内生的技術進歩と経済成長

大隈, 慎吾

https://doi.org/10.15017/3000265

出版情報：経済論究. 109, pp.31-47, 2001-03-31. 九州大学大学院経済学会

内生的技術進歩と経済成長

大　隈　慎　吾

1　はじめに

内生的成長理論は1980年代以降，マクロ経済学の中心的な課題の一つとなっている。内生的成長とは，持続的成長径路の成長率がプラスになるような成長を指す。そのような成長の可能性が理論的に示されたことによって，長期的な経済成長が実際に可能であることが示唆された。また，従来の新古典派成長モデルで外生的に捉えられてきた技術進歩率をモデルに内生化するという試みも行われたが，そのような諸理論は内生的技術進歩論と呼ばれている。内生的技術進歩論には，現在，水平的モデル，垂直的モデル，および，それらを統合したハイブリッドモデルがある。水平的技術進歩モデルはRomer（1990）によって確立され，垂直的技術進歩モデルはAghion and Howitt（1992）によって提唱された。前者における技術革新とは，企業が生産する財のバラエティ（種類）が増加することである。このことから，バラエティ拡大モデルとも呼ばれている。一方後者は，財の品質が段階的に向上することが技術革新となることから，クオリティ・ラダー・モデルとも呼ばれている。

内生的成長理論の論文においては，議論が持続的均衡状態のみに限定されることが多い。バラエティ拡大モデルを扱った論文の多くに影響を与えたRomer（1990）のモデル（以下，その拡張モデルも含めローマー・モデルと呼ぶ）も，移行動学が示されていないという点ではその例外ではない。Arnold（2000）は，このローマー・モデルの移行動学に関して詳細な分析を試みている。そこでは，Benhabib and Perli（1994）とほとんど同様の手法が用いられているにもかかわらず，彼らが帰結したような非決定性は生じない。なぜなら，持続状態に向かう均衡径路がサドルパス（持続状態に収束する唯一の径路であると結論づけられているからである。

本稿では，次のようにローマー・モデルを拡張する。Romer（1990）では，知識に対する生産関数は規模に関して収穫一定性しかもちえないと想定されていた。それに対し本稿では，知識の生産関数がパラメータの値によって，規模に関して収穫一定にも収穫逓減にもなりうるように設定される。本稿の主な目的は，知識の生産が収穫一定である場合には，ローマー・モデルと同様に内生的成長は可能であるが，収穫逓減性をもつ場合にはそうではないことを示すことにある。

本稿の構成は以下の通りである。まず，第2節で本稿のモデルを概説し，第3節では，その持続的均衡状態に限定した分析を行う。そして第4節では，持続的均衡に向かう成長径路の局所的な安定性を検討する。最後に，第5節では本稿の帰結を述べることとする。

2 モデルの設定

本節では，以降の分析で用いられるモデルの設定を概説する。ここで想定している経済は，研究部門，生産部門，家計の3部門から成る閉鎖経済である。また，この経済には均質な個人の集団が居住し，人口は成長しないものとする。各部門の活動は以下のように要約される。

2.1 研究部門

研究（$R\&D$）部門はデザインを産出（発明）する。デザインの生産には知識の指標，あるいは既存のデザインの総数とみなすことのできるAと人的資本量L_Aが用いられる。ただし，知識またはデザインは非競合財かつ非排除財であるが，人的資本は競合財である。研究部門の生産関数は以下のように表される[1]。

$$\dot{A}(t)=\frac{1}{a}L_A(t)A(t)^{\theta}. \tag{2.1}$$

ここで，aは生産性パラメータの逆数($a>0$)，θは知識の生産にAが貢献するシェアを表し，$0<\theta\leq 1$の範囲にあるものとする。また，Aは時間tに関して区分的に連続微分可能な連続関数と仮定する。デザインには発明された順にインデックスj($0<j<\infty$)が付されており，便宜上，整数制約を排除してjは実数とする。

(2.1)はθの値によって，規模に関する収穫一定あるいは収穫逓減のどちらにもなりうる。つまり，$0<\theta<1$である場合は収穫逓減性をもち，$\theta=1$の場合は収穫一定性をもつ。収穫一定性の仮定は，Romer (1990) 以降のバラエティ拡大モデルにおいて標準的に採用されている[2]。一方収穫逓減性は，例えば，初期のより基本的な発見に比べて後に起こるその応用的な革新の知的貢献がそれほど重要でない場合等では妥当性をもつだろう[3]。

2.2 生産部門

生産部門には中間財企業と最終財企業が存在する。R＆D部門で第j番目に発明されたデザインから，減耗しない生産者耐久財を生産する中間財企業を第j企業と呼ぶことにし，その生産量をx_jと表す。また，生産者耐久財の生産にはデザインの他，1単位の最終財が必要であるとする。第j番目に発明されたデザインから生産される耐久財については，発明者自身が独占的に生産を行うか，または発明者に特許使用料を支払った第j企業が独占的に生産を行う。

最終財部門が生産する最終財の産出量はYで表される。最終財の生産には，人的資本量L_Yと全ての中間財企業の産出$\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$が用いられる[4]。ただし，生産者耐久財は購入するのではなく，レンタル価格

1）本稿では，時間に関する微分は変数にドットを冠することによって表す。
2）ローマー・モデルでの，R＆D部門における生産関数は以下の通りである。

$$\dot{A}(t)=\frac{1}{a}L_A(t)A(t).$$

したがって，$\theta=1$の場合はローマー・モデルのケースと完全に一致する。
3）非線型の知識資本の蓄積については，Grossman and Helpman (1991) を参照。

$p(j)$ で第 j 企業から賃借するものとする。最終財企業の生産関数は以下の通りである。

$$Y(t)=L_Y(t)^{1-\alpha}\int_0^{\infty}x_j(t)^{\alpha}dj=L_Y(t)^{1-\alpha}\int_0^{A}x_j(t)^{\alpha}dj. \tag{2.2}$$

ここで，$0<\alpha<1$ とする。上式で 2 つ目の等号が成り立つのは，$j>A$ のとき $x_j=0$ となるからである。また，上式において x_j は時間 t に関して区分的に連続微分可能な連続関数であることが仮定されている。インデックスの異なる生産者耐久財同士（例えば，$i\neq j$ であるときの x_i と x_j）は，互いに代替財でも補完財でもないものとする。

2.3 家計

消費者の選好については，固定的な異時点間の代替の弾力性をもつ効用関数を想定する。したがって，代表的家計は以下の効用最大化問題を解くものと考えられる。

$$\begin{aligned} max\ U&=\int_0^{\infty}\frac{C(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt,\\ s.t.\ \dot{B}(t)&=w(t)L+r(t)B(t)-C(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで，σ は異時点間の代替の弾力性の逆数を表わし，ρ は主観的割引率，$w(t)$ は賃金率，$B(t)$ は家計が保有する資産の総量をそれぞれ表す。L は全家計のもつ人的資本の総量を表し，人口に比例するものとする。ただし，当モデルでは人口が通時的に一定であると仮定されているので L も一定である。各家計のもつ人的資本は研究部門あるいは生産部門のいずれかで雇用される，つまり $L=L_A(t)+L_Y(t)$ である。また，総消費量 $C(t)$ は最終財の単位によって表され，時間 t に関して区分的に連続微分可能な連続関数であると仮定される。

