Importance Sampling法によるVaR評価モデルとリスク分析への応用

高木，昇

https://doi.org/10.15017/3000309

出版情報：経済論究. 113, pp.59-74, 2002-09-10. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

Importance Sampling手法によるVaR評価モデルとリスク分析への応用

高　木　　　昇

1　まえがき

近年，資産のリスク評価尺度としてVaR (Value at Risk) が用いられ，すでに，いくつかの解析ソフトウェアが公開されている。本論文では，評価におけるシミュレーション法の計算時間を短縮するものとして注目されているIS (Importance Sampling) を議論し，具体的に日本の金融市場において適用する場合の現状と課題について述べる。

VaRの評価方法として，大きく分類して解析的な方法を基本とするデルタ法とシミュレーション法とがある。デルタ法はリスク評価の式に直接理論値を代入して計算する方法であり，分かりやすいが，正規分布を仮定するなどの強い制限がある。これに対してシミュレーション法は，分布を特に仮定しないでシミュレーションによるリスクファクターの評価を行うので，種々の環境のもとでの計算が可能となる。しかし，乱数をもとにしたシミュレーションを基本としているため，所定の精度の推定値を得るまでの計算時間が増大する危険性がある。

VaRは，もともと，まれにしか発生しないリスク発生の現象の確率を評価するものであり，シミュレーション法では，このリスクの範囲に入らない部分も含めて評価するため，サンプルの大部分が推定値の計算には直接寄与しないことになる。このような現象が多くのシミュレーション技法に共通する問題であり，従来より， ISによる解決がなされている。

ISは，簡単に言えば，生成する確率変数を変換によりシフトすることにより，多くのサンプルがリスク分析の対象領域に入るように工夫するものであり，これにより計算時間を大幅に短縮することができる。

しかし，これまでISを用いた計算時間短縮の簡単な例題は示されているが，実際の金融市場のデータを解析した例，あるいは，その推定値の精度が，どの程度金融機関で重視されているかについて述べたものはない。本論文では，ISを実際に適用する場合の基本式を示すと同時に，日本の金融市場からのデータ入手と，その活用について議論する。

以下，２.ではVaRの概要について，３.ではその具体的な評価方法３つについて解説する。それらの評価方法の中でも計算機によるVaR評価の代表例であるモンテカルロ・シミュレーション法をより高速かつ精密に行うために使用するImportance Sampling法の概要を４.で，そのアルゴリズムを５.で述べ，６.でImportance Sampling法の効果を示す。

2　VaRの基本

2.1　VaRの導入

金融機関が所有する資産の現時点での最大の損失額を知ることは，リスクを回避する上で重要なことである。以下でとりあげるVaRはこのような目的のために開発された指標であり，米国のモルガン銀行が導入したのが最初であるとされている。米国の金融機関はもちろん，国際的な決済機関であるBIS(国際決済銀行)も，このようなモデル分析を用いることを進めており，日本の銀行でもVaRによるリスク評価を導入する機運にある。

VaRは基本的には統計理論で言うところの端の部分の分布（tail distribution）を評価するものであり，理論的には明快である。しかし，多くの投資決定で共通する問題として，その基礎となるデータをどのように収集するか，どの時期のデータを用いるか，安定した回答を得るには用いるデータはどの程度必要であるかについて現在でも検討が進められている。

金融機関の保有するポートフォリオの現在の価値（金額の総額）をVとした場合に，将来のある時点Tで，Vの変動額$\varDelta V$が，ある水準$-x$（マイナスの損失）を下回る場合の確率がαで発生するとき，この水準（金額）xを，ポートフォリオの水準$100(1-\alpha)$%の期間TにおけるVaRとよぶ。

例としては，Tを10(2週間)として，αは0.01にとられる。また，金融機関の内部判断の資料として，Tを1あるいは5日にとり，αの値を0.05にすることもある。このようにVaRはポートフォリオの変動額を基準として計算されるが，実際に用いる場合には，ポートフォリオにより得られる収益を期間Tについて求めることが行われる。

いま，収益率を単利と考えると，期間の利益率Rは

$$R=\varDelta\ V/V \tag{1}$$

である。一方，複利で計算すると

$$R=\log(V+\varDelta V/V),\ \varDelta V=V(\exp(R)-1) \tag{2}$$

となる。ポートフォリオの収益率の確率分布が分かっていると仮定し，この分布に当てはめた場合の収益率の$100(1-\alpha)$%水準のVaRの値をr_aとする。

$$P(R\leq -r_a)=\alpha \tag{3}$$

これを用いると，簡単な変換により，次に示す関係式を得る。

$$VaR=V(1-e^{-r_a}) \tag{4}$$

従って，ポートフォリオのVaRを計算する問題は，このポートフォリオを構成する資産の収益率のVaR を求める問題と同じとなる。

いま，確率分布を正規分布と仮定した場合には，その性質よりVaRを式を用いて計算することができる。すなわち，正規分布の平均をμ，標準偏差をσとすると，$100(1-\alpha)$水準のVaRは次のようになる。

