公共投資と経済の内生的成長に関する理論的分析

林, 哲広

https://doi.org/10.15017/3000208

出版情報：経済論究. 103, pp.105-119, 1999-03-31. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

公共投資と経済の内生的成長に関する理論的分析

林　　　哲　広

目次

1　はじめに

本稿は，経済分析でしばしば用いられる，オーバーラッピング・ゼネレーションズ・モデル（OGM）を使用して，経済成長理論における長期均衡に関する議論を展開している．OGMを使用する利点は数世代が１期間に存在するというOGMの仮定で，通常の１期間１世代のモデルに比べより多様な現実的妥当性を持つ分析が可能になることである．例えば，世代間にわたる経済活動（または経済現象）の分析がOGMを使用することで可能になること等を挙げることができる．

OGMは最初にSamuelson［1958］において純粋交換的な体系で提示された．その後，Samuelson［1958］のOGMはDiamond［1965］において離散型のソロー・モデルと統合され，OGMは生産活動を明示的に取り扱うモデルへと発展することになった．さらに，近年ではGalor and Ryder［1989］において経済の長期均衡の分析がOGMを用いて行われており，またAzariadis[1993]において内生的成長理論がOGMにより展開されている．そして，Azariadis［1993］においては1993年までのOGMに関する文献の集大成が行われた．このように，OGMは集大成を見たけれども，その後現在に至ってもOGMを用いた経済分析が活発に行われている．例えば，Freeman［1996］ではOGMを使用して所得格差の発生等に関する研究を行っている．

また，現在，経済成長理論の分野で経済発展に果たすインフラストラクチャーの役割がしばしば議論の焦点となっている．インフラストラクチャーとは，発展の障害となっていた経済の構造を改善し，広く生産活動などの経済活動を促進する側面を有する資本ストックである．そして，このようなインフラストラクチャーはその特性によって幾つかに分類することができる．すなわち，鉄道のような伝統的なものから人的資本インフラストラクチャー，特許制度といった制度的インフラストラクチャー，および公共的に行われる共同研究や発展計画のような技術的インフラストラクチャー等を挙げることができる．より具体的に，内陸部から港湾に至る鉄道の敷設や特許制度の創設等を考えてみる．すなわち，内陸部から港湾に到る鉄道の敷設は内陸部の農産物を輸出可能にすることで農業を活発にする．また，特許制度はある企業の研究開発の成果を他の企業のただ乗りから保護することで，企業の研究

開発活動を促進するといえる.

インフラストラクチャーに関する文献として, Rosenstein-Rodan[1943], Justman[1995], Justman and Teubal [1995] 等を挙げることができる. また, 各国はインフラストラクチャーをおもに政府の投資活動により供給している. 公共投資を考慮した経済成長モデルに関する文献としては, Uzawa [1965], Arrow and Kurz[1970], Easterly and Rebelo[1993], Devarajan,Swaroop and Zou[1996], Fielding and Mizen [1997], Otto and Voss [1998] 等がある.

本稿では,OGMの理論的拡張を行い,内生的成長理論の枠組みを使用して,インフラストラクチャーが経済の長期均衡に与える効果の分析を企図している.

従来, 経済に公共投資を組み込んで, インフラストラクチャーが経済の長期均衡に与える影響の分析をAzariadis [1993] が直観的に行っていた. 本稿では, Azariadis [1993] の直観的な議論を数理的により厳密に展開し直すことを試みている. そして, インフラストラクチャーは安定な長期均衡を拡大させ公共投資は持続的な経済成長に貢献するという新たな理論的結果を得ることができた.

2　オーバーラッピング・ゼネレーションズ・モデルの説明

まず, OGMの説明を行う. 離散型の経済モデルにおいて完全競争の世界を想定する. 任意の時点で, 1つの財を資本, 若年労働及び老年労働という3つの生産要素を用いて生産しているものとする.

まず, 労働についての定義を行う. t 期においては, l_t の個人が誕生し $t+1$ 期まで2期間にわたり生存する. 第1期において, 彼らは労働を行い労働市場から賃金 w_t^y を稼得する. 第2期に, 彼らは一度労働市場から引退するが, 再雇用という形で労働市場に参入せざるをえない社会を想定する. そして, 老年労働は生産性の点で若年労働に劣るものとする. t 期に誕生した個人は t 期においては若年労働であり, $t+1$ 期では老年労働である. すなわち, t 期の若年労働は t 期に誕生した労働であり, t 期の老年労働は $t-1$ 期に誕生した個人の労働である. $n_t \geq 0$ を t 期の人口成長率とする. このとき, t 期に誕生した個人数 l_t を外生的に次式で与える.

$$l_t=(1+n_t)l_{t-1}, \tag{2.1}$$

また, t 期に投入される総労働 L_t を若年労働 L_t^y, 老年労働 L_t^o で構成する. $L_t^y=l_t$, $L_t^o=l_{t-1}$ が定義から成立するため, L_t を次のように表現する.

$$L_t=L_t^y+L_t^o=l_t+l_{t-1}. \tag{2.2}$$

また, 次式は総労働の増加率を表す.

$$\frac{L_t}{L_{t-1}}-1=\frac{l_t+l_{t-1}}{(l_{t-1}+l_{t-2})}-1=\frac{(2+n_t)l_{t-1}}{\left\{l_{t-1}+\dfrac{l_{t-1}}{(1+n_{t-1})}\right\}}-1=\frac{2+n_t}{\left(\dfrac{2+n_{t-1}}{1+n_{t-1}}\right)}-1. \tag{2.3}$$

