

非定常時系列に関する検定について：単位根検定と 共和分検定

滝井，貞行

<https://doi.org/10.15017/3000162>

出版情報：経済論究. 98, pp.95-112, 1997-07-25. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：



非定常時系列データに関する検定について

—— 単位根検定と共和分検定 ——

瀧 井 貞 行

1 はじめに

非定常確率過程にある変数を回帰モデルに用いた場合、Phillips [10] で理論的に説明されたように見せかけの回帰の問題が起りうる。これは、パラメータの有意性を検定する統計量等が定常確率過程を扱った場合の標準的なものと異なった分布に従うために起りうる問題である。例えば、 y_t と x_t が互いに無相関な単位根過程（ドリフトなし）にあるとしよう。ここで、 y_t を x_t に回帰させたとき x_t にかかるパラメータの推定量 $\hat{\beta}_T$ の分布は標準的な分布に従わず、さらに標本数 T を大きくしてもある値に確率収束しない。また t -統計量も t -分布せず、 T を大きくしても正規分布に収束せず発散してしまう。したがって、臨界値を固定して T を大きくしていくと仮説を棄却する確率が大きくなってしまう。これらの理由により、 y_t を x_t に回帰させた場合、実際に無相関であるにもかかわらず統計的に有意な結果が得られてしまう。

以上でみたように非定常確率（単位根）過程にある変数を回帰モデルに用いた場合、その統計的推測において十分な注意が必要とされる。このためにはまず、データの生成過程が定常確率過程であるか非定常確率過程であるかを前もって判断しなければいけない。このような検定は単位根検定と呼ばれ、これについては次節でみることにする。第3節では、見せかけの回帰の問題を理論的に説明し、また単位根過程にあっても見せかけの回帰の問題が起らない共和分の関係についての単一方程式による検定方法をみる。第4節ではJohansenの共和分検定についてみる。第5節において単位根検定、共和分検定を実際の経済データを用いて例を示すことにする。

2 単位根検定

単位根検定は、仮説 H_0 : 「系列 $\{y_t\}$ のデータ生成過程は非定常（単位根）確率過程である」を帰無仮説とする。したがって、適切な臨界値を利用するために、非定常確率過程をもとにした検定統計量の分布を知る必要がある。しかしながら、この分布を解析的に知るのとは不可能で、一般にモンテカルロシミュレーションによって臨界値が求められている。この節では、検定統計量の漸近分布、漸近的特性についてみていく。説明の簡素化のため、まずデータ生成過程の攪乱項 $(u_1, \dots, u_T)$ を平均 0 分散 σ^2 の独立同一分布する (i. i. d.) 系列に限定する。

1) $(y_1, \dots, y_T)$ のデータ生成過程がドリフトなしランダムウォークの場合

この場合の $(y_1, \dots, y_T)$ のデータ生成過程は次式で表される。

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad (t=1, \dots, T) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで検定統計量の漸近分布をみる前に、以下での説明との関係を明らかにするため、次のデータ生成過程について説明を加えておく。

$$\xi_t = \xi_{t-1} + u_t \quad (t=1, \dots, T) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ただし、 $\xi_0=0$ とする。またここでも $\{u_t\}$ は i.i.d. 系列である。このとき、次の関係式が成り立つことが知られている。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \sum_{t=1}^T u_t &\xrightarrow{L} A(\sigma) \equiv \sigma W(1) \sim N(0, \sigma^2) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 \sum_{t=1}^T \xi_{t-1} u_t &\xrightarrow{L} B(\sigma^2) \equiv \frac{1}{2} \sigma^2 [W(1)]^2 - 1 \sim (1/2) \sigma^2 [\chi^2(1) - 1] \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T \xi_{t-1}^2 &\xrightarrow{L} C(\sigma) \equiv \sigma \int_0^1 W(r) dr \sim N(0, \sigma^2/3) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T \xi_{t-1}^2 &\xrightarrow{L} D(\sigma^2) \equiv \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr \sim N(0, \sigma^2/3) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T t u_t &\xrightarrow{L} AT(\sigma) \equiv \sigma W(1) - \sigma \int_0^1 W(r) dr \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^5 \sum_{t=1}^T t \xi_{t-1} &\xrightarrow{L} CT(\sigma) \equiv \sigma \int_0^1 r W(r) dr \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし、 $W(\cdot)$ は標準ブラウン運動である。ここで注意すべきは $\{u_t\}$ が i.i.d. 系列であることであり、この条件が満たされない場合ブラウン運動を導くことができない。

