853	0.0008	0.9853	0.0010
ν	-	-	4.9481	0.3686	4.9512	0.4639
$\log \xi_s$	-	-	-	-	0.1120	0.0344
$\log \xi_f$	-	-	-	-	0.1388	0.0340

	\hat{z}_s	\hat{z}_f	\hat{z}_s	\hat{z}_f	\hat{z}_s	\hat{z}_f
平均	-0.0195	-0.0274	-0.0307	-0.0123	-0.0231	-0.0231
分散	1.0188	1.0053	0.9649	1.0917	0.9583	1.0450
歪度	0.4230	0.3856	0.4442	0.4266	0.4571	0.4665
超過尖度	1.8886	5.4884	2.1425	7.0686	2.1771	6.2214
P_{20}	37.048	78.317	21.968	34.952	8.540	25.651
p-value	0.0078	0.0000	0.2858	0.0142	0.9804	0.1539

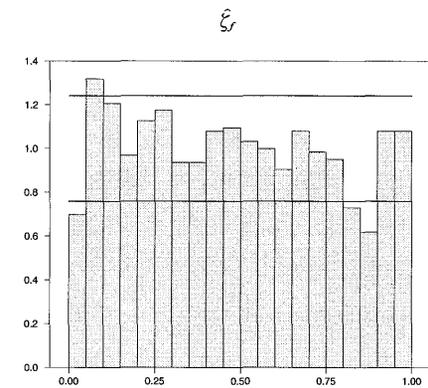
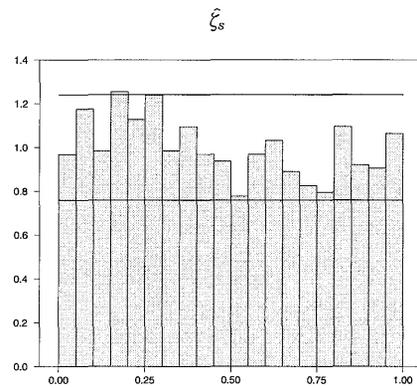
β_{s2}, β_{f2} を除いてすべてのパラメータは有意水準1%有意である。 P_{20} はPearsonの適合度検定統計量で、p-valueはその有意確率である、 \hat{z}_t は $\hat{z}_t = \hat{\mathbf{H}}_t^{-1/2} (y_t - \hat{\mu}_t)$ から導出している。 $\hat{\mathbf{H}}_t^{-1/2}$ は $\hat{\mathbf{H}}_t$ のスペクトル分解に基づき導出している。

標準化2変量Skew-Student分布からのサンプリングは、標準化Skew-Student分布を仮定したGARCHモデルより得られる ν の推定値に基づいて、前述の標準化t分布からのサンプルを生成し、歪みパラメータ、 ξ_1, ξ_2 の推定値を与えて(10)式により変換を行い、Skew-Student分布からのサンプルを生成する。次に、 ν, ξ_s, ξ_f の推定値から得られる $\hat{m}_i, \hat{s}_i (i=s, f)$ により各要素を標準化して、標準化Skew-Student分布からのサンプルを生成している。このサンプルを推定から得られた条件付平均と条件付共分散行列により変換を行い、 r_s と r_f を生成している。最後に、得られた r_s と r_f 、および設定した c, n をもとに(5)式により各時点の最適ヘッジ比率 θ_t を導出している。

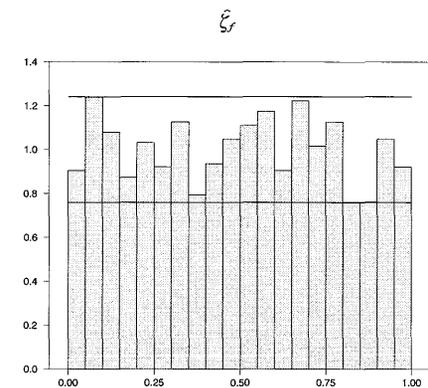
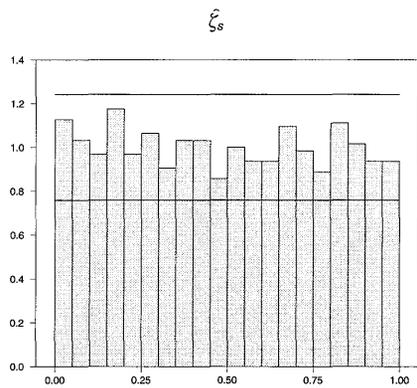
また固定ヘッジ比率と可変ヘッジ比率との比較を行うため、条件付平均と条件付分散が変動しない