ここで, $n_t=n_{t-1}(=n)$ の場合に限り, 総労働に関して次式が成立する.

$$L_t=(1+n)L_{t-1}. \tag{2.4}$$

次に, 資本減耗率 $(0 \leq \delta \leq 1)$ を外生的に与える. そして, Y_t, $C_t(t=1,2,\cdots)$ をそれぞれ t 期における総生産, 総消費を表すものとする. ここで, 次のような仮定を行う. すなわち, 消費財1単位は最

終財1単位の変形したものである．さらに，資本1単位も最終財1単位の変形したものである．したがって，最終財，消費財，資本は全て同質であり，各財の価格は均等になる．このとき，マクロ的に t 期における総資本 K_t は $t-1$ 期に消費されなかった財に等しい．以上より，マクロ的な t 期の財市場の均衡式は次式のようになる．

$$K_{t+1}=Y_t+(1-\delta)K_t-C_t. \tag{2.5}$$

次に，企業行動の記述を行う．企業は規模に関して収穫一定の生産関数に従って，1期間のうちに生産を行うものとする．そして，生産関数を通時的に不変とし次のように表す．

$$Y=F(K, L^y, L^o). \tag{2.6}$$

ただし，関数 F は (K, L^y, L^o) に関して一次同次とする．また，t 期の生産関数は次のようになる．

$$Y_t=F(K_t, L_t^y, L_t^o). \tag{2.7}$$

ここで，F_K, F_{L^y}, F_{L^o} を K, L^y, L^o に関する関数 F の1階の偏導関数とする．このとき，老年労働は生産性の点で若年労働に劣るため次式が成立する．

$$F_{L^y}>F_{L^o}. \tag{2.8}$$

また，労働の定義より次式が成立する．

$$\frac{L_t^y}{L_t}+\frac{L_t^o}{L_t}=1. \tag{2.9}$$

そして，$k_t=\dfrac{K_t}{L_t}$，$\tau_t^j=\dfrac{L_t^j}{L_t}(j=y,\ o)$ と定義すると，生産関数を次のように表現できる．

$$Y_t=F(K_t, L_t^y, L_t^o)=L_tF(k_t, \tau_t^y, \tau_t^o)=L_tF(k_t, \tau_t^y, 1-\tau_t^y)=L_tf(k_t, \tau_t^y). \tag{2.10}$$

ただし，関数 f を次のように定義している．

$$f(k, \tau^y)=F(k,\ \tau^y, 1-\tau^y). \tag{2.11}$$

そして，関数 f は2階連続微分可能な k，τ^y に関して正の増加関数で，狭義の凹な関数とする．ここで，f_k，f_{τ^y} をそれぞれ $f(k, \tau^y)$ の k，τ^y に関する1階の偏導関数とする．また，f_{kk}，$f_{k\tau^y}$，$f_{\tau^y\tau^y}$ をそれぞれ $f(k_t, \tau_t^y)$ の2階の偏導関数とする．そして，これらを次のように仮定する．ただし，$\tau^y=\tau$ とする．

$$f(k, \tau)>0,\ f_k>0,\ f_\tau>0,\ f_{kk}<0,\ f_{k\tau}>0,\ f_{\tau\tau}<0,\ k>0,\ \tau\in[0, 1]. \tag{2.12}$$

また，ある定数 α に対して，$\lim\limits_{k\to\infty} f(k, \tau)=\alpha$ とし，次のことを仮定する．

$$\lim_{k\to 0} f(k, \tau)=0,\ \lim_{k\to 0} f_k=\infty,\ \lim_{k\to\infty} f_k=0. \tag{2.13}$$

企業は完全競争の状況に直面しており，利潤 π を最大にするように行動するものとする．すなわち，企業は次式を最大にするように行動する．

$$\pi=F(K, L^y, L^o)-mK-W^yL^y-W^oL^o. \tag{2.14}$$

ただし，利潤と資本のユーザーコストをそれぞれ π，m とする．そして，若年労働の賃金，老年労働の賃金，利子率をそれぞれ W^y，W^o，r とする．さらに，最終財価格と資本財価格を1とする．ここで，t 期の企業は次式を最大にする．

$$\pi_t=F(K_t,\ L_t^y,\ L_t^o)-m_tK_t-W_t^yL_t^y-W_t^oL_t^o. \tag{2.15}$$

また，次式は資本市場の均衡式である．

$$m_t-\delta=r_t. \tag{2.16}$$

若年労働，老年労働，資本サービスの市場はそれぞれ競争的と仮定する．また，各要素は限界生産物に等しい報酬を得るものとする．したがって，資本のユーザーコストに関して次式が成立する．

$$\frac{m_t}{P_t}=r_t+\delta=F_{K_t}=L_tf_{k_t}\frac{\partial k_t}{\partial K_t}=f_{k_t}. \tag{2.17}$$

したがって，利子率は次式のようになる．

$$r_t=r(k_t,\ \tau_t^y)=f_{k_t}-\delta. \tag{2.18}$$

さらに，$\frac{W_t^y}{P_t}=w_t^y$，$\frac{W_t^o}{P_t}=w_t^o$ とする．そのとき，若年労働の賃金と老年労働の賃金に関してそれぞれ次式が成立する．

$$w_t^y=w^y(k_t,\ \tau_t^y)=F_{L_t^y}=f(k_t,\ \tau_t^y)+L_tf_{\tau_t^y}\frac{\partial\tau_t^y}{\partial L_t^y}+L_tf_{\tau}k_t\frac{\partial K_t}{\partial L_t}\frac{\partial L_t}{\partial L_t^y}=f(k_t,\ \tau_t^y)+f_{\tau_t^y}-k_tf_{k_t}, \tag{2.19}$$

$$w_t^o=w^o(k_t,\ \tau_t^y)=F_L^0=f(k_t,\ \tau_t^y)-\tau_t^yf_{\tau_t^y}-k_tf_{k_t}. \tag{2.20}$$