3 均衡の分析

3.1 主体的均衡

本節では，すべての市場（デザイン市場，中間財市場，最終財市場，労働市場，資本市場）が常にクリア（清算）される均衡が成立していると仮定して分析を行う。

この経済における最終財の産出量 $Y(t)$ は，中間財部門への総投資と総消費に振り分けられる。よって，最終財の単位で表された総投資量を $I(t)$ で表すと以下が成立する。

$$Y(t)=I(t)+C(t). \tag{3.1}$$

このモデルにおける資本ストックに相当するのは，投資量 $I(t)$ を使役することによって生産される生産者耐久財である。したがって，総資本ストック量は今までに産出された生産者耐久財の総量によって測ることができる。総資本ストック量も，総投資や総消費と同じく最終財の単位で表さなくてはならないが，生産者耐久材を 1 単位生産するのに最終財が 1 単位必要であったので，ここでは資本ストック 1 単位に相当する最終財も 1 単位である。よって，総資本ストック量 $K(t)$ は以下のように表わされ

4）一般的な論文において変数 L で表される（未熟練）労働量は，分析に全く影響しないことがRomer (1990) で確認されているので捨象する。

ることになる。

$$K(t)=\int_0^{\infty} x_j(t)dj=\int_0^{A} x_j(t)dj. \tag{3.2}$$

上式では，$K(t)$ は時間 t に関して区分的連続微分可能な連続関数であると仮定されている。また，x_j は減耗しないとされているので，通常は $\dot{K}(t)=I(t)-\delta K(t)$（ここでの δ は減耗率を表わす）であるが，ここでは $I(t)=\dot{K}(t)$ が成立する。よって（3.1）より以下の関係が成り立つ。

$$\dot{K}(t)=Y(t)-C(t). \tag{3.3}$$

企業の行動に関して，最終財企業は以下の予想収益を最大化しようとする。

$$V(t)=\int_t^{\infty}\Pi(\tau)e^{-[R(\tau)-R(t)]}d\tau.$$

上式の $\Pi(t)$ と $R(t)$ は以下で与えられる。

$$\Pi(t)=Y(t)-w(t)L_Y(t)-\int_0^A p_j(t)x_j(t)dj,\quad R(t)\equiv\int_0^t r(\tau)d\tau.$$

ここで，R は時点 0 から t までの累積的な利子因子を表す（r は実質利子率）。割引因子 $e^{-[R(\tau)-R(t)]}$ は単調な減少関数なので $V(t)$ は上限をもつ。このことと，市場が常に清算されていれば異時点間の影響がないことから，任意の時点 τ における利潤フロー $\Pi(\tau)$ が最大となるとき $V(t)$ も最大となるはずである。よって，$V(t)$ の最大化問題は（(2.2) に注意すると）以下のように書き直すことができる。

$$\begin{gathered} max\,\Pi(t)=\int_0^A F(j,\ L_Y(t),\ x_j(t),\ t)dj, \\ F(j,\ L_Y(t),\ x_j(t),\ t)=L_Y(t)^{1-\alpha}x_j(t)^{\alpha}-w_j(t)L_Y(t)-p_j(t)x_j(t). \end{gathered} \tag{3.4}$$

変分法を用いながら上記の問題を解くと，オイラー方程式から以下の賃金率と価格が得られる。また次式以降，時間を表す変数 t を省略する。ただし，必要に応じて t を付すこともありうる。

$$w_j=(1-\alpha)\left(\frac{x_j}{L_Y}\right)^{\alpha},\quad p_j=\alpha\left(\frac{x_j}{L_Y}\right)^{\alpha-1}.$$

一方，生産者耐久財を生産する第 j 企業が最大化しようとする予想収益は以下で表される。

$$v_j(t)=\int_t^{\infty}\pi_j(\tau)e^{-[R(\tau)-R(t)]}d\tau. \tag{3.5}$$

上式の $\pi_j(t)$ は以下によって与えられる。

$$\pi_j(t)=p_jx_j(t)-r(t)k_j(t). \tag{3.6}$$

ここで，R＆D活動に要する費用が 1 であることから，k_j は x_j と K によって，$K(t)=\int_0^A x_j(t)dj=\int_0^A k_j(t)dj$ のように定義される。v_j を最大化するような利潤フローは，上記のオイラー方程式から得られた価格 p_j と $k_j=x_j$ を代入すると以下のように書き直すことができる。

$$\pi_j(t)=\alpha L_Y(t)^{1-\alpha}x_j(t)^{\alpha}-r(t)x_j(t). \tag{3.7}$$

したがって，$\pi_j(t)$ を最大化するための必要条件（一階条件）から，以下のような x_j の生産量を求めることができる。

$$x_j(t)=x(t)=\left(\frac{r(t)}{\alpha^2L_Y(t)^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.8}$$

よって，上記の結果から，すべての中間財企業は同一の生産量を選択することがわかる。この一定量 x を (3.2) に代入すると $K(t)=A(t)x$ が得られ，これをさらに (2.2) に代入すれば最終財の産出は以下のように書き直すことができる。

$$Y=(AL_Y)^{1-\alpha}K^{\alpha}. \tag{3.9}$$

また，$x_j=x$ をオイラー方程式から得られた p_j に代入すると，すべての中間財企業が選択する価格もまた同一になることがわかる。

$$p_j(t)=p(t)=\frac{r(t)}{\alpha}. \tag{3.10}$$

同様に $x_j=x$ をオイラー方程式から得られた w_j に代入すれば，賃金率も $w_j(t)=w(t)$ となる。(3.10) から $r(t)=\alpha p(t)$ の関係が導かれるが，これと $p_j(t)=p(t)$，$x_j(t)=x(t)$ を (3.6) の $\pi_j(t)$ に代入すると各企業の利潤も以下のように等しくなることがわかる。

$$\pi(t)=(1-\alpha)p(t)x(t). \tag{3.11}$$

ところで最終財部門が完全競争であるとすると，労働の限界生産物と賃金が等しいことから，以下が成立する。

$$w(t)L_Y(t)=(1-\alpha)Y(t). \tag{3.12}$$

一方，上記の結果 $p_j(t)=p(t)$，$x_j(t)=x(t)$ を用いると最終財企業の利潤フロー $\Pi(t)$ は以下のように書き直すことができる。

$$\Pi(t)=Y(t)-w(t)L_Y(t)-A(t)p(t)x(t).$$

最終財市場は完全競争であり常に清算されているので，均衡においては，上記の利潤フロー $\Pi(t)$ は結果的に 0 となる。これと (3.12) から以下の関係が得られる。

$$A(t)p(t)x(t)=\alpha Y(t). \tag{3.13}$$

ここで分析を容易にするため，新たに以下のような 3 つの変数を導入する。

$$\chi\equiv\frac{C}{K},\ z\equiv\frac{Y}{K},\ \kappa\equiv\frac{A}{K}. \tag{3.14}$$

上記の z を用いると，(3.10) を変形した $r(t)=\alpha p(t)$ に，(3.13) を代入した結果は次のように表わされる ($K=Ax$ に注意)。

$$r=\alpha^2 z. \tag{3.15}$$

一方，家計の行動に関して，横断性条件が以下の形で与えられているものとする。

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda(t)B(t)=0. \tag{3.16}$$

ここで λ は経常価値乗数を表している。その場合，(2.3) の効用最大化問題の解は $g_C\equiv\frac{\dot{C}}{C}=(r-\rho)/\sigma$ となるが[5]，これと (3.15) から消費に関する以下の成長率が得られる。

$$g_C=\frac{1}{\sigma}(\alpha^2 z-\rho). \tag{3.17}$$

また，(3.3) と (3.14) から次のような関係が成立する。

5）効用最大化問題の解の導出については，Barro and Sala-i-Martin (1995) を参照。

$$g_K=\frac{\dot{K}}{K}=\frac{I}{K}=\frac{Y-C}{K}=z-\chi. \tag{3.18}$$

$$g_\chi=\frac{\dot{\chi}}{\chi}=\frac{\dot{C}K-C\dot{K}}{CK}=g_C-g_K. \tag{3.19}$$

