人口成長と内生的技術進歩

南, 光鉉

https://doi.org/10.15017/3000256

出版情報：経済論究. 108, pp.57-68, 2000-11-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

人口成長と内生的技術進歩

南　　光　鉱*

1　はじめに

新古典派成長モデルでは，人口成長率は自然成長率として外生的に与えられるものであった。しかし，最近の経済成長モデルにおいては，人口成長率がモデルの中で内生的に決定されるメカニズムを動学的に説明しようとする試みがなされている。

Barro and Becker [1989]，Becker, Murphy, and Tamura [1990] では，オーヴァーラッピッグ・ゼネレーションズ・モデルの枠組みの中で親の利他主義的行動によって子供の数が決定されるような内生的人口成長モデルが展開されている。そこでは，親の予算制約は一定であるため，子供の数が増えるにつれて養育費用が増加される。その結果，親の消費水準が低下され，人口成長率と経済成長率との間には負の相関関係があるということが述べられている。

Palivos and Yip [1993]，Ping, Yip, and Scotese [1994]，Yip and Zhang [1996] などでは連続的モデルにおいても出生率と経済成長率の間に負の相関関係があると述べられているが，しかし上記のモデルでは技術進歩が内生的に決定される生産関数が取り扱われていなかった。

Jones [1999] では人口成長率と技術進歩率が同時にモデルの枠組みの中で決まる内生的経済成長モデルが構築された。彼のモデルでは家計の効用に子供の養育費用を組み込むことによって人口成長率が内生化され，しかも政府部門で研究開発（Research and Development；以下，R＆Dと呼ぶことにする）が行れるモデルを設定することによって技術進歩率が内生化されている。

このような人口成長と経済成長に関する研究の流れに沿いながら，本稿では人口成長率と技術進歩率が両方ともモデルの枠組みの中で内生的に決定されるモデルが展開される。Jones[1999]では，R＆D活動を行う経済主体は政府になっている。それに対して本稿では私的利潤を求める民間企業がR＆D活動を行う経済主体であると設定される。

本稿は閉鎖経済を前提とし，連続時間型のモデルを用いて分析を行う。子供の養育費用関数は子供の数の増加関数であると設定される。家計は子供の費用関数が組み込まれた異時点間の効用関数を最大化しようとする。これによって，人口成長率がモデルの中で内生的に決定されるモデルが構築される。同時に生産部門では私的利潤を追求する企業が競争的にR＆D活動を行うことによって技術進歩率が内生的に決定されるモデルが構築された。

本稿の構成は以下の通りである。次の第2節で分権化された経済のもとで生産部門の市場構造を規

*　e-mail：nam@en.kyushu-u.ac.jp

定する。しかも，家計部門の効用について述べる。第3節では人口成長率と持続的均衡経路に付随する各経済変数の成長率との間にいかなる関係があるかについての分析を行う。第4節ではパレート最適な経済のもとで持続的均衡経路に付随する最適成長率を求め，分権化された経済のもとで得られる成長率との関係を比較・検討する。最後に第5節で本稿のまとめや今後の課題について述べる。

2　モデルの設定

本節では分権化された経済のもとで各経済主体の行動について述べる。ここでは生産部門と家計部門に大別される。生産部門は最終財部門，中間財部門，およびR＆D部門の3つの部門から構成される。各生産部門の企業にはそれぞれに異なる市場が与えられる。家計部門では同じ性質を持つ人々が労働市場に参加すると仮定する。しかも子供の養育費用が組み込まれている効用関数が設定される。

2.1　生産部門

まず，最終財部門の生産メカニズムと利潤最大化問題を考える。最終財は唯一かつ同質財であり，最終財部門の市場は完全競争市場であると仮定する。最終財企業は労働や中間財の組を生産要素として最終財を生産する。そして，生産された最終財は家計部門で消費されるか，中間財部門に資本財として使われるか，またR＆D部門に新たなデザインを発明のために利用されるかのいずれかに完全に配分されると想定する。最終財の生産関数はRomer [1990]，Barro and Sala-i-Martin [1995] に従い，次のように表すことにしよう。

$$Y(t)=AL(t)^{1-\alpha}\int_0^{D(t)}x_i(t)^{\alpha}di. \tag{2.1}$$

ただし，$0<\alpha<1$ とする。Aは経済の水準を表すパラメータである[1]。$Y(t)$ は最終生産物を，$L(t)$ は労働量を，そして $x_i(t)$ は第 i タイプの中間財[2]をそれぞれ表す。$D(t)$ は利用可能な中間財の個数を表す。