$$r_a=z\sigma-\mu \tag{5}$$

ただし，zは平均がゼロ，分散が1である正規分布(標準正規分布)において確率が$1-\alpha$となる点(確

率変数の値）である。この計算式を用いるとVaRの計算は簡単化できる。特に，Tが小さい場合には$\mu=0$が仮定されるので，σだけを推定すればよい。

2.2 リスク・ファクターの表現

VaRを評価する場合，基本的には資産構成を決定する要因が時間的に変化することでポートフォリオが変動し，この総合的な指標であるVaRが要因の変化に影響されて，どのように変化するかを推定する方法がある。このように，ポートフォリオに影響を及ぼす要因をリスク・ファクター(risk factor)とよんでいる。このリスク・ファクターには金利変動や為替レートなどの指標などのほかに，株式オプション・プレミアムの評価に出てきたような株価変動の標準偏差（ボラティリティ）など時系列から計算されるものもある。

リスク・ファクターの影響を推定する場合には，これらを変数（時系列）とみなした場合に計算される共分散（covariance）を計算する必要がある。これを簡単に説明する。

いま，リスク・ファクターを X_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ としておき，ポートフォリオの収益率Rがこれらの総合的な値として求められると仮定しておく。

$$R=\sum w_j X_j \tag{6}$$

ただし，w_j はリスク・ファクター X_j にかかる重みである。ここで，リスク・ファクターの分布も正規分布に従うと仮定すると，収益率の平均値 μ_R は，それぞれのリスク・ファクターの平均 μ_j を重み w_j で総合したもので与えられる。同時に，ポートフォリオ収益率の標準偏差 σ_R は，次のように，リスク・ファクターの共分散 $C(X_i, X_j)$ を用いて計算される。

$$\sigma_R=\sum\sum w_j C(X_i, X_j) \tag{7}$$

$$C(X_i, X_j)=E(X_i, X_j)-E(X_i)E(X_j) \tag{8}$$

従って，ポートフォリオおよびリスク・ファクターの両方の確率分布を正規分布を仮定し，リスク・ファクターの共分散が計算可能であると仮定すると，VaRは比較的簡単な計算により求められる。

3 VaR評価法の概要

3.1 デルタ法（分散・共分散法）

以下では，具体的にVaRを計算する方法について述べる。これらの方法は，大きく分けて3つの方法に分類される。その1つはデルタ法とよばれる方法であり，前の節で述べたようなリスク・ファクターの共分散を計算することにより推定する方法である。

第2番目はモンテカルロ・シミュレーション法とよばれるものであり，リスク・ファクターが乱数に従って変化すると仮定し，この場合のVaRを推定するものである。

第3番目はヒストリカル・シミュレーション法とよばれるものであり，過去に観測したリスク・ファクターのデータを用いて，将来おこるであろうポートフォリオの変動を推定する方法である。

一般的には，デルタ法は理論的で計算時間も少なくて済む反面，実際のデータとの整合性が問題とされ，2つのシミュレーション法では，実際のデータに近い動きを再現できる可能性がたかまるが，

計算時間が長くなる欠点がある。

デルタ法については，そのソフトウェアが米国のJPモルガン銀行よりインターネットで公開されている（RiskMetricsという名前のパッケージ・ソフトウェア)。

以下では，最初にデルタ法について述べる。最初に，話を簡単にするために資産は1つであると仮定し，この大きさをxとし，この資産保有から得られる利益を$p(x)$とする。現在の時刻tから，ある期間Δtが経過したあとの資産の変化分をΔxとする。この時，時刻$t+\Delta t$における利益は次のように推定される。

$$p(x+\Delta x)=p(x)+p'(x)\Delta x+\epsilon(\Delta x) \tag{9}$$

これは，変数xの現在値の近傍でのテーラー展開であり，$p'(x)=\partial p(x)/\partial x$，$\epsilon(\Delta x)$は$\Delta x$と比較して無視できるほどに小さい項目をまとめたものである。

時刻tから$t+\Delta t$までの収益率をrとすると，複利計算のもとでは

$$\Delta x/x=\exp(r) \tag{10}$$

となる。あるいは

$$\Delta x=x(\exp(r)-1) \tag{11}$$

これを近似すると，$x=xr$となるので，式の関係式より，次が得られる。

$$\Delta p(x)=p(x+\Delta x)-p(x)=p'(x)xr \tag{12}$$

ここで，rが平均ゼロ，分散σ^2の正規分布に従うと仮定すると，$\Delta p(x)$も正規分布に従うので，$\Delta p(x)$の標準偏差は次で計算できる。

$$var(\Delta p(x)=var(p'(x))xr=p'(x)xr \tag{13}$$

従って，正規分布の確率点が求まれば，VaRを推定することができる。例えば，$\alpha=0.01$と仮定すると，

$$VaR=p'(x)xr2.33 \tag{14}$$

一般には次の式となる。

$$VaR=p'(x)xrz \tag{15}$$

ここで，zは標準正規分布において，確率が$1-\alpha$となる確率変数の点（確率点）である。

次に，リスク・ファクターが複数になり，これらが$x_i(i=1,\ 2,\ldots n)$として与えられる場合を考察する。ポートフォリオの現在価値Vは，これらのリスク・ファクターの関数$V(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$となる。いま，リスク・ファクターが変化した場合のポートフォリオ価値Vの変化分をΔVとすると

$$\Delta V=\sum\partial V/\partial x_i\Delta x_i+\epsilon(\Delta x_1,\ \Delta x\ldots,\ \Delta x_n) \tag{16}$$