正規分布



Student t分布



Skew-Student分布

縦軸は、第 i グループ属する ξ_i の個数を、標本数をグループ数で除したもので基準化したものとなっており、横軸は ξ_i である。実線は95%信頼区間を表している。ここで、95%信頼区間は、第 i グループに属する確率をもとに、第 i グループに属する ξ_i の個数の基準化したものをもとに導出している。

図2 現物と先物の標準化残差に関する ξ_s と ξ_r のヒストグラム

ものとして、標本平均ベクトルと標本共分散行列の推定を行った。次に r_s と r_f が平均を、推定された標本平均ベクトル、共分散行列を、推定された標本共分散行列とする 2 変量正規分布に従うものとして、 r_s と r_f のサンプルを生成し、(5)式に基づいて各時点で一定の固定ヘッジ比率を導出している。なお、(5)式を評価するための 1 回のシミュレーションで用いるサンプルは 10000 とし、シミュレーションの回数は 10 回行い、 n 抽出したヘッジ比率を平均している。

各分布による GARCH モデルからの推定量をもとにした標本期間内におけるヘッジ戦略について、その効率性を確認するため、次の標本 LPM を用いることとする。

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \max(0, c - r_{p,t})^n \quad (21)$$

ただし、 $r_{p,t} = r_{s,t} + \theta_{it} r_{f,t}$ ($i = \text{Normal, ST, SKST, Constant}$) は各ヘッジ手法に基づくヘッジポートフォリオの収益率である。この標本 LPM が小さいほど、そのヘッジ戦略は効率的であるといえる。

各分布によるヘッジ比率に基づいた推定期間内のヘッジポートフォリオの標本 LPM は表 3 に示してある。全体として、期間内の標本 LPM を見る限り、条件付共分散行列の変動を考慮した GARCH モデルによる可変ヘッジは、固定ヘッジよりも非常に有効であるといえる。また、当てはまりの良かった Skew-Student 分布に基づくヘッジポートフォリオの標本 LPM が、平均的にはリスク回避度パラメータ n が 3 次以上について正規分布や t 分布と比較して $c=0.1$ を除いて小さく、よりリスク回避度の高いヘッジャーにとってヘッジ効率が高いことを示している。ただし、効率性の差異が有意に異なるか検定を行う必要があると考えられるが、LPM は切断分布に従うためこの点を考慮して検定を行わなければならないと考えられる。この点に関しては今後の課題としたい。

6 おわりに

本稿から得られた結論は、分散をリスク尺度としたヘッジ比率と同様に、LPM をリスク尺度とした各時点で利用可能な情報をもとにした可変ヘッジは、固定ヘッジと比較して有効であることが確認できた。また本稿では、条件付非正規を仮定した場合の LPM ヘッジ比率の評価法について議論し、ドル円レートと CME におけるドル円通貨先物の収益率の条件付分布に対して Skew-Student 分布を適用

表 3 各分布に基づくヘッジ効果

	$n=2$				$n=3$				$n=4$			
	Normal	ST	SKST	Constant	Normal	ST	SKST	Constant	Normal	ST	SKST	Constant
$c=0.1$	0.030585	0.030936	0.030588	0.056806	0.014018	0.014911	0.014064	0.056833	0.010785	0.012072	0.010484	0.054695
$c=0.01$	0.015210	0.015570	0.015512	0.037844	0.008000	0.008288	0.007976	0.037917	0.006594	0.007475	0.006565	0.040155
$c=0$	0.014092	0.014448	0.014382	0.036311	0.007555	0.007829	0.007520	0.036387	0.006278	0.007135	0.006247	0.038780
$c=-0.01$	0.013059	0.013412	0.013338	0.034869	0.007142	0.007402	0.007096	0.034948	0.005979	0.006814	0.005948	0.037449
$c=-0.1$	0.007051	0.007380	0.007034	0.025219	0.004485	0.004901	0.004390	0.025329	0.003966	0.004736	0.003873	0.027289