さて、(1)を考える場合逐次代入より、 $y_t = y_0 + \xi_t$ となり、漸近分布を求める際は y_0 の値は影響しないので、 ξ を y に置き換えても(3)は成り立つ。

① 定数項のない回帰モデルを考えた場合

次の定数項を含まない回帰モデルを考えた場合の単位根検定統計量についてみることにする。

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

このときの ρ のOLS推定量 $\hat{\rho}_T$ は次で与えられる。

$$T(\hat{\rho}_T - 1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 \sum_{t=1}^T y_{t-1} u_t}{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \xrightarrow{L} \frac{B(\sigma^2)}{D(\sigma^2)} = \frac{B}{D}$$

ただし、 $B \equiv B(1)$ 、 $D \equiv D(1)$ である。このことより、 $\hat{\rho}_T$ は一貫性は持つが漸近正規性は持たないことがわかる。またこの統計量は未知パラメータ σ^2 に依存しないので、このまま検定統計量として利用す

ることができる。

次にOLS t -統計量についてみる。

$$\hat{t}_T = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^2}}{S_T} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 \sum_{t=1}^T y_{t-1} u_t}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 \cdot S_T}} \xrightarrow{L} \frac{B(\sigma^2)}{\sqrt{D(\sigma^2)} \sigma} = \frac{B}{\sqrt{D}} \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 $\hat{\rho}_T$ の一致性より $s_T^2 \equiv (T-1)^{-1} \sum (y_t - \hat{\rho}_T y_{t-1})^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ である。

② 定数項のある回帰モデルを考えた場合

次の定数項を含む回帰モデルを考えた場合の単位根検定統計量についてみることにする。

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t \dots\dots\dots(5)$$

このときの ρ のOLS推定量 $\hat{\rho}_T$ は次で与えられる。

$$T(\hat{\rho}_T - 1) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2 \sum_{t=1}^T y_{t-1} u_t - \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T y_{t-1} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^T \sum_{t=1}^T u_t \right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 - \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T y_{t-1} \right\}^2} \xrightarrow{L} \frac{B(\sigma^2) - C(\sigma)A(\sigma)}{D(\sigma^2) - [C(\sigma)]^2} = \frac{B - CA}{D - C^2} \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 $A \equiv A(1)$, $C \equiv C(1)$ である。このことより、 $\hat{\rho}_T$ は一致性は持つが漸近正規性は持たないことがわかる。またこのとき α のOLS推定量 $\hat{\alpha}_T$ も一致推定量となる。

次にOLS t -統計量についてみる。これも(4)と同様の方法で次のようになる。

$$\hat{t}_T \xrightarrow{L} \frac{B - CA}{\sqrt{D - C^2}}$$

以上、2つのケースにおける $\hat{\rho}_T$, $\hat{t}_T$ の漸近分布についてみてきた。この統計量が単位根検定に用いられ、帰無仮説は $H_0: \rho = 1$ で表される。これらの統計量は漸近的にも標準的な分布には従わず、また回帰モデルに定数項が含まれるか否かによって分布は異なったものとなる。

2) $(y_1, \dots, y_T)$ のデータ生成過程がドリフト付きランダムウォークの場合

この場合の $(y_1, \dots, y_T)$ のデータ生成過程は次式で表される。

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + u_t \quad (t=1, \dots, T) \dots\dots\dots(7)$$

逐次代入より(7)は次のように表すことができる。

$$y_t = y_0 + \alpha t + \xi_t \quad (t=1, \dots, T)$$

このことと(3)より次のことが導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \sum_{t=1}^T u_t &\xrightarrow{L} A^D(\sigma) \equiv A(\sigma) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T y_{t-1} u_t &\xrightarrow{P} B^D(\alpha, \sigma) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T \alpha(t-1) u_t \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T y_{t-1} &\xrightarrow{P} C^D(\alpha) \equiv \frac{\alpha}{2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^6 \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 &\xrightarrow{P} D^D(\alpha) \equiv \frac{\alpha^2}{3} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^6 \sum_{t=1}^T t y_{t-1} &\xrightarrow{P} CT^D(\alpha) \equiv \frac{\alpha}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

ただし,

$$\left\{ \begin{array}{l} A^D(\sigma) \\ B^D(\alpha, \sigma) \end{array} \right\} \xrightarrow{L} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \alpha/2 \\ \alpha/2 & \alpha^2/3 \end{bmatrix}\right)$$

