

フラクタル時系列の性質を利用した入力トラヒック の一予測手法とその応用

竹林, 渉

<https://doi.org/10.15017/3000196>

出版情報 : 経済論究. 101, pp.115-126, 1998-07-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン :
権利関係 :



フラクタル時系列の性質を利用した入力トラヒックの一予測手法とその応用

竹 林 渉

あらまし：本論文では、フラクタル時系列により入力トラヒックを流体近似したモデルにおいて、時系列に含まれるフラクタル性を利用してトラヒックを予測する方法を示し、応用例を示している。まず、時系列をスケール関数の展開形式で表現されたインパルス応答関数と入力信号との畳み込みとして表現するモデルを仮定し、時系列にフラクタル性がある場合には時間軸の伸長に対してインパルス応答が自己相似性を持つので、これを利用した入力トラヒック予測の方法を導入する。同時に、時系列のウェーブレット変換を用いてトラヒックにおけるフラクタル性の有無およびフラクタル次元を推定する方法を示す。次に、これらの方法を現在まで示されている交換機における入力トラヒックの流体近似モデルに適用して、フラクタル時系列による近似の特性および予測誤差などを検討する。この結果、いくつかの仮定のもとでは、多重化されたIPPや画像信号などの代表的な入力トラヒックが、フラクタル的な性質をもつ時系列で近似できることを示す。応用例として、ATM交換機のバッファにおける入力トラヒック予測、および待ち時間の予測について述べ、予測手法として有効であることを示している。

キーワード：流体近似、フラクタル、トラヒック制御、待ち時間予測、ATM

1 まえがき

時系列や図形などの一部分を拡大、縮小した場合に同じような形状をもつ相似形が出現する性質(自己相似性)を説明するフラクタル理論が展開されている。フラクタル理論は、物理化学現象など自然現象の解明、信号処理、図形符号化など工学分野をはじめ、さまざまに応用がなされている[1]。しかし、現在まで、時間の伸長によってもスペクトルの性質が変わらないなどフラクタル性の説明は数多くなされているが、これを積極的に予測に応用した例はない。ところで、統計多重化されたトラヒックは、フラクタル理論として定式化されている自己相似性をもっている場合があることが知られており、これを利用することにより予測ができる可能性がある[2]。

本論文では、ATM交換機などにおける入力トラヒックの流体近似モデルにおいて、時系列に含まれるフラクタル性を利用した予測手法、およびその応用を提案する[2],[3],[4]。同時に、いくつかの代表的なトラヒックモデルについて、入力トラヒックがフラクタル性をもつための条件をシミュレーションに基づき求めている。フラクタル性を利用すれば、時間軸の伸長により時系列の予測が行なえるので、一定の誤差の範囲内で入力トラヒックを予測できる。なお、トラヒック種別としては単一のものを前提とした場合を議論の対象としている。

以下では、2.で以前に示したフラクタル性を利用した予測手法についてまとめ、フラクタル性をも

つ時系列をスケール関数により近似的に展開する手法において、時間軸方向にインパルス応答関数を伸長することにより時系列予測が行える原理について説明する。3.においてウェーブレット変換を用いて時系列のフラクタル性を検査する方法を示す。4.ではいくつかの条件のもとでは、ATM交換機における流体近似された入力トラヒックはフラクタル性をもつ時系列により近似できることを示す。5.では、応用例として、本論文の予測手法を用いた交換機における入力トラヒック予測および待ち時間予測とその精度について述べ、予測の有効性を示す。

2 フラクタル性をもつ時系列の予測手法

2.1 スケール関数によるインパルス応答の展開

以下では、交換機における入力トラヒックは流体近似され、時系列 $x(t)$ として表現されていると仮定する。

いま、一般的な線形時変入出力システム

$$y(t) = \int_0^{t_0} h(t, t-\tau) x(\tau) d\tau, t > t_0. \quad (1)$$

を考察する。特に、以下では入出力が同じ時系列である同定問題 ($y(t) = x(t)$ の場合) を考える。インパルス応答関数 $h(t, \tau)$ の推定問題において、 $h(t, \tau)$ がスケール関数 $\phi(t)$ を用いて次のように展開されると仮定する。

