二部門内生的成長モデルにおける長期均衡経路の非決定性

山根, 雄二郎

https://doi.org/10.15017/3000260

出版情報：経済論究. 108, pp.127-139, 2000-11-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

二部門内生的成長モデルにおける長期均衡経路の非決定性

山　根　雄二郎

1　はじめに

「アジアの奇跡」といわれるように，戦後のアジア諸国，特にNIESやASEAN諸国の経済成長にはめざましいものがある。これらの国々の経済的な水準は最近さまざまな混乱があるとはいえ，先進諸国の水準に急速に近づいてきている。けれどもアジア諸国，とりわけ東南アジア諸国の動向を詳しくみてみると，一方では高い経済成長を遂げている国もあれば，他方で経済が停滞している国もある。しかし，これらの国々は50年前の第二次世界大戦直後においては，その1人当たりでの国民所得の水準はほぼ同一であった。それが50年の期間を経て，なぜその水準に大きな差が生じたのであろうか。本稿の問題意識はここにある。

Benhabib and Perli (1994) においては，上述の各国の成長経験が異なることを次のように考えている。すなわち，各国は同一の均斉成長経路 (Balanced Growth Path [BGP]) に収束するけれども，均斉成長経路に向かう長期均衡経路が国ごとに違い，均斉成長経路に向かうなかで各国の経済的な水準に大きな差がみられるということである。このように均斉成長経路に向かう長期均衡経路が複数存在するような状態を，長期均衡経路の非決定性 (Indeterminacy of Equilibria) という。本稿では長期均衡経路が複数現れる仕組み(すなわち，長期均衡経路の非決定性が生ずるメカニズム)，または長期均衡経路が1つしか現れない仕組みを明らかにし，それぞれの状態での均斉成長経路の安定性を検討する。

本稿では二部門内生的成長モデルを用いて，分析を進めている。二部門モデルに経済成長を関連させて議論を行っている文献として，Uzawa (1965), Lucas (1988), Caballé and Santos (1993), Mulligan and Sala-i-Martin (1993), Mino (1996), Bond, Wang and Yip (1996) があげられる。本稿のモデルは，Lucas (1988), Caballé and Santos (1993) にその多くを負っている。また長期均衡経路の非決定性を取り扱った先行研究として，Benhabib and Farmer (1994), Benhabib and Perli (1994) がある。特にBenhabib and Perli (1994) は最終財生産において人的資本の外部性を考慮したことを，その特徴としている。

本稿の構成は以下の通りである。第2節ではモデルを設定する。第3節では均斉成長経路を定義する。さらに均斉成長経路が一意に定まるパラメータ空間を導出する。第4節では長期均衡経路が1つのみ現れる，または複数現れるメカニズムを明らかにする。その際あわせて均斉成長経路の安定性を検討する。最後に第5節では本稿の要約を行うことにする。

2　モデルの構成

本稿で想定している経済は，家計部門，最終財部門，教育部門の3つの部門から構成されている。各部門の活動は以下のように要約される。

［1］ 家計部門

すべての家計は同一の選好を持つと仮定する。また家計は消費者と生産者の2つの側面を兼ねた家計生産者（household producer）であるとする。このとき，代表的家計の通時的効用関数は次のように設定される。

$$U=\int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt. \tag{1}$$

$c(t)$ は時点 t においての1人当たりの消費を，ρ は主観的割引率を表している。そして σ は異時点間代替弾力性の逆数を示し，$0<\sigma<1$ とする。また代表的家計は最終財部門と教育部門に労働を供給する。ここで，代表的家計の供給する労働は労働時間で表し，最終財部門と教育部門にそれぞれ u，$1-u$ の割合で配分することとする。本稿のモデルでは，人口は成長しないものとする。

［2］ 最終財部門

最終財部門の1人当たりの生産関数は次のように設定される。

$$F(k,\ h)=Ak^\beta(uh)^{1-\beta}h_a^\gamma. \tag{2}$$

k は1人当たりの物的資本ストックを，h は1人当たりの人的資本ストックを示している。また β は資本分配率を，A は技術パラメータを表し，$A>0$ と仮定する。最終財は消費と投資の双方に利用することができる。さらに h_a は人的資本の平均水準を表し，次のように定式化されている。

$$h_a=\frac{\int_0^\infty hN(h)dh}{\int_0^\infty N(h)dh}. \tag{3}$$

h は労働者の人的資本の水準を，$N(h)$ は人的資本の水準が h である労働者数を表している。水準 h の範囲は $[0,\ \infty)$ である。このことは労働者には人的資本の水準がゼロである不熟練労働者から，人的資本の水準が非常に高い（すなわち，人的資本の水準が無限大に近い）熟練労働者までいることを示している。また γ は人的資本がもたらす外部効果を示している。