となる。ここで，$\epsilon(\Delta x_1,\ \Delta x_1,\ldots,\ \Delta x_n)$は$\Delta x_i$などの微小分よりも小さく無視できる項目を表す。リスク・ファクターが1つの場合と同様な議論により，次の関係式が得られる。

$$\Delta V=\sum E_i x x_i r_i \tag{17}$$

$$E_i=\partial V/\partial x \tag{18}$$

ただし，r_iはリスク・ファクターに相当する資産を期間内保有した場合の利益率である。以下では，r_iは正規分布に従うと仮定しているので，左辺のΔVも正規分布に従う。これにより，次に示す式によりΔVの分散が計算できる。

$$var\Delta V=\sum x_i^2 E_i var(r_i)+2\sum x_j x_k E_j E_k C(r_j,\ r_k) \tag{19}$$

ここまでの関係式を用いて，最終的にリスク・ファクターが複数の場合の計算式として，次が得られる。

$$VaR = var\Delta Vz \tag{20}$$

ただし，z は標準正規分布において確率が $1-\alpha$ となる確率点である。

なお，分散・共分散行列 S は変数 x_i の相関行列と次のような関係がある。

$$S = \tag{21}$$

これを式に代入すると，次の関係式が求められる。

$$VaR^2 = YRY \tag{22}$$

$$Y = (y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n) \tag{23}$$

$$y_i = x_i E_i \sigma_i z \tag{24}$$

定義より，y_i はリスク･ファクター x_i が単独に存在する場合のVaRである。この両辺の絶対値をとると，次の不等式が得られる。

$$r = r \tag{25}$$

これにより，ポートフォリオ全体のVaRは，個別のリスク・ファクターが存在する場合のVaRの合計よりも小さくなることが示される。

3.2 モンテカルロ・シミュレーション法

変数の性質を用いて分析を進める場合など，理論的な関係式が得られない場合，あるいは理論式の信頼性が低い場合には，あたかの事象が発生したかのような状況をコンピュータで模擬し，これにより結論を得る方法，いわゆるシミュレーション法がある。シミュレーションでは，一般に乱数を用いることから，モンテカルロ・シミュレーション法，あるいは単にモンテカルロ法とよんでいる。

ここで，デルタ法によりVaRを推定する場合の問題を整理すると，次のようなことを仮定していることにある。

(1) リスク・ファクターが正規分布に従う。

(2) デルタ（偏微分値）が固定されている。

(3) ポートフォリオの価値の変動分も正規分布に従う。

これらの仮定をおいているため，計算は比較的簡単に行うことができるが，実際のデータを検証した場合に，これらの仮定が成立しないことが分かると，推定結果は疑わしいものとなる。

モンテカルロ法では，これらの仮定を前提としないで，実際に観測されたデータに従ってシミュレーションを行うので， 結果の信頼性は増す。しかし，繰り返し計算することにより結果を求めているので，この計算時間が増加すること，あるいはどの程度計算を繰り返せばよいかを判断する必要があるなどの問題は残る。

モンテカルロ法の基本は，リスク・ファクターがあらかじめ設定された経路に従って変化する場合に，乱数によりこの経路を発生させておいて，オートフォリオの変動分を求めていくことにある。このようなリスク・ファクターの変動の経路を設定することを，シナリオを生成するとよんでいる。

いま，話を簡単にするため，リスク・ファクターを１つと仮定し，これを時間に依存する変数 $x(t)$

で表す。現在の時刻を０として，$\varDelta t$ だけ後のポートフォリオの変動分を考察する。$x(t)$ に代表される資産の利率を r としておき，この r は確率変数であると仮定する。このとき，次の関係式を得る。

$$x(\varDelta t)=x(0)\exp(r) \tag{26}$$

確率変数 r について，年間の変動の標準偏差が計算されており，σ で与えられていると仮定する。このとき，短い時間 $\varDelta t$ における確率変数は，平均ゼロ，標準偏差 $\sigma\varDelta t$ の正規分布に従うことが示されるので，

$$x(\varDelta t)=x(0)\exp(\sigma\varDelta t\varepsilon)$$

により計算することができる。なお，ε は標準正規分布をもつ正規乱数である。

次に，リスク・ファクターが複数個である場合について考察する。リスク・ファクターを $x_i(i=1, 2, \ldots, n)$ とする。１個の場合と同様に，次のように式で記述することができる。

$$x_i(\varDelta t)=x_i(0)\exp(\sigma_i\varDelta t\varepsilon_i) \tag{27}$$

ここで，σ_i はリスク・ファクター x_i の年間の変動の標準偏差であり，ε_i はリスク・ファクター x_i に対応して生成する標準正規乱数である。

なお，これまでの議論では，リスク・ファクターには相互に相関はないと仮定したが，一般には金利と為替レートなどの間のように相関が存在すると考えられる。相関が存在する場合には，式に代入する正規乱数を独立のまま（独立同時分布）で使用すると正しい結果を与えない。従って，相互に相関を有する正規乱数を生成する必要がある。これには，次に示すような行列の変換を用いて，乱数の変換を行う。