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} \phi_{Ni}(t) \phi_{Nj}(\tau). \quad (2)$$

ただし、

$$\phi_{ij}(t) = \phi(2^i t - j). \quad (3)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

いま式(1)による予測値 $\hat{x}(t)$ と観測値 $x(t)$ との差の最小 2 乗近似を考え、これを最小化するようにインパルス応答関数の係数 h_{ij} を決定する。評価関数を h_{ij} について微分した値はスケール関数の性質を用いれば簡単に計算できるので、最急降下法による近似を行なう [2], [3]。

計算にあたり式(1)の j の範囲を $j = 1 \sim 4$ に限定する。時系列からインパルス応答を推定する場合の観測値と式(1)による予測値との平均 2 乗誤差のしきい値は 10^{-4} とする。推定値が得られるまでの繰り返し計算回数は平均して約 2 万ステップである。

2.2 フラクタルによる時系列予測

以下では、フラクタル性をもつ時系列に対してスケール関数の時間軸伸長により予測を行う方法について述べる。 $T_s < t < T_e$ を $x(t)$ が観測される時間区間、 $0 < t \leq T_2$ を $x(t)$ を予測する区間とする。 $T_1 = T_e - T_s$ とおく。このとき次の量を定義する。

$$b = a^D, a = T_2/T_1, T_2 > T_1. \quad (5)$$

ここで、 D は時系列 $x(t)$ のフラクタル次元でありフラクタル性をもつための条件は

$$1 < D < 2. \quad (6)$$

である。このとき、 $y(t)$ のフラクタル性により、 $T_1 < t \leq T_2$ において、次の式が近似的に成立する。

$$y(t) = \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) y(\tau) d\tau. \quad (7)$$

すなわち、フラクタル図形では時間軸が a 倍された領域の中で b 個のフラクタル図形が入るので、 $0 < t < T_1$ で推定された $h(t, \tau)$ を b 倍したものを用いれば、 a 倍に伸長した時間域においても、式(7)の予測モデルが成立する。

サンプリング間隔された時系列を仮定し、サンプリング間隔を 1 とする。すなわち、(1)の予測において、1 時刻先の値を予測する場合を考える。時間伸長したケースでは

$$y(bt_0 + b) = \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) y(\tau) d\tau. \quad (8)$$

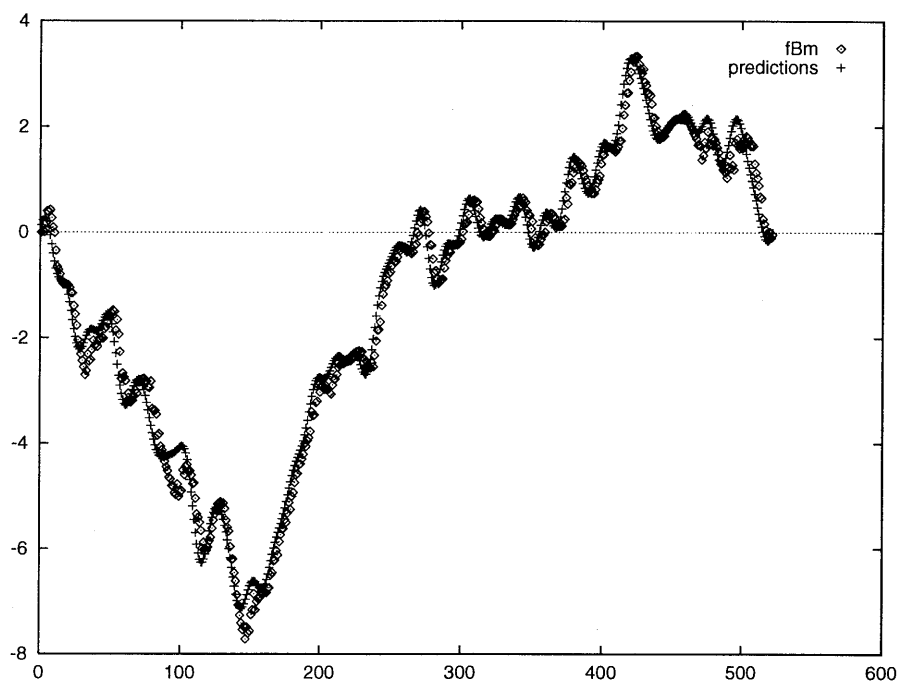
ここで、予測に用いるデータと予測方式について整理しておく。予測を議論する場合には、通常、現在までの観測データをもとにして、1 ステップ先のサンプリングの予測値を計算することが行われる。これを、以下では b 時刻先の予測とよんでおく。

