GARCH(1, 1)モデルを用いたアメリカンオプションの評価

福井, 昭吾

https://doi.org/10.15017/3000300

出版情報：経済論究. 112, pp.147-159, 2002-03-29. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

GARCH (1, 1) モデルを用いたアメリカンオプションの評価

福　井　昭　吾

はじめに

オプションとは「あらかじめ定められた期日あるいは期間内に，あらかじめ定められた価格（行使価格）で特定の資産（原資産）を売買する権利」であり，金融派生商品の一種である。よって，実際の売買においては，他の商品と同様，その適正価格（理論価格）を知る必要があり，そのための手法が「ブラック・ショールズ・モデル（Black-Sholes model）」と呼ばれるものである。ブラック・ショールズ・モデルには，計算の容易さや拡張性の高さといった利点がある反面，幾つかの問題点もある。とりわけ「時間に関して原資産のボラティリティが一定」という仮定は，明らかに現実との整合性がないと考えられる。そのための拡張として，デュアン（Duan）によって提示されたのが「GARCHオプション評価モデル」（Duan (1998)）[1]である。これは，条件付きボラティリティの変動をGARCHモデルで表現し，その推定結果を元にシミュレーション法を用いてオプションの理論価格を求めるものである。

ところで，デュアンは，GARCHオプション評価モデルを用いて，期前行使のないオプション（ヨーロピアン・オプション）の評価に限定して言及した。しかし，実際の市場ではヨーロピアン・オプションだけでなく，様々なタイプのオプションが存在する[2]ため，我々が実際にオプションの評価を行う場合は，そのような複雑なタイプのオプションを評価する必要に迫られる可能性は大いにあるといえよう。幸い，シミュレーション法の中でも「モンテ・カルロ・シミュレーション」によるオプション評価法は，より複雑なオプションの評価に容易に拡張することができる。とりわけ，ペイオフが満期時点の株価だけでなく，満期に至るまでの株価にも依存するようなオプション，すなわち「経路依存型オプション」の評価を行う場合は，モンテ・カルロ・シミュレーションは非常に強力な評価手法となる。しかしながら，後述するように，モンテ・カルロ・シミュレーションによる評価法では，アメリカン・オプションの評価が非常に困難であるという欠点がある。そのため，モンテ・カルロ・シミュレーションを用いたアメリカン・オプションの評価の仕方について，多くの研究がなされてきた。そこで以下では，モンテ・カルロ・シミュレーションによるアメリカン・オプションの評価法の一つであるティリー（Tilley）の方法（Tilley (1998)）[3]について議論を行い，ボラティリティの変動をGARCH

1）J.-C. Duan, "The Garch Option Pricing Model", (ed) R. A. Jarrow, *Volatility*, Risk, 1998.
2）ペイオフの決まり方がヨーロピアン・オプションおよびアメリカン・オプションとは異なるオプションは，その決定の仕方によって様々なものが存在するが，一般には「エキゾチック・オプション」あるいは「エキゾチックス」と総称して呼ばれることが多い。
3）J. A. Tilley, "Valuing American Options in a Path-Simulation Model", (ed) B. Dupire, *Monte Carlo*, Risk, 1998.

モデルで表現する場合のアメリカン・オプションの評価法と日経225による実例について考察を行う。

1　モンテ・カルロ・シミュレーションによるアメリカン・オプションの評価

モンテ・カルロ・シミュレーションでは，アメリカン・オプションの評価が困難であるということは，直前にも述べたばかりであるが，その評価法の説明に入る前に，困難であることの理由について考えることにしよう。