［3］ 教育部門（人的資本生産部門）

教育部門の1人当たりの生産関数は次のように設定される。

$$G(h)=\delta h(1-u). \tag{4}$$

δ は技術パラメータを表し，$\delta>0$ と仮定する。また本稿のモデルでは物的資本，人的資本の双方とも減耗しないと仮定する。よって，物的資本，人的資本の動学方程式は次の形になる。

$$\dot{k}=Ak^\beta h^{1-\beta}h_a^\gamma-c, \tag{5}$$

$$\dot{h}=\delta h(1-u). \tag{6}$$

c は任意の時点 t においての1人当たりの消費 $c(t)$ を表している[1]。次に家計の行動をみていくこ

とにする。家計には歴史的与件として初期時点に次のような資本ストックが与えられている。

$$k(0)=k_0>0,\ \ h(0)=h_0>0. \tag{7}$$

ここで，各時間経路の定義を与える。まず実行可能経路を考える。実行可能経路は以下の条件を満たす経路 $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $u(t)$ である。

(1) 関数 $c(t)$, $u(t)$ は時間 t に関して区分的連続関数である。

(2) 関数 $k(t)$, $h(t)$ は時間 t に関して区分的に連続微分可能な連続関数である。

(3) 任意の時点 $t\in[0,\ \infty)$ において次のことが成立している。

$$\dot{k}(t)=Ak(t)^{\beta}(u[t]h[t])^{1-\beta}h_a(t)^{\gamma}-c(t),\ \ \dot{h}(t)=\delta h(t)(1-u[t]).$$

次に長期均衡経路を定義する。長期均衡経路とは次の条件を満たす経路 $\hat{k}(t)$, $\hat{h}(t)$, $\hat{c}(t)$, $\hat{u}(t)$ である。

(1) 歴史的与件 $(k_0,\ h_0)$ から出発する実行可能経路の集合に含まれる。

(2) 評価関数は最大化される。

すなわち，長期均衡経路 $\hat{k}(t)$, $\hat{h}(t)$, $\hat{c}(t)$, $\hat{u}(t)$ 上にある家計の通時的効用は，歴史的与件 $(k_0,\ h_0)$ から出発する任意の実行可能経路 $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $u(t)$ 上の家計の通時的効用を上回っている。つまり，任意の実行可能経路 $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $u(t)$ に対して，次式が成立している。

$$\int_0^{\infty}\frac{\hat{c}(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt\geq\int_0^{\infty}\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt.$$

実行可能経路と長期均衡経路の定義を用いて，家計の行動は次のようにいえる。家計は外部性の経路が所与の経路 $h_a(t)$ に従うと予想し，かつ歴史的与件が与えられたもとで，自らが位置する経済発展経路が長期均衡経路に一致するように，時間経路 $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $u(t)$ を決定する。また家計の通時的効用関数に関連させると，上記の家計の行動は以下のように言い換えられる。つまり，家計は歴史的与件と所与の外部性の経路，状態変数の動学方程式を制約条件として，通時的効用を最大にするように各変数の時間経路を選択する。よって，家計の最大化問題は次のようになる。

$$Max\int_0^{\infty}\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt, \tag{8}$$

subject to

$$\begin{aligned}\dot{k}&=Ak^{\beta}(uh)^{1-\beta}h_a^{\gamma}-c,\\ \dot{h}&=\delta h(1-u),\\ k(0)&=k_0>0,\\ h(0)&=h_0>0,\\ h_a(t)&:given.\end{aligned}$$

次に家計の最適化問題を解くことにする。カレント・バリュー・ハミルトン関数は次のようになる。

$$\tilde{H}(c,\ k,\ h,\ u,\ t)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}+\lambda_1(Ak^{\beta}[uh]^{1-\beta}h_a^{\gamma}-c)+\lambda_2(\delta h[1-u]). \tag{9}$$

よって，一階条件が以下の形で得られる。

1）以後特に注意のない限り，c は $c(t)$ を示している。また $c(t)$ も必要に応じて利用する。他の変数 k，h などについても同様である。

$$c^{-\sigma}=\lambda_1, \tag{10}$$

$$A(1-\beta)\lambda_1 k^{\beta}h^{1-\beta}h_a^{\gamma}u^{-\beta}=\lambda_2\delta h, \tag{11}$$

$$\dot{\lambda}_1=\rho\lambda_1-\lambda_1 A\beta k^{\beta-1}h^{1-\beta}h_a^{\gamma}u^{1-\beta}, \tag{12}$$

$$\dot{\lambda}_2=\rho\lambda_2-A(1-\beta)\lambda_1 k^{\beta}h^{-\beta}h_a^{\gamma}u^{1-\beta}-\lambda_2\delta(1-u). \tag{13}$$

外部性が存在するモデルの場合，最適化問題から導出された時間経路 $h(t)$ が所与の外部性の経路 $h_a(t)$ に一致したときに $(h(t)=h_a(t))$，各変数の時間経路 $k(t)$，$h(t)$，$c(t)$，$u(t)$ は長期均衡経路となる。ここで，条件 $h(t)=h_a(t)$ を一致条件（consistency condition）という。

家計が位置する経済発展経路が長期均衡経路であるならば，以下の条件が満たされる。

(A)　$k(0)=k_0>0$，$h(0)=h_a>0$,

(B)　$c^{-\sigma}=\lambda_1$,

(C)　$A(1-\beta)\lambda_1 k^{\beta}h^{1-\beta+\gamma}u^{-\beta}=\lambda_2\delta h$,

(D)　$\dot{\lambda}_1=\rho\lambda_1-\lambda_1 A\beta k^{\beta-1}h^{1-\beta+\gamma}u^{1-\beta}$,

(E)　$\dot{\lambda}_2=\rho\lambda_2-A(1-\beta)\lambda_1 k^{\beta}h^{-\beta+\gamma}u^{1-\beta}-\lambda_2\delta(1-u)$,

(F)　$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda_1(t)k(t)=0$，$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda_2(t)h(t)=0$.