さて，最終財の価格を規準化された価格として1とおき，最終財企業の利潤式は次のように設定される。

$$\Pi_Y=AL(t)^{1-\alpha}\int_0^{D(t)}x_i(t)^{\alpha}di-w(t)L(t)-p_i(t)\int_0^{D(t)}(x_i(t))di. \tag{2.2}$$

ここで，$(x_i(t))$ は最終財企業の購入する中間財の組である。また，$p_i(t)$ は第 i タイプの中間財のレンタル価格であり，$w(t)$ は賃金率である。各時点で最終財企業は中間財のレンタル価格，賃金率，および中間財の個数の時間経路を所与とし，(2.2)で与えられた利潤式を最大化しようとする。そのとき，$(\hat{L}(t),\ (\hat{x}_i(t)))$ が利潤を最大にするような投入量であれば，次のことが成立する。

$$\hat{L}(t)\in\underset{L(t)}{\operatorname{argmax}}\,\Pi_Y(L(t),\ (\hat{x}_i(t))), \tag{2.3}$$

1) Barro [1996] では，Aとはインフラストラクチュア，課税，法律などを反映しているパラメータとしてその経済の状況を表すものであると述べられている。

2) 中間財の集合は $[0,\ \infty)$ 上で無数に存在するが，ある時点で入手可能な有限個の部門集合 $[0,\ D(t)]$ が最終財部門に利用される。それは t 時点において以前に生産された中間財の中で利用可能な中間財の集合である。

$$(\hat{x}_i(t)) \in \underset{(x_i(t))}{\operatorname{argmax}} \Pi_Y(\hat{L}(t), \ (x_i(t)). \tag{2.4}$$

(2.3)により，次式が得られる。

$$w(t)=\frac{(1-\alpha)\hat{Y}(t)}{\hat{L}(t)}. \tag{2.5}$$

ここで，$\hat{Y}(t)$ は最終財生産部門の供給量であり，$\hat{L}(t)$ は労働の需要量である。また，(2.4)により，次式が得られる[3)]

$$A\alpha\hat{L}(t)^{1-\alpha}\hat{x}_i(t)^{\alpha-1}-p_i(t)=0 \qquad \forall i. \tag{2.6}$$

需要と供給が一致する均衡状態において，$\hat{Y}(t)=Y(t)$，$\hat{L}(t)=L(t)$，および $(\hat{x}_i(t))=(x_i(t))$ と表わすと，次のことが成立する。

$$w(t)=\frac{(1-\alpha)Y(t)}{L(t)}, \tag{2.7}$$

$$p_i(t)=A\alpha L(t)^{1-\alpha}(x_i(t))^{\alpha-1} \qquad \forall i. \tag{2.8}$$

また，最終財部門に投入される第 i タイプの中間財の需要量は(2.8)により，次のようになる。

$$(x_i(t))=\left(\frac{A\alpha}{p_i(t)}\right)^{1/(1-\alpha)}L(t) \qquad \forall i. \tag{2.9}$$

次に，中間財部門の生産メカニズムと主体的均衡について述べる。中間財市場は独占的競争状態にあるものとする。中間財企業は $[0, \ D(t)]$ 上で無数に存在する。異なるタイプの中間財は異なる企業によって生産され，最終財部門に供給される。さらに，各中間財企業はその財の生産・販売について恒久的に独占権を保有すると仮定する。ここで，各中間財企業は1単位の中間財を生産するために最終財1単位が必要であると仮定する。このとき，第 i タイプの中間財企業の独占利潤は次のように定式化される。

$$\pi_i(t)=[p_i(t)-1]x_i(t). \tag{2.10}$$

ただし，括弧の1は中間財の限界費用である。各時点で中間財企業はこの利潤式を最大化するように価格 $p_i(t)$ を設定しようとする。したがって，上記利潤最大化問題を解くと，第 i タイプの中間財の独占価格は次のように得られる。

$$p_i(t)=p(t)=\frac{1}{\alpha} \qquad \forall i. \tag{2.11}$$

よって，第 i タイプの中間財の供給量は次のようになる。

$$x_i(t)=x(t)=A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2/(1-\alpha)}L(t) \qquad \forall i. \tag{2.12}$$

さらに，第 i タイプの中間財企業の独占利潤は次のようになる。

$$\pi_i(t)=\pi(t)=A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}L(t) \qquad \forall i. \tag{2.13}$$