よって，(3.19) に (3.17) と (3.18) を代入すると，以下のような χ に関する成長率が得られる。

$$g_\chi=\chi-\frac{\rho}{\sigma}-\left(1-\frac{\alpha^2}{\sigma}\right)z. \tag{3.20}$$

次に z の成長式を導出する。完全競争と清算条件の下では (3.13) から $px=\alpha Y/A$ が成立するが，これを (3.11) に代入すると次式が得られる。

$$\pi(t)=\alpha(1-\alpha)\frac{Y(t)}{A(t)}. \tag{3.21}$$

したがって，(3.6) の予想収益は以下のように書き直される。

$$v(t)=\int_t^\infty \pi(\tau)e^{-[R(\tau)-R(t)]}d\tau. \tag{3.22}$$

ただし，この場合の $\pi(t)$ は (3.21) によって与えられる。このモデルにおける市場は常に清算されており，よって裁定取引機会[6]の余地が生じないので，$v(t)$ は中間財企業が発明者に支払う特許使用料，あるいは研究企業の価値（株価）と常に一致することになる。したがって，企業の価値の変化はライプニッツの法則を使って (3.22) を微分したものと一致するが，その結果得られる式を整理すると次式が与えられる。

$$\dot{v}(t)+\pi(t)=r(t)v(t). \tag{3.23}$$

上式の両辺を $v(t)$ で割って (3.21) を代入すれば，以下のような v の成長率が導出される。

$$g_v\equiv\frac{\dot{v}}{v}=r(t)-\alpha(1-\alpha)\frac{Y(t)}{A(t)v(t)}. \tag{3.24}$$

研究部門の主体的均衡においては，自由参入条件によって次式が成り立つ。

$$v(t)\dot{A}=wL_A. \tag{3.25}$$

上式の右辺は研究に伴う費用を表し，左辺は $A(t)$（中間財のタイプ）の増加による研究企業の所得を表している。ここで，(3.25) に (2.1) を代入すると次式が得られる。

$$vA=waA^{-(\theta-1)}. \tag{3.26}$$

これを (3.24) に代入すると，v の成長率は $g_v\left(\equiv\frac{\dot{v}}{v}\right)=r(t)-\alpha(1-\alpha)\frac{Y(t)}{waA^{-(\theta-1)}}$ と書き換えられるが，さらに (3.12) と (3.26) を代入すると以下が得られる。

$$g_v=\alpha^2z(t)-\alpha\frac{L_Y(t)}{aA(t)^{-(\theta-1)}}. \tag{3.27}$$

ところで (3.12) と (3.26) から，v は次式のように表すことができる。

$$v=(1-\alpha)\frac{aY(t)}{A(t)^\theta L_Y(t)}. \tag{3.28}$$

一方，(3.9) を変形すると $\frac{Y}{AL_Y}=\left(\frac{K}{AL_Y}\right)^\alpha$ が得られるが，$\left(\frac{K}{AL_Y}\right)^\alpha$ は，$z\equiv\frac{Y}{K}$ に (3.9) を代入し

6）何らの資金をもたず，一切の損失を被ることなく確実な収益があげられる取引を指す。

て変形した $z=\frac{Y}{K}=\left(\frac{K}{AL_Y}\right)^{\alpha-1}$ から $\left(\frac{K}{AL_Y}\right)^{\alpha}=z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ のように表すことができる。以上をまとめると次のようなことがいえる。

$$\frac{Y}{AL_Y}=z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

これを (3.28) に代入すると，v は $v=(1-\alpha)az^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}A^{1-\theta}$ と変形される。この式の両辺の対数をとって微分すれば，成長率に関する以下の関係が得られる。

$$g_v=-\frac{\alpha}{1-\alpha}g_z+(1-\theta)g_A. \tag{3.29}$$

g_A については，(2.1) を変形すると以下の関係式が容易に導かれる。

$$g_A\equiv\frac{\dot{A}}{A}=\frac{1}{a}(L-L_Y)A^{\theta-1}. \tag{3.30}$$

したがって，(3.29) に (3.27) と (3.30) を代入し，g_z について解くと，以下の成長式がもたらされる。

$$g_z=(1-\alpha)\left[\frac{(\alpha+\theta-1)L_Y(t)-(\theta-1)L}{a\alpha}A^{\theta-1}-\alpha z\right]. \tag{3.31}$$

g_{L_Y} については $z\equiv\frac{Y}{K}=\left(\frac{K}{AL_Y}\right)^{\alpha-1}$ の対数をとって微分すれば $g_z=(\alpha-1)(g_K-g_A-g_{L_Y})$ となるので，これを g_{L_Y} について解くと $g_{L_Y}=(1-\alpha)^{-1}g_z+g_K-g_A$ が得られるが，これに(2.1)，(3.18)，(3.31)を代入すると，次のような成長率に関する式が導出される。

$$g_{L_Y}=(1-\alpha)z-\chi+\frac{(2\alpha+\theta-1)L_Y(t)-(\alpha+\theta-1)L}{a\alpha}A^{\theta-1}. \tag{3.32}$$

κ の成長率は，(3.14) の κ の両辺の対数をとって微分すれば $g_\kappa=g_A-g_K$ が得られるので，これに (3.30) と (3.18) を代入すると次の形で与えられる。

$$g_\kappa=\frac{L-L_Y}{a}A^{\theta-1}-(z-\chi) \tag{3.33}$$

以上の議論によって，本稿のモデルの動学を規定する，(3.20)，(3.31)，(3.32)，(3.33)の 4 次元システムが求められたことになる。

3.2 持続的均衡状態の分析

ここで，本稿における持続状態を変数 χ，z，L_Y，κ の成長率が恒常的に 0 となる状態であると定義する。また，各変数の持続状態値を $(\chi^*,\ z^*,\ L_Y^*,\ \kappa^*)$ で表し，κ^* に対応する A の値を A^* とする。それらの持続状態値と A^*，持続状態での成長率 $g_\chi^*=g_z^*=g_{L_Y}^*=g_\kappa^*=0$ を(3.20)，(3.31)，(3.32)，(3.33) に代入して得られる連立方程式を解くことにより，χ，z，L_Y の持続状態値は以下のように与えられる。

$$\chi^*=\frac{L}{a}\left[\frac{\theta-1}{\alpha+\theta-1}+\frac{\alpha\sigma}{(\alpha+\theta-1)(\alpha+\sigma+\theta-1)}\right](A^*)^{2(\theta-1)}$$

$$+\left[\frac{\sigma\frac{L}{a}+\alpha\rho}{\alpha(\alpha+\sigma+\theta-1)}-\frac{L}{a}\right](A^*)^{\theta-1}+\frac{(\alpha+\theta-1)\rho}{\alpha^2(\alpha+\sigma+\theta-1)},$$

$$z^*=\frac{(\alpha+\theta-1)\rho}{\alpha^2(\alpha+\sigma+\theta-1)}+\frac{\sigma\frac{L}{a}}{\alpha(\alpha+\sigma+\theta-1)}(A^*)^{\theta-1},$$

$$L_Y^*=\frac{a\rho}{\alpha+\sigma+\theta-1}+L\left[\frac{\theta-1}{\alpha+\theta-1}+\frac{\alpha\sigma}{(\alpha+\theta-1)(\alpha+\sigma+\theta-1)}\right](A^*)^{\theta-1}.$$