(B)から(E)までの条件より，次の 4 つの動学方程式が導かれる。

$$\dot{k}=Ak^{\beta}h^{1-\beta+\gamma}u^{1-\beta}-c,$$

$$\dot{h}=\delta h(1-u),$$

$$\dot{c}=\frac{A\beta}{\sigma}k^{\beta-1}h^{1-\beta+\gamma}u^{1-\beta}c-\frac{\rho}{\sigma}c,$$

$$\dot{u}=\frac{\delta(\beta-\gamma)}{\beta}u^2+\frac{\delta(1-\beta+\gamma)}{\beta}u-\frac{c}{k}u.$$

これらの動学方程式は，長期均衡経路上においての均斉成長経路に向かう各変数の挙動を示している。したがって，長期均衡経路は以下の形で得られる。

$$k(0)=k_0>0,\quad h(0)=h_0>0, \tag{14}$$

$$\dot{k}=Ak^{\beta}h^{1-\beta+\gamma}u^{1-\beta}-c, \tag{15}$$

$$\dot{h}=\delta h(1-u), \tag{16}$$

$$\dot{c}=\frac{A\beta}{\sigma}k^{\beta-1}h^{1-\beta+\gamma}u^{1-\beta}c-\frac{\rho}{\sigma}c, \tag{17}$$

$$\dot{u}=\frac{\delta(\beta-\gamma)}{\beta}u^2+\frac{\delta(1-\beta+\gamma)}{\beta}u-\frac{c}{k}u, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda_1(t)k(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda_2(t)k(t)=0. \tag{19}$$

上記の式(15)，(16)，(17)，(18)から，本稿のモデルの長期均衡経路は四次元の微分方程式系で与えられることがわかる。

3　均斉成長経路の定義とその条件

まず均斉成長経路(BGP)を定義する。均斉成長経路とは次の条件を満たす経路 $k^*(t)$, $h^*(t)$, $c^*(t)$, $u^*(t)$ である。

(1) 均斉成長経路 $k^*(t)$, $h^*(t)$, $c^*(t)$, $u^*(t)$ は，初期条件 $(k^*(0),\ h^*(0))$ から出発する実行可能経路の集合に含まれる。よって，この経路上では以下の条件が成立している。

(a) 関数 $c^*(t)$, $u^*(t)$ は時間 t に関して区分的連続関数である。

(b) 関数 $k^*(t)$, $h^*(t)$ は時間 t に関して区分的に連続微分可能な連続関数である。

(c) 任意の時点 $t\in[0,\ \infty)$ において次式が成立する。

$$\dot{k}(t)=Ak(t)^{\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta}-c(t),$$
$$\dot{h}(t)=\delta h(t)(1-u[t]).$$

(2) 評価関数が最大化される。

すなわち，均斉成長経路 $k^*(t)$, $h^*(t)$, $c^*(t)$, $u^*(t)$ 上の家計の通時的効用は，任意の実行可能経路 $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $u(t)$ 上の家計の通時的効用を上回っている。つまり，任意の実行可能経路 $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $u(t)$ に対して，次式が成立している。

$$\int_0^{\infty}\frac{c^*(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt\geq\int_0^{\infty}\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt.$$

(3) 各変数の成長率は一定になる。

本稿のモデルでは，BGPにおいての各変数の成長率を次のように定義する。

・k, h, c はある一定の率で成長する。

・u は一定になる。つまり，$\frac{\dot{u}}{u}=0$ となる。

またBGP上では各変数の成長率の間に次のような関係が成立している。ただし，$\mu_c=\frac{\dot{c}}{c}$, $\mu_k=\frac{\dot{k}}{k}$, $\mu_h=\frac{\dot{h}}{h}$ である。

・消費 c の成長率と物的資本 k の成長率は等しい。すなわち，$\mu_c=\mu_k$ となる。

・物的資本 k の成長率と人的資本 h の成長率は関係式 $\mu_k=\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}\mu_h$ で結ばれている。

ここでモデルを簡単に扱うために新しい変数を設定し，長期均衡経路を四次元の微分方程式系から三次元体系に縮約する。ここでは，$x(\equiv kh^{\frac{1-\beta+\gamma}{\beta-1}})$ と $q(\equiv\frac{c}{k})$ という変数を設定する。このとき，三次元体系は以下のように導かれる。

$$\dot{x}=Ax^{\beta}u^{1-\beta}+\psi(1-u)x-qx, \tag{20}$$
$$\dot{q}=q^2+A\phi x^{\beta-1}u^{1-\beta}q-\zeta q, \tag{21}$$
$$\dot{u}=\eta u^2+\frac{\psi(\beta-1)}{\beta}u-qu. \tag{22}$$