以上のことから，中間財部門の主体的均衡において，各企業はすべての中間財の個数に関して対称的に等しい数量を同じ独占価格で最終財部門へ供給し，同じ独占利潤を受け取ることがわかる。

さて，ある t 時点から将来に渡って中間財企業が得る独占利潤の割引現在価値 $V(t)$ は，次のように与えられる。

3） (2.6)の導出については 南［2000］を参照せよ。

$$V(t)=\int_t^{\infty} e^{(-\int_t^{\tau} r(\nu)d\nu)}\pi(\tau)d\tau.$$

ただし，割引因子 $R(\tau)$ を $R(\tau)=\int_0^{\tau} r(\nu)d\nu$ とする。よって，$\int_t^{\tau} r(\nu)d\nu=[R(\tau)-R(t)]$ となる。上式の両辺を時間で微分すると，次のような非利ザヤ条件（no-arbitrage condition）が得られる。

$$\dot{V}(t)=r(t)V(t)-\pi(t). \tag{2.14}$$

ただし，$\dot{V}(t)=dV(t)/dt$ である。以下，上にドットが付いている時間変数は時間に関する微分したものを記す。また，$r(t)$ は収益率である。

R＆D部門においては，新たなデザインを開発するには1単位当たり固定費用 η が必要されると仮定する[4]。R＆Dが成功した場合，R＆D企業は1単位の収益が得られるとしよう。したがって，R＆D部門の利潤は次のように定式化される。

$$\Pi_R=(V(t)-\eta)\dot{D}(t).$$

$\dot{D}(t)>0$ となるような均衡を考えることとしよう。$V(t)>\eta$ のケースでは無限の資源が t 時点でR＆D部門に配分されるので，均衡値が決定されることはない。$V(t)<\eta$ のケースでは t 時点でいかなる資源の配分もされないので，$D(t)$ は通時的に変化しない。その結果，$\dot{D}(t)>0$ になるためには

$$V(t)=\eta \tag{2.15}$$

が成立しなければならない。

各時点において，自由参入条件 $\dot{V}(t)=0$ が成立するとすれば，(2.14)は $r(t)V(t)=\pi(t)$ となり，また，(2.15)により，$r(t)\eta=\pi(t)$ となる。さらに，(2.13)の $\pi(t)$ を代入すると，次式が得られる。

$$r(t)=\frac{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}L(t)}{\eta}. \tag{2.16}$$

2.2　家計の部門

家計は選好や労働能力に関する同質性を持っているものと仮定する。また，無限時間に生存し，完全予見を持っていると仮定する。家計の規模（つまり，人口）を時間変数 $N(t)$ であり，出生率も時間変数 $\tilde{n}(t)\geqq 0$ であるとする。しかも，死亡率は定数 $d>0$ であると仮定する。よって，$N(t)$ の連続的変化は $\dot{N}(t)=(\tilde{n}(t)-d)N(t)$ となる。そのとき，$n(t)\equiv(\tilde{n}(t)-d)$ とすると，$n(t)$ は純出生率を表すことになる。さらに，人口移動は生じない閉鎖経済を前提にするので，純出生率は人口成長率に一致する。したがって，任意の時点 t における人口成長率は次のようになる。

$$\dot{N}(t)=n(t)N(t) \qquad 0<n(t)<1. \tag{2.17}$$

さて，労働力単位で計られる子供の養育費用関数を $\phi(n(t))$ で表し，以下の性質を持っていると仮定する。

(1)　$\phi(n(t))$ は2回連続微分可能である。

(2)　狭義の増加関数かつ凹関数である。すなわち，任意の n に対して，

4）最初のデザインがいかにして開発されたのかについてはどんな説明もなされていない，したがって，このようなモデルを取り扱う場合にはデザインの開発者は最初のデザインを開発する方法を以前に知っていると仮定しなければならない。

$$\frac{d\phi(n)}{dn}>0,\quad \frac{d^2\phi(n)}{dn}>0.$$

(3) $\phi(0)=0$。

人口の賦存量は，最終財部門で労働力として働くか，あるいは子供の養育のために使うかのいずれかに完全に配分される。したがって，人口の均衡式は次のように表される。

$$L(t)+\phi(n(t))N(t)=N(t). \tag{2.18}$$

家計の効用関数は，Yip and Zhang [1996, 1997] の設定に従い，一人当たり消費と人口成長率に関する加法的で離散時間型の効用関数として，以下のように定式化される。

$$u(c(t),\ n(t))=\log c(t)+\frac{n(t)^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}.$$