よって χ, z, L_Y の持続状態値は，Aの持続状態値 A^* が一意に与えられれば決定されることになる。また χ^*, z^* が一意に決定されれば，K^* も一意に定まるので κ^* の値も一意に決定される。A^* の値を求めるには，χ^*, z^* を上述の連立方程式に代入して整理した次式を解けばよい。

$$\frac{L}{a}\left[\frac{\theta-1}{\alpha+\theta-1}+\frac{\alpha\sigma}{(\alpha+\theta-1)(\alpha+\sigma+\theta-1)}\right](A^*)^{2(\theta-1)}$$
$$+\left(\frac{\alpha\frac{L}{a}+\rho}{\alpha+\sigma+\theta-1}-\frac{L}{a}\right)(A^*)^{\theta-1}-\frac{\rho}{\sigma}\left(1-\frac{\alpha+\theta-1}{\alpha+\sigma+\theta-1}\right)=0. \tag{3.34}$$

ただし上式は 2 次方程式であるので，解が 2 つ存在する可能性が考えられる。その場合，システムの持続状態は 2 つとなり一意に決定されなくなる。無論，重根や虚数解となることも考えられるので，次に上記の 2 次方程式の判別式を検討することにしよう。

(3.33) の判別式をDとすると，Dは以下のように表される。

$$D=\left(\frac{\alpha\frac{L}{a}+\rho}{\alpha+\sigma+\theta-1}-\frac{L}{a}\right)^2$$
$$+4\frac{L}{a}\cdot\frac{\rho}{\sigma}\left[\frac{\theta-1}{\alpha+\theta-1}+\frac{\alpha\sigma}{(\alpha+\theta-1)(\alpha+\sigma+\theta-1)}\right]\left(1-\frac{\alpha+\theta-1}{\alpha+\sigma+\theta-1}\right).$$

判別式の第 1 項はいうまでもなくプラスである。また第 2 項について，(·) がプラスになるということは，$1-(\alpha+\theta-1)/(\alpha+\sigma+\theta-1)>0$ が成立するということであるが，これは $\sigma\geq 0$ のような簡単な形に変形することができる。

異時点間の代替の弾力性 σ は，その定義から $\sigma>0$ である。よって，上記の条件は常に満たされることになる。次に，第 2 項の [·] がプラスになるためには次の条件が満たされていなければならない。

$$\alpha+\sigma+\theta<1 \tag{3.35}$$

もし上記が満たされていれば，必然的に ($\sigma>0$ から) $\alpha+\theta<1$ となるので，[·] はプラスとなる。したがって判別式Dもプラスとなり，(3.34) は常に 2 つの実数解をもつことになる。しかし，その 2 つの実数解は非負制約を満たすだろうか。ここで，(3.34) の実数解をそれぞれ A_1, A_2 ($A_1<A_2$) と表すことにする。すると (3.34) は次のように書きかえられる。

$$\iota(A-A_1)(A-A_2)=\iota A^2-\iota(A_1+A_2)A+\iota A_1A_2=0,$$
$$\iota=\frac{L}{a}\left[\frac{\theta-1}{\alpha+\theta-1}+\frac{\alpha\sigma}{(\alpha+\theta-1)(\alpha+\sigma+\theta-1)}\right].$$

条件 (3.35) が満たされている場合，(3.34) の $-\frac{\rho}{\sigma}\left(1-\frac{\alpha+\theta-1}{\alpha+\sigma+\theta-1}\right)$ は負値である。また同時に，

(3.35) は上式の ι が正値であることも保証している。もし，A_1，A_2 がともに正であるなら上式の $\iota A_1 A_2$ も正値となるので，これは矛盾である。(A_1，A_2 が，ともに負である場合も同様である。) したがって，A_1，A_2 は互いに異なる符号をもたねばならない。ところが A の値は非負でなくてはならないので，経済的に意味があるのはプラスの値となる解 A_2 のみである。このことは，結局モデルがもちうる持続状態が1つのみであることを示している。(3.35) が満たされないケースについては，まず $\alpha+\sigma+\theta>1$ の場合，D の符号は内生的に決定されない。虚数解や重根となる可能性も含めて，このケースでの持続状態の性質は不明である。次に $\alpha+\sigma+\theta=1$ の場合，(3.35) 内で分母が0となる部分が生じるので，このままでの分析は困難である。

ただし，(3.35) が満たされているとしても A^* は定数であるので，g_A^* は0である。A の持続状態成長率が0であれば，(3.14) の κ の定義から K の持続状態成長率も0である。また $g_K^*=0$ であれば，同じく (3.14) から C や Y の持続状態成長率も0となる。つまりこのモデルでは，内生的成長は起こらないのである。

しかし θ の値に関して $\theta=1$，つまり収穫一定性を仮定すると，そこでの帰結は上述のものとは全く異なったものになる。まず，$\theta-1=0$ をシステム (3.31)，(3.32)，(3.33) に代入すると次のようになる。

$$g_z=(1-\alpha)\left[\frac{L_Y}{a}-\alpha z\right], \tag{3.36}$$

$$gL_Y=(1-\alpha)z-\chi+\frac{2L_Y-L}{a}, \tag{3.37}$$

$$g_\chi=\frac{L-L_Y}{a}-(z-\chi).$$

つまり，システムは A を除いた χ，z，L_Y によって規定できるように変更される。したがってモデルの動学は，A を暗に含む κ を除いた χ，z，L_Y に関する1階微分方程式の自励系によって記述できることになる。このことから，$\theta=1$ のケースにおける動学を規定するシステムは，(3.20)，(3.36)，(3.37) による3次元の体系となることがわかる。

このシステムはArnold (2000) でローマー・モデルの動学を規定するとして示されているものと全く同一である。ここで以前と同様に持続状態を $g_\chi^*=g_z^*=g_{L_Y}^*=0$ と定義し，持続状態値 (χ^*，z^*，L_Y^*) を (3.20)，(3.36)，(3.37) に代入する。そしてその3連立方程式を解くと，以下のような持続状態値が与えられる。

$$\frac{L_Y^*}{a}=\frac{\sigma\frac{L}{a}+\rho}{\alpha+\sigma}=\alpha z^*,\quad \chi^*=(1+\alpha)z^*-\frac{L}{a}. \tag{3.38}$$

$\theta\neq1$ のケースとは異なり，上記の持続状態値は所与のパラメータによって一意に定められている。したがって，このケースにおける持続状態が存在するなら，それはただ1つでしかない。(3.30) は $g_A=\frac{L-L_Y^*}{a}$ となるので，A の成長率も持続状態では一定となる。これに (3.38) の $\frac{L_Y^*}{a}$ を代入すると，g_A は次のように書きかえられる。

$$g_A^* = \frac{\alpha\frac{L}{a} - \rho}{\alpha + \sigma}. \tag{3.39}$$

Cの持続状態における成長率は，(3.17) に (3.38) の $\alpha^2 z^*$ を代入することによって得られる。その結果は (3.39) と同一になるので，$g_A^* = g_C{}^*$ である。また (3.18) に (3.38) の χ^* と z^* を代入して g_K^* を求めると，やはり (3.39) と一致する。したがって $g_A^* = g_C^* = g_K^*$ が成り立つ。Yの持続状態成長率に関しては，(3.9) の両辺の対数をとって微分したものに，$g_{L_Y}^* = 0$ と (3.39) によって与えられる $g_A^* = g_K^*$ の値を代入すると，やはり $g_A^* = g_Y{}^*$ が成り立つ。以上のことから，$\theta = 1$ のケースにおける持続状態は $g_A^* = g_C^* = g_K^* = g_Y^*$ となるような均斉成長となることが明らかとなった。このことはローマー・モデルの著しい特徴であったので，ここでのモデルはローマー・モデルと完全に同型であるといえる。また，各変数の持続状態成長率がプラスの一定値となるので，収穫一定性を仮定すれば内生的成長は可能であることが帰結される。