いま，n 個の正規乱数を $\varepsilon i(i=1, 2, \ldots, n)$ とする。これに対して，お互いに独立である標準正規乱数を $\hat{\varepsilon}i(i=1, 2, \ldots, n)$ とする。また，正規乱数の相関行列と $R=(\rho_{ij})$ とする。

ここで，相関行列 R は次のような行列 A の積として分解できることが示されている。これを，コレスキー分解（Cholesky decomposition）という。

$$C=AA^T,\ A=[a_{ij}] \tag{28}$$

このような分解によって得られた行列 A を用いて，標準正規乱数を次のように変換する。

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n)^T=A(\hat{\varepsilon}_1,\ \hat{\varepsilon}_2, \ldots,\ \hat{\varepsilon}_n) \tag{29}$$

この結果得られる乱数は，相関行列 R をもつ正規乱数であることが証明できる。

このような準備のもとで，次にリスク・ファクターが変化した場合のポートフォリオ価値Ｖの変動を求める。例えば，式に示す正規乱数を m 組発生させておくと，この m 組のそれぞれが，１つのリスク・ファクターの変化の方向を示すので，このそれぞれに対してポートフォリオの変化分 $\varDelta V_i(i=1, 2, \ldots, m)$ が計算される。この変化分 $\varDelta V_i$ をもとにしてポートフォリオのVaRを推定することができる。

このように計算手順としては明快であるが，しかし，リスク・ファクターを変更することにより資産の評価について，再度，計算式を用いて求める必要があるケースも少なくない。ポートフォリオの変化分 $\varDelta V_i$ を小さい順に並べる。この中の i 番目に小さいものを $V_{(i)}$ で表す。

$$\varDelta V(1)\leq\varDelta V_{(2)}lep\ldots\leq\varDelta V_{(m)} \tag{30}$$

このとき，(i) 番目の $V_{(i)}$ は，VaRの $100\times/m+1$ パーセント点になっていることが示される。従って，

例えば，10000回のシミュレーションを実施して，VaRの99%点を推定するには，100番目の価値変動額である $\Delta V_{(100)}$ がこの値を与える。

3.3 ヒストリカル・シミュレーション法

モンテカルロ・シミュレーション法は，デルタ法が前提としていたデルタの不変性やリスク・ファクター変動の正規性を解決することができたが，しかし，リスク・ファクターが特定の確率過程（正規乱数から生成される乱数）を用いているため，もし，正規分布の仮定が満足されないケースなどが発生すると，VaRの推定に誤差が生じる。

このような仮定を克服する方法として，過去に観測されたリスク・ファクターをそのまま用いる方法でシミュレーションを行う方法が，ここに示すヒストリカル・シミュレーションである。

過去にNとおり（N組）のリスク・ファクターの組み合わせが発生していると仮定し，これを R_i で表す。

$$R_i=(r_1^{(i)},\ r_2^{(i)}, \ldots,\ r_n^{(i)}) \tag{31}$$

すなわち，Nとおりのシナリオが発生可能であると仮定する。このシナリオから任意に1つのシナリオを選択して，これをもとにポートフォリオの変動分を推定する計算を繰り返す。いま，例えば，j番目のシナリオ $(r_1^{(j)},\ r_2^{(j)}, \ldots,\ r_n^{(j)})$ を選択する。このときの i 番目のリスク・ファクター x_i の変化分は次のように計算される。

$$\Delta x_i=x_i(0)\exp(r_i^{(k)}) \tag{32}$$

ただし，Δt は収益率の計算間隔であり，ΔS は保有期間である。このリスク・ファクターの変動に応じたポートフォリオ変動を計算し，これを，合計でm回繰り返す（これを，モンテカルロ法の場合と同様に，$Della V_1$，$\Delta V_2, \ldots, \Delta V_m$ で表す。これから後のVaR推定の方法は，モンテカルロ法の場合と同様に行う。

4　Importance SamplingによるVar計算の高速化

4.1 ISの基礎

シミュレーション法における計算時間の短縮と，精度の向上をはかるためISを用いる。

ISは，従来より，通信トラヒックを処理する交換機の設計などに用いられている。トラヒックの中で，実際にサービスを受けられない部分が全体のどれくらいになるかを推定する方法である。いわゆる，分布のすその部分を計測推定することが目的である。しかし，本来はまれにしか起こらない現象であるので(例えば1%)，シミュレーション全体の99%は無駄になる。このため，シミュレーションの多くの部分を計測に利用するが重視される。

その原理は，シミュレーションにおいて，まれにしか起こらない現象を，確率分布を変換することにより頻繁に起こる現象へと変換することにある。これにより計算時間が大幅に短縮できると同時に，計算の精度を向上させることができる。