ただし，関数 r，w^y，w^o を次のように定義している．

$$r(k,\ \tau^y)=f_k-\delta, \tag{2.21}$$

$$w^y(k,\ \tau^y)=f(k,\ \tau^y)+f_{\tau^y}-kf_k, \tag{2.22}$$

$$w^o(k,\ \tau^y)=f(k,\ \tau^y)+\tau^yf_{\tau^y}-kf_k. \tag{2.23}$$

また，次式が成立している．

$$w_t^y\geq w_t^o. \tag{2.24}$$

この関係は $F_{L^y}\geq F_{L^o}$ の仮定と整合的である．

次に，家計の行動について記述を行う．生涯効用 u を第１期，第２期の生存期間中に行う非負の消費 c^1，c^2 に対して定義する．すなわち，

$$u=u(c^1,\ c^2). \tag{2.25}$$

ただし，t 期では次式が成立する．

$$u_t=u(c_t^1,\ c_{t+1}^2). \tag{2.26}$$

このとき，t 期に誕生する個人は生涯効用 u_tを最大にするように行動する．ただし，個人はそれぞれ異質な効用関数に直面しているとする．効用関数は２階連続微分可能であり，消費の組 c^1，c^2 の領域で狭義に準凹である．また，効用関数は c^1，c^2 に関して増加関数であると仮定する．ここで，u_1，u_2 をそれぞれ c^1，c^2 に関する u の偏導関数を表すとする．このとき，次式が成立する．

$$u_1(c^1,\ c^2)>0,\ u_2(c^1,\ c^2)>0. \tag{2.27}$$

また，消費は現在，将来ともに通常財である．さらに，u_1，u_2 に関して次のような仮定を行う．

$$\lim_{c^1\to 0}u_1(c^1,\ c^2)=\infty,\ c^2>0, \tag{2.28}$$

$$\lim_{c^2\to 0}u_2(c^1,\ c^2)=\infty,\ c^1>0. \tag{2.29}$$

t 期に誕生する個人は第１期に所得 w_t^y を稼得する．そして，w_t^y を第１期の消費 c_t^1 と貯蓄 s_t に分配する．したがって，次式が成立する．

$$s^t=w_t^y-c_t^1. \tag{2.30}$$

第1期の貯蓄は第2期に利息 r_{t+1} を生み出す．t 期に誕生する個人は，これらを第2期での消費のために w^o_{t+1} とともに用いる．また，t 期に誕生する個人は将来を完全予見できるとする．したがって，t 期に誕生する個人は第2期に確定される利子率 r_{t+1} と賃金率 w^o_{t+1} を第1期において完全に予測できる．以上を踏まえ，第2期の消費 c^2_{t+1} を次式で定義する．

$$c^2_{t+1}=(1+r_{t+1})s_t+w^o_{t+1}. \tag{2.31}$$

ここで，t 期に誕生する個人は生涯効用 u_t を最大にするように貯蓄を決定する．すなわち，

$$s_t=s(w^y_t,\ w^o_{t+1},\ r_{t+1})=arg\ max\ u[w^y_t-s_t,\ (1+r_{t+1})s_t+w^o_{t+1}]. \tag{2.32}$$

ただし，関数 s を次のように定義している．

$$s(w^y,\ w^o,\ r)=arg\ max\ u[w^y-s,\ (1+r)s+w^o]. \tag{2.33}$$

ところで，s_t は t 期の代表的な家計の貯蓄行動を記述しているとする．また，個人は第1期に貯蓄を行う．

次に，システムを表現する式を導出する．一般に，離散型では1期間を数十年の長さと想定する．したがって，資本減耗率に関して次式が成立する．

$$\delta=1. \tag{2.34}$$

このことより，(2.5)式を，次のように表せる．

$$K_{t+1}=Y_t-C_t. \tag{2.35}$$

また，次式は総貯蓄 S_t の定義式である．

$$S_t\equiv Y_t+(1-\delta)K_t-C_t. \tag{2.36}$$

したがって，

$$K_{t+1}=Y_t-C_t=S_t. \tag{2.37}$$

また，総貯蓄 S_t に関して次式が成立すると仮定する．

$$S_t=L^y_t s_t. \tag{2.38}$$

ここで，上式の両辺を L_t で割る．

$$\frac{K_{t+1}}{L_t}=\frac{S_t}{L_t}. \tag{2.39}$$

したがって，次式を得る．

$$\frac{(2+n_t)(1+n_{t-1})}{(2+n_{t-1})}k_{t+1}=\frac{L^y_t s_t}{L_t}=\tau_t s(w^y_t,\ w^o_{t+1},\ r_{t+1}). \tag{2.40}$$

1部門OGMは，経済主体として家計と企業を考慮したモデルである．(2.40)式はこのモデルのシステムを表現する．したがって，一般的に(2.40)式を基本成長式と呼んでいる．

ここで，関数 s について以下のように仮定する．

$$s(w^y_{t+1},\ w^o_{t+1},\ 0)=0,\ \forall w^y_t,\ w^o_{t+1}\geq 0, \tag{2.41}$$

$$s(w^y_t,\ 0,\ r_{t+1})\geq 0,\ \forall w^y_t,\ r_{t+1}\geq 0, \tag{2.42}$$

$$s(0,\ w^o_{t+1},\ r_{t+1})\geq 0,\ \forall w^o_{t+1},\ r_{t+1}\geq 0. \tag{2.43}$$