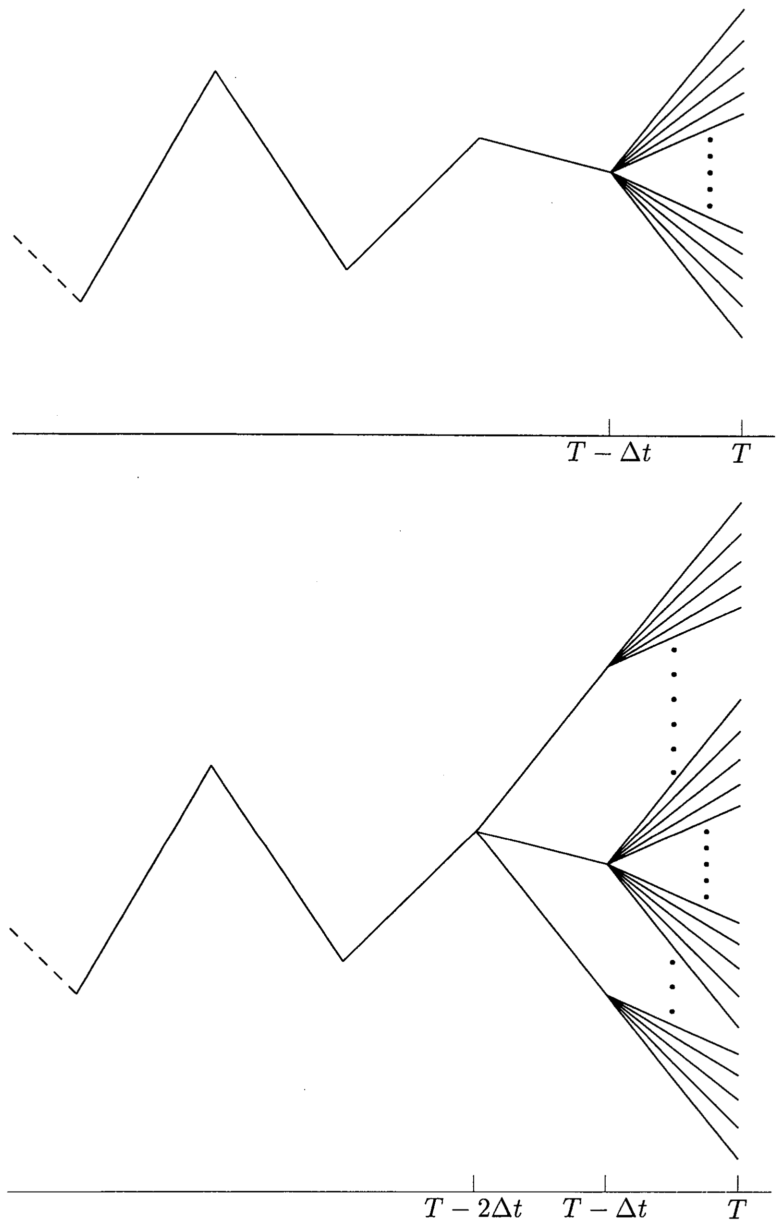
モンテ・カルロ・シミュレーションでアメリカン・オプションを評価する際，最も問題になるのが期前行使の評価である。Cox，Ross，Rubinsteinの提唱した格子法（以降CRR（格子）法と呼ぶ）では，期前行使することにより得られるペイオフと，そのオプションを満期まで保持することによる期待収益，すなわちその時点および状態におけるオプション価格を比較することで，任意の時点における期前行使が有利か否かを決定する。しかし，この判断の仕方をモンテ・カルロ・シミュレーションにそのまま適用することはできない。例えば，図1上図のようなパスにおいて，満期から $T-\Delta t$ 時点だけ前の時点 $T-\Delta t$ における期前行使の有無について，プット・オプションを例にとり考えてみよう。いま，この時点における株価を $S_{T-\Delta t}$，対象とするオプションの行使価格をXとすると，この時点において期前行使することにより得られる収益は $X-S_{T-\Delta t}$ であり，このオプションを満期まで保持することによる期待収益は，リスク中立評価公式を用いると

$$e^{-r(\Delta t)}E^{Q}\{\max(X-S_T)|\mathcal{F}_{T-\Delta t}\}$$

で表される。モンテ・カルロ・シミュレーションでこのリスク中立期待値を得るには，図1下図における時点 $T-\Delta t$ から満期時点のペイオフを複数回シミュレートし，その平均をとるという操作をとる。同様に，満期から $2\Delta t$ 時点だけ前の時点における期前行使の有無を考える際には，$T-\Delta t$ 時点におけるオプション価格をシミュレートし，その平均をとることになる。ところが，そのシミュレートを行う際に必要となる $T-\Delta t$ 時点におけるオプション価格を得るには，そのシミュレート毎にさらに満期時点のペイオフを複数回シミュレートする必要がある。仮に，各時点におけるシミュレートの回数（すなわちパス数）をすべて一律にnであるとすると，アメリカン・オプションを評価する際には，全部で n^n 回のシミュレートを行う必要があり，これは非再結合n項格子における満期時点のノード数と一致する。つまり，各時点におけるシミュレートの回数を一律に定めたモンテ・カルロ・シミュレーションでアメリカン・オプションを評価することは，非再結合多項格子で評価を行うことと等価なのである。このような評価の方法は，当然ながら望ましいものとはいえない。確かに，少しでも正確な評価を行うのであれば，以上の方法が理想的であるが，その計算効率が極めて悪いものであるのは言うまでもない。よって，モンテ・カルロ・シミュレーションでアメリカン・オプションを評価する際には，評価の有意性と計算の効率性を共に維持し得るような評価の仕方を考える必要があるが，特に期前行使についての判断をいかにして表現するかが重要なのである。

アメリカン・オプションの評価法として，これまでにも様々な手法が提示されているが，モンテ・カルロ・シミュレーションを用いて評価する方法としては，ティリーの提示した方法がある。この方法は，シミュレーションにより得られた一連のパス群をペイオフの大小で組み分けすることで，期前

図1　シミュレーション・パス



行使を行うべきか否かを判定する原資産価格の水準を決定し，バックワード・インダクションを行うという方法である。ティリーの方法の主な利点は，評価に必要なパス数が，ヨーロピアン・オプションを評価する場合と等しいという点と，パス数を無限に近づけると，この方法により得られる解が格子法によって得られる解に収束するという点にある。この二つの利点は，先に述べた評価の有意性と計算の効率性を，ある程度満たすものとされている。以下では，まずティリーの方法の詳細について述べ，それから，その方法の有意性と計算効率について考えることにする。

ティリーは，彼の論文の中で，アメリカン•オプションを評価する方法を提示した (Tilley (1998))。この方法は，モンテ・カルロ・シミュレーションを用いた評価方法であり，それまで問題とされてきた期前行使の判断の仕方に興味深い手法を示すものであった。いま，パス数がR本，分割数がNのモンテ・カルロ・シミュレーションを想定しよう。このとき，モンテ・カルロ・シミュレーションでアメリカン・オプションを評価する際の評価式は，一般に次のように与えられる。

$$\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{R}\sum_{t=1}^{N}z(k,\ t)d(k,\ t)l(k,\ t) \tag{1}$$

ここで，$z(k, t)$ はk番目のパスにおいて期前行使がなされる時点では 1 それ以外の時点では 0 となる指標関数，$d(k,\ t)$ はディスカウント・ファクターを表す関数，そして $l(k,\ t)$ は，

$$l(k,\ t)=\begin{cases}\max\{0,\ S(k,\ t)-X(t)\} & \text{コール・オプションの場合}\\ \max\{0,\ X(t)-S(k,\ t)\} & \text{プット・オプションの場合}\end{cases}$$