Delta-gamma approximation

ポートフォリオに影響を与えるリスク要因を次のように仮定する。

$$S(t)=(S_1(t),\ S_2(t),\ldots,\ S_m(t)) \tag{33}$$

リスク要因の変動によるポートフォリオの変化について，2次微分までを考慮する方法である。

$$L=a_0+a^T\varDelta S+\varDelta S^T A\varDelta S \tag{34}$$

$$a_0=-\Theta\varDelta t,\ \ a=-\delta,\ \ A=-0.5\Gamma \tag{35}$$

$$\Theta=-\partial V/\partial t,\ \ \delta_i=\partial V/\partial S_i \tag{36}$$

$$\Gamma_{ij}=\partial V^2/\partial S_i\partial S_j \tag{37}$$

シミュレーション法では例えば次のように時刻における要因を計算する。

$$\varDelta S=CX \tag{38}$$

X：m　次元の標準正規乱数　しかしこのシミュレーションでは，通常のまれにしか起こらない現象を全体の中で計測する必要がある。

このため，ISでは基本的に，次のような正規乱数の変換を行う。

$$C^TAC=U\varLambda U^T,\ \ UU^T=I,\ \ \varLambda=(\lambda_1,..\lambda_m)^T \tag{39}$$

$$G=CU \tag{40}$$

$$\varDelta S=GZ \tag{41}$$

ここで，Z は $N(0,\ \sigma)$ の正規分布に従う。これにより損失における $L=a_0+Q$ の値は大きくなり，その起こる確率も増加する。すなわち，a_0+Q の平均は，ほぼ x に近くなる。

ISによりえられる損失を評価する式は次のようになる。

$$P(L>x)=E[I(L>x)m_r(Z)] \tag{42}$$

$$m_r(Z)=\exp(-0.5Z^TZ)/(|B|^{-0.5}\exp(-0.5(Z-\mu)^TB^{-1}(Z-\mu)) \tag{43}$$

乱数をXからZへと変換する方法にはいくつかあるが，Glassermanでは次に示すようなexponentila twisting (Bucklew 1990，Heidelberger 1995) を用いている。ここで，θ はtwisting parameterと呼ばれる。

Z_i の分散と平均は次のようになる。

$$\sigma_i^2(\theta)=1/(1-2\theta\lambda_i) \tag{44}$$

$$\mu_i(\theta)=\theta b_i\sigma_i^2(\theta) \tag{45}$$

ここで，θ は次の方程式を数値計算的に解いた解である。

$$\varPhi'(\theta x)=x-a_0 \tag{46}$$

$$\varPhi(\theta)-\sum 0.5[(\theta b_i)^2/(1-2\theta\lambda_i)-\log(1-2\theta\lambda_i)] \tag{47}$$

5　ISアルゴリズム

以上をアルゴリズムとしてまとめると次のようになる。なお以下のアルゴリズムでは一般に推定値の分散を軽減する方法として有効であるとされる，層化サンプル法 (stratified sampling) を同時に組み込んでいる。

(step 1)

$$L=a_0+a'\Delta S+\Delta S^T A\Delta S \tag{48}$$

式に従って損失を仮定する。

$$Q=b^T Z+Z^T \Lambda Z \tag{49}$$

と表現する

$$Z->N(0,\ I) \tag{50}$$

$$C^T C=\Sigma$$

$$C^T AC=U\Lambda U^T \tag{51}$$

を解く

$$G=CU,\ b^T=a^T G \tag{52}$$

と表現する。

(step 2)

$$\Phi'(\theta x)=x-a_0 \tag{53}$$

といった行列方程式の解とする。

これを用いて正規乱数の分散と平均を求める。

$$\sigma_i(\theta)=1/(1-2\theta\lambda_i) \tag{54}$$

$$\mu_i(\theta)=\theta b_i \sigma_i^2(\theta) \tag{55}$$

(step 3) 層化サンプル法を適用することを前提とする。層化された正規乱数を Z^{ij} としておく。役割は基本的に Z と同じである。

この Z^{ij} を用いて，次のように変動要因の変化分を計算する。

$$\Delta S^{ij}=GZ^{ij} \tag{56}$$

この変化分を用いて，次の確率を計算する。

$$P_{IS}=\sum_{j=1}^{k} p_j \sum_{i=1}^{n_j} I(L_{ij}>x) m_{rij} \tag{57}$$

6 VaR計算の応用例

6.1 株式ポートフォリオ

株式からなるポートフォリオのVaRを計算する場合，リスク要因は個別銘柄の株価変動になる。従って，これらをリスク要因と見なして，これまでの方法を適用してVaRを計算することができるが，オートフォリオの含まれる株の数が多くなると計算が面倒である。そのため，いくつかの簡単化のための方法が用いられる。