また，s_{w^y}，s_{w^o}，s_r はそれぞれ，若年者の賃金 w，老年者の賃金 w^o，利子率 r に関する関数 s の偏導関数である．ここで，関数 s の偏導関数について次式のような仮定を行う．

$$s_{w^y} \in (0,\ 1),\ s_{w^o} \in (-1,\ 0),\ s_r > 0. \tag{2.44}$$

3　公共投資を考慮したモデルの設定

この節では、公共投資を考慮したOGMの設定を行う．そこで，前節のモデルを次のように変更する．個人は第２期に労働市場への参入を行わない．すなわち，若年労働のみが労働市場に存在する．次式はこのことを表す．

$$L_t = L_t^y,\ L_t^o = 0. \tag{3.45}$$

したがって，本節では総人口と総労働は一致しない．そして，この仮定より t 期に誕生する個人は第１期の賃金 $w_t^y = w_t$ を稼得するのみである．また，人口成長率は毎期等しいとする．したがって，次式を得る．

$$n_t = n_{t+1} = n. \tag{3.46}$$

また，Rosenstein-Rodan [1943] では，政府資本を次のように定義する．すなわち，政府資本は民間部門の生産活動を補完し，その生産性を上昇させる働きを持つ．そして，政府資本は民間部門の生産活動にとって必要不可欠のものである．本論文も，Rosenstein-Rodan [1943] のように政府資本を定義する．ところで，インフラストラクチャーの多くは公共財の性質を有する．したがって，現実に政府がインフラストラクチャーの多くを供給している．以上を踏まえ，本稿は政府資本をインフラストラクチャーであると定義する．

ここで，t 期の政府資本ストックを G_t によって表す．企業の生産活動は民間部門の投入ベクトル $(K,\ L)$ に加えて，公的部門の投入 $g = \dfrac{G}{L}$ に依存すると仮定する．このとき，企業は政府資本の利用に際し一定の対価を政府に支払っているとする．生産関数 $F(K,\ L,\ g)$ は規模に関して収穫逓増であり，$(K,\ L)$ に関して一次同次とする．また，それは g に関して収穫逓増であり，すべての投入に関しては凹関数とする．そして，どの３つの投入も生産活動において不可欠であり，いずれかの投入がゼロのとき産出はゼロになると仮定する．以上を踏まえ，連続微分可能な生産関数を次のように定義する．

$$f(k,\ g) = F\left(\frac{K}{L},\ 1,\ g\right). \tag{3.47}$$

したがって，ｔ期の生産関数を次式で表す．

$$Y_t = F(K_t,\ L_t,\ g_t) = L_t F\left(\frac{K_t}{L_t},\ 1,\ g_t\right) = L_t f(k_t,\ g_t). \tag{3.48}$$

そして，政府資本の定義に沿って，その偏導関数 f_k，f_g，f_{kg} は次の仮定を満たすとする．

仮定１　$f_k > 0 \quad f_g > 0 \quad f_{kg} > 0$

仮定２　$f_g - kf_{kg} > 0.$

この仮定により，資本の限界生産性 f_k と労働の限界生産性 $f - kf_k$ は g の増加関数となる．また，政府は政府資本からの収入を全て企業に還付する．ここで，t 期の企業は次式を最大にするように行動する．

$$\pi_t = F(K_t,\ L_t,\ g_t) - m_t K_t - w_t L_t. \tag{3.49}$$

さらに，次式が競争的要素市場で成立する．

$$r_t = r(k_t,\ g_t) = f_k(k_t,\ g_t) - \delta, \tag{3.50}$$

$$w_t = w(k_t,\ g_t) = f(k_t,\ g_t) - k_t f_k(k_t,\ g_t) \tag{3.51}$$

ただし，関数 r，w をそれぞれ次のように定義する．

$$r(k,\ g) = f_k(k,\ g) - \delta, \tag{3.52}$$

$$w(r,\ g) = f(k,\ g) - k f_k(k,\ g). \tag{3.53}$$

公共投資は次のような活動とする．すなわち，1単位の消費財(労働所得に賦課する1単位の租税)を用いて1単位の政府資本を生産する活動である．そして，政府は均衡予算を維持しつつ公共投資を行う．同様に，民間部門が行う投資活動も1単位の消費財を用いて1単位の民間資本を生産する活動であるとする．また，政府資本は民間資本の減耗率と同じ割合 $\delta \in [0,\ 1]$ で減耗する．

t 期の政府投資を I_t とする．そして，ある一定の政府投資率 $i\left(=\dfrac{I_t}{L_t}\right) \geq 0$ を外生的に与える．ここで，次式が成立する．

$$G_{t+1} = G_t - \delta G_t + I_t. \tag{3.54}$$

両辺を L_t で割ると，次のようになる．

$$\frac{L_{t+1}}{L_t}\frac{G_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{G_t}{L_t} - \delta\frac{G_t}{L_t} + \frac{I_t}{L_t}. \tag{3.55}$$