ただし，消費に関する限界効用の代替弾力性は1にし，人口成長率に関する限界効用の代替弾力性の逆数は $\varepsilon(\varepsilon\neq 1)$ とする。また，$u(c,\ n)$ は次の性質を持っているものである。

$$\frac{\partial u(c,\ n)}{\partial c}>0,\quad \frac{\partial u(c,\ n)}{\partial n}>0,$$

$$\frac{\partial^2 u(c,\ n)}{\partial c^2}<0,\quad \frac{\partial^2 u(c,\ n)}{\partial n^2}<0.$$

家計には動学的最大化問題を解くために一人当たり消費と人口成長率の時間経路 $(c(t))$，$(n(t))$ に関する次のような目的関数が与えられる。

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\log c(t)+\frac{n(t)^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}\right)dt. \tag{2.19}$$

ここで，$0<\varepsilon<1$ であり，$\rho>0$ は主観的な時間選考率を表すパラメータである。

家計の予算制約について考える。家計の労働所得は賃金率 $w(t)$ のもとで労働量 $L(t)$ を生産活動に提供して受け取る分，すなわち，$w(t)L(t)$ となる。家計の資産所得は収益率 $r(t)$ で資産所得を稼得するがそれは企業の市場価値 $\eta D(t)$ と一致する。ゆえに，家計の総所得は $w(t)L(t)+r(t)\eta D(t)$ になる。一方，家計の総支出は総消費 $C(t)$ と貯蓄の総和である。貯蓄はR＆D部門に費やされる資源の量である投資 $\eta\dot{D}(t)$ と一致する。ゆえに，家計の総支出は $C(t)+\eta\dot{D}(t)$ になる。したがって，家計の予算制約式は次のように与えられる。

$$C(t)+\eta\dot{D}(t)=w(t)L(t)+r(t)\eta D(t).$$

また，(2.18)によって，

$$\dot{D}(t)=r(t)D(t)+\frac{w(t)N(t)(1-\phi(n(t)))}{\eta}-\frac{N(t)c(t)}{\eta} \tag{2.20}$$

となる。ただし，$C(t)=N(t)c(t)$.

家計は $(r(t))$，$(w(t))$ を所与とし，(2.19)の目的関数に関して，(2.20)の予算制約式と初期条件を制約条件として，以下の動学的最大化問題の解を求めようとする。

$$\max\int_0^\infty e^{-\rho t}\left(\log c(t)+\frac{n(t)^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}\right)dt.$$

subject to

$$\dot{D}(t)=r(t)D(t)+\frac{w(t)N(t)(1-\phi(n(t)))}{\eta}-\frac{N(t)c(t)}{\eta},$$
$$\dot{N}(t)=n(t)N(t),$$
$$D(0)=D_0>0,\ \ N(0)=N_0>0.$$

上記の動学的最大化問題を解くために，現在価値ハミルトニアンが次のように設定される。

$$\mathcal{H}(\mu_1,\ \mu_2,\ D,\ N,\ c,\ n,\ t)=\left(\log c+\frac{n^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}\right)+\mu_1\left(r(t)D+\frac{w(t)N(1-\phi(n))}{\eta}-\frac{Nc}{\eta}\right)+\mu_2[nN].$$

ここで，μ_1，μ_2 は未知補助変数である。最大化のための一階条件から以下の式が得られる。

$$\frac{1}{c(t)}-\mu_1(t)\frac{N(t)}{\eta}=0, \tag{2.21}$$

$$n(t)^{\varepsilon}-\mu_1(t)\frac{w(t)N(t)\phi'(n(t))}{\eta}+\mu_2N(t)=0, \tag{2.22}$$

$$\dot{\mu}_1(t)=\mu_1(t)\rho-\mu_1(t)r(t), \tag{2.23}$$

$$\dot{\mu}_2(t)=\mu_2(t)\rho-\mu_1(t)\left(\frac{w(t)(1-\phi(n(t)))}{\eta}-\frac{c(t)}{\eta}\right)-\mu_2(t)n(t), \tag{2.24}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\mu_1(t)D(t)=0, \qquad \lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\mu_2(t)N(t)=0. \tag{2.25}$$