いま，i 番目の個別銘柄の収益率を r_i とし，この銘柄への投資比率を w_i とすると，ポートフォリオの期待収益率は

$$r=\sum w_i mu_i$$

となる。一方，この期待収益の分散は次で与えられる。

$$var(\mu_p)=\sum w_i\sigma_i^2+\sum\sum w_iw_j\sigma_{ij}$$

ただし，σ_i は i 番目の銘柄のボラティリティであり，第2番目の項は共分散を表している。ここで，ベクトル表現を用いると

$$\sigma_p^2 2=w\Sigma w$$

なお，この計算式では，ベクトル w の成分はすべて正であるが，行列 Σ の成分は正であるとは限らない。例えば，相関が1である資産では，重により σ^2 はゼロになる。このように，実際に σ^2 を計算した場合に小さくなり過ぎる場合におこる現象をゼロVaRとよぶ。このゼロVaRが出現した場合には，その前提条件を調査してみる必要がある。

次に，σ_p^2 の重み w_i についての偏微分を求めると

$$\partial\sigma_p^2/\partial w_i=2w_i+2\sum w_i\sigma_{ij}=2Cov(R_i,\ w_iR_i+\sum w_jR_j=2Cov(R_i,\ R_p))$$

これを，σ_p についての相対感度として定義する。

$$\partial\sigma_p/\sigma_p\partial w_i=Cov(R_i,\ R_p)/\sigma_p^2=\beta_i$$

個別銘柄のベータ値は，ポートフォリオの収益率の期待値と個別銘柄の収益率との関係を用いて，次のように定義されている。

$$\sigma_p^2=w_1(w_1\sigma_p^2+\sum w_j\sigma_{j1})+w_1(w_1\sigma_p^2+\sum w_j\sigma_{j1})+\ldots$$

従って，

$$\sigma_p^2=w_1Cov(R_1,\ R_p)+w_2Cov(R_2,\ R_p)+\ldots=\sigma\sum w_i\beta_i$$

すなわち，ポートフォリオの分散は，個別銘柄のベータ値の重みつきの和で計算される。

これより，　次の関係を求めることができる。

$$VaR=VaR(\sum w_i\beta_i)=VaR_1+Var_2+\ldots$$

計算式の上ではこのような共分散の計算でVaRを評価することができる。しかし，現実に銘柄の数が多くなると指数関数的に計算時間が増大する。これを回避するための計算の簡単化が行われている。

(1)　対角モデル

このモデルでは，すべての資産（銘柄）の動きが市場の1つのファクターに依存すると仮定することにある。式で示すと次のようになる。

$$R_i=\alpha_i+\beta_iR_m+\varepsilon_i$$

$$E(\varepsilon_i)=0,\ E(\varepsilon_i)=0,\ E(\varepsilon_i,\ \varepsilon_i)=0,\ E(\varepsilon_i^2)=\sigma$$

すなわち，資産 i のリターンはマーケットのリターン R_m にのみ依存する。誤差項に関しては，無相関が仮定されている。

これらの関係式を用いると，資産 i の分散，資産 i，j の共分散は次のようになる。

$$\sigma_i^2=\beta_i^2\sigma_m^2+\sigma_{(\varepsilon,i)}^2$$

$$\sigma_{ij}^2=\beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

行列計算でいうと，もともとの行列が対角化されたことに相当するので，行列計算における計算数を大幅に減らすことができる。例えば，100資産の場合，もともとの計算では5500の計算が必要であるが，これが201まで減少する。

以上の簡単化の過程を適用すると，VaRの計算は次のようになる。

$$VaR(R_p)=var(w^TR)=w^T\Sigma_w=w\beta beta^Tw\sigma_m+w^TD_ew$$

更に，この計算式の第２項はポートフォリオの銘柄数が増加するとゼロに近づくので，無視できる可能性がある。

6.2 債券のデュレーション

債券のデュレーションDは投資元本が回収できる期間を推定する指標として債券投資分析に利用される。数式で定義すると，次のようになる。

$$D=t\sum C_t/(1+y^t)/\sum C_t/(1+y^t)$$

すなわち，Dはキャッシュ・フローの現在価値に期間をかけて，債券価格で全体を割ることにより計算される。生命保険会社などでは，ポートフォリオのデュレーションが負債のデュレーションと同じにしておくことにより，金利変動によりリスクが回避できることを利用している。

次に，デュレーションと債券価格の変化との関係を求めてみる。市場価格Pの債券は，将来にわたって得られるキャッシュ・フローの現在価値であることから

$$P=\sum_{t=1}^{T}C_t/(1+y)^t$$

利回りが微小変化する場合の債券価格の変動は，この式を微分することにより，次のように得られる。

$$dP/dy=\sum(-t)C_t/(1+y)^t+1$$

モコーレイ・デュレーションは投資の加重平均満期日として，次のように定義される。

$$D=P^{-1}\sum_{t=1}tC_t/(1+y)^t$$

従って，利回りの変動に対する債券価格の感度（sencitivity）は，次のように求められる。

$$P^{-1}dP/dy=-D/(1+y)$$

デュレーションは線形のエクスポージャー手法であり，証券ポートフォリオのデュレーションは，単に個別債券のデュレーションD_iの加重平均となる。すなわち，ポートフォリオにおけるi番目の債券への投資比率を$x_i(i=1, 2, \ldots, n)$とすると，全体のポートフォリオのデュレーションD_pは

$$D_p=\sum_{t=1}^{n}x_iD_i$$

これらの関係を用いて，イールド・ボラティリティを価格ボラティリティに変換することができる。式より

$$dP/P=-D*dy$$

これより

$$\sigma(dP/P)=D*\sigma(dy)$$

このように，価格と利回りのボラティリティを相互に変換することができる。

次に，デュレーションとVaRの間の直接的な関係式を求める。最大損失は，デュレーションとイールドの上昇分をかけることにより得られる。例えば，５年債券のデュレーションが4.5年であると仮定し，５％の確率で１ケ月間の利回りの最大の増加率が0.38%であるとすると，最大損失Lは