となることが知られている。

③ 定数項のある回帰モデルを考えた場合

回帰モデルとして(5)を考えた場合, $\hat{\rho}_T, \hat{t}_T$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} T^{3/2}(\hat{\rho}_T - 1) &\equiv \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^3 \sum_{t=1}^T y_{t-1} u_t - \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T y_{t-1}\right\} \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) \sum_{t=1}^T u_t\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^6 \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 - \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^4 \sum_{t=1}^T y_{t-1}\right\}^2} \\ &\xrightarrow{L} \frac{B^D(\alpha, \sigma) - C^D(\alpha) A^D(\sigma)}{D^D(\alpha) - [C^D(\alpha)]^2} = \frac{B^D(\alpha, \sigma) - (\alpha/2) A^D(\sigma)}{(\alpha^2/3) - (\alpha/2)^2} \\ &\sim N(0, 12\sigma^2/\alpha^2) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\hat{t}_T \xrightarrow{L} \frac{B^D(\alpha, \sigma) - C^D(\alpha) A^D(\sigma)}{\sqrt{D^D(\alpha) - [C^D(\alpha)]^2} \sigma} \sim N(0, 1) \dots\dots\dots(10)$$

④ 定数項, トレンド項のある回帰モデルを考えた場合

次の定数項, トレンド項を含む回帰モデルを考えた場合の単位根検定統計量についてみることにする。

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \sigma t + u_t \dots\dots\dots(11)$$

この回帰モデルにおける通常のOLS推定量の分母 $DENO_0$ は,

$$\begin{aligned} DENO_0 &= \left\{ \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 - T^{-1} \left(\sum_{t=1}^T y_{t-1} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{t=1}^T t y_{t-1} - T^{-1} \left(\sum_{t=1}^T y_{t-1} \right) \left(\sum_{t=1}^T t \right) \right\}^2 \left\{ \sum_{t=1}^T t^2 - T^{-1} \left(\sum_{t=1}^T t \right)^2 \right\}^{-1} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
 T^{-3}DENO_0 &\xrightarrow{P} (D^D(\alpha) - [C^D(\alpha)]^2) - 12\left(CT^D - \frac{1}{2}C^D\right) \\
 &= \left(\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2}{4}\right) - 12\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{4}\right)^2 = 0 \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

となり、いわゆる多重共線性の問題が生じる。これは、 y_{t-1} が漸近的に t と同じ役割をするためである。したがって y_{t-1} を分解した次の回帰モデルを考える。このモデルを考えることによって(11)の回帰モデルを考えた場合の $\hat{\rho}_T$ の漸近分布が得られる。

$$y_t = \alpha^* + \rho^* \xi_{t-1} + \delta^* t + u_t$$

ただし、 $\alpha^* \equiv (1-\rho)\alpha$ 、 $\rho^* \equiv \rho$ 、 $\delta^* \equiv \delta + \rho\alpha$ である。このときのOLS推定量の分母 $DENO_1$ は $O_p(T^2)$ となり、適切な確率オーダーで推定量が評価される。

$$\begin{aligned}
 T(\hat{\rho}_T - 1) &\xrightarrow{L} \frac{(B - C \cdot A) - 12\left(AT - \frac{1}{2}A\right)\left(CT - \frac{1}{2}C\right)}{(D - C^2) - 12\left(CT - \frac{1}{2}C\right)^2} \dots\dots\dots (14) \\
 \hat{t}_T &\xrightarrow{L} \frac{(B - C \cdot A) - 12\left(AT - \frac{1}{2}A\right)\left(CT - \frac{1}{2}C\right)}{\sqrt{(D - C^2) - 12\left(CT - \frac{1}{2}C\right)^2}}
 \end{aligned}$$

ただし、 $AT \equiv AT(1)$ 、 $CT \equiv CT(1)$ である。1), 2) のケースを比較してわかるように、単位根検定統計量は回帰モデルのみならず真のデータ生成過程にも依存していることがわかる。

以上は攪乱項が i.i.d. 系列である場合であったが、単位根検定は攪乱項の系列が独立でない場合にも拡張することができる。

3) $(\xi_1, \dots, \xi_T)$ のデータ生成過程の攪乱項に系列相関がある場合 (I)

(2)において、攪乱項に系列相関がある場合、 u_t は次のように表すことができる。

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad (t=1, \dots, T)$$

ただし、 ϵ_t は平均 0、分散 σ_ϵ^2 のホワイトノイズ過程である。先述のように $\{u_t\}$ が i.i.d. 系列でない場合、ブラウン運動が導くことができない。しかしながら、攪乱項に系列相関がある場合でも、Beveridge-Nelson 分解を用いることによって(3)のようにブラウン運動の関数として漸近分布を求めることが可能である。