ここで，$\psi \equiv \frac{\delta(1-\beta+\gamma)}{\beta-1}$，$\phi \equiv \frac{\beta}{\sigma}-1$，$\zeta \equiv \frac{\rho}{\sigma}$，$\eta \equiv \frac{\delta(\beta-\gamma)}{\beta}$ とする。この三次元体系は平衡点 $(x^*,\ q^*,\ u^*)$ を持つ。よって，各変数の定常状態値は次のように導かれる。

$$x^* = \left(\frac{\beta\zeta-\delta[1-\beta+\gamma]-\delta[\beta-\gamma]u^*}{A\beta\phi}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}u^*, \tag{23}$$

$$q^* = \eta u^* + \frac{\delta(1-\beta+\gamma)}{\beta}, \tag{24}$$

$$u^* = 1-\frac{(1-\beta)(\rho-\delta)}{\delta(\gamma-\sigma[1-\beta+\gamma])}. \tag{25}$$

次に三次元体系の平衡点がモデルのBGPに対応していることを示す。まず u が u^* に固定されることは，BGPにおいて u が一定になることに一致する。さらに k，h，c の成長率を変数 x，q，u で表すことにする。

$$\frac{\dot{k}}{k} = Ax^{\beta-1}u^{1-\beta}-q,$$

$$\frac{\dot{h}}{h} = \delta(1-u),$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{AB}{\sigma}x^{\beta-1}u^{1-\beta}-\frac{\rho}{\sigma}.$$

平衡点では x，q が x^*，q^* に定まるので，k，h，c の成長率は一定になる。ゆえに，三次元体系の平衡点とモデルのBGPは対応している。

ここで，モデルのBGPが一意に定まるパラメータ空間を検討する。なぜなら，パラメータの値によってBGPが複数現れる可能性があるからである。よって，BGPが1つのみ存在するパラメータ空間を求める。このとき，最終財生産に配分される人的資本の割合の定常状態値 u^* は正の値をとり，区間 $(0,\ 1)$ 内にあることを利用している。よって，次の条件が導かれる。

$$\frac{\rho-\delta}{\gamma-\sigma(1-\beta+\gamma)}>0,\quad \frac{(1-\beta)(\rho-\delta)}{\delta(\gamma-\sigma[1-\beta+\gamma])}<1.$$

したがって，BGPが一意に定まるパラメータ空間は次のようになる。

$$\Theta_1 \equiv \{\theta \in \Theta | 0<\rho<\delta,\ \sigma>1+\frac{\rho}{\psi}\}, \tag{26}$$

$$\Theta_2 \equiv \{\theta \in \Theta | \delta<\rho<-\psi,\ \sigma<1+\frac{\rho}{\psi}\}. \tag{27}$$

ただし，$\theta(\equiv[A,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \rho,\ \sigma])$ はモデルのパラメータが含まれるパラメータ空間を表している。これ以降の分析はパラメータ空間 Θ_1，Θ_2 内に限定される。

次に横断性条件を検討する。家計が位置する経済発展経路が長期均衡経路であるならば，次の横断性条件が得られることは既に確認した。

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_1(t)k(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_2(t)h(t)=0.$$

モデルのBGPで横断性条件が成立するには，次のようになればよい。

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\rho+\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}+\frac{\dot{k}}{k}\right)<0,\quad \lim_{t\to\infty}\left(-\rho+\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}+\frac{\dot{h}}{h}\right)<0.$$

ここで，この条件が三次元体系の平衡点で成立するかをみる。

$$-\rho+\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}+\frac{\dot{k}}{k}=-\delta u^*,\quad -\rho+\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}+\frac{\dot{h}}{h}=-\delta u^*.$$

$\delta>0$，$0<u^*<1$ より，$-\delta u^*<0$ である。したがって，平衡点においても横断性条件は成立する[2)]。

4 長期均衡経路の非決定性の検討

この節では，次の二点について考察することにする。

(1) 歴史的与件 (k_0, h_0) が所与であるもとで，長期均衡経路が１つのみ存在するパラメータ空間と，長期均衡経路が複数存在するパラメータ空間を導出する。

(2) 均斉成長経路の局所的な安定性を検討する。ここで均斉成長経路が安定的であるとは，所与の歴史的与件 (k_0, h_0) から出発する経済がBGPに収束することを意味している。

これらの点に関して，以下の命題が得られる。

命題１ $\theta\in\Theta_1$ ならば，長期均衡経路はただ１つ存在する。このとき，三次元体系のヤコビ行列は１つの実数部が負となる固有値と，２つの実数部が正となる固有値を持つ。

命題２ $\theta\in\Theta_2$ とする。

(1) $\gamma>\beta$ ならば，長期均衡経路は複数存在する。このとき，ヤコビ行列は１つの実数部が正となる固有値と，２つの実数部が負となる固有値を持つ。