ただし以上のようなことがいえるためには，次に挙げる 4 つの必要条件が満たされねばならない。

(1) Aの持続状態成長率が $g_A = \frac{L - L_Y^*}{a}$ と表されていたことを考えると，g_A^* の最大値は $\frac{L}{a}$ である[7]。これに非負条件を加えると，g_A には $0 < g_A^* < (L/a)$ の制約が課されることになる。

(2) (2.3) の効用関数Uは有限値に収束しなくてはならない。

(3) 横断性条件 (3.16) が満たされなければならない。

(4) 消費資本比率の持続状態値 χ^* には非負制約が課される。

ここで，パラメータに関する以下の仮定をモデルに課すならば，上記の必要条件はすべて満たされる。

仮定 1 $0 < \rho < \frac{\alpha L}{a}$.

仮定 2 $\sigma > 1 - \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\rho}{\frac{L}{a}}$.

条件(1)の $0 < g_A^*$ に (3.39) を代入すると，仮定 1 と同じ関係が導かれる[8]。

よって仮定 1 は条件(1)を満たす。また条件(2)に関して，持続状態における消費の径路は $C(t) = e^{g^*{}_A t}$ となるので[9]，これを (2.3) に代入して e のベキ数をまとめると，$[g_A^*(1-\sigma) - \rho]t$ となる。このベキ数における t の係数が負となることが，(2.3) の効用関数が有限値に収束するための条件である。これと (3.39) から仮定 2 の式が導出される。よって仮定 2 は条件(2)を満足する。次に，上記の仮定が条件(3)を満たすかどうかを検証する。(2.3) の効用最大化問題に関して，最大値原理を用いた場合の現在価値ハミルトニアンは次式で表される。

$$H = \left(\frac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\right)e^{-\rho t} + \mu(wL + rB - C).$$

---

7) $\frac{L_Y^*}{a} > 0$ は，(3.38) で保証されている。

8) 一方 $g_A^* < \frac{L}{a}$ から $\rho > -\sigma\frac{L}{a}$ という条件が導かれるが，これは ρ の非負条件によって排除される。

9) $g_C^* = g_A^* =$(定数).

ここで $\mu(t)$ は現在価値乗数を表す[10)]。Hの一階条件 $\partial H/\partial C=0$ から $\mu(t)=C(t)^{-\sigma}e^{-\rho t}$ が導かれるが，(3.16) の経常価値乗数 $\lambda(t)$ と μ の間には $\mu(t)=e^{-\rho t}\lambda(t)$ の関係があることから，$\lambda(t)=C(t)^{-\sigma}$ であることがわかる。この λ に関する式の両辺の対数をとって微分すると $g_\lambda=-\sigma g_C$ が得られる。よって，持続状態では $g_\lambda^*=-\sigma g_A^*$ が成立する。また，持続状態における消費の径路は $C(t)=e^{g^*{}_A t}$ であるので $\lambda(t)^*=e^{-\sigma g^*{}_A t}$ である。資産保有量 $B(t)$ は資本ストックと集計化された研究企業の株価の和，すなわち $B\equiv K+Av$ であると考えられるが，v に関しては，(3.29) に $\theta=1$ と $g_z^*=0$ を代入すると $g_v^*=0$ となるので v^* は定数となる。KとAについては，$g_A^*=g_K^*$ であることから，持続状態では $K^*=$(定数)A^* のような比例関係が成立する。これらのことから，資産保有量の持続状態値は $B(t)^*=[$(定数)$+v^*]A^*$ で表される。[(定数)$+v^*$] は定数であるので，$g_A^*=g_B^*$ が成立することになる。よって $B(t)=e^{g^*{}_A t}$ が成立する。これと上記の $\lambda(t)^*=e^{-\sigma g_A{}^* t}$ を (3.16) に代入すると，横断性条件は以下のように書き換えられる。

$$\lim_{t\to\infty} e^{[-\rho+(1-\sigma)g^*{}_A]t}=0.$$

上式が満たされるためには，$-\rho+(1-\sigma)g_A^*<0$ でなければならない。この条件に (3.39) の g_A^* を代入して整理すると，仮定 2 の形に変形することができる。よって仮定 2 は条件(3)も満たす。

最後に，条件(4)，すなわち $\chi^*>0$ は，χ^* に (3.38) を代入して変形すると次のように書きなおすことができる。

$$\sigma>\alpha^2\left[1-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\rho}{\frac{L}{a}}\right].$$

$0<\alpha<1$ であるので，$\alpha^2<1$，$\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}>\dfrac{1+\alpha}{\alpha}$ である。したがって仮定 2 が成り立てば，条件(4)は常に満たされることがわかる。

以上の分析から得られる主な結論は，研究部門の生産性に関してローマー・モデルのような収穫一定性の仮定を緩和して収穫逓減性を導入すると，内生的成長は起こらないということである。一方オリジナルのローマー・モデルにおける仮定を維持，すなわち収穫一定性を仮定すると，持続状態が非常に簡単な形で一意に決定され，内生的成長も可能となるということは上で述べた通りである。この場合，唯一の持続状態へ収束する均衡成長径路の動学分析も収穫逓減のケースに比べて比較的容易であることがArrnold (2000) によって示されている。次節では，Arrnold (2000) の分析に沿った形でそのことを明らかにしていく。

4　均衡の安定性

前節までの結果によって，知識に対する生産関数が規模に関して収穫一定性をもつ場合は，持続状態が一意であることが明らかになった。本節ではそのような持続状態に収束する均衡成長径路が安定であるかどうかを議論する。ただし概要でもふれた通り，本稿における安定性の議論は局所的，すな

10) これに対し (3.16) の $\lambda(t)$ は，経常価値ハミルトニアンに付随する乗数であることに注意

わち持続状態の近傍における分析のみに限られる。ここでは，局所的に，持続的均衡へ向かう径路が一意かつ安定であり，局所的非決定性は生じないことが帰結されるだろう[11]。ここでいう局所的非決定性とは以下のように定義されたものである[12]。

定義 1（局所的非決定性） 均斉成長径路の近傍に均衡の連続体が存在する。

つまり定義 1 に従うなら，持続状態に向かう均衡径路が近傍において一意であれば局所的な非決定性は存在しないということになる。

4.1 移行動学

ここで，ベクトル $\gamma=(\chi,\ z,\ L_Y)'$[13] を導入する。したがって，持続状態値 $(\chi^*,\ z^*,\ L_Y^*)$ に対応するベクトルは γ^* と表される。また，持続状態 γ^* からの乖離を $\tilde{\gamma}$ であらわす。すなわち，$\tilde{\gamma}\equiv\gamma-\gamma^*=(\chi-\chi^*,\ z-z^*,\ L_Y-L_Y^*)'$ である。