$\{\epsilon_t\}$ が i.i.d. 系列で 4 次のモーメントが存在し、 $\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot |\psi_j| < \infty$ である場合、 y_t は次のように表現することができる。

$$\begin{aligned}
 \xi_t &= \psi(1)(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_t) + \eta_t - \eta_0 \dots\dots\dots (15) \\
 \psi(1) &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j, \quad \eta_t \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \epsilon_{t-j}, \quad \alpha_j \equiv -(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_{j+i}), \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty.
 \end{aligned}$$

ここで注意すべき点は、前式右辺第1項が残りの項を確率的に支配することである。つまり、

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)y_t = \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\sum_{i=1}^T u_i = \left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\psi(1)(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_t) + o_p(1)$$

となる。したがって、漸近的に y_t は平均 0 , 分散 $\sigma^2 = [\psi(1)\sigma_\epsilon]^2$ の i.i.d. 系列 $\{u_t\} = \{\psi(1)\epsilon_t\}$ の和と考えることができる。このことから、データ生成過程の攪乱項に系列相関がある場合でも、攪乱項の過程が上で述べた条件を満たしている場合、(3), (8)に対応するものを導くことができ、検定統計量の漸近分布をブラウン運動の関数として求めることができる。

4) $(\xi_1, \dots, \xi_T)$ のデータ生成過程の攪乱項に系列相関がある場合 (II)

データ生成過程の攪乱項に系列相関がある場合、3)の他に、Phillips-Perron検定、Augmented Dickey-Fuller検定などの方法がある。前者は検定統計量に修正を加え、後者は回帰モデルに階差のラグを加えることによってこの系列相関を考慮している。両者とも1)~3)でみたように、検定統計量の漸近分布は、データ生成過程、回帰モデルに定数項、トレンド項が含まれるか否かに依存している。しかしながら、それぞれのケースにおいて対応する①~④と同じ漸近分布を持つ⁽¹⁾。

5) 単位根過程のもとでの $\alpha=0$, $\delta=0$ の検定

Dickey and Fuller [3] では②, ④における同時検定等の方法が示されている。それぞれの検定は表1にまとめられる。

これらの検定に用いられる検定統計量は、検定のTypeに応じて通常の検定統計量と同じ方法で計算される。しかしながらこれらの検定においても検定統計量の分布は標準的な分布に従わず、したがって臨界値は攪乱項の正規性を仮定してモンテカルロシミュレーションによって求められている。

以上、①~④の4つのケースにおいて単位根検定統計量の漸近分布についてみてきた。それぞれのケースにおいてOLS推定量 $\hat{\rho}_T$ は、定常確率過程である場合の $T^{-1/2}$ よりも速く収束することがわかる。またこれらの漸近分布は、データ生成過程の攪乱項の分散には依存しないため、この推定量をそ

表1 : Dickey and Fullerにおける同時検定

回帰モデル: $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t$					
H_{2a} :	t -Type	$\alpha=0$	H_{2ar} :	F -Type	$\alpha=0, \rho=1$
H_{4a} :	t -Type	$\alpha=0$	H_{4ar} :	F -Type	$\rho=0, \delta=0$
H_{4d} :	t -Type	$\delta=0$	H_{4ard} :	F -Type	$\alpha=0, \rho=1, \delta=0$

(1) ρ -TypeのADF検定では検定統計量が局外パラメータに依存するので t -Typeの検定が奨められる。

のまま検定統計量として用いることができる⁽²⁾。しかしながらその分布は標準的な分布に従っていない。またOLS t -検定統計量 $\hat{t}_T$ も③のケースを除いて漸近正規性を持たない。これらの検定に用いられる臨界値の表は、データ生成過程の攪乱項が正規過程であることを仮定して作成されている。

実際に単位根検定をする際にはどの検定を行うかを選択しなければいけない。GNPのようにトレンド（技術進歩等を表す）を含むと考えられる系列に関しては、そのトレンドが定常確率過程におけるタイムトレンドである場合と単位根過程におけるドリフトである場合の2通りのケースが存在する。したがって、このような系列に関して単位根検定を行う際は、回帰モデルに t の項を含む④の検定が適切である。一方、利子率のようにトレンドを含まないと考えられる系列に関しては、②の検定が適切である。また、単位根検定において単位根が存在するとされたときドリフト項を含むかどうか検定したい場合やデータ生成過程に関する事前情報がない場合は、5)で示した検定を用いることができる。それぞれの検定は、攪乱項に系列相関がある場合を考慮してAugmented Dickey-Fuller検定やPhillips-Perron検定を行うのが適切であろう。