(2) $0<\gamma\leq\beta$ ならば，Θ_2 は Θ_2^A と Θ_2^B の２つの空間に分割され，そして各々について次のことが成立する。

(a) $\theta\in\Theta_2^A$ ならば，長期均衡経路は複数存在する。このとき，ヤコビ行列は１つの実数部が正となる固有値と，２つの実数部が負となる固有値を持つ。

(b) $\theta\in\Theta_2^B$ ならば，均斉成長経路は不安定である。ここでBGPが不安定であるとは，所与の歴史的与件から出発する経済がBGPに収束しないことを意味している。このとき，ヤコビ行列は３つの実数部が正となる固有値を持つ。

ここで，モデルのパラメータが各パラメータ空間に含まれているならば，ヤコビ行列の固有値の符号が命題１，２のようになることを証明する。前節で三次元体系は以下の形に導かれた。

---

2) $\theta\notin\Theta_1$，$\theta\notin\Theta_2$ ならば，u^* は端点解をとる。ここでは，u^* が端点解をとる場合 ($u^*=0$，$u^*=1$) を考察する。

［1］ $u^*=1$ の場合

人的資本 h の動学方程式(16)より，$\frac{\dot{h}}{h}=0$ となる。これは人的資本が一定率で成長するというBGPの定義（持続的成長）に矛盾する。

［2］ $u^*=0$ の場合

$$-\rho+\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}+\frac{\dot{k}}{k}=-\delta u^*=0,\quad -\rho+\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}+\frac{\dot{h}}{h}=-\delta u^*=0.$$

よって，

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\rho+\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}+\frac{\dot{k}}{k}\right)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\left(-\rho+\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}+\frac{\dot{h}}{h}\right)=0.$$

したがって，横断性条件は成立しない。

$$\dot{x}=Ax^{\beta}u^{1-\beta}+\phi(1-u)x-qx,$$
$$\dot{q}=q^2+A\phi x^{\beta-1}u^{1-\beta}q-\zeta q,$$
$$\dot{u}=\eta u^2+\frac{\phi(\beta-1)}{\beta}u-qu.$$

三次元体系を平衡点 (x^*, q^*, u^*) の近傍において線形近似する。各動学方程式について $\dot{x}=F^1(x, u, q)$, $\dot{u}=F^2(x, u, q)$, $\dot{q}=F^3(x, u, q)$ とおき，一階のテーラー展開を行うと次のようになる。

$$\dot{x}=F^1(\cdot)+\frac{\partial}{\partial x}F^1(\cdot)(x-x^*)+\frac{\partial}{\partial u}F^1(\cdot)(u-u^*)+\frac{\partial}{\partial q}F^1(\cdot)(q-q^*)+R_1,$$

$$\dot{u}=F^2(\cdot)+\frac{\partial}{\partial x}F^2(\cdot)(x-x^*)+\frac{\partial}{\partial u}F^2(\cdot)(u-u^*)+\frac{\partial}{\partial q}F^2(\cdot)(q-q^*)+R_2,$$

$$\dot{q}=F^3(\cdot)+\frac{\partial}{\partial x}F^3(\cdot)(x-x^*)+\frac{\partial}{\partial u}F^3(\cdot)(u-u^*)+\frac{\partial}{\partial q}F^3(\cdot)(q-q^*)+R_3.$$

平衡点においては，$F^1(\cdot)=F^1(x^*, u^*, q^*)=0$, $F^2(\cdot)=F^2(x^*, u^*, q^*)=0$, $F^3(\cdot)=F^3(x^*, u^*, q^*)=0$ となる。また平衡点に近づけば近づくほど，各剰余項 $R_i(i=1, 2, 3)$ は無視できるほど小さくなる。したがって，線形化された体系は次の形になる。

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{u}\\ \dot{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{11}^* & -\frac{x^*}{u^*}(J_{11}^*+\phi u^*) & -x^*\\ 0 & \eta u^* & -u^*\\ J_{11}^*\phi\frac{q^*}{x^*} & -J_{11}^*\phi\frac{q^*}{u^*} & q^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x^*\\ u-u^*\\ q-q^*\end{pmatrix}.$$

ただし，$J_{11}^*=A(\beta-1)[x^*]^{\beta-1}[u^*]^{1-\beta}$ である。そして，上記のヤコビ行列を J^* で表すことにする。π をヤコビ行列 J^* の固有値とおくと，次式が得られる。

$$(J^*-\pi I)=\begin{pmatrix}J_{11}^*-\pi & -\frac{x^*}{u^*}(J_{11}^*+\phi u^*) & -x^*\\ 0 & \eta u^*-\pi & -u^*\\ J_{11}^*\phi\frac{q^*}{x^*} & -J_{11}^*\phi\frac{q^*}{u^*} & q^*-\pi\end{pmatrix}.$$

I は単位行列を表している。このとき，ヤコビ行列 J^* の固有方程式は次のようになる。$det(J^*-\pi I)=0$ を用いると，

$$-\pi^3+Tr(J^*)\pi^2-B(J^*)\pi+det(J^*)=0. \tag{28}$$

ここで，$Tr(J^*)=J_{11}^*+\eta u^*+q^*$, $B(J^*)=\eta J_{11}^*u^*+J_{11}^*q^*+\eta u^*q^*$, $det(J^*)=J_{11}^*u^*q^*(\psi\phi+\eta[1+\phi])$ である。命題１，２の固有値の符号に関する帰結を証明するために，次の定理を利用する。