この $\tilde{\gamma}$ を用いて，持続状態の近傍におけるシステム (3.20)，(3.36)，(3.37) を線形化する。$\dot{\gamma}=\dot{\chi},\ \dot{z},\ \dot{L}_Y)'$ とすると，(3.20)，(3.36)，(3.37) の連立微分方程式は以下のような行列形式に書きかえられる。

$$\dot{\gamma}=J^*\tilde{\gamma}. \tag{4.1}$$

ここで J^* は 3×3 のヤコビアン（ヤコビ行列）である。次に，このヤコビアンの各要素を求める。ここで $\dot{\chi}=F^1(\gamma)$，$\dot{z}=F^2(\gamma)$，$\dot{L}_Y=F^3(\gamma)$ であるとし，(3.20)，(3.36)，(3.37) に関して持続状態値 $\gamma^*\equiv(\chi^*,\ z^*,\ L_Y^*)'$ の周りでそれぞれ 1 階のテーラー展開を行うと以下が得られる。

$$\dot{\chi}=F^1(\gamma^*)+\frac{\partial}{\partial\chi}F^1(\gamma^*)\cdot(\chi-\chi^*)+\frac{\partial}{\partial z}F^1(\gamma^*)\cdot(z-z^*)+\frac{\partial}{\partial L_Y}F^1(\gamma^*)\cdot(L_Y-L_Y^*)+R_1.$$

$$\dot{z}=F^2(\gamma^*)+\frac{\partial}{\partial\chi}F^2(\gamma^*)\cdot(\chi-\chi^*)\frac{\partial}{\partial z}F^2(\gamma^*)\cdot(z-z^*)+\frac{\partial}{\partial L_Y}F^2(\gamma^*)\cdot(L_Y-L_Y^*)+R_2.$$

$$\dot{L}_Y=F^3(\gamma^*)+\frac{\partial}{\partial\chi}F^3(\gamma^*)\cdot(\chi-\chi^*)+\frac{\partial}{\partial z}F^3(\gamma^*)\cdot(z-z^*)+\frac{\partial}{\partial L_Y}F^3(\gamma^*)\cdot(L_Y-L_Y^*)+R_3.$$

ここで R_1, R_2, R_3 は，それぞれの近似式の剰余項を表す。連立微分方程式の平衡点を持続状態値に対応させると，平衡点の定義より $F^1(\gamma^*)=0$，$F^2(\gamma^*)=0$，$F^3(\gamma^*)=0$ である。また持続状態の近傍における近似であるので，持続状態に経済が近づくほど R_1, R_2, R_3 の値は無視できるほどに小さくなる。これらのことを考慮に入れながら上記のテーラー展開の結果を行列形式に書きかえると，次のようになる。

$$\dot{\gamma}\equiv\begin{pmatrix}\dot{\chi}\\ \dot{z}\\ \dot{L}_Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\chi}F^1(\gamma^*) & \frac{\partial}{\partial z}F^1(\gamma^*) & \frac{\partial}{\partial L_Y}F^1(\gamma^*)\\ \frac{\partial}{\partial\chi}F^2(\gamma^*) & \frac{\partial}{\partial z}F^2(\gamma^*) & \frac{\partial}{\partial L_Y}F^2(\gamma^*)\\ \frac{\partial}{\partial\chi}F^3(\gamma^*) & \frac{\partial}{\partial z}F^3(\gamma^*) & \frac{\partial}{\partial L_Y}F^3(\gamma^*)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi-\chi^*\\ z-z^*\\ L_Y-L_Y^*\end{pmatrix}=J^*\tilde{\gamma}$$

---

11) Arrnold (2000) では大域的な非決定性も生じないと述べられている。しかし大域的非決定性の定義も含め，明確でない部分が多いのでここでは取り上げていない。
12) 非決定性に関する定義の詳細な説明については，Benhabib and Perli [1994] を参照せよ。
13) ′記号は転置行列を表す。

$F^1(\gamma^*)$, $F^2(\gamma^*)$, $F^3(\gamma^*)$ の偏導関数については，(3.20)，(3.36)，(3.37) から実際に計算することができる。その結果，J^* は以下のように表される[14]。

$$J^*=\begin{pmatrix} \chi^* & -\left(1-\dfrac{\alpha^2}{\sigma}\right)\chi^* & 0 \\ 0 & -\alpha(1-\alpha)z^* & (1-\alpha)\dfrac{z^*}{a} \\ -L_Y^* & (1-\alpha)L_Y^* & 2\dfrac{L_Y^*}{a} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

また，ヤコビアン J^* の固有値を求めるための特性方程式は次式となる。

$$0=(J^*-qI)=-q^3+TrJ^*\cdot q^2-BJ^*\cdot q+DetJ^*=f(q). \tag{4.3}$$

ここで TrJ^* は J^* のトレース，$DetJ^*$ は J^* の行列式，q は固有値を表す。また BJ^* は以下の式によって与えられる。

$$BJ^*\equiv\begin{vmatrix} \chi^* & -\left(1-\dfrac{\alpha^2}{\sigma}\right)\chi^* \\ 0 & -\alpha(1-\alpha)z^* \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha(1-\alpha)z^* & (1-\alpha)\dfrac{z^*}{a} \\ (1-\alpha)L_Y^* & 2\dfrac{L^*{}_Y}{a} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \chi^* & 0 \\ -L_Y^* & 2\dfrac{L_Y^*}{a} \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

上式から BJ^* は J^* の第33余因子，第11余因子，第22余因子の和であることがわかる。

以上によってモデルの移行動学を分析する準備が整った。なぜなら (4.3) における特性方程式 $f(q)$ の解がヤコビアン J^* の固有値であり，J^* の固有値から，持続状態 (χ^*, z^*, L_Y^*) に向かって収束する径路，もしくは持続状態から乖離して発散する径路のいずれかが得られるからである。それぞれの固有値が収束する径路に対応するか発散する径路に対応するかは，固有値のもつ符号によって決まる。すなわち，固有値が負であれば持続状態へ近づく径路に対応し，正であれば乖離する径路に対応することになる。そのうち前者が安定な径路と呼ばれる。よって $f(q)$ の解を得ることができれば，移行動学の特性を知ることができるのである。

ところで以下の条件が満たされているとき，$f(q)$ は負の実数根1つと実数部が正である2つの根 (共役複素数) をもつことになる。

$$TrJ^*>0>DetJ_*. \tag{4.5}$$

このことは $f(q)$ の図的な形状を考えることで明らかにすることができる[15]。$f'(q)=-3q^2+2TrJ^*\cdot q-BJ^*=0$ の解を (q_-, q_+) とすると[16]，$f'(q)$ は $f'(q)=-(q-q_-)(q-q_+)=0$ のように書き直すことができる。したがって，q が q_- より小さければ $f'(q)$ はマイナスとなり，q が q_- と q_+ の間にあれば $f'(q)$ はプラス，q が q_+ より大きければ $f'(q)$ は再びマイナスとなる。このことから，q を横軸，$f(q)$ の値を縦軸にとって曲線 $f(q)$ を図示すると，曲線 $f(q)$ は区間 $(-\infty, q_-)$ では右下がりに下降するが，(q_-, q_+) では右上がりに転じ，$(q_+, +\infty)$ では再び右下がりとなるような形状となることがわかる。

---

14) (4.2) は，持続状態における各変数の成長率 g_χ^*，g_z^*，$g_{L_Y}^*$ が全て0になることも利用していることに注意。

15) Arrnold (2000) では，*Rowth-Hurwitz* の定理を用いて (4.5) を証明している。また同時に，本稿で用いたような図的な証明もRemarkとして紹介されている。いずれの証明方法を用いても結果は同じであるので，本稿ではより直感的な方を採用した。