デュレーション×ポートフォリオ価値×最大利回り増加率

で計算されるので，

$$L=4.5\times1000000\times0.38\%=1.70000$$

6.3 為替レート変動

製造業などの企業は，生産拠点や販売拠点を海外の複数箇所にもっているのが通例であり，これらの国における通貨換算レート（為替レート）変動により収益に大きな影響が発生する。資産運用におけるリスク評価尺度であるVaRは，このような資産の変換に関するリスクを評価する場合に用いることができる。いま，n 個の為替レート変動を仮定した場合，準備するものは，1）為替レート変動の分散 $\sigma i(i=1,\ 2,..,\ n)$，2）為替レート変動の相関行列 $R(n\times n)$，3）海外とのキャッシュ・フローの額 $x_i(i=1,\ 2,...,\ n)$ の3つである。

なお，為替レート変動を考慮したVaRの評価の場合には，相関のある為替レートの時系列の数は多くはないので，株式ポートフォリオのVaR分析で用いたような共分散行列の簡単化の操作は特に必要ない。

いま，i 番目の為替レート変動に対応するリスクは

$$V_i=\alpha_i\sigma_i$$

である。ここで，α_i は損失のレベルをあらかじめ決めている場合の確率点である。これを用いて，全体のVaRを次のように計算することができる。

$$VaR=V^TRVx$$
$$VaR=x(V^TRV)x$$

6.4 先渡と先物

デリバティブの簡単な例として先渡と先物をとりあげる。これらは，将来の決まった期日に資産を交換する契約である。先渡取引の価格 f_t は，次の計算式で定義される。

$$f_t=S_te^{-yt}-Ke^{-\tau r}$$

K：契約時に設定された購入価格

S_t：ある証券のスポット価格

r：非危険資産の利子率

y：利回り

τ：満期までの期間

先渡ポジションのリスクは，上に示す式を変動項目ごとに偏微分するとにより計算される。

$$df=\partial f/\partial SdS+\partial f/\partial SdS+\partial f/\partial SdS$$

これに，関数の微分値を代入すると

$$df=e^{-y\tau}dS+Ke^{-r\tau}rdf-Se^{-y\tau}dy$$

6.5 スワップ

スワップ取引とは，２者間で契約に従って将来のキャッシュ・フローを交換することであり，通過スワップなどが用いられている。例えば，ある企業Aが日本円で100億円を10年間で調達したいと考えており，ある銀行Bが100万ドルを同じ期間に資金調達したいと考えていると仮定する。スポットレートは１ドル100円とする。

資本調達する市場の違いにより，企業Aと銀行Bが円，ドルを調達するコストは同じではないと仮定する(下に示すような関係にある)。B銀行は５％で円建て債券を発行し，その後，５％の円金利と引換えに９％のドル金利を支払う10年スワップ契約を結ぶ。これにより，ドル資金の調達コストは９％となり，直接にドル建てで調達する場合より安くなる。

通貨スワップで説明すると，銀行Bのスワップ価値とは，円建て債券からドル建て債券を引いたものであるので，Sを対円のドル価格として，PおよびP^*をドル建て，円建ての債券価格とすると，次の式で定義される。

$$\mathrm{V}=SP^*-P$$

スワップ取引のリスク分析は先渡取引のリスク分析に似ている。通貨スワップに影響する国際の満期日までの利回りをr，外貨建ての満期日までの利回りをr^*，Sを対円ドル価格とすると，これらのスワップの価値はこれらで表せるので，偏微分を利用して価値の微小変動の式を求める。

$$dV=\partial V/\partial SdS+\partial V/\partial rdr+\partial V/\partial rdr$$

この式に，デュレーションの関係式を代入する。これより，次を得る。

$$dV=P^*dS+S(-D^*P^*)dr^*+DPdr^*$$

6.6 オプション

株式オプションをポートフォリオに含んでいる場合に，リスク要因によりプレミアムがどのように変動するかを計算する必要がある。オプション・プレミアムの評価式として，ブラック・ショールズモデルによる式を用いる。すでに述べたように，オプション・プレミアムの理論式に含まれる変動要因は，原株の価格S，このボラティリティσ，非危険資産の利子率r，利回りyである。これらの変数についてのプレミアムC（コールの場合）の偏微分を計算することにより変動分が計算できる。