3 定常状態

この節では，前節の分析で得られた結果に基づき，定常状態における経済変数の動きについての分析を行う。一般的に，すべての経済変数が一定の率で成長するとき，持続的均衡経路といわれる。さらに，このような成長状態を定常状態と呼ばれる。

ここでは，既に持続的均衡経路が存在していると前提する。したがって，家計の動学的最適化問題に関する一階条件から次の命題が得られる。

命題 1：定常状態では，一人当たり消費と生産物，およびデザインの数が同じ率で成長する。

〈証明〉 まず，一人当たり消費の成長率を導出する。(2.21) の両辺の対数をとり，時間で微分すると，

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=-\frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)}-\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$$

となる。(2.23) と定常状態における $N(t)$ の成長率 n^* を上式に代入すると，

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=r(t)-\rho-n^*$$

となる。また，定常状態では $L(t)=N(t)(1-\phi(n^*))$ となることを考慮し，(2.17) の $r(t)$ を上式に代入すると，次のような一人当たり消費の成長率が得られる。

$$\gamma_c=\frac{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}N(t)(1-\phi(n^*))}{\eta}-\rho-n^*. \tag{3.1}$$

ここで，γ_c は一人当たり消費の成長率を表す。以下，γ は下添え字の成長率を記す。上式の成長率が正であるためには $\frac{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}N(t)(1-\phi(n^*))}{\eta}>\rho+n^*$ という条件が必要である。

次に，一人当たり生産物の成長率とデザインの数の成長率はいかなる関係にあるのかについて考えることにしよう。一般均衡上での中間財は中間財の個数に関して対称的に等しいので，(2.1)に $x_i(t)$ の変わりに $x(t)$ を代入することができる。したがって，総生産物は

$$Y(t)=AL(t)^{\alpha}D(t)x(t)^{1-\alpha}$$

となる。また，(2.13)を上式に代入すると，

$$Y(t)=\mathrm{A}^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}L(t)D(t) \tag{3.2}$$

が得られる。さらに，両辺を $N(t)$ で割り，$L(t)=N(t)(1-\phi(n^*))$ を代入すると，

$$y(t)=A^{1/(1-\alpha)}\alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}D(t)(1-\phi(n^*)) \tag{3.3}$$

となる。ここで，$y(t)=Y(t)/N(t)$ は一人当たり生産物である。したがって，定常状態では $y(t)$ と $D(t)$ が同じ率で成長することになる。すなわち，

$$\gamma_y=\gamma_D \tag{3.4}$$

が成立する。次に，一人当たり消費の成長率とデザインの数の成長率との関係について考えることにしよう。(2.8)，(2.13)，および(2.17)により，家計の総所得 $w(t)L(t)+r(t)\eta D(t)$ は純生産物 $Y(t)-D(t)x(t)$ に一致する。よって，家計の予算制約式(2.20)から次式が得られる。

$$C(t)=Y(t)-x(t)D(t)-r(t)\eta D(t).$$

ここで，$x(t)D(t)$ は中間財に配分される資源の量であり，$r(t)\eta D(t)$ は研究・開発部門に配分される資源の量である。また，(2.13)，(2.17)，および(3.2)を上式に代入すると，

$$C(t)=L(t)D(t)A^{1/(1-\alpha)}[\alpha^{2\alpha(1-\alpha)}-\alpha^{2/(1-\alpha)}-(1-\alpha)\alpha^{2/(1-\alpha)}]$$

となる。ここで，括弧［ ］の中は正である。上式の両辺を $N(t)$ で割り，$L(t)=N(t)(1-\phi(n^*))$ を代入すると，

$$c(t)=A^{1/(1-\alpha)}D(t)(1-\phi(n^*))\psi$$

となる。ただし，$\psi\equiv[\alpha^{2\alpha(1-\alpha)}-\alpha^{2/(1-\alpha)}-(1-\alpha)\alpha^{2/(1-\alpha)}]$ である。したがって，定常状態では $c(t)$ と $D(t)$ が同じ率で成長することになる。すなわち，

$$\gamma_c=\gamma_D \tag{3.5}$$

が成立する。(3.1)，(3.4)，および(3.5)により，定常状態では次のことが成立する。

$$\gamma^*=\frac{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{(1+\alpha)/(1-\alpha)}N(t)(1-\phi(n^*))}{\eta}-\rho-n^*. \tag{3.6}$$

ここで，γ^* は定常状態における共通の成長率である。

Q.E.D.