16) 2次方程式の解の公式によって，以下のような2つの解 (q_-, q_+) が実際に求められる。

$$q_{+/-}=(TrJ^*\pm\sqrt{(trJ^*)^2-3BJ^*})/3.$$

一方 $f(q)$ の値に関して，(4.3) に $q=0$ を代入すると $f(0)=DetJ^*$ となるが，条件 (4.5) が満たされれば $f(0)<0$ が成り立つ。また $f''(q)=-6q+2TrJ^*=0$ の解 $q=TrJ^*/^3$, すなわち曲線 $f(q)$ の変曲点についても，条件(4.5)が満たされるならば $q=TrJ^*/3>0$ となることは明らかである。したがって，そのような性質を満たす曲線 $f(q)$ を実際に図示してみれば，$f(q)$ が横軸と交わるときの q の値は必ず負値となることが確かめられるだろう。このことは，方程式 $f(q)=0$ が負の実数根を必ず1つはもつ，ということを示している(以下，この根を $q_0<0$ と表記する)。しかし3次方程式 $f(q)$ の，残りの2つの根(以下，これらの根を q_1，q_2 とする)については，必ず実数になるとはいえない。なぜなら，曲線 f(q) と横軸との交点が1つしかなくても，上記のような曲線 $f(q)$ の性質が満たされることがあるからである。ただし残りの2根 q_1，q_2 が複素数になったとしても，その実数部が必ずプラスになることは明らかである。なぜなら，q_1 と q_2 が負の実数部をもつ共役複素数であるとすると[17] $q_1+q_2<0$ となり，$q_0<0$ と合わせて考えると，$q_0+q_1+q_2<0$ ということになる。一方，解 (q_0，q_1，q_2) を用いると $f(q)$ は以下のように書きかえることができる。

$$
\begin{aligned}
f(q)&=-(q-q_0)(q-q_1)(q-q_2)\\
&=q^3+(q_0+q_1+q_2)q^2-(q_0q_1+q_0q_2+q_1q_2)q+q_0q_1q_2\\
&=0.
\end{aligned}
$$

これと (4.3) を比較すれば，$TrJ^*=q_0+q_1+q_2$ であることがわかる。ところが q_1 と q_2 が負の実数部をもつ共役複素数である場合は，$q_0+q_1+q_2<0$ であったので，このことは $TrJ^*>0$ を仮定する条件 (4.5) と矛盾する。以上によって，条件 (4.5) が満たされるならば，$f(q)$ の3つの解は，負の実数1つと正の実数部をもつ2つの複素数 (共役複素数) となることが判明した。

次に，モデルに対して条件 (4.5) を課すことが経済学的にも妥当であるかを検討しよう。

(4.2)からヤコビアンのトレースを実際に計算すると $TrJ^*=\chi^*-\alpha(1-\alpha)z^*+2\dfrac{L_Y^*}{a}$ となるが，これに (3.38) の χ^*，z^* を代入すると，条件 (4.5) における $TrJ^*>0$ は以下のように書きかえられる。

$$TrJ^*=\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha^2}\frac{\sigma\dfrac{L}{a}+\rho}{\alpha+\sigma}-\frac{L}{a}>0.$$

上式を変形すると，次のような σ に関する条件が導き出される。

$$\sigma>\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha+1}\left[1-\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^2\frac{\rho}{\dfrac{L}{a}}\right]. \tag{4.6}$$

$0<\alpha<1$ より $0<\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha+1}<1$ であるので，前節の仮定2が満たされていれば条件 (4.6) は常に満たされることがわかる。一方，(4.2) から行列式 $DetJ^*$ を実際に計算すると以下のようになる。

$$DetJ^*=-\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\sigma}\right)(1-\alpha)\chi^*z^*\frac{L_Y^*}{a}. \tag{4.7}$$

17) q_0 が解の1つであれば，(4.3)は $f(q)=-(q-q_0)(q^2-\zeta q+v)=0$ と書きかえられる。ここで ζ と v は正の定数である。そうすると q^1 と q^2 は $q^2-\zeta q+v=0$ の解ということになるので，共役複素数にしかなりえないことに注意。

$a>0$, $\left(1+\frac{\alpha}{\sigma}\right)>0$, $(1-\alpha)>0$, $\chi^*\cdot z^*\cdot\frac{L_Y^*}{a}>0$ であるので，(4.7)は常に負，すなわち $DetJ^*<0$ となる。したがって条件（4.5）の $DetJ^*<0$ は，（4.2）に関して常に成立することがわかる。以上の分析から，条件(4.5)が満たされるために必要なものは前節の仮定2のみであることがわかった。よって仮定2が妥当性をもつならば，条件（4.5）をモデルに課すことも妥当といえるだろう。

4.2 安定性の判定

以上の分析によってヤコビアン(4.2)の固有値 q_0, q_1, q_2 が求められた。それらを用いると，(4.1)の一般解は以下のような3次元体系として表すことができる。

$$\tilde{\gamma}(t)=C_0e^{q_0t}h_0+C_1e^{q_1t}h_1+C_2e^{q_2t}h_2. \tag{4.8}$$

ここで C_1, C_1, C_2 は任意定数であり，h_0, h_1, h_2 は固有ベクトルを表す。もし初期値を $C_1=C_2=0$ となるように適当に選択したとすると[18]，(4.8) は以下のように書きかえられる。

$$\tilde{\gamma}(t)=C_0e^{q_0t}h_0. \tag{4.9}$$

$q_0<0$ であるので，$\tilde{\gamma}(t)=\gamma-\gamma^*$ は t が大きくなるにつれてしだいに0に近づいていくことがわかる。つまり，$\gamma(0)$から出発する $\gamma(t)$ の径路は，$(\chi,\ z,\ L_Y)$ 空間上で，持続状態を示す点 γ^* に向かって単調に近づいていく径路となる。一方，$C_0=C_2=0$ となるような初期値を選択すると（4.8）は $\tilde{\gamma}(t)=C_1e^{q_1t}h_1$ となるが，q_1 は正の実数部をもつ複素数であるので[19]，$\gamma(t)$ の径路は γ^* から渦巻き状に回転しながら発散していくような径路となることがわかる。$C_0=C_1=0$ のケースも，回転の方向は逆になるものの同様に発散していくような径路となる。C_0, C_1, C_2 が，ともに0にならないように初期値を選択した場合については，上記の議論を考慮に入れると，やはり $\gamma(t)$ の径路は発散していくことがわかる。したがって γ^* に収束する，すなわち安定な径路は，(4.9)の径路のみであることがわかる。このような唯一の安定径路はサドルパスと呼ばれ，その径路が収束していく持続状態を示す点はサドルポイントと呼ばれる。

以上の議論によって，このシステムでは，持続的均衡状態に収束する成長経路が一意かつ安定であることが帰結された。

4.3 初期値の決定

ここでは，歴史的に与えられた初期値 $A(0)$, $K(0)$ から出発する経済が (4.9) で表されるサドルパスに沿って成長するかどうかを検証する。そのために，まず初期値 $\tilde{\gamma}(0)$ の性質を調べることにしよう。γ の要素$(\chi,\ z,\ L_Y)$ はすべてコントロール変数であるので，(4.8) で $C_1=C_2=0$ となるように適当な γ の初期値を選択することは可能である。初期値がそのように選択されれば，経済がたどる径

18) 初期値の決定については，次の小節で詳しく述べることとする。
19) Arnold (2000) では，q_1, q_2 も実数根となるための条件として次式が挙げられている。

$$(TrJ^*)^2>3BJ^*\ and\ \bar{f}(\bar{q}_+)>0.$$

ここで $\bar{q}\equiv q/(L/a)$, $\bar{f}(\bar{q})\equiv\bar{f}(\bar{q})/(L/a)^3$ であり，q_+ は $f(q)$ が極大となるときの q を表す。
しかし(4.5)等とは異なり，上述の条件に関する妥当性は，十分理論的に示されているとはいえない。また q_1, q_2 が実数でないとしても，安定性に関する議論における結論に大きな差は生じない。よって本稿では，この辺りに関する記述は採用しなかった。