定理１　上記の固有方程式において，正の実数部をもつ根（固有値）の数は，以下の項の集まりでの符号の変化数に等しい。

ここでの項の集まりとは，次のものである。

$$-1,\ Tr(J^*),\ -B(J^*)+\frac{det(J^*)}{Tr(J^*)},\ det(J^*).$$

また各項の符号を決定するのに，以下の補題を用いる。

補題１　$det(J^*)$ について以下のことが成立する。

$\theta\in\Theta_1$ ならば，$det(J^*)<0$，また $\theta\in\Theta_2$ ならば，$det(J^*)>0$.

補題２　$\theta\in\Theta_1$，または $\theta\in\Theta_2$ とする。$Tr(J^*)$ について以下のことが成立する。

$\gamma < 2\beta$ ならば，$Tr(J^*) > 0$，また $\gamma > 2\beta$ ならば，$Tr(J^*) < 0$.

補題3　$\theta \in \Theta_1$，または $\theta \in \Theta_2$ とする。$B(J^*)$ について以下のことが成立する。

$$\gamma > \beta \text{ならば，} B(J^*) < 0.$$

以上で命題1，2の固有値の符号に関する帰結の証明の準備が整った。はじめに，命題1の証明を行うことにする。補題1から $\theta \in \Theta_1$ より，$det(J^*) < 0$ となる。よって，固有値の符号に関して2つの場合が考えられる。

(a)　ヤコビ行列 J^* は3つの実数部が負となる固有値を有する。

(b)　ヤコビ行列 J^* は2つの実数部が正となる固有値と，1つの実数部が負となる固有値を有する。

(a)の場合が成り立つには，$Tr(J^*) < 0$，$-B(J^*) + \dfrac{det(J^*)}{Tr(J^*)} < 0$ となる必要がある。補題2から $Tr(J^*) < 0$ が成立しているときには $\gamma > 2\beta$ となる。補題3から $\gamma > \beta$ ならば，$B(J^*) < 0$ となる。よって $-B(J^*) + \dfrac{det(J^*)}{Tr(J^*)} > 0$ となるので，(a)の場合は成立しない。したがって $\theta \in \Theta_1$ ならば，ヤコビ行列は2つの実数部が正となる固有値と，1つの実数部が負となる固有値を持つ。

次に命題2の証明を行うことにする。補題1から $\theta \in \Theta_2$ より，$det(J^*) > 0$ となる。よって，固有値の符号に関して次の2つの可能性が考えられる。

(c)　ヤコビ行列が3つの実数部が正となる固有値を持つ。

(d)　ヤコビ行列が1つの実数部が正となる固有値と，2つの実数部が負となる固有値を持つ。

以下ではパラメータの範囲を3つの場合に分け，それぞれについて固有値の符号を検討する。

(1)　$0 < \gamma \leq \beta$ の場合

補題2から $Tr(J^*) > 0$ となる。しかし，$B(J^*)$，$-B(J^*) + \dfrac{det(J^*)}{Tr(J^*)}$ の符号は不定である。よって，(c)，(d)の場合の双方が成立している。

(2)　$\beta < \gamma \leq 2\beta$ の場合

補題2から $Tr(J^*) > 0$ となる。また補題3から $B(J^*) < 0$ となる。ゆえに，$-B(J^*) + \dfrac{det(J^*)}{Tr(J^*)} > 0$ が得られる。よって，(d)の場合が成立している。

(3)　$2\beta < \gamma$ の場合

補題2から $Tr(J^*) < 0$ となる。また補題3から $B(J^*) < 0$ となる。しかし，$-B(J^*) + \dfrac{det(J^*)}{Tr(J^*)}$ の符号は不定である。よって，(d)の場合が成立している。

以上のことから，次の帰結が導かれる。

[A]　$\gamma > \beta$ ならば，ヤコビ行列は1つの実数部が正となる固有値と，2つの実数部が負となる固有値を持つ。

[B]　$0 < \gamma \leq \beta$ ならば，ヤコビ行列は1つの実数部が正となる固有値と2つの実数部が負となる固有値を持つか，3つの実数部が正となる固有値を持つ。

次に各場合の固有値の符号が上記のように定まったとき，長期均衡経路がどのようになるかを考え

る。ここで分析が複雑になるのを避けるために，ヤコビ行列 J^* の固有値は異なる 3 つの実数根であると仮定する。まず前述の線形化された体系を下の形に変形する。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^*_{11} & -\dfrac{x^*}{u^*}(J^*_{11}+\phi u^*) & -x^* \\ 0 & \eta u^* & -u^* \\ J^*_{11}\phi\dfrac{q^*}{x^*} & -J^*_{11}\phi\dfrac{q^*}{u^*} & q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ q \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} J^*_{11} & -\dfrac{x^*}{u^*}(J^*_{11}+\phi u^*) & -x^* \\ 0 & \eta u^* & -u^* \\ J^*_{11}\phi\dfrac{q^*}{x^*} & -J^*_{11}\phi\dfrac{q^*}{u^*} & q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^* \\ -u^* \\ -q^* \end{pmatrix}.$$