なる関数である. 但し，$S(k,\ t)$ は原資産価格(以下株価あるいは株価指数とする)，$X(t)$ は行使価格である。この評価公式で最も問題となるのが，関数 $z(k, t)$ をどのように定めるかであるが，以下では，その決定の仕方も含めてティリーの方法について詳細に見ていくことにしよう。いま，分割数がNであるR本のパスが得られたとする。まず，この一連のパスを，満期から一つ前の時点 $T-\Delta t$ ($\Delta t=T/N$) における株価の大小に従って並べ替え，その順番に対し新たにパス•ナンバー $1,\dots, R$ を割り振るという操作を行う。具体的には，コール•オプションの場合は $T-\Delta t$ 時点の株価の小さいパス順に，プット・オプションの場合は株価の大きいパス順に，パスを並べ替えるのである。次に，この時点で期前行使した場合のペイオフ関数である $l(k,\ T-\Delta t)$ をすべてのパスに関して計算し，このペイオフが小さいものから順にA本ずつパスを組み分けることで，R本のパスをB個からなるパスの集合にまとめる。そして，あるパス群 B_k に含まれる任意のパスkに関して，次の式

$$H(k,\ T-\Delta t)=d(k,\ T-\Delta t)\frac{\sum_{B_k}V(k,\ T)}{A}$$

を用いて期待収益を計算する。この式における $V(k,\ T)$ は $l(k,\ T)$ に等しい。さて，$T-\Delta t$ 時点における，各パスの期待収益と期前行使により得られる収益とが得られたので，この二つを比較することで，次のような指標関数

$$x(k,\ t)=\begin{cases}1 & H(k,\ t)<l(k,\ t)\\ 0 & H(k,\ t)\geq l(k,\ t)\end{cases}$$

を考え，これをパス・ナンバーの小さい方から順に並べて数列を作る。この数列をパス・ナンバーの小さい方から見ていき，1から成る部分数列が，それ以降の0から成る全ての部分数列の長さを超え

る地点を探索し，そのような1から成る部分数列の最初の1に対応するパス・ナンバーを $k.(T-\Delta t)$ と表し，これを期前行使を行うか否かの分岐点とする。そして，この $k.(t)$ を境界にして，改めて次のような指標関数

$$y(k,\ t)=\begin{cases}1 & k\geq k.(t)\\ 0 & k<k.(t)\end{cases}$$

を定義する。この指標関数を元に各パス毎の時点 $T-\Delta t$ におけるオプションの価値 $V(k,\ T-\Delta t)$ を次のように定義することができる。

$$V(k,\ T-\Delta t)=\begin{cases}l(k,\ T-\Delta t) & y(k,\ T-\Delta t)=1\\ H(k,\ T-\Delta t) & y(k,\ T-\Delta t)=0\end{cases}$$

これ以降，時点を Δt づつ遡りながら，これまでに述べたパスの並べ替え，当時点における期待収益の導出，期前行使の判断，当時点のオプション価値の導出という一連の操作を繰り返していくである。その結果として得られた指標関数群 $y(k,\ t)$ を使って，最終的に用いられる指標関数 $z(k,\ t)$ を次のように定義するのである。

$$z(k,\ t)=\begin{cases}1 & y(k,\ t)=1\ \text{かつ，すべての}\ s<t\ \text{なる}\ s\ \text{に関して}\ y(k,\ s)=0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

この $z(k,\ t)$，ディスカウント・ファクター $d(k,\ t)$，そして $l(k,\ t)$ を用いて，式(1)をもとにアメリカン・オプションの価格を導出するのである。

以上がティリーによるアメリカン・オプションの導出法であるが，この方法には，考慮すべき点がいくつか存在する。第一に，AおよびBの値をどう設定するかという問題がある[4)]。Aの値を大きくすると，一つの集合に含まれるパス数が増えるため期待収益の値は精緻になるが，パス群の個数は減少するため期前行使の判定は大雑把になる。逆に，Bの値を大きくすると，パス群の個数が増大するため，期前行使の判定は正確になるが，おのおののパス群に含まれるパス数が減少するため，期待収益の評価は正確ではなくなる。以前にも述べたように，パス数を無限に近づけると，その評価額は格子法により得られる評価額に収束するため，パス数が非常に大きい状況ではAおよびBの値について深慮する必要はないが[5)]，比較的少ないパス数で有意な評価を行うにはAおよびBの値を適切に設定する必要がある。基本的には，AとBの値が比較的近い値になるように設定するのが望ましいとされている。あるいは，パスの振り分け度合を示す指標として

$$A=R^{1-\alpha}$$
$$B=R^{\alpha}$$

なるパラメータ α を用いるならば，この α が0.5に近くなるように振り分けを行うのが望ましい。第二に，評価額のバイアスについての問題がある。仮に，格子法によって得られたアメリカン・オプションの価格を正確な理論価格であるとすると，上述のティリーの方法により得られた評価額は，格子法により得られた理論価格の近似である。しかしながら，ある程度パス数を大きくしてもそのバイアスは比較的大きなものになることが分かっている。このバイアスを回避するために，一つはパス数をさ