路がサドルパス(4.8)になることは上で述べた。その場合，持続状態 γ^* と $\gamma(t)$ の乖離を表す $\tilde{\gamma}(t)$ の初期値 $\tilde{\gamma}(0)$ は次のように表される。

$$\tilde{\gamma}(0)=C_0h_0. \tag{4.10}$$

上式によって表される初期値を一意に決定するためには，固有ベクトル h_0 を求めなくてはならない。固有ベクトルの定義から $(J^*-q_0I)h_0=0$ であるので，この方程式を解くことによって h_0 は求めることができる。(ここで I は3×3の単位行列を表す。) $h_0=(\tilde{\chi}(0),\ \tilde{z}(0),\ \tilde{L}_Y(0))'$ として，$(J^*-q_0I)h_0=0$ を展開し，連立方程式の形に書き改めると以下のようになる。

$$(\chi^*-q_0)\tilde{\chi}(0)-\left(1-\frac{\alpha^2}{\sigma}\right)\chi^*\tilde{z}(0)=0, \tag{4.11}$$

$$-[\alpha(1-\alpha)z^*+q_0]\tilde{z}(0)+(1-\alpha)\frac{z^*}{a}\tilde{L}_Y(0)=0, \tag{4.12}$$

$$-L_Y^*\tilde{\chi}(0)+(1-\alpha)L_Y^*\tilde{z}(0)+\left(2\frac{L_Y^*}{a}-q_0\right)\tilde{L}_Y(0)=0. \tag{4.13}$$

上記3つの方程式を同時に満たす $(\tilde{\chi}(0),\ \tilde{z}(0),\ \tilde{L}_Y(0))$ が固有ベクトル h_0 の要素となり，それらが得られれば初期値 $\tilde{\gamma}(0)$ も一意に決定される。ところで（4.11）から次の関係が成り立つ。

$$\frac{\tilde{\chi}(0)}{\tilde{z}(0)}=\frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{\sigma}\right)\chi^*}{\chi^*-q_0}. \tag{4.14}$$

また同様に，（4.12）から次式も成立する。

$$\frac{\tilde{z}(0)}{\tilde{L}_Y(0)}=\frac{(1-\alpha)\frac{z^*}{a}}{\alpha(1-\alpha)z^*+q_0}\equiv\beta. \tag{4.15}$$

ここで $\varDelta\equiv\frac{A(0)}{K(0)}-\frac{A^*}{K^*}$ とし，(3.9) から得られる $z\equiv\frac{Y}{K}=\left(\frac{AL_Y}{K}\right)^{1-\alpha}$ を (4.15) に代入して整理すると，以下のような関係が導出される。

$$\left[\left(\varDelta+\frac{A^*}{K^*}\right)L_Y\right]^{1-\alpha}-\beta L_Y(0)=z^*-\beta L_Y^*. \tag{4.16}$$

したがって，歴史的に所与の値 $A(0)$，$K(0)$ が与えられると $\varDelta$ が決定され，$\varDelta$ が与えられれば(4.16)から $L_Y(0)$ が一意に決定される。$L_Y(0)$ は $\tilde{L}_Y(0)$ の値を決定し，その $\tilde{L}_Y(0)$ を(4.15)に代入すれば，$\tilde{z}(0)$ が得られる。また $\tilde{z}(0)$ が与えられれば，(4.14)から $\tilde{\chi}(0)$ も求めることができる。このことは，$A(0)$，$K(0)$ の値が歴史的に与えられれば固有ベクトル h_0 が決定され，それによって（4.10）で表される初期値 $\tilde{\gamma}(0)$ が得られ，$\tilde{\gamma}(0)$ によってサドルパス上の初期値 $\gamma(0)=C_0h_0-\gamma^*$ が一意に決定されるということを示している。初期値がサドルパス上に位置している以上，経済が通時的にたどる径路は当然（4.9）で表されるサドルパスになる[20]。

上記の議論で (4.13) は用いられてないが，(4.13) の両辺を $\tilde{z}(0)$ で割ったものに (4.14) と (4.15)

---

20) このように決定される初期値によって与えられる径路が，成長率や各経済変量の非負条件を満たすための条件としてArnold (2000) では以下のような条件が挙げられている。

$$q_0+\alpha(1-\alpha)z^*>0 \ and\ 1-\left[\frac{\alpha^2}{\sigma}\right]>0 \tag{4.17}$$

しかし脚注19と同様，十分な理論的根拠が示されているとはいえないので，ここでは採用しなかった。

を代入して整理すると，固有値を求めるための特性方程式(4.3)と同じ形になることがわかる。(4.3)との違いは，q に相当する変数がここでは q_0 になっているということだけである。q_0 は (4.3) の解であるので，(4.3) と同じ形に変形された (4.13) が常に成立するのは当然である。よってこの式は無視してよいことがわかる。

5　おわりに

本稿では，知識に対する生産関数が，規模に関して収穫一定性あるいは逓減性のいずれかをもちうるようにローマー・モデルを拡張した。ここでは，収穫逓減性をもつようなモデルでは内生的成長は生じえないことが明らかになった。一方，収穫一定性をもつような経済では内生的成長が可能であることも示されたが，これらのことはローマー・モデルに関する先行の論文と同様の結果であり，Romer (1990)においても，収穫逓減のケースで内生的成長が起こらないことは暗に述べられている。しかし，Romer (1990) の議論は叙述的なものであって，厳密性に欠ける点は否めない。そのような意味で，本稿はRomer (1990) を補完している。また，収穫一定性を仮定した場合には，持続状態均衡へ向かう成長径路がサドルパスとなることも示された。それに対してBarro and Sala-i-Martin (1995) はローマー・モデルが移行動学をもたないことを主張している。またGrossman and Helpman (1991) では，すべての均衡径路が発散する，すなわち不安定であることが結論づけられている。実際には，それぞれが生産部門の設定において異なる生産関数を仮定しているので，そのことが安定性に関する各々の結論を導いているものと思われる。しかしその詳しい分析は，今後の課題として残される。

参考文献

(1) Aghion, P. and P. Howitt, "A Model of Growth through Creative Destruction," *Econometrica,* 60(1992), 323-351.

(2) Aghion, P. and P. Howitt, *Endogenous Growth Theory,* The MIT Press, 1998.

(3) Arnold, L. G., "Stability of the Market Equilibrium in Romer's Model of Endogenous Technoligical Change: A Complete Characterization," *Journal of Macroeconomics,* 22 (2000), 69-84.

(4) Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin, *Economic Growth,* McGraw-Hill, 1995. (大住圭介訳『内生的経済成長論 I，II』九州大学出版会，1997，1998.)

(5) Benhabib, J. and R. Perli, "Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth," *Journal of Economic Theory,* 63 (1994), 113-142.

(6) Grossman, G. M. and E. Helpman, *Inovation and Growth in the Global Economy,* The MIT Press, 1991. (大住圭介監訳『イノベーションと内生的経済成長』創文社，1998.)

(7) Romer, P. M., "Endogenous Technological Change," *Journal of Political Economy,* 98 (1990), s71-s102.

(8) 足立英之『マクロ動学の理論』有斐閣，平成8年.

(9) 斉藤誠『新しいマクロ経済学』有斐閣，平成8年.

(10) 脇田成『マクロ経済学のパースペクティブ』日本経済新聞社，平成10年.