したがって，次式を得る．

$$(1+n)g_{t+1} = (1-\delta)g_t + i. \tag{3.56}$$

また，離散型では $\delta = 1$ である．以上より，システムを表す第1番目の式は次のようになる．

$$(1+n)g_{t+1} = i. \tag{3.57}$$

また，家計は貯蓄を可処分所得から行うとする．そして，賃金に賦課する租税 ξ は外生的に一定である．t 期では，家計の可処分所得 w_t^d は次のようになる．

$$w_t^d = w_t - \xi. \tag{3.58}$$

政府は消費活動を全く行わず税収を全て投資に使用する．すなわち，次式が成立する．

$$\xi = i. \tag{3.59}$$

したがって，家計の可処分所得は次のようになる．

$$w_t^d = w(k_t,\ g_t) - i. \tag{3.60}$$

このとき，貯蓄関数 s を次のように再定義する．

$$s(r,\ w-i) = arg\ max\ u[w-i-s,\ (1+r)s]. \tag{3.61}$$

したがって，t 期では次式が成立する．

$$s_t = s[r(k_{t+1},\ g_{t+1}),\ w(k_t,\ g_t)-i] = arg\ max\ u[w_t - i - s_t,\ (1+r_{t+1})s_t]. \tag{3.62}$$

貯蓄関数 s に関して次のような仮定を行う．

$$s_r > 0,\ s_{w^d} > 0,\ s_i > 0. \tag{3.63}$$

ここで，t 期のマクロ的な財市場の均衡式は次のようになる．

$$K_{t+1} = Y_t + (1-\delta)K_t - \xi L_t - C_t. \tag{3.64}$$

ただし，ξL_t は t 期の租税総額である．また，t 期の総貯蓄の定義は次式である．

$$S_t = Y_t + (1-\delta)K_t - \xi L_t - C_t. \tag{3.65}$$

以上より，$\delta=1$ に注意すると次式を得る．

$$K_{t+1} = S_t. \tag{3.66}$$

上式の両辺を L_t で割ると次式が成立する．ただし，$n_t = n_{t-1}(=n)$ とする．

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{S_t}{L_t}. \tag{3.67}$$

また，次式が成立している．

$$\frac{S_t}{L_t} = s_t. \tag{3.68}$$

したがって，次式を得る．

$$(1+n)k_{t+1} = s[r(k_{t+1},\ g_{t+1}),\ w(k_t,\ g_t) - i]. \tag{3.69}$$

これはシステムを表す第 2 番目の式である．

4　公共投資による経済の長期均衡の動学的挙動に対する影響についての分析

この節では，公共投資が与える経済の長期均衡の動学的挙動に対する影響について，分析が試みられる．

(3.57)式の i を(3.69)式に代入すると，次式を得る．

$$(1+n)k_{t+1} = s[r(k_{t+1},\ g_{t+1}),\ w(k_t,\ g_t) - (1+n)g_{t+1}]. \tag{4.70}$$

ここで，(3.57)，(3.69)式より位相図を描くことを試みる．

まず，線上で政府資本が動学的に不変である位相図を描く．

$$g_{t+1} \geq g_t \Leftrightarrow \frac{i}{(1+n)} \geq g_t. \tag{4.71}$$

同様にして，次式を得る．

$$g_{t+1} < g_t \Leftrightarrow g_t > \frac{i}{(1+n)}. \tag{4.72}$$

図 1 (b)の位相図 GG はこの関係を表現する．図中の矢印→は政府資本の動学的な変化の方向を表す．

次に，民間資本が線上で動学的に不変となる位相図を描く．関数 s は r に関して増加関数であると仮定する．そして，次のような展開を試みる．

$$\begin{aligned} &k_{t+1} \geq k_t \Leftrightarrow \\ &\quad 0 = (1+n)k_{t+1} - s[r(k_{t+1},\ g_{t+1}),\ w(k_t,\ g_t) - (1+n)g_{t+1}] \\ &\quad \geq (1+n)k_t - s[r(k_t,\ g_t),\ w(k_t,\ g_t) - (1+n)g_t]. \end{aligned} \tag{4.73}$$

ただし，$g_{t+1} = g_t(=g)$ とする．ここで，関数 Z を次のように定義する．

$$Z(k,\ g) = (1+n)k - s[r(k,\ g),\ w(k,\ g) - (1+n)g]. \tag{4.74}$$

また，関数 Z に関して t 期では次式が成立する．

$$Z(k_t,\ g_t) = (1+n)k_t - s[r(k_t,\ g_t),\ w(k_t,\ g_t) - (1+n)g_t]. \tag{4.75}$$

ただし，仮定1，2より関数Zはgに関して減少関数となる．したがって，次式を得る．

$$k_{t+1} \geq k_t \Leftrightarrow Z(k_t,\ g_t) \leq 0. \tag{4.76}$$

同様に，$k_{t+1} < k_t$ のとき次式が成立する．

$$k_{t+1} < k_t \Leftrightarrow Z(k_t,\ g_t) > 0. \tag{4.77}$$

以上より，$(k_t,\ g_t)$ 平面上での民間資本の挙動が判明した．図1(c)のKK線は $Z(k_t,\ g_t)=0$ のときのものである．図中の矢印→は民間資本 k_t の挙動を表す．

次に，任意の $g_{t+1}=g_t(=g)$ に対する (k_t, k_{t+1}) 平面上での k_t の挙動を考察する．g が定数であることに注意して，次式を k_{t+1} について解く．

$$(1+n)k_{t+1} = s[r(k_{t+1}, g), w(k_t, g) - (1+n)g]. \tag{4.78}$$

このとき，次式を得る．

$$k_{t+1} = \Phi(k_t, g). \tag{4.79}$$

ただし，関数 Φ を次のように定義する．

$$k = \Phi(k, g). \tag{4.80}$$

t 期の貯蓄は t 期の可処分所得を超過できない．すなわち，

$$s_t \leq w_t - i. \tag{4.81}$$

したがって，次式が成立する．

$$\frac{s_t}{k_t} = \frac{(1+n)k_{t+1}}{k_t} \leq \frac{w_t - i}{k_t}. \tag{4.82}$$