これに対して、フラクタル性により将来のインパルス応答が計算されているので、予測されたサンプル値を観測値とみなせば、原理的に現在の時刻以降においても、1 つ先のサンプル値だけではなく、これ以降のサンプル値についても、式(8)に従って、逐次的に将来の値を予測することが可能となる。これを nb 時刻先の予測とよんでおく。 nb 時刻先の予測では、予測の操作を繰り返すと予測誤差が累積し、やがて正確な予測値を与えなくなる可能性があるが、より遠い将来のデータを予測できる利点がある。

なお、フラクタル時系列に対して以上の予測理論を用いた場合の予測誤差については、すでに文献 [3], [4] で検討しているが、一般的な傾向について表 1, 2 に整理しておく。ただし、フラクタル時系列はブラウン運動の非整数階積分 (fBm: fractional Brownian motion) により求めている。

図 1 には、fBm についての b 時刻先および nb 時刻先予測の例を示している。予測誤差を、期間内の最大振幅値に対する予測値と観測値との差の比率 (相対誤差) として定義する。まず、 b 時刻先の予測については予測値と観測値との誤差は極めて小さなものとなる。平均的な結果として、予測誤差は、振幅に対して最大誤差が 0.3% ないし 0.4% 以内の数値となっており、フラクタル性をもつ時系列が一般には非定常であることを考慮する。良好な結果であると言える。また、一般の線形予測だけではこのような正確な予測ができないことも確認できる。

次に nb 時刻先の予測については、 $nb=30$ の場合 4% 程度、 $nb=120$ の場合でも 6% 程度に予測誤差を抑えることができることがわかる。

図1 fBmの予測 (b 時刻先予測)表1. 本手法の b 時刻先の予測誤差 (%)

		500サンプル			1000サンプル		
$a = 2$	次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
	予測誤差	3.9	3.7	3.2	3.7	3.4	2.8
		500サンプル			1000サンプル		
$a = 3$	次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
	予測誤差	5.3	5.1	4.1	4.7	4.4	3.8

表2. 本手法の nb 時刻先の予測誤差 (%)

	$nb=20$			$nb=35$		
次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
予測誤差	4.1	3.7	3.3	5.1	4.9	4.6
	$nb=45$			$nb=60$		
次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
予測誤差	5.7	5.2	4.9	12.3	11.5	10.2

3 時系列のフラクタル性の検証

時系列のフラクタル性を検定する方法にはいくつかあるが、ここでは時系列をウェーブレット変換の係数を比較する方法をとっている[4],[5]。この原理を簡単に説明する。

時系列がフラクタル性をもつ場合には、そのスペクトルの時間平均が周波数のべき乗に反比例する性質を持つことが証明されている[5]。すなわち、時系列の分散、フラクタル次元を、それぞれ σ^2 , D とするとスペクトルは次のようになる。

$$S(\omega) = \sigma^2 / \omega^{-\gamma} \quad (9)$$

$$\gamma = 5 - 2D \quad (10)$$

与えられた時系列 $x(t)$ をウェーブレット変換する。

$$x(t) = \sum_n \sum_m x_n^m \psi_n^m(t). \quad (11)$$

$$x_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_n^m(t) dt. \quad (12)$$

ここで、 $\psi_n^m(t)$ は基本関数 $\psi(t)$ に対する次のスケール、シフト変換とにより構成される。

$$\psi_n^m = 2^{m/2} \psi(2^m t - n). \quad (13)$$

ここで、 m , n は、スケール変換、シフト変換のインデックスである。 $x(t)$ がフラクタル性をもつことから、ウェーブレット係数 x_n^m の満たすべき条件として、次の関係式が得られる。