次に，人口成長率が一人当たり消費と生産物の成長率，およびデザインの成長率との関係について述べることにしよう。その関係について，次の命題が得られる。

命題2：定常状態では，人口成長率は一人当たり消費と生産物の成長率やデザインの成長率との間に負の相関関係がある。

〈証明〉 (3.5)を n^* で微分すると，

$$\frac{d\gamma}{dn^*}=-\left(\frac{A^{1/\alpha}\alpha(1-\alpha)^2N(t)\phi'(n^*)}{\eta}+1\right)<0 \tag{3.7}$$

となる。したがって，命題 2 が成立する。

Q.E.D.

命題 3 ：定常状態では，人口成長率は次のように表される。

$$n^*=\left[(1-\alpha)\chi\left(\frac{\phi'(n^*)}{1-\phi(n^*)}-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{3.8}$$

ここで，$\chi\equiv y(t)/c(t)$ は命題 1 により定数である。

〈証明〉　まず，(2.21) を (2.22) に代入すると，

$$n^{\varepsilon *}-\frac{w(t)\phi'(n^*)}{c(t)}+\mu_2(t)N(t)=0$$

となる。また，(2.8) と (2.18) を上式に代入すると，

$$n^{\varepsilon *}-\frac{y(t)(1-\alpha)\phi'(n^*)}{c(t)(1-\phi(n^*))}+\mu_2(t)N(t)=0 \tag{3.9}$$

となる。上式の両辺の対数をとって時間で微分すると，

$$-n^*=\frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} \tag{3.10}$$

が得られる。さらに，上で得られた結果を (2.24) に代入して整理すると，

$$\rho=\frac{\mu_1(t)}{\mu_2(t)}\left(\frac{w(t)(1-\phi(n^*))-c}{\eta}\right) \tag{3.11}$$

となる。ここで，(2.21) からの $\mu_1(t)$，(3.8) からの $\mu_2(t)$ をそれぞれ上式に代入すると，

$$\rho\left(\frac{y(t)(1-\alpha)\phi'(n^*)}{c(t)(1-\phi(n^*))}-n^{\varepsilon *}\right)=(1-\alpha)\frac{y(t)}{c(t)}-1$$

となる。さらに，上式に $\chi=y(t)/c(t)$ を代入し，n^* に関して整理すると，以下のことが成立する。

$$n^*=\left[(1-\alpha)\chi\left(\frac{\phi'(n^*)}{1-\phi(n^*)}-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]^{\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{3.12}$$

したがって，命題 3 が成立する。

Q.E.D.

4　パレート最適な経済状況

本節では，前節の定常状態がパレート最適ではないことを明らかにする。

さて，パレート最適な経済状況における最終財生産関数は次のように表される。

$$Y(t)=AL(t)^{1-\alpha}D(t)x(t)^{\alpha}$$

したがって，家計には以下の予算制約式が与えられる。

$$C(t)=AL(t)^{1-\alpha}D(t)x(t)^{\alpha}-\eta\dot{D}(t)-D(t)x(t).$$

また，$L(t)=N(t)(1-\phi(n(t)))$ を考慮に入れると，

$$\dot{D}(t)=\frac{1}{\eta}\{A[N(t)(1-\phi(n(t))]^{1-\alpha}D(t)x(t)^{\alpha}-D(t)x(t)-N(t)c(t)\} \tag{4.1}$$

となる。さらに，初期条件 $D(0)=D_0>0$ や $N(0)=N_0>0$ が家計に与えられる。したがって，パレート最適な経済では，前節の目的関数(2.19)に関して，(4.1)の予算制約式と初期条件を制約条件とし，以下の動学的最大化問題の解が求められることになる。

$$\max\int_0^{\infty}e^{-\rho t}\left[\log c(t)+\frac{n(t)^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}\right]dt$$

subject to

$$\dot{D}(t)=\frac{1}{\eta}\{A[N(t)(1-\phi(n(t)))]^{1-\alpha}D(t)x(t)^{\alpha}-D(t)x(t)-N(t)c(t)\},$$

$$\dot{N}(t)=n(t)N(t),$$

$$D(0)=D_0>0,,\ \ N(0)=N_0>0.$$

上記の動学的最大化問題を解くために現在価値ハミルトニアンが次のように設定される。

$$\mathcal{H}(\mu_1,\ \mu_2,\ D,\ N,\ c,\ x,\ n,\ t)=\left(\log c+\frac{n^{1-\varepsilon}-1}{1-\varepsilon}\right)+\mu_1\frac{1}{\eta}\{A[N(1-\phi(n)]^{1-\alpha}x^{\alpha}D-Dx-Nc\}+\mu_2(nN).$$