4）当然ながら，AとBの値は正の整数である必要がある。
5）但し，$A=1$ や $B=1$ のような極端な状況を除く。

らに増やすという方法が考えられるが，もうひとつ期前行使の判定法を変えるという方法が考えられる。ティリーはその論文の中で期前行使の判定法として，格子法を用いて期前行使の分岐点を探索するという方法を提示している。この方法を用いることで，バイアスを大幅に低下させることが可能である。よって，限られたパス数で，より理論価格に近い評価額を得るには，期前行使の判定水準を格子法から導出するのが良いと思われるかもしれない。しかしながら，この方法は基本的に，ある決まった時点においてのみ期前行使の可能なオプション[6]の評価に適しており，いつでも期前行使の可能なオプションの評価には適さない方法である。さらに，以下で考えるGARCHアメリカン・オプションの評価においては，通常の格子法による評価は事実上不可能であるので，GARCHオプション評価モデルでこの方法を用いることはできない。よって，この方法もまた，状況の応じて使い分けられるべきなのである。

2　GARCHオプション評価モデルにおけるアメリカン・オプションの評価

基本的なブラック・ショールズ・モデル（正確には，期前行使に関する仮定のみを緩めたブラック・ショールズ・モデル）のもとでアメリカン・オプションの評価を行う場合は，上述したティリーの方法よりも，格子法や有限差分法を用いて評価を行うのが一般的である。なぜなら格子法や有限差分法のほうが，解の有意性についても計算の速度についてもティリーの方法より優れているからである。しかしながら，ブラック・ショールズ・モデルにおける一連の仮定が成り立たない状況のもとでアメリカン・オプションの評価を行う場合，ティリーの方法は非常に有用な評価法である。とりわけ，ボラティリティの変動が GARCH モデルで表現される場合のアメリカン・オプションの評価法としてティリーの方法は最も適した方法といえる。GARCHオプション評価モデルにおいてヨーロピアン・オプションの評価を行う場合，モンテ・カルロ・シミュレーション法が最良の方法であるが，その評価においては，いかにしてパスを導出するかが最も重要な点であり，それ以降のバックワード・インダクションに関しては通常のブラック・ショールズ・モデルにおけるインダクションと全く同じであった。これに対し，ティリーの方法においては，いかにして期前行使の判定水準を求めるか，すなわちいかにしてバックワード・インダクションを行うかが方法の本質であり，パス導出の手順に関してはヨーロピアン・オプションの場合と全く同じである。GARCHオプション評価モデルのもとでアメリカン・オプションの評価を行う場合，以上の方法を組み合わせて評価を行うのであるが，組み合わせる際にはおのおのの方法の果たす役割をパス導出のシミュレーションとバックワード・インダクションに完全に分割することが出来るのである。つまり，パス導出のシミュレーションは，GARCHオプション評価モデルでヨーロピアン・オプションを評価する場合と同様のシミュレーションを用い，バックワード・インダクションではティリーの方法を用いることで，GARCHオプション評価モデルのもとでのアメリカン・オプションの評価を行うことが出来るのである。

以上の議論より，GARCHオプション評価モデルにおけるアメリカン・オプションの評価法の具体的

6）このようなオプションは，「バミューダ・オプション」と呼ばれる。

な方法について，改めて説明する必要はないであろう。しかしながら，この導出法により得られた評価額がどのような性質を持つかということは，改めて考慮すべき点であり，また非常に興味深い点でもあろう。そこで，次節以降では，実際のデータをもとに，上述の方法を用いてGARCHオプション評価モデルのもとでのアメリカン・オプションの評価を行い，その評価額がいかなる性質を持つかについて考えていくことにする。

3 実データを用いた例

この節では,実際のデータを元に,前節で説明したGARCHオプション評価モデルにおけるアメリカン・オプションの評価を行う。オプションの原資産として株価指数を用いるが，日本国内において，株価指数を原資産とするアメリカン・オプションは「TOPIXオプション」のみである。しかし，TOPIXオプションは取引量が極めて少ないため，取引所により設定された満期および行使価格における価格が成立しないことがしばしばある。また，次節において上述の評価法により得られた評価額がいかなる性質を持つかについて考察する際，この評価法により得られたオプションの評価額を，GARCHオプション評価モデルのもとでのヨーロピアン・オプションの評価額や，分散が一定であるという仮定のもとでのアメリカン・オプションの格子法による評価額と比較する必要がある。よって，原資産を日経225株価指数とするアメリカン・オプションが仮に存在するものとし，このオプションについての評価を行うことにする[7]。

オプションの評価を行うために，まずオプション評価モデルを構築する必要がある。これは，次のGARCH（1，1）モデルを用いることにする。

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = 0.0285045257\sqrt{h_t} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim N(0,\ h_t) \text{ under measure P}$$

$$h_t = 0.0000054129 + 0.0785134147\epsilon_{t-1}{}^2 + 0.8957999457h_{t-1}$$

これは，デュアンの提示したGARCH（1，1）オプション評価モデルを日経225（推定に用いたデータは1996年2月5日から2000年2月2日まで）について推定したものである。なお，このモデルにおける変数は全て日次ベースであり，非危険利子率および連続複利配当利回りをともに0と置くことにする。さらに，この推定結果から得られる条件付きでない標準偏差（すなわち，ボラティリティ）は，23.07286803563％となる[8]。各推定値の t 値は，$\hat{\alpha}_0$(＝0.0000054129)が3.64166，$\hat{\alpha}_1$(＝0.0785134147)が6.15580，$\hat{\beta}_1$（＝0.8957999457）が57.31115，$\hat{\lambda}_0$（＝0.0285045257）が0.96087である。また，現時点