$$\text{var} x_n^m = \sigma^2 2^{-\gamma m}. \quad (14)$$

この関係式は、ウェーブレット基本関数の性質などを用いると説明できる[6]。いま、式の両辺のスペクトルをとると次のようになる。

$$S(\omega) = \sum_m P_m(\omega) | \Psi(2^{-m} \omega) |^2 \quad (15)$$

ここで、 $\Psi(\cdot)$ はウェーブレット基本関数のフーリエ変換、 $P(\omega)$ はウェーブレット係数のスペクトルであり、 x_n^m が局所的に変化しているので、時間を表す添字 n について計算した値である。ウェーブレット基本関数のフーリエ変換は帯域フィルタの特性をもっているので、式(15)の左辺が式と一致するには

$$P(\omega) = \sigma^2 2^{-\gamma m} \quad (16)$$

となることが必要であることが分かる。 x_n^m から求めた分散とスペクトルとは等価であるので、式(14)が成り立つ。

式(14)の両辺の対数をとると、 m についての線形の直線となるので、左辺により計算されるデータに対して回帰直線を当てはめ、この直線との2乗平方誤差rmseの大きさによりフラクタル性を判定できる。

$$\text{rmse} = \left[\sum_m (\log(\text{var} x_n^m) - c_0 - c_1 m)^2 \right]^{1/2} / (M \times Xrange) \quad (17)$$

M は添字 m の取り得る個数である。 $Xrange$ は $\log(\text{var}(x_n^m))$ の最大値と最小値との差であり、この値により2乗平方誤差を正規化している。

表3には既知のフラクタル次元 ($D=1.5$) をもつfBmを発生させて、これについてrmseの計算を行なった場合の結果を示している。fBmはシミュレーション波形であり、本来は式(17)のrmseはゼロになるはずであるが、計算の誤差などによりゼロではない小さな値となる。ここに示す数値は、以下でフラクタル性を調べる場合の参考となる。

フラクタル時系列の分散とフラクタル次元は式(17)に示した x_n^m により推定することができる。この推定方法を付録に整理している。

表3. シミュレーションによるfBmのrmseと推定次元

rmse	0.004
推定された次元	1.47

4 統計多重化されたトラヒックとフラクタル

4.1 統計多重化トラヒックの流体近似モデル

以下では、代表的な統計多重化されたトラヒックの流体近似モデルについてフラクタル性が存在する条件を検討する。なお、現実のトラヒックについては、極めて広範囲な特性をもっていることから、ここでは、モデル化されたケースに限定してシミュレーションにより検討を進める。

(1)多重化されたIPP

ATM交換機におけるトラヒックを表現するモデルとしてIPP (Interrupted Poisson Process) やMMPP (Markov Modulated Poisson Process) が用いられる。MMPPはIPPを多重化したものと解釈されている。

N 個の局 i のIPPの多重化を仮定し、それぞれの局 i のIPPの *on* 期間におけるセルの発生数を平均値 λ_i の指数分布、*on* 期間と *off* 期間の長さを、それぞれ、平均 a_i , b_i の指数分布と仮定する。流体近似として、入力トラヒックを一定時間間隔 t ごとに観測する到着セル数で表現する。流体近似のもとでは、局 i のIPPのプロセスが継続して *on* 状態にある場合、あるいは、時間間隔 t の間に新たに局 i が *on* 状態になった場合、セル到着率 λ_i のトラヒックが継続して加わる。一方、*off* 状態に移行すればこのトラヒックレベルはセル到着率 λ_i だけ減少することになる。

なお、以下では、セル到着が指数分布ではなく、一定値となるケースも、同時に考察している。これは、交換機における挙動をマクロ的に見た場合に相当しており、理論解析でもモデルの単純化と一定の計算精度が保証されることが示されている[7]。

(2)O-U過程

Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 過程については確立微分方程式で記述され、その解については次のような解析形で与えられている。

$$R_t = m + \int_{-\infty}^t \sigma e^{\kappa(t-s)} dB(s) \quad (18)$$

また、多重化されたO-U過程については、多重化されたオンオフモデルに適用できることが知られている[8]。ここで、式(18)をテーラー展開して各項目別に調べてみると、次のようになる。

$$R_t = m + \int_{-\infty}^t \sigma \kappa(t-s) dB(s) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \sigma^2 \kappa^2(t-s)^2 dB(s) + \dots \quad (19)$$