このことから，次式を得る．

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} \leq \frac{w_t - i}{k_t}. \tag{4.83}$$

いま，$\lim_{k_t \to \infty} f_{k_t} = 0$ を仮定している．したがって，ロピタルの定理より次式が成立する．

$$\lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{f(k_t)}{k_t}\right] = \lim_{k_t \to \infty} f_{k_t}. \tag{4.84}$$

また，次式が成立する．

$$\lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{i}{k_t}\right] = 0. \tag{4.85}$$

ここで，次のような展開を行う．

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(k_t, g)}{k_t} \leq \frac{w_t - i}{k_t} \Rightarrow \lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{\Phi(k_t, g)}{k_t}\right] \leq \lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{w_t - i}{k_t}\right] &= \lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{f(k_t, g)}{k_t} - f_{k_t} - \frac{i}{k_t}\right] \\
&= \lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{f(k_t, g)}{k_t}\right] - \lim_{k_t \to \infty} f_{k_t} \\
&= \lim_{k_t \to \infty} f_{k_t} - \lim_{k_t \to \infty} f_{k_t} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

また，定義より次式が成立する．

$$\lim_{k_t \to \infty} \left[\frac{\Phi(k_t, g)}{k_t}\right] \geq 0. \tag{4.87}$$

したがって，次式を得る．

$$0 \leq \lim_{k_t \to \infty}\left[\frac{\Phi(k_t, g)}{k_t}\right] \leq 0. \tag{4.88}$$

以上を整理すると，次のようになる．

$$\lim_{k_t \to \infty}\left[\frac{\Phi(k_t, g)}{k_t}\right] = 0. \tag{4.89}$$

このことから，十分大きい k_t に対して，次式が成立する．

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\Phi(k_t, g)}{k_t} < 1 \Leftrightarrow k_{t+1} < k_t. \tag{4.90}$$

ところで，$k_t=0$ のとき次式が成立する．

$$0 \leq k_{t+1} = \frac{s_t}{(1+n)} \leq \frac{w_t - i}{(1+n)} \leq \frac{w_t}{(1+n)} \leq \frac{f(k_t, g_t)}{(1+n)} = 0. \tag{4.91}$$

したがって，次式を得る．

$$k_{t+1}=0, \quad k_t=0. \tag{4.92}$$

すなわち，$k_t=0$ のときシステムは定常状態にあるといえる．したがって，位相図 Φ は原点を通過する．また，関数 Φ の傾きは次のようになる．

$$\Phi' = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{s_w(-k_t f_{kk})}{\{(1+n) - s_r f_{kk}\}} > 0. \tag{4.93}$$

以上のことを踏まえると，任意の g に対する k_t の位相図を描くことができる．その位相図は図 1 (a)のような形状であると仮定する．したがって，位相図 Φ^0 は 0，k^1 という 2 つの定常状態を持つ．図 1 (a)より，定常状態 0 は不安定で定常状態 k^1 は安定である．(4.76)，(4.77)式から，ある g に対して次式を得る．

$$Z(k_t, g) \leq 0 \Leftrightarrow k_t \in [0, k^1], \tag{4.94}$$

$$Z(k_t, g) > 0 \Leftrightarrow k_t \notin (0, k^1). \tag{4.95}$$

特に，次式が成立している．

$$Z(k_t, g) = 0 \Leftrightarrow k_t = 0, k^1. \tag{4.96}$$

さらに，以下では次のように仮定する．

$$\frac{\partial s}{\partial g} > 0. \tag{4.97}$$

このとき，g の上昇により k_{t+1} は上昇する．したがって，位相図 Φ^0 は図 1 (a)のように g の上昇に伴って Φ^1 へシフトする．このとき，長期均衡は $k_t=0$, k^2 となる．g の上昇により，定常状態 k^1 は k^2 へ拡大している．

最後に，図 1 (a)，(b)，(c)の位相図を用いてインフラストラクチャーが経済の動学的性質にどのような影響を与えるかを分析する．図1(d)では，(4.94)，(4.95)，(4.96)式を踏まえて位相図GG，KKを組み合わせている．位相図GGが政府資本一定の位相図で，位相図KKは民間資本一定の位相図である．ここで，位相図KKの傾きを求める．いま，民間資本について任意の $k_{t+1}=k_t(=k)$ を考える．このとき，次式が成立する．

$$Z(k, g) = 0 \Leftrightarrow (1+n)k = s[r(k, g), w(k, g) - (1+n)k]. \tag{4.98}$$

両辺を全微分すると，次式を得る．

$$(1+n)dk = s_r r_k dk + s_r r_g dg + s_{w^d} w_k dk + s_{w^d}\{w_g - (1+n)\}dg. \tag{4.99}$$

整理すると，次のようになる．

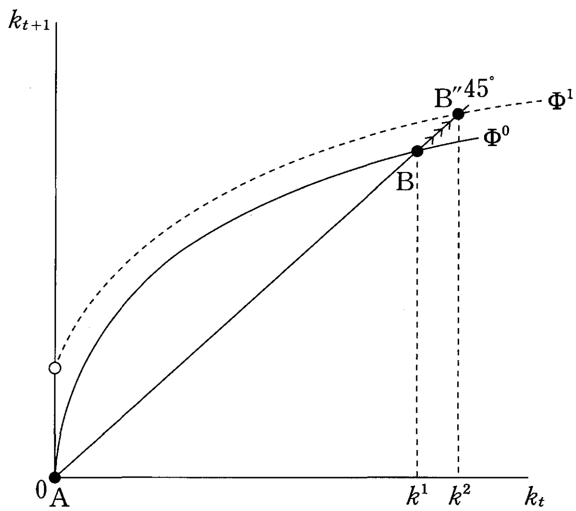
$$\{(1+n) - s_r r_k - s_{w^d} w_k\}dk = \{s_r r_g + s_{w^d}[w_g - (1+n)]\}dg. \tag{4.100}$$