この体系をベクトルを用いて表すと，$\dot{w}=J^*w+z$ となる。ただし，$w=\begin{pmatrix} x \\ u \\ q \end{pmatrix}$，$z=J^*\begin{pmatrix} -x^* \\ -u^* \\ -q^* \end{pmatrix}$ とする。固有値に関する仮定より，ヤコビ行列 J^* の各固有ベクトルは一次独立である。h_1，h_2，h_3 をヤコビ行列の固有ベクトルとするとき，次の性質を持つ行列 S が設定される。

$$w=Sy,\quad h_1=Se_1,\quad h_2=Se_2,\quad h_3=Se_3.$$

ここで，$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$e_i(i=1,\ 2,\ 3)$ は単位ベクトルとする。つまり，$e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。よって，行列 S は $S=(h_1,\ h_2,\ h_3)$ と表される。固有値，固有ベクトルに関する仮定から行列 S は可逆である。ゆえに，$w=Sy$ は $y=S^{-1}w$ に変形することができる。このとき，行列の逆行列が $S^{-1}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ で示されるとすると，$y=S^{-1}w$ は次式を表している。

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

したがって，$y_i(i=1,\ 2,\ 3)$，x，y，q が時間 t の関数であり，$s_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ が定数であることを考慮すると，

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}.$$

ベクトルを用いると，この体系は $\dot{y}=S^{-1}\dot{w}$ と表される。さらに，$\dot{w}=J^*w+z$，$w=Sy$ から，

$$\dot{y}=S^{-1}\dot{w}=S^{-1}J^*Sy+S^{-1}z.$$

ところで，行列 $S^{-1}J^*S$ は以下のように変形される。ただし，π_1，π_2，π_3 はそれぞれ固有ベクトル h_1，h_2，h_3 に対応するヤコビ行列 J^* の固有値である。

$$S^{-1}J^*S=S^{-1}J^*(h_1,\ h_2,\ h_3)$$

$$=(\pi_1 e_1,\ \pi_2 e_2,\ \pi_3 e_3).$$

ゆえに，体系は次の形になる。

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_1 & 0 & 0\\ 0 & \pi_2 & 0\\ 0 & 0 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}+S^{-1}z. \tag{29}$$

上述の微分方程式(29)を解くと，各変数の時間経路が次のように導かれる。

$$y_i(t)=e^{\pi_i t}b_i-\frac{S_i^{-1}z}{\pi_i},\ (i=1,\ 2,\ 3).$$

ここで $S_i^{-1}(i=1,\ 2,\ 3)$ は行列 S^{-1} の第 i 行を，$b_i(i=1,\ 2,\ 3)$ は任意定数を表している。よって，座標変換された体系は下の形で与えられる。

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\pi_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\pi_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\pi_3 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{-S_1^{-1}z}{\pi_1}\\ \frac{-S_2^{-1}z}{\pi_2}\\ \frac{-S_3^{-1}z}{\pi_3}\end{pmatrix}.$$

この体系をベクトルを用いて表すと，$y=Eb+v$ となる。ただし，$E=\begin{pmatrix}e^{\pi_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\pi_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\pi_3 t}\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$，

$v=\begin{pmatrix}\frac{-S_1^{-1}z}{\pi_1}\\ \frac{-S_2^{-1}z}{\pi_2}\\ \frac{-S_3^{-1}z}{\pi_3}\end{pmatrix}$ とする。ここで，座標変換された体系をもとの変数の体系に戻すことにする。

$$\begin{aligned}w&=Sy=S(Eb+v)\\ &=e^{\pi_1 t}b_1h_1+e^{\pi_2 t}b_2h_2+e^{\pi_3 t}b_3h_3-\left(\frac{S_1^{-1}z}{\pi_1}h_1+\frac{S_2^{-1}z}{\pi_2}h_2+\frac{S_3^{-1}z}{\pi_3}h_3\right).\end{aligned}$$

すなわち，変数を x，u，q とする三次元体系は次の形に導かれる。

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ u(t)\\ q(t)\end{pmatrix}=e^{\pi_1 t}b_1h_1+e^{\pi_2 t}b_2h_2+e^{\pi_3 t}b_3h_3-\left(\frac{S_1^{-1}z}{\pi_1}h_1+\frac{S_2^{-1}z}{\pi_2}h_2+\frac{S_3^{-1}z}{\pi_3}h_3\right). \tag{30}$$

三次元体系は上記の時間経路(30)の形に導くことができた。以下では本節の冒頭であげた二点について検討することにする。

ここで三次元体系の変数について考える。変数 x の定義は $x\equiv kh^{\frac{1-\beta+\gamma}{\beta-1}}$ である。家計は歴史的与件として $k(0)=k_0>0$，$h(0)=h_0>0$ が与えられているので，x の値は所与であるといえる。また，$q(\equiv\frac{c}{k})$，u はそれぞれ操作変数が組み込まれているので，家計は q，u の値を操作することができる。