$$dC=df/dSdS+0.2d^2f/dS^2+df/d\sigma d\sigma+df/drdr+df/dydy+df/dtdt$$

なお，プレミアムに最も影響するのは原株の価格Sであるので，ここではSの２次微分まで考慮している。この評価式にブラック・ショールズモデルにより導出された理論式をあてはめると，次のような関係式を得る。

$$dC=e^{-y\tau}N(-d1)dS+e^{-y\tau}\phi(d_1)/(S\sigma\tau)+Se^{-y\tau}\tau\phi(d_1)+Ke^{-r\tau}tauN(-d_2)-Se^{-r\tau}tauN(d_1)+G$$

$$G=-0.5Se^{-y\tau}\phi(d_1)/\tau+ySe^{-y\tau}N(d_1)-rKe^{-r\tau}N(d_2)$$

$$\phi(x)=s$$

7　応用例

前節で述べた事例の内，先物，スワップ及びオプションについてImportance Samplingを用いたモンテカルロ・シミュレーション法と通常のモンテカルロ・シミュレーション法を適用し，VaR計算結果の分散を比較することでImportance Samplingの効果を確かめる。

7.1　オプション

シミュレーション期間

1年間のtrading dayを250日として，この間の10日間における損失を評価する。すなわち

$$\Delta t = 0.04 \times year$$

原資産

10個の原資産を仮定し，これらは無相関とする

時系列変化で価値変化を表現

instruments限月が3，6の2つのcall，put ATM（At the Money）optionをそれぞれの資産に仮定し，これをポートフォリオとする。

リスク要因

リスク要因の数を5と仮定する。

S：原株の株価

σ：ボラティリティ，初期値は0.3

K：行使価格，初期値はS

τ：限月，初期値は6

r：無リスク資産の利子率，初期値は0.05

具体的なリスク要因の時系列ではなく相関行列のみを仮定する。

1.0	0.1	0.2	0.1	0.0
0.1	1.0	0.3	0.1	0.1
0.2	0.3	1.0	0.4	0.2
0.1	0.1	0.4	1.0	0.5
0.0	0.1	0.2	0.5	1.0

表には通常のシミュレーションとシミュレーションによる推定値の分散比較を行っている。

すなわち通常のシミュレーションの推定値の分散をシミュレーションにより求めた値の分散で割った比率である。

Table 1. オプションのVaR計算の比較

$PL>x$	ISを用いた場合の分散/ISを用いない場合の分散
99%	252
98%	163
95%	19.5

7.2 スワップ

リスクファクタを以下のように設定する。

S：元本，初期値は100

r：円建て債の満期までの利回り，初期値は0.05

r^*：外貨建て債の満期までの利回り，初期値は0.03

t：満期，初期値は0.5

Table 2. スワップのVaR計算の比較

$PL>x$	ISを用いた場合の分散/ISを用いない場合の分散
99%	269
98%	169
95%	15.1

7.3 先渡し

リスクファクタを以下のように設定する。

K：契約時に設定された購入価格，初期値は100

S_r：ある証券のスポット価格，初期値は100

r：非危険資産の利子率，初期値は0.05

r：利子率，初期値は0.05

t：満期，初期値は0.5

Table 3. 先渡しのVaR計算の比較

$PL>x$	ISを用いない場合の分散/ISを用いた場合の分散
99%	357
98%	91
95%	12.1

8　結論

これらの結果から，Importance Sampling法を使用するとVaR計算結果の分散が改善されている。すなわち，より少ないシミュレーション回数によってより高い精度のVaR計算結果が期待でき，通常のモンテカルロ・シミュレーションに比較してより高速に高精度な結果をもたらすことが確認できた。

参 考 文 献

(1) P.Jiron:Value at Risk, McGraw-Hill, New York, 1997.
(2) T.Wilson: "Value at Risk" in C.Alexander(eds): Rsik Management and Analysis vol.1, Wiley, 1999.
(3) P.Glasserman, P.Heiderberger and P.Shahabuddin: "Asymptotically optimal importance sampling and stratification for pricing path-dependent options", Mathematical Finance, vol.9, pp.117-152, 1999.
(4) P.Glasserman, P.Heiderberger and P.Shahabuddin: "Variance reduction techniques for estimating value-at-Risk", management Science, vol.46, no.10, pp.1349-1364, 2000.
(5) J.Cardenas, E.Fruchard, J.F.Picron, C.Reyes, K.Walter and W.Yang: "Monte Carlo within a day", Risk, vol. 12, pp.55-59, 1999.
(6) M.Britten-Jones and S.M.Schaefer: "Nonlinear value at Risk", European Finance Reviwe, vol.2, pp.161-187, 1999.
(7) J.C.Chen, D.Lu, J.Sadowsky and K.Yao: "On inprotance sampling in digital communications-Part I: Fundamentals", IEEE Selected Areas of Communication, vol.11, pp.289-299, 1993.
(8) P.Herderberger: "Fast simulation of rare events in queueing and reliability models", ACM transaction on Modeling and Computer Simulation, vol.5, pp.43-85, 1995.
(9) 高木　昇："時系列"，九州経済学会年度発表会，2001.