ここで，μ_1，μ_2 は未知補助変数である。

そうすると，最大化のための一階条件から以下の式が得られる。

$$\frac{1}{c(t)}-\mu_1(t)\frac{N(t)}{\eta}=0, \tag{4.2}$$

$$n^{-\varepsilon}(t)-\frac{\mu_1(t)}{\eta}\{AN(t)^{1-\alpha}(1-\alpha)(1-\phi(n(t))^{-\alpha}\phi'(t)x(t)^{\alpha}D(t)\}+\mu_2(t)N(t)=0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\mu_1(t)}{\eta}\{\alpha A[N(t)(1-\phi(n(t)))]^{1-\alpha}x(t)^{1-\alpha}D(t)-D(t)\}=0, \tag{4.4}$$

$$\dot{\mu}_1(t)=\mu_1(t)\rho-\frac{\mu_1(t)}{\eta}\{A[N(t)(1-\phi(n(t)))]^{1-\alpha}x(t)^{\alpha}-x(t)\}, \tag{4.5}$$

$$\dot{\mu}_2(t)=\mu_2(t)\rho-\frac{\mu_1(t)}{\eta}A(1-\phi(n(t)))^{1-\alpha}x(t)^{\alpha}D(t)-x(t)\}-\mu_2(t)n(t), \tag{4.6}$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\mu_1(t)D(t)=0, \qquad \lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\mu_2(t)N(t)=0. \tag{4.7}$$

まず，横断性条件の性質により，$\mu_1(t)D(t)\neq 0$ や $\eta\neq 0$ であるので，(4.4)から次のことが成立する。

$$\alpha^{1/(1-\alpha)}A^{1/(1-\alpha)}N(t)(1-\phi(n^*))=x(t). \tag{4.8}$$

さらに，上式を(4.4)式に代入すると，

$$\dot{\mu}_1(t)=\mu(t)\rho-\frac{\dot{\mu}_1(t)}{\eta}\{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{1/(1-\alpha)-1}N(t)(1-\phi(n^*))\} \tag{4.9}$$

が得られる。一方，(4.2)から，

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=-\frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)}-\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$$

が得られる。上式に(4.9)を代入すると，次式が得られる。

$$\gamma_c^s=\frac{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{1/(1-\alpha)-1}N(t)(1-\phi(n^*))}{\eta}-\rho-n^* \tag{4.10}$$

ここで，γ_c^s はパレート最適な経済状態における消費の成長率である。前節と同様に定常状態では，一

人当たり消費の成長率や一人当たり生産物の成長率，およびデザインの成長率が一定かつ同じ率で成長するので，パレート最適な経済における共通の成長率 γ^s は，

$$\gamma^s = \frac{A^{1/(1-\alpha)}(1-\alpha)\alpha^{1/(1-\alpha)-1}N(t)(1-\phi(n^*))}{\eta} - \rho - n^* \tag{4.11}$$

となる。上式を(3.6)と比較してみると，以下のことが言える。

$$\gamma^s > \gamma^*.$$

以上のことから，分権化された経済における持続的均衡経路に付随する共通成長率とパレート最適な経済における均斉均衡経路に付随する共通成長率の間に乖離が存在することが確認できる。その原因は，分権化された経営では独占価格付けによる経済学的歪みが存在し，市場の失敗が発生するためであると思われる。このような経済的歪みを解消し，パレート最適な資源の配分を達成するために政府の政策介入が必要であると考えられる。

さて，パレート最適な経済のもとで均斉均衡経路上に付随する人口経済率を導入し，分権化された経済のもとでの人口成長率と比べてみると，次の命題が得られる。

命題４：分権化された経済のもとでの人口成長率とパレート最適な経済のもとでの人口成長率は同じである。

〈証明〉 まず(4.8)の両辺の対数をとって時間で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}.$$

よって，$x(t)$ と $N(t)$ は同じ率 n^* で成長することがわかる。また(4.2)を(4.3)に代入し，両辺の対数をとって時間で微分すると次式が得られる。

$$(1-\alpha)\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{D}(t)}{D(t)} + \alpha\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} - \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} + \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}.$$