(1) $\pi_1<0$，$b_2=0$，$b_3=0$ の場合，BGPに向かう長期均衡経路がただ１つ存在する。ゆえに歴史的与件を与えられている家計が長期均衡経路上に位置するならば，BGPに収束する。このことから，BGPは安定的であるということができる。

(2) $\pi_1<0$，$\pi_2<0$，$b_3=0$ の場合，固有ベクトル h_1，h_2 に張られている平面上の経路すべてが長期均衡経路となる。すなわち，長期均衡経路が複数存在する。ゆえに，歴史的与件を与えられた

家計がこれらの経路のいずれかに位置するならば，BGPに収束していく。したがって，BGPは安定的である。

(3)　$\pi_1>0$，$\pi_2>0$，$\pi_3>0$ の場合，BGPに向かう経路は存在しない。すなわち，家計がどの経済発展経路上に位置してもBGPに収束しない。したがって，BGPは不安定である。

以上のことから，次の結論が導かれる。

(1)　モデルのパラメータ空間 θ がパラメータ空間 Θ_1，または $\gamma>\beta$ の場合には Θ_2 全体，$0<\gamma\leq\beta$ の場合には Θ_2^A に含まれるならば，均斉成長経路は安定的である。他方，θ が $0<\gamma\leq\beta$ の場合に Θ_2^B に含まれるならば，均斉成長経路は不安定である。

(2)　歴史的与件 $(k_0,\ h_0)$ が与えられたもとで，モデルのパラメータ空間 θ が Θ_1 に含まれるならば，長期均衡経路はただ1つ存在する。他方 θ が $\gamma>\beta$ の場合に Θ_2 に，または $0<\gamma\leq\beta$ の場合に Θ_2^B に含まれるならば長期均衡経路は複数存在する。

結論の第二点に関して以下のような解釈ができる。本稿のモデルでは，家計は家計生産者であると仮定している。よって，家計の行動は経済の動向を示しているといえる。したがって，長期均衡経路がただ1つしか存在しないならば，BGPに収束する経済はすべてその経路上に位置するので，同じ成長経験を経ることになる。一方長期均衡経路が複数存在するならば，BGPに収束する経済が異なる経路上に位置することもあるので，各経済が異なる成長経験を経る場合もある。

5　おわりに

本稿では二部門内生的成長モデルにおいて，長期均衡経路の非決定性が生ずるメカニズムを考察した。具体的には，まず長期均衡経路の非決定性が生じる，すなわち長期均衡経路が複数現れるパラメータ空間を導き出した。そして，その際このパラメータ空間内においての均斉成長経路の安定性も検討した。この分析を行うにあたって，本稿のモデルの長期均衡経路から得られたヤコビ行列の固有値の符号条件を利用した。また同様の方法を利用して長期均衡経路がただ1つのみ存在するパラメータ空間も導出し，この場合の均斉成長経路の安定性も検討した。

今後の拡張の方向として次のことを考えていきたい。すなわち，NIESやASEAN諸国など高い経済成長を遂げている国々では，「開発主義」といわれるようにその経済成長に関して政府が積極的な役割を果たしている。だが，本稿では政府をモデルに組み入れることはできなかった。ゆえに，これからの研究課題として政府をモデルに組み込むことで，以下の二点を検討しようと考えている。第一点は政府を入れることで各経済の成長経路がどう変わるかということであり，第二点は政府を導入することが長期均衡経路の非決定性にどのような影響を与えるかということである。

参 考 文 献

（1）　大住圭介「人的資本と内生的経済成長」細江・濱砂編『現代経済学の革新と展望』九州大学出版会，平成 6（1994）年

（2）　斎藤誠『新しいマクロ経済学』有斐閣，平成 8（1996）年

(3) 速水祐次郎『開発経済学：諸国民の貧困と富』創文社，平成7 (1995) 年

(4) Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw-Hill 1995.

(5) Benhabib, J. and R. E. A. Farmer, "Indeterminacy and Increasing Returns," *Journal of Economic Theory*, 63(1994), 19-41.

(6) Benhabib, J. and R. Perli, "Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth," *Journal of Economic Theory*, 63(1994), 113-142.

(7) Bond, E. W., P. Wang and C. K. Yip, "A General Two-Sector Model of Endogenous Growth with Human and Physical Capital: Balanced Growth and Transitional Dynamics," *Journal of Economic Theory*, 68(1996), 149-173.

(8) Caballé, J. and M. S. Santos, "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital," *Journal of Political Economy*, 101(1993), 1042-1067.

(9) Lucas, R. E. Jr., "On the Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics*, 22(1988), 3-42.

(10) Mino, K., "Analysis of a Two-Sector Model of Endogenous Growth with Capital Income Taxation," *International Economic Review*, 37(1996), 227-251.

(11) Mulligan, C. B. and X. Sala-i-Martin, "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth," *Quarterly Journal of Economics*, 108(1993), 739-773.

(12) Uzawa, H., "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth," *International Economic Review*, 6(1965), 18-31.