第1項は平均トラヒック、第2項はブラウン運動であり、第3項以降は白色雑音の信号をフィルタに通した緩やかに変化する成分である。

(3)画像信号の統計多重の性質

ATM交換機でのトラヒックの主要部分を占めると考えられる画像トラヒックを基準に従って圧縮して伝送する環境を仮定して、実際に伝送されるトラヒックの時間変化を調べた結果についていくつか報告されている[9][10]。これらをまとめると、以下のようになる。

画像信号は部分的には特定の位相のアーラン分布により良く近似できる。画像信号全体は、これらの部分的にモデル化された画像信号（アーラン分布）の状態の間を遷移する過程としてモデル化できる。

以上のことを考慮し、各局では次のような画像信号のモデルに従ってトラヒックを発生していると仮定する。

- 1) 局 i でのデータ発生として状態遷移を仮定し、平均 c_i 、位相 h_i のアーラン分布に従う時間だけ状態が継続し、この間には平均 μ_i 、位相 k_i のアーラン分布に従うセル長をもつデータが入力トラヒックとして加わる。
- 2) 状態の継続時間と入力トラヒックの大きさは反比例すると仮定し、短いセル長のトラヒックの状態の継続時間は、長いセルを発生している状態より相対的に長いとする。
- 3) 状態の中には、なにもトラヒックを発生しないものも含まれるとする。
- 4) 状態間の遷移確率は、確率値として局ごとに与えられるが、継続時間の長い状態のあとには、継続時間の短い状態（あるいは逆のケース）が相対的に大きな確率で発生するように仮定する。

4.2 多重化トラヒックのフラクタル性の検証

仮定した3種類のトラヒックについて、シミュレーションをもとにして、フラクタル性の検証を行ない、フラクタル時系列で近似できる条件を推定する。トラヒックのサンプリング間隔を1とする。

(1)多重化されたIPP

以下のシミュレーションで用いるIPPのモデルでは、局 i ごとに *on* 期間と *off* 期間の長さの平均 a_i 、 b_i セル到着率 λ_i を変えている。これらは、平均と分散を与えた正規分布から選んでいる。すなわち a_i 、 b_i の分布については平均 a 、 b 分散 σ_a 、 σ_b の正規分布、 λ_i については、平均 λ 、分散 σ_λ の正規分布から選択する。シミュレーションでは、これらを次の範囲で変化させている。

$$a=10\sim1000, b=10\sim1000, \sigma_a, \sigma_b=0.1\sim10.0$$

$$\lambda=10\sim100, \sigma_\lambda=0.1\sim10.0$$

表 4, 5 には代表的な例をまとめている。表 4 はセル長が指数分布の場合、表 5 はセル長が固定長の場合を示しており、表 4, 表 5 では on 期間の平均長を、それぞれ $a = 50$, $a = 20$ としている。表ではシミュレーションにより発生された時系列の $rmse$ を表示している。なお表では推定されたフラクタル次元については省略しているが、表 4 では、ほぼ 1.8, 表 5 では、ほぼ 1.5 という値である。また、ここでは結果は省略しているがそれぞれの局のセル到着（発生）が指数分布あるいは固定長ではなく、位相が 1～10 のアーラン分布から選んだ場合についても調べている。この場合には、表 4 と表 5 との中間的な特性を示す。

数値シミュレーションを条件を変えながら実行して検討した結果、多重化された IPP の場合によるトラヒック発生モデルにおいては、トラヒックがフラクタル時系列として近似できる条件として、次のようなことが推定される。