したがって，位相図KKの傾きは次式のようになる．

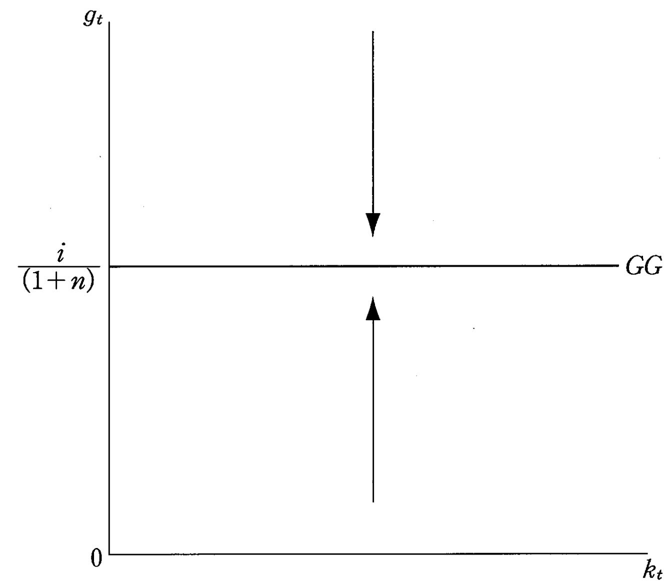
$$\frac{dg}{dk} = \frac{(1+n) - s_r r_k - s_{w^d} w_k}{s_r r_g + s_{w^d}\{w_g - (1+n)\}}. \tag{4.101}$$

ところで，図1(a)，(d)の間で長期均衡（定常状態）について整合的でなければならない．したがって，図5(a)の定常状態A，Bはそれぞれ図1(d)の長期均衡A'，B'に対応している．民間資本と政府資本は定常状態A'に収束するサドル径路に沿ったとき反対の方向に収束する．また，B'への収束軌道に沿ったときは同じ方向に変化することもある．

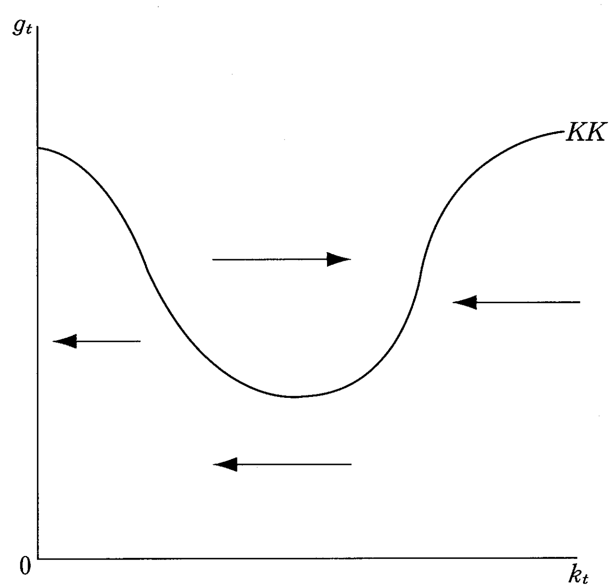
図1(e)は公共投資が増加するときに生じる現象を表す．iが上昇すればgを上昇させる．このとき，位相図GGはgの上昇に伴って$G'G'$となる．ただし，位相図KKはgの上昇によりシフトしない．そして，安定な長期均衡BはB''へ拡大している．



(a)



(b)



(c)