7）以下の分析では，金利（および連続配当利回り）を0と置いている。この場合，アメリカン・プット・オプションの価格とヨーロピアン・プット・オプションの価格は等しい。このため，後で考察するようにこの二つのオプションについてのシミュレーションの結果に大きな差異はない。よって，アメリカン・オプションとヨーロピアン・オプションの比較という観点からは，金利を0と置くのは適当ではないと思われるかもしれない。しかしながら，ここでの目的はあくまで「シミュレーションによるアメリカン・オプションの評価法」を提示することであるため，金利を0として議論を行うことにする。

8）このボラティリティは 営業日ベース（一年＝252日）で計算したものである。すなわち，一年を365日とする場合の定常ボラティリティは，27.76820097766％，一日の定常ボラティリティは，1.453454067981％である。

は2000年2月3日，限月は3月，4月，5月の三限月[9]，行使価格は15500円から24000円の500円刻み，また，シミュレーションにおける分割数は営業日と同じとし，パス数は10000とする[10]。以上のもとで，ヨーロピアン・オプションの評価結果が表1，アメリカン・オプションの評価結果が表2に示してある。また，比較のために，格子法により得られたオプションの価格（但し，分散を定常分散とする）も表に示している。

4　再論—GARCHオプション評価モデルにおけるアメリカン・オプションの評価

以上で得られた結果をもとに，GARCHオプション評価モデルから得られたアメリカン・プット・オプション価格（P_{GRACH}）の性質について考えてみよう。

まず，行使価格および満期とオプション価格間の関係について考えることにする[11]。インプライド・ボラティリティは表3に，またヨーロピアン・オプションのスマイルは図2上図，アメリカン・オプションのスマイルは図2下図に示されている。ヨーロピアン・プット・オプションから導出されたインプライド・ボラティリティとアメリカン・オプションから導出されたインプライド・ボラティリティ

表1　日経225ヨーロピアン・プット・オプションの評価額（単位：円（GARCH価格，B-S価格），％（誤差率））

	限月								
	3月（25日間）			4月（50日間）			5月（70日間）		
行使価格	GARCH価格	B-S価格	誤差率	GARCH価格	B-S価格	誤差率	GARCH価格	B-S価格	誤差率
15500	1.1467	0.2218	4.169771	11.7684	7.0839	0.661291	28.6805	22.1340	0.295767
16000	2.7918	1.0538	1.649231	22.3742	16.9761	0.317983	46.0356	40.1729	0.145937
16500	6.7987	4.0721	0.669575	41.8923	36.7596	0.139628	81.6221	78.8217	0.035528
17000	15.9700	13.0735	0.221552	74.3058	72.6770	0.022411	133.2066	134.4620	-0.009336
17500	36.9413	35.5658	0.038675	128.2169	132.4480	-0.031945	209.2191	216.4082	-0.033220
18000	80.5450	83.5042	-0.035438	212.6645	224.4364	-0.052451	316.8475	330.5906	-0.041571
18500	161.6779	172.1422	-0.060789	336.1740	356.4560	-0.056899	457.0868	481.9913	-0.051670
19000	297.2674	316.6599	-0.061241	510.2544	534.5279	-0.045411	643.1012	674.0665	-0.045938
19500	504.4242	527.7868	-0.044265	731.7479	761.9527	-0.039641	879.1652	908.4077	-0.032191
20000	785.1139	808.5628	-0.029001	1009.3486	1038.8839	-0.028430	1153.0626	1184.6363	-0.026653
20500	1136.3788	1153.8266	-0.015122	1336.4786	1362.5566	-0.019139	1472.8425	1500.6392	-0.018523
21000	1542.1975	1552.4137	-0.006581	1707.0719	1727.9159	-0.012063	1827.3725	1852.8998	-0.013777
21500	1987.1064	1990.6970	-0.001804	2113.9662	2128.5603	-0.006856	2216.2672	2237.0081	-0.009272
22000	2455.4603	2455.7739	-0.000128	2549.1780	2557.6479	-0.003312	2635.2383	2648.1386	-0.004871
22500	2941.5756	2937.3591	0.001435	3003.2266	3008.6433	-0.001800	3072.6742	3081.4674	-0.002854
23000	3430.9443	3428.2869	0.000775	3475.3052	3475.8135	-0.000146	3530.8986	3532.4917	-0.000451
23500	3926.4226	3924.0987	0.000592	3958.2198	3954.4640	0.000950	3996.5449	3997.2324	-0.000172
24000	4422.9302	4422.2814	0.000147	4443.2778	4440.9686	0.000520	4473.4499	4472.3312	0.000250

9）その正確な満期は，それぞれ3月9日，4月13日，5月11日となる。
10）正確にはパス数100からなるシミュレーションを100回行い，それらの平均をとることにする。
11）アメリカン・オプションによりインプライド・ボラティリティを導出する場合は，ブラック・ショールズ式ではなく格子法を用いるのであるが，ニュートン法により計算されるためその解はあくまで近似解である。