均斉均衡経路上で $c(t)$ と $D(t)$ が同じ率で成長することを考慮にいれ，上式に $x(t)$ と $N(t)$ の成長率 n^* を代入し，整理すると，

$$\frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} = -n^*$$

となる。また，均斉均衡経路上の総生産物は次のように与えられる。

$$Y(t) = AN(t)^{1-\alpha}(1-\phi(n^*))^{1-\alpha}D(t)x(t)^{\alpha}. \tag{4.12}$$

これを次のように変形すると，

$$(1-\alpha)y(t) = (1-\alpha)AN(t)^{-\alpha}(1-\phi(n^*))^{1-\alpha}D(t)x(t)^{\alpha}$$

となる。上式を(4.6)に代入し，整理すると，

$$\rho = \frac{\mu_1(t)}{\eta\mu_2(t)}[(1-\alpha)y(t) - c(t)] \tag{4.13}$$

となる。さらに，(4.12)を(4.3)に代入すると，

$$n^{*\epsilon} - \frac{(1-\alpha)\phi'(n^*)y(t)}{(1-\phi(n^*))c(t)} + \mu_2 N(t) = 0 \tag{4.14}$$

となる。ここで，(4.2)と(4.14)を(4.13)に代入し，n^* に関して整理すると，次式が得られる。

$$n^*=\left[(1-\alpha)\chi\left(\frac{\phi'(n^*)}{1-\phi(n^*)}-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]^{1/\varepsilon} \tag{4.15}$$

分権化された経済における人口成長率(3.12)と上式を比較してみると，同じであることがわかる。したがって，命題4が成立する。

Q.E.D.

5 おわりに

本稿では，内生的技術進歩モデルを用い，家計の効用関数に子供の養育費用を組み込むことによって人口成長率が内生的に決定されるモデルが展開され，以下の結果が得られた。

(1) 一人当たり消費，一人当たり生産物，およびデザインの数が同じ率で成長する。

(2) 人口成長率と一人当たり消費と生産物の成長率およびデザインの成長率との間には負の相関数関係が存在する。

(3) 人口成長率は中間財と労働の配分を表わす α が低いほど高くなる。また，子供の養育費用 ϕ と主観的時間選好率 ρ が低いほど高くなる。

(4) 分権化された経済のもとでの人口成長率とパレート最適な経済のもとでの人口成長率は同じである。

本稿では子供の養育関数が $\phi''(n)>0$ であることを仮定して議論が展開された。しかし，子供の養育関数が $\phi''(n)>0$ であるかどうかについては現在明らかになっていない。子供の養育関数が $\phi''(n)<0$ であると仮定した場合，複数の均衡解が現れる可能性が高い。それが今後の課題として残されている。

参考文献

(1) Barro, R. J. and G. S. Becker, (1989) "Fertility Choice in a Model of Economic Growth", *Econometrica*, vol. 57, 481-501.

(2) Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin, (1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill. (大住圭介 (1998, 1999) 訳『内生的経済成長論Ⅰ，Ⅱ』九州大学出版会.)

(3) Becker, G. S., K. M. Murphy, and R. Tamura, (1990) "Human Capital, Fertlity, and Economics Growth", *Journal of Political Economy*, vol.98, no.5, S122-S37.

(4) Jones, Charles I., (1995) "R&D-Based Models of Economic Growth", *Journal of Political Economy*, vol.103, no.4, 759-784.

(5) Jones, Charles I., (1999) "Population and Idea: A Theory Endogenous Growth", Mimeo, Stanford University.

(6) Morand, O. F., (1999) "Endogenous Fertility, Income Distribution and Growth", *Journal of Economic Growth*, vol.4, 331-349.

(7) Palivos, T, (1995) "Endogenous Fertility, Multiple Growth Paths, and Economic Convergence", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.19, 1489-1510.

(8) Romer, P. M., (1990) "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, vol.98, no.5, S71-S102.

(9) Yip, C, K. and J Zhang, (1996) "Population Growth and Economic Growth", *Economics Letters*, vol.52, 319-324, 1996.

(10) Yip, C, K. and J Zhang, (1997) "A Simple Endogenous Growth Model with Endogenous Fertility: Indeter-

minacy and Uniqueness", *Journal of Population Economics*, vol.10, 97-110.

(11) 大住圭介・片桐昭司・南　光鉉（1998)「Ｒ＆Ｄ政策と内生的経済成長」西日本理論経済学会編『現代経済研究』第７号　勁草書房，21-40ページ。

(12) 南　光鉉(2000)「技術拡散と内生的技術進歩モデル」『経済論究』第106号　九州大学大学院経済学会，81-93ページ。