Normal は正規分布、ST は t 分布、SKST は Skew-Student 分布である。また c は目標収益率、 n はリスク回避度パラメータである。

し、LPMをリスク尺度とするヘッジについて分析を行った。その結果、Skew-Student分布が当てはまりが良いことが示された。またSkew-Student分布を用いたヘッジ戦略は、効率性の差はわずかでヘッジ効率が大幅に改善されはしなかったが、一定の効率性をもちSkew-Student分布を支持する結果となった。

本稿の分析では先物によるヘッジについて分析を行ってきたが、ポートフォリオ選択など、他の分析に応用可能であり、⁸⁾歪みをもつ分布に従うような資産に対して歪みを考慮した分布をGARCHモデルに適用することにより、分析精度を向上させることができると考えられる。

参 考 文 献

- Baillie, R.T. and R.J. Myers (1991) "Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge." *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 6. No. 2. pp. 109-124.
- Bao, Y., T.H. Lee, and B. Saltoglu (2004) "A Test for Density Forecast Comparison with Application to Risk Management." *Discussion Paper*.
- Bauwens, L. and S. Laurent (2002) "A New Class of Multivariate Skew Density, with Application." Technical report CORE Discussion Paper.
- Bollerslev, T., R. F. Engle, and J. M. Wooldridge (1988) "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances." *Journal of Political Economy*. Vol. 96. pp. 116-131.
- Bollerslev, T. (1990) "Modeling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model." *Review of Economics and Statistics*. Vol. 72. pp. 498-505.
- Demirer, R. and D. Lien (2003) "Downside risk for short and long hedgers." *International Review of Economic and Finance*. Vol. 12. pp. 25-44.
- Ding, Z., C.W.J. Granger, and R.F. Engle (1993) "A Long Memory Property of Stock Market Returns and A New Model." *Journal of Empirical Finance*. Vol. 1. pp. 83-106.
- Fernandez, C. and M.F.J. Steel (1998) "On Bayesian Modeling of Fat Tail and Skewness." *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 93. No. 441. pp. 359-371.
- Fishburn, P.J. (1977) "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Return." *American Economic Review*. Vol. 67. pp. 116-126.
- Giot, P. and S. Laurent (2003) "Value-at-Risk for Long and Short Trading Positions." *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 18. pp. 641-664.
- Jong, A.D., F.D. Roon, and C. Veld (1997) "Out-of-Sample Hedging Effectiveness of Currency Futures for Alternative Model and Hedging Strategies." *Journal of Futures Markets*. Vol. 17. pp. 817-831.
- Lambert, P. and S. Laurent (2001) "Modelling Financial Time Series Using GARCH-Type Models with A Skew Student Distribution for the Innovations." Technical report CORE Discussion Paper.
- Lien, D. and Y.K. Tse (1998) "Hedging Time-Varying Downside Risk." *Journal of Futures Markets*. Vol. 18. pp. 705-722.
- Lien, D. and Y.K. Tse (2001) "Hedging Downside Risk: Futures versus Option." *International Review of Economics and Finance*. Vol. 10. pp. 159-169.
- 森田充 (2004) 「多変量GARCHモデルによるヘッジの有効性」『九州経済学会年報』第42巻, 183-191頁。

注

- 1) 森田 (2004) では分散をリスク尺度としたヘッジ比率に関して 2 変量GARCHモデルの定式化についてのモデルセレクションを行っている。

- 2) 導出についての詳細は、Lien and Tse (1998) のAPPENDIXを参照。
- 3) Bao, Lee and Saltoglu (2004) では単変量の歪みや尖度を考慮した分布を適用した多様なGARCHモデルに関するモデルセレクションを行っている。
- 4) M-Symmetryに属するとは結合密度関数 $g(\mathbf{x})$ が対角要素が1または-1の対角行列 \mathbf{Q} のすべての組に対して $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{Q}\mathbf{x})$ を満たすような密度をもつことである。
- 5) 一年の営業日を252日として年単位に変換している。
- 6) 推定に使用したソフトウェアは、Estima社のWinRats Ver.6.01である。
- 7) 各目標収益率, リスク回避度, 分布の設定ごとにLPMヘッジ比率を導出するにあたり膨大な計算量を要するため本稿では10回のみシミュレーションを行った。ただしリスク回避度, 目標収益率を一つ設定し, 各分布について100回のシミュレーションを行ったところ, そのヘッジ比率に大きな差異は確認できなかった。
- 8) Giot and Laurent (2003) では, ポートフォリオのVaR について多変量Skew-Student 分布を適用している。