表2 日経225アメリカン・プット・オプションの評価額（単位：円（GARCH価格，CRR価格），%（誤差率））

	限月								
	3月（25日間）			4月（50日間）			5月（70日間）		
行使価格	GARCH価格	CRR価格	誤差率	GARCH価格	CRR価格	誤差率	GARCH価格	CRR価格	誤差率
15500	0.6198	0.2163	1.865465	10.7686	7.0623	0.524801	26.9484	22.1175	0.218420
16000	1.8973	1.0370	0.829605	21.2919	16.8726	0.261922	49.6060	43.3100	0.145371
16500	5.7941	4.0537	0.429336	42.3860	36.7586	0.153091	83.5735	78.8125	0.060409
17000	15.2010	13.0478	0.165024	76.1832	72.7063	0.047821	134.2341	134.1624	0.000534
17500	37.8947	35.5447	0.066114	130.3718	132.4298	-0.015540	209.5438	216.5378	-0.032299
18000	80.7855	83.3724	-0.031028	217.0718	224.3710	-0.032532	315.4956	330.7441	-0.046104
18500	160.5408	172.2289	-0.067864	331.7609	356.4531	-0.069272	459.0802	482.0932	-0.047736
19000	295.7369	316.8743	-0.066706	503.3122	534.7261	-0.058748	646.0376	674.2693	-0.041870
19500	500.6876	528.0355	-0.051792	728.2197	762.3383	-0.044755	879.4155	908.8148	-0.032349
20000	779.1942	808.7155	-0.036504	1001.4024	1039.1656	-0.036340	1154.3678	1184.3191	-0.025290
20500	1131.5695	1153.6826	-0.019167	1327.7335	1362.1625	-0.025275	1472.2459	1500.7942	-0.019022
21000	1538.2880	1552.4300	-0.009110	1697.4528	1728.1570	-0.017767	1823.0988	1853.2554	-0.016272
21500	1983.0751	1990.7427	-0.003852	2113.8504	2128.5318	-0.006897	2215.9658	2237.2750	-0.009525
22000	2448.2246	2455.6602	-0.003028	2546.0465	2557.7207	-0.004564	2635.1307	2648.2437	-0.004952
22500	2930.8306	2937.3425	-0.002217	2998.2274	3008.5148	-0.003419	3073.2423	3081.4516	-0.002664
23000	3422.7523	3428.2555	-0.001605	3464.4301	3475.8359	-0.003281	3531.2899	3532.4264	-0.000322
23500	3918.6513	3924.0656	-0.001380	3945.9185	3954.3687	-0.002137	4000.5543	3997.1710	0.000846
24000	4416.0196	4422.2699	-0.001413	4435.0853	4440.8848	-0.001306	4480.2752	4472.2936	0.001785

を比較すると幾つかの相違点がある事が分かる。まず，アウト・オブ・ザ・マネーのオプションは全ての満期において過大評価となっているが，イン・ザ・マネーのオプションでは満期の短いものでは過小評価となっている。さらに3月満期で行使価格23500円および24000円のオプションにおいては評価額が理論的な最低額（本質価値）を下回ってしまうためインプライド・ボラティリティを導出する事ができない。つまり，満期が短くイン・ザ・マネーのものほど過小度合の傾向が強く，さらにはその評価額を得ることすらできない場合がある。しかしながら，これはあくまでインプライド・ボラティリティの観点から見た場合である。表2を見れば分かるように誤差率あるいは単純な差（$P_{GRACH}-P_{CRR}$）の観点からすれば，その差はアット・ザ・マネーにおける誤差率および差よりも格段に小さいことが分かる。それにもかかわらずインプライド・ボラティリティにおいてその過小評価の程度がイン・ザ・マネーのものほど大きく評価されるのは，ブラック・ショールズ・モデルの特性によるところが大きい。ブラック・ショールズ・モデルにおけるオプション感応度の一つで，ボラティリティに対するオプション評価額の感応度を示す「ベガ（vega）」は次のように与えられる。

$$\mathrm{vega}=\frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

$$=S_t\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \tag{2}$$

ただし，

$$d_1=\frac{\ln(S/X)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。行使価格がS_tに比べて極めて大きい場合d_1の値は極めて小さくなり，結果ベガは0に近い値

表3　日経225プット・オプションのGARCH価格より導出されたインプライド・ボラティリティ（単位：%）

	限月（満期）					
行使価格	3月（25日間）		4月（50日間）		5月（70日間）	
	European	American	European	American	European	American
15500	26.5831	25.1585	24.7494	24.4630	24.1182	23.8650
16000	25.5632	24.5215	24.1564	23.9684	23.3597	23.7398
16500	24.6769	23.4029	23.6932	23.7670	23.2710	23.2710
17000	23.8578	23.6711	23.2015	23.3537	23.0084	23.0764
17500	23.2661	23.4172	22.8375	22.9559	22.7880	22.7932
18000	22.8259	22.8580	22.5754	22.7587	22.6278	22.5884
18500	22.4745	22.4202	22.3705	22.2077	22.3755	22.4230
19000	22.1980	22.1270	22.3318	22.1095	22.2834	22.3582
19500	22.1192	21.9577	22.2012	22.0885	22.3595	22.3595
20000	22.0860	21.8258	22.2129	21.9709	22.3005	22.3419
20500	22.2192	21.9726	22.2593	21.9806	22.3612	22.3370
21000	22.4256	22.1730	22.3365	22.0049	22.3610	22.2342
21500	22.7497	22.3828	22.4591	22.4464	22.4195	22.4125
22000	23.0292	21.9630	22.6297	22.4776	22.5994	22.6051
22500	24.0021	21.2907	22.7042	22.3508	22.6847	22.7248
23000	24.1157	19.3747	23.0267	21.9771	22.9866	23.0137
23500	24.7043	NA	23.5361	21.9075	23.0257	23.2962
24000	24.0902	NA	23.4855	21.8694	23.1722	23.7632