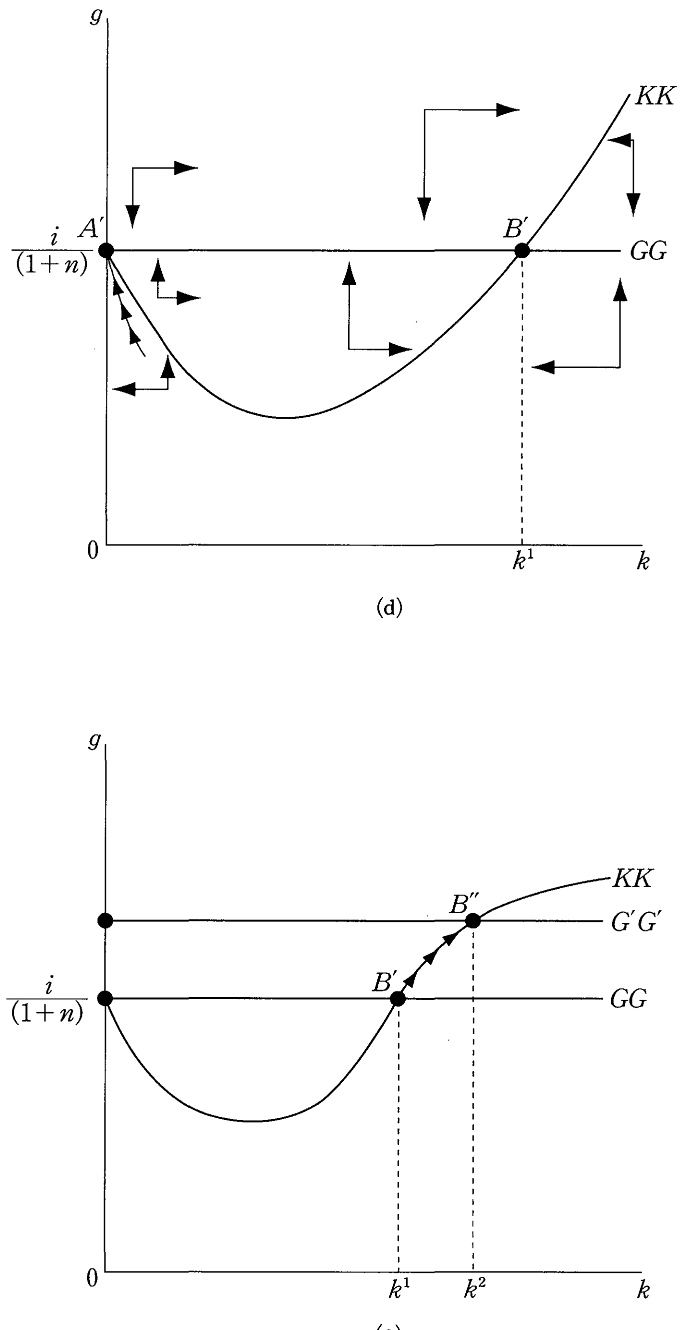


図１　公共投資による経済の長期均衡に対する影響

おわりに

本稿では,OGMの理論的拡張を行い,内生的成長理論の枠組みを使用して,インフラストラクチャーが経済成長に与える影響についての分析が行われた. 以下, この分析から得ることができた理論的結果をまとめることにする.

Azariadis[1993]では, 公共投資をモデルに組み込んで定常状態の分析を直観的に行った. 本稿は, Azariadis [1993] の直観的な議論を数理的に厳密に展開し直した. そして, 次のような結果を得た.

内生的成長理論は経済の持続的成長に言及することを可能にした理論である. 本稿では, インフラストラクチャーに規模に関する収穫逓増を仮定し, OGMのもとで内生的成長理論を展開した. このとき, インフラストラクチャーは安定な長期均衡を拡大させるという結果を得た. すなわち, 公共投資は経済の持続的成長を可能にすると言うことができる.

今後の研究課題としては, インフラストラクチャーだけでなく, OGMに関する別の理論的拡張に対する研究を考えることができる. 例えば, 人的資本を扱った内生的成長理論にOGMを組み込んで分析を行うこと等を挙げることができる. 例えば, 人的資本を扱った論文にFreeman [1996] がある. Freeman [1996] はDiamond [1965] の提示したOGMを用いて所得格差の分析を行っているが, 物理的資本を人的資本に置き換えたうえで分析を行っている. このように, OGMの理論的拡張に対する可能性はまだ存在していると言う事ができる. また, 本稿の結果の幾つかはある仮定に依存して導出されたものである. したがって, 種々の仮定の妥当性を実証的に検証することも今後の研究課題として挙げることができる.

参 考 文 献

[1] Arrow, K. and Kurz, M. , *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1970.

[2] Aschauer, D., "Is Public Expenditures Productive?, " *Journal of Monetary Economics*, 23(1989), 177-200.

[3] Azariadis, C., *Intertemporal Macroeconomics*, Black well, 1993.

[4] Barro, R.J., "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth," *Journal of Political Economy*, 98(Supplement)(1990), S101-125.

[5] D. Fielding. and P. Mizen., "Investment, Output and Interestrate Policy when Capital Is Mobile," *The Economic Journal*, 107(1997), 431-440.

[6] Diamond, P.A., "National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, 55(1965), 1126-1150.

[7] Easterly, W. and S. Rebelo. , "Fiscal Policy and Economic Growth: An Empirical Investigation," *Journal of Monetary Economics*, 32(1993), 417-458.

[8] Galor, O. and Ryder, H., "On the Existence of Equilibrium in an Overlapping Generations Model with Productive Capital," *Journal of Economic Theory*, 49(1989), 360-375.

[9] M. Justman. and M. Teubal., "Technological Infrastructure Policy(TIP):Creating Capabilities and Building New Markets," *Research Policy*, 24(1995), 259-281.

[10] M. Justman., "Infrastructure, Growth and the Two Dimensions of Industrial," *Review of Economic Studies*,

62(1995), 131-157.

[11] G. D. Otto. and G. M. Voss., "Is Public Capital Provision Efficient?," *Journal of Monetary Economics*, 42(1998), 47-66.

[12] P. A. Samuelson., "An Exact Consumption-Loans Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money," *Journal of Political Economy*, 66(1958), 467-482.

[13] Romer, P., "Increasing Returns and Long-Run Growth," *Journal of Political Economy*, 94(1986), 1002-1037.

[14] Rosenstein-Rodan, P., "Problems of Industrialization of Eastern and Southeastern Europe," *The Economic Journal*, 53(1943), 202-211.

[15] S. Devarajan., V. Swaroop. and H. Zou., "The Composition of Public Expenditure and Economic Growth," *Journal of Monetary Economics*, 37(1996), 313-344.

[16] S. Freeman., "Equilibrium Income Inequality among Identical Agents," *Journal of Political Economy*, 104(1996), 1047-1064.

[17] Uzawa, H., "On a Two Sector Model of Economic Growth, II," *Review of Economic Studies*, 30(1964), 105-118.

[18] 大住圭介『長期経済計画の理論的研究』勁草書房, 1985.