- 1) 局数が 20 以上であり、 on , off 期間の長さについては一定の範囲にあること。具体的にはセル長が指数分布のとき on 期間の長さが少なくとも 50 以上、固定長のとき 20 以上であること更に on 期間が off より極端に長くない、あるいは短くない（0.2 倍以上かつ 4 倍程度以下）であることである。
- 2) 局数 N が 20 以上であれば、局数を増加させることにより、特に改善される傾向は見られない。
- 3) on , off 期間の長さの分布の分散 σ_a , σ_b の大きさは、極端な値を取らない限り（0.2 から 5.0 の範囲）フラクタル性にはほとんど影響を与えていない。
- 4) セル長の分布について平均値の大きさはあまりフラクタル性には影響しないが、分散が大きな場合には結果が変化するので、分散は 0.2 から 5.0 の範囲にあることが望ましい。
- 5) 局からのセルの発生が一定（固定長）である場合には、時系列のフラクタル性は顕著である。しかし、指数分布の場合には、1) から 4) までの条件が境界値に近づくとき、フラクタルではないと見なされるケースが増加する。
- 6) 局からのセルの発生がアーラン分布である場合にはセルの発生が一定の場合と指数分布の場合の中間の特性をしめす。すなわち位相が大きい場合にはフラクタルである傾向で強くなるが、位相が小さい場合には、やや大きな数値となりフラクタル性がやや弱くなる。
- 7) 以上のことから入力トラヒックのセル長の分布が固定長であるとして近似するか、あるいは位相が 5 程度以上の分布により近似することが望ましい。この場合には、後で述べるトラヒック予測の誤差は小さくできるが、指数分布のままでセル長の分布を仮定した場合には誤差が拡大するケースが増加する。

表 4. 多重化された IPP の $rmse$ (セル長が指数分布の場合)

	$N = 5$	$N = 20$	$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$
$a/b = 0.25$	0.0136	0.0139	0.0141	0.0146	0.0145
$a/b = 1.00$	0.0191	0.0162	0.0181	0.0187	0.0188
$a/b = 4.00$	0.0193	0.0201	0.0211	0.0237	0.0245

表5. 多重化されたIPPのrmse (セル長が固定長の場合)

	N=5	N=20	N=50	N=100	N=200
$a/b=0.25$	0.0115	0.0114	0.0112	0.0110	0.0120
$a/b=1.00$	0.0099	0.0056	0.0093	0.0107	0.0109
$a/b=4.00$	0.0119	0.0111	0.0080	0.0096	0.0101

(2)O-U過程

表6ではO-U過程のパラメータを変化させた場合のrmse計算のシミュレーション結果を示している。なお表6ではO-U過程が発散しない範囲にパラメータ σ , κ を設定している。

表よりわかるように、O-U過程のパラメータについては $\sigma\kappa<0.2$ のような範囲である限りは、フラクタル時系列であると仮定しても問題ないことが分かる。

表6. O-U過程のrmse

	$\sigma=1.0$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.25$
$\kappa=1.01$	0.0272	0.0205	0.0197
$\kappa=0.50$	0.0207	0.0202	0.0190
$\kappa=0.25$	0.0195	0.0191	0.0181

(3)統計多重された画像信号

以下のシミュレーションで用いるモデルでは、局ごとに状態の継続時間の平均 C_i , セル到着率 μ_i を変えているが、これらは平均と分散を与えた正規分布から選んでいる。状態の継続時間については、平均 c , 分散 σ_c の正規分布, セル到着率については、平均 μ , 分散 σ_μ の正規分布から選んでいる。この平均と分散の範囲および位相を、次のように仮定する。

$$c=10\sim1000, \sigma_c=0.1\sim10$$

$$\mu=10\sim1000, \sigma_\mu=0.1\sim10$$

$$h=1\sim10, k=1\sim10$$

単一ソース (局 i) における状態の数は $5\sim10$ とする。状態遷移の確率については、すでに述べたシミュレーションの条件 (継続時間の長い状態のあとには継続時間の短い状態が来るなど) を参考にしながら、仮定を満足する範囲で発生させて与えている。

また、位相についても状態や局のセル長に応じて組み合わせ的に与える必要があるが、これについてもシミュレーションの条件を満足する範囲で個別に与えている。ただし、フラクタル性の評価では位相の平均値を尺度としているので、ある整数を平均値とする範囲で選択している。

表7には単一ソースの状態数を5とした場合について、局数 N , 状態の継続時間分布の位相の平均値, 送信されるデータのセル長分布の位相の平均値を変化させた代表例を示している。状態間を遷移する確率についての詳細は省略するが、0.3程度の数値を確率値としてとり、いくつかの状態間では遷移がおこらないケースを設定している。

表7にならってさまざまなパラメータを変化させた場合を検討した結果、表7に示すデータと同様な傾向が見られる。すなわち、以下の条件を満足する場合には、トラヒックはフラクタルであるとみ