をとる。つまり，イン・ザ・マネーのプット・オプションほどボラティリティに対するオプション評価額の感応度は小さくなるのである。ここで，オプション評価額ではなくボラティリティを被説明変数であるとすれば，他の変数が全て一定であるとするとき，イン・ザ・マネーのプット・オプションほどオプション価格の変化がボラティリティの変動に与える影響は大きいということになる。よって，イン・ザ・マネーのプット・オプションとアット・ザ・マネーの同オプションとで差 $P_{GRACH}-P_{CRR}$ が同じであったとしてもそれがインプライド・ボラティリティにもたらす影響は前者の方が大きいのである。

そこで，インプライド・ボラティリティではなく誤差率を用いてオプション価格の特徴を見てみよう。表2にある誤差率をグラフにしたものが図3である。この図からも分かるようにオプションの評価額は，アウト・オブ・ザ・マネーのオプションほどCRR格子のオプション価格に比べて過大評価であり，アット・ザ・マネーのオプションはCRRオプション価格（P_{CRR}）に比べて過小評価である。イン・オブ・ザ・マネーのオプションのCRRオプション価格に対する評価に関しては過大・過小のいずれとも結論付けることはできない。また満期については，満期までの期間が長くなるほど行使価格による過大・過小の度合は小さくなる。このように見ていくと，誤差率の観点からすれば P_{GRACH} の P_{CRR}

図2　日経225ヨーロピアン・プット・オプションから導出されるGARCH価格のボラティリティ・スマイル
(上がヨーロピアン・オプション，下がアメリカンオプション。共に3月，4月，5月の3満期)

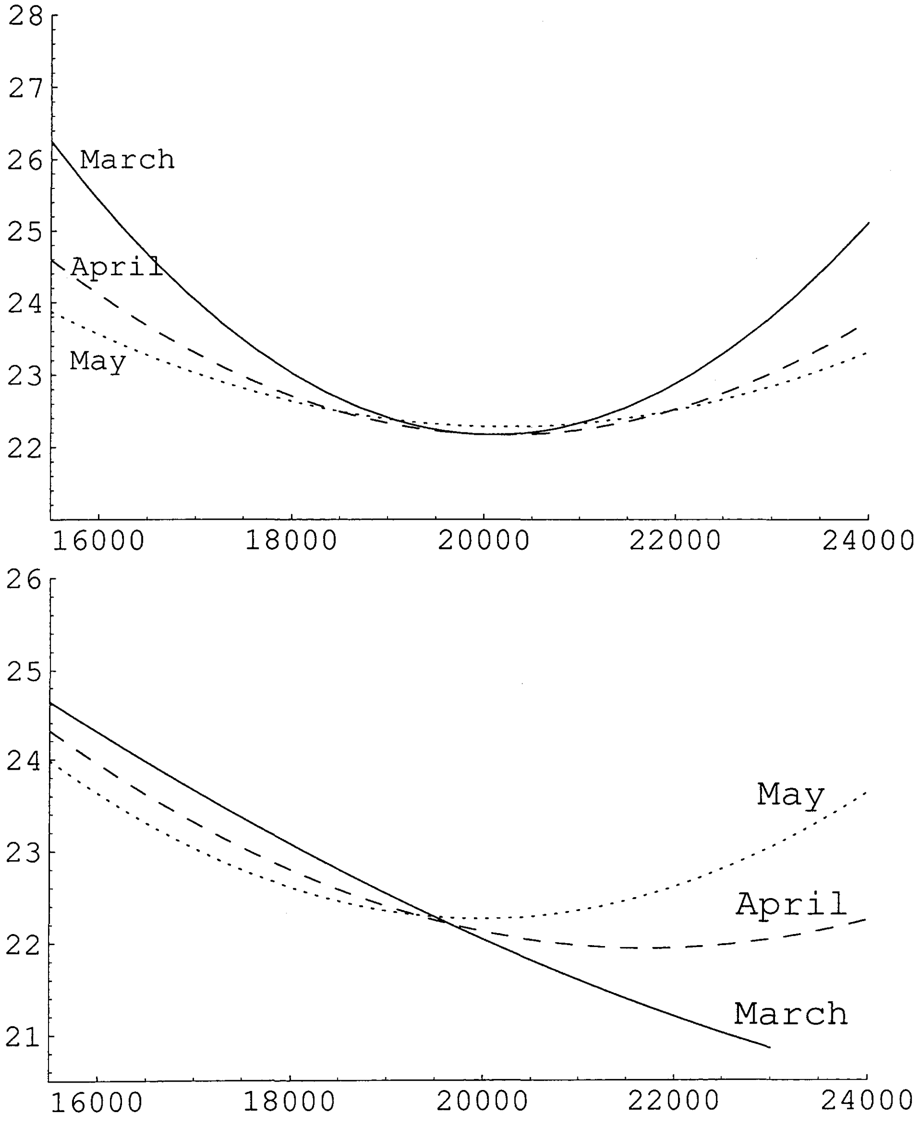
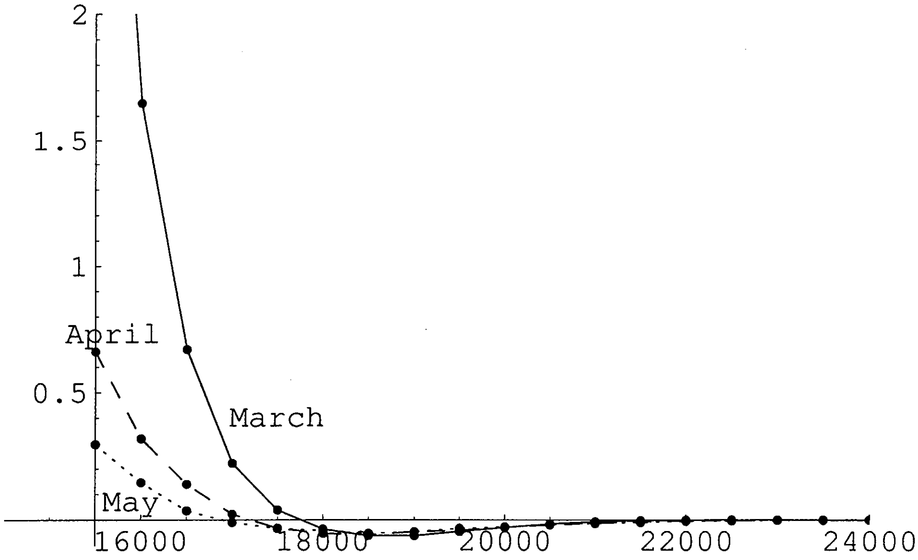