なされる可能性が高い（フラクタル的である）。

- 1) 局数が5以上であること。
- 2) 状態の継続時間の平均 c ，分散 σ_c については $c=20\sim 300$ ， $\sigma_c=0.2\sim 3.0$ の範囲にあること。
- 3) セル到着率の平均 μ ，分散 σ_2 については $\mu_2=20\sim 100$ ， $\sigma_2=0.2\sim 3.0$ の範囲にあること。
- 4) 位相については $k_1=1\sim 6$ ， $k_2=3\sim 10$ の範囲にあること。特に，セル長の分布を与える位相 k_2 については大きな数値であるほどフラクタル性が強く，これはIPPの場合の固定セル長のモデルにおける当てはまりの良さと対応している。

表7. 画像信号モデルのrmse

	$N=1$	$N=5$	$N=20$	$N=50$	$N=100$
$h=5 \quad \kappa=1$	0.023	0.011	0.009	0.012	0.017
$h=5 \quad \kappa=5$	0.021	0.014	0.011	0.017	0.020
$h=5 \quad \kappa=10$	0.021	0.015	0.012	0.014	0.017

4.3 待ち時間予測

交換機へのデータトラヒックを流体近似したモデルにおける待ち行列は，以下ようになる[11]。

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \begin{cases} J(t) - C, & \text{if } Q(t) > 0, \text{ or } J(t) > C; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

ここで， $Q(t)$ は待ち行列長さ， $J(t)$ は入力トラヒック， C は交換機の出線スピード， t_0 はバッファが空となった最近の時刻である。時刻 t における待ち行列の長さは次の式で与えられる。

$$Q(t) = \int_{t_0}^t J(u) du - C(t - t_0). \quad (21)$$

従って，フラクタル性を用いた予測が可能であれば，あらかじめ時刻の待ち行列の長さを予測し，入力規制や伝送品質の低下について警告，制御などを行なうことが可能となる。

以下では，入力トラヒックとして観測データと予測データとを用いた場合に，式(21)より計算される待ち時間の差がどのようなになるかをシミュレーションにより検討する。シミュレーションでは， $J(t)$ の最大値が40程度になるように正規化している。なおバッファ容量は無限大と仮定し，出線スピードは有限の値を設定する。

シミュレーションでは， nb 時刻先の待ち時間の誤差を，観測された入力トラヒックを式(21)の $J(t)$ として用いた場合の待ち時間と， nb 時間先の予測入力トラヒックを式(21)の $J(t)$ として用いた場合の待ち時間との差を数値として示している。予測の範囲は， nb 時刻先の入力トラヒックの予測精度を考慮して20，40時刻先に限定している。待ち時間を数値で示しているが，入力トラヒックの最大振幅が40程度であることを考慮すると，その相対的な大きさが分かる。シミュレーションではいくつかの出線スピードについての結果を示している。

表の結果においては出線スピードが小さくなるに従って待ち時間も増加するので誤差も拡大している。しかし，出線スピードが比較的大きな場合には待ち時間の予測も良好である。

表 8. 入力トラヒックの待ち時間予測の誤差

C	$nb=20$			$nb=40$		
	25	30	35	25	30	35
多重化IPP	25.2	11.3	2.1	27.2	12.3	3.2
O-U過程	24.2	10.2	2.1	28.2	11.1	3.3
画像多重化	25.1	12.1	4.4	28.1	13.5	5.1

5 むすび

入力トラヒックがフラクタル的な性質をもつ場合に、これを利用したトラヒック予測の1つの方法を展開し、応用例を示した。まず、スケール関数により展開されたインパルス応答と入力トラヒックとの畳み込みにより表現された予測モデルを仮定し、時間軸の伸長により時系予測の基本的な手法を展開した。次に、入力トラヒックにフラクタル性があるかどうかを時系列のウェーブレット変換を用いて検査する方法を示し、流体近似された代表的な入力トラヒックモデルにおいては適当な条件のもとではフラクタル時系列として近似できることを示した。トラヒック予測の応用として、交換機における入力トラヒック予測、待ち時間の予測に利用できることを示した。