図3　GARCHアメリカン・プット・オプション価格の一定分散アメリカン・プット・オプション価格に対する誤差率（3月，4月，5月の3満期）



に対する性質はヨーロピアン・プット・オプションの評価額（p_{GARCH}）のBS価格（p_{BS}）に対する性質とほぼ同様であることが分かる。これは，図4で示されるヨーロピアン・オプションについての誤差率のグラフと比べても分かるであろう。また，先のインプライド・ボラティリティでは顕著であった満期の短いイン・ザ・マネーのアメリカン・プット・オプションにおける過小評価は，誤差率においては極めて小さなものとなっている。

上述した過小評価はイン・ザ・マネーのオプションに限ったことではない。金利と連続配当利回りが0のもとで，同満期，同行使価格のアメリカン・オプションとヨーロピアン・オプションの価格は等しいはずであるが，表1と表2を比較すると総じてアメリカン・オプションの評価額の方がヨーロピアン・オプションの評価額よりも低い傾向があり，とりわけ満期が短いものほどその傾向が大きいようにみえる。このような現象が現れる理由としては，主としてティリーの方法がもつ特性が考えられる。ティリー（Tilley (1998)）によると，彼の提示したシミュレーションによる評価法は，パス数および分割数が小さいとき負のバイアスを持つ傾向があるとされる。これは，あくまでシミュレーションにより推測された結論であるが，このバイアスはどのようにパス群の設定を行っても現れることが分かっている。この場合，

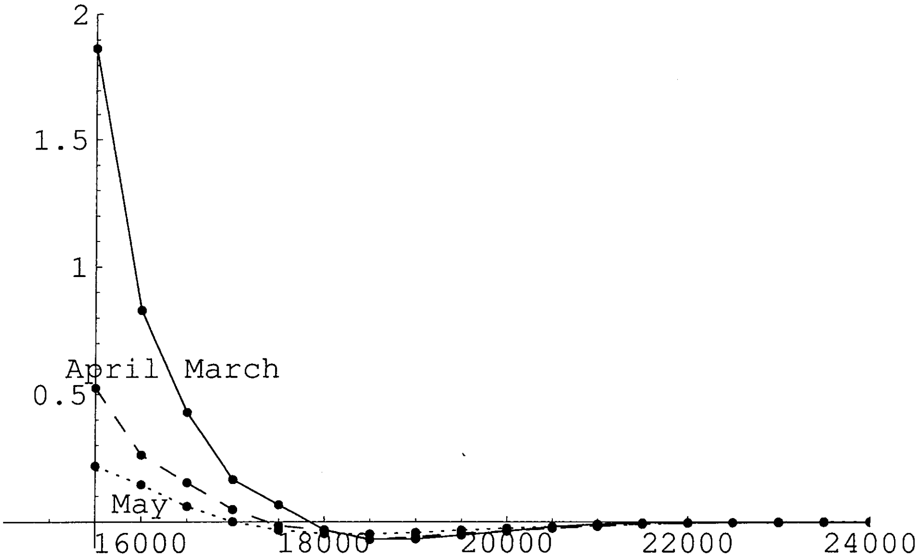
$$P^{SIM}_{GARCH} < p^{SIM}_{GARCH}$$

となる傾向が強いことになる。

ここで，P^{SIM}_{GARCH} はGARCHオプション評価モデルによるアメリカン・プット・オプションのシミュレーション評価額，p^{SIM}_{GARCH} は同ヨーロピアン・プット・オプションのシミュレーション評価額である。最終的なオプション評価額は変量制御法，すなわち以下の式

$$f_{GARCH} = f^{SIM}_{GARCH} + f_{CRR} - f^{SIM}_{STV}$$

図3　GARCHヨーロピアン・プット・オプション価格の一定分散ヨーロピアン・プット・オプション価格に対する誤差率（3月，4月，5月の3満期）



により導出するのであるが（但し，f^{SIM}_{STV} は定常分散とした場合のオプションのシミュレーション評価額である），いま金利を0と置いているので，

$$P_{CRR}=p_{CRR}$$

であり，標本数が十分大きい場合は

$$P^{SIM}_{STV}\approx p^{SIM}_{STV}$$

となる。よって，以上の関係式から

$$P_{GARCH}<p_{GARCH}$$

となる傾向が大きいことが分かる。以上の結果から，アメリカン・オプションの評価額がヨーロピアン・オプションの評価額に比べて小さくなる傾向を持つと考えられるのである。また，上述の評価においては，満期が長くなるにつれ分割数が増大するような計算方法を用いているため，満期までの期間が長いものほどこのバイアスは小さくなると考えられる。このことが，満期が短いものほどアメリカン・オプションの評価額をヨーロピアン・オプションの評価額に比べて小さくしている原因であると考えられるのである。