今後の課題としては、さまざまな入力過程をフラクタル時系列を入力とするシステムで近似する問題と予測、動的呼受付制御への応用があり、検討を加えていきたい。

文 献

- [1] Mandelbrot, B.: The Fractal Geometry of Nature, San Francisco, Freeman, (1982).
- [2] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: 入力トラヒックのフラクタル性を利用した流体近似における一予測手法”, 信学技報, SSE95-159, pp.61-66 (1996-02).
- [3] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: “フラクタルな性質をもつ時系列の一予測手法とその応用”, 信学論(A), Vol. J79-A, 11, pp.1793-1800 (1996-11).
- [4] 時永祥三, 森保洋, 宮崎明雄, 島津宣之: “スケール伸長変換およびウェーブレット変換によるパラメータ推定を用いたフラクタル時系列の予測”, 信学論(A) Vol. 12J79-A, 12, pp.2054-2062 (1996-12).
- [5] Wornell, G.W, and Oppenheim A.V: “Estimation of fractal signals from noisy measurement using wavelets,” *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 40, No. 3, pp. 611-623 (March 1992).
- [6] Daubechies. I.: “Orthonormal bases of compactly supported Wavelets” *Commun. Pure. Appl. Math.* Vol. 41, pp. 909-996 (Nov. 1988).
- [7] Yang, T, and Tsang, H.K.: “A novel approach to estimating the cell loss probability in an ATM multiplexer loaded with homogenous on-off sources” *IEEE Trans. on Communication*, Vol. 43, No. 1, pp. 117-126 (Jan 1995).
- [8] Simonian .A: “Stationary analysis of a fluid queue with input rate varying as an Ornstein-Uhlenbeck process,” *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 51, No. 3, pp. 828-842 (June 1991).
- [9] Gruenenfelder J.P. Cosmas, J.P., Manthorpe, S. and Odinma-Pkafor, A.: “Characterization of video codecs as autoregressive moving average processes and related queuing system performance,” *IEEE J. Select. Areas Commun.* 9(3) pp. 284-293 (March 1991).
- [10] Kurasugi, T, Kobayashi, K and Takahashi, Y.: “Data analysis and modeling of ATM coded video traffic withure scene changes”, 情報通信ネットワークに関する性能評価モデルの総合的研究, pp. 371-382 (Jan. 1996).

- [11] Ren.Q., and Kobayashi.H. : “Transient solution for the buffer behavior in statistical multiplexing”, *Performance Evaluation*, 23, pp.65-87 (1995).

付録

パラメータの尤度関数は次の形で与えられる。

$$P = \prod_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp[-(x_n^m)^2/2\sigma_a^2] \quad (\text{A } 1)$$

ここで,

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 \beta^{-m} \quad (\text{A } 2)$$

であり, σ^2 は推定しようとしている時系列の分散であり, β は推定する未知のフラクタル次元 D と次に示す関係式で結ばれる。

$$\beta = 2^\gamma, \gamma = 5 - 2D. \quad (\text{A } 3)$$

式 (A 1) の対数尤度関数を取り, 添字 m ごとの集計を取り,

$$L(\sigma^2, \beta) = -0.5N(m) \sum_n [\sigma_m^2/\sigma_a^2 + \ln(2\pi\sigma_a^2)] \quad (\text{A } 4)$$

となる。ここで σ_m^2 は式 (11) における x_n^m についての分散であり,

$$\sigma_m^2 = \sum_n (x_n^m)^2 / N(m) \quad (\text{A } 4)$$

により計算される。ここで $N(m)$ は x_n^m の m についてのサンプル数である。

式 (A 4) の尤度関数を最大にするため, 式 (A 4) を未知数について微分してゼロとおくと次の式を得る。

$$\sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m - \sigma^2 \sum_m N(m) = 0 \quad (\text{A } 5)$$

$$\sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m - \sigma^2 \sum_m m N(m) = 0 \quad (\text{A } 6)$$

これらから σ^2 を消去すると, β に関する次の方程式を得る。

$$\sum_m C_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m = 0. \quad (\text{A } 7)$$

方程式の根のなかで, 唯一存在する正の実根より, γ を計算する。ここで

$$C_m = m / \sum_m m N(m) - 1 / \sum_m N(m). \quad (\text{A } 8)$$

σ^2 は次に示す式で計算される。

$$\sigma^2 = \sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m / \sum_m N(m). \quad (\text{A } 9)$$