3 見せかけの回帰と共和分回帰

見せかけの回帰の問題は第1節で簡単に説明したが、ここではPhillips [10] にならって理論的にみていくことにする。次の回帰モデルを考える。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t, \quad (t=1, \dots, T).$$

ここで、 $\{y_t\}$ 、 $\{x_t\}$ は次式で示される互いに独立なランダムウォークから生成されるとする。

$$y_t = y_{t-1} + v_t, \quad x_t = x_{t-1} + w_t.$$

ただし、 $\{v_t\}$ 、 $\{w_t\}$ は互いに独立でそれぞれ $\text{i.i.d.}(0, \sigma_v^2)$ 、 $\text{i.i.d.}(0, \sigma_w^2)$ である。このとき β のOLS推定量 $\hat{\beta}_T$ は次で示される⁽³⁾。

$$\hat{\beta}_T = \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \sum_{t=1}^T y_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2 - \frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T x_t \right)^2} \xrightarrow{L} \frac{D_{vw}(\sigma_v \sigma_w) - C_v(\sigma_v) C_w(\sigma_w)}{D_w(\sigma_w^2) - [C(\sigma_w)]^2} = \frac{\sigma_v}{\sigma_w} \frac{D_{vw} - C_v C_w}{D_w - C_w^2} \dots \dots \dots (16)$$

また、 β のOLS推定量 $\hat{\beta}_T$ の t -統計量は次で示される。

$$\hat{t}_T = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 s^2 \right\}^{1/2}}$$

(2) 脚注(1)を参照。

(3) 以下、記号については(3)式参照。

ただし, $\bar{y}=(1/T)\sum_{t=1}^T y_t$, $\bar{x}=(1/T)\sum_{t=1}^T x_t$, $s^2=(1/T)\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2$ である。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 s^2 &= \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^T \{(y_t - \bar{y}) - \hat{\beta}(x_t - \bar{x})\}^2 \\ &= \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 - \left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) \right\}^2 \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} T^{-1/2} \hat{t}_T &\xrightarrow{L} \frac{D_{vw}(\sigma_v \sigma_w) - C_v(\sigma_v) C_w(\sigma_w)}{V^{1/2}} \\ V &\equiv \{D_v(\sigma_v^2) - [C_v(\sigma_v)]^2\} \{D_w(\sigma_w^2) - [C_w(\sigma_w)]^2\} \\ &\quad - \{D_{vw}(\sigma_v \sigma_w) - C_v(\sigma_v) C_w(\sigma_w)\}^2 \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。(16), (18)より β , t -検定ともに一致性を持たない。これらの検定統計量は定常確率過程を扱った場合に比べて右に偏りを持つ分布となっている。したがって, 非定常時系列を定常時系列の場合と同様の方法, 臨界値で扱うと誤った結果を導く恐れがある。つまり, 実際に変数間に相関がなくても相関があるという結果が得られてしまう。

非定常時系列を扱う場合, 上でみたような見せかけの回帰が常に起こるわけではない。見せかけの回帰の問題は, 回帰モデルが真のモデルの入れ子型になっていないために生じる問題で, 被説明変数の強い系列相関が誤差項に残ることになる。つまり, 誤差項が $I(1)$ 過程となることを意味する。回帰モデルが真のモデルの入れ子型になっている場合は, 見せかけの回帰の問題は起こらない。ここで y_t と x_t が共和分関係にあるような次のデータ生成過程にある場合の回帰についてみる。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + z_t, \quad x_t = x_{t-1} + w_t, \quad t=1, \dots, T.$$

y_t を定数項と x_t に回帰させた場合のOLS推定量は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} T^{1/2}(\hat{\alpha} - \alpha) \\ T(\hat{\beta} - \beta) \end{pmatrix} \xrightarrow{L} \begin{pmatrix} 1 & C_w(\sigma_w) \\ C_w(\sigma_w) & C_w^2(\sigma_w^2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_z(\sigma_z) \\ E_{zw}(\sigma_z \sigma_w) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

ただし, $E_{zw}(\sigma_z \sigma_w)$ に関しては次のことが成立する。

$$T^{-1} \sum_{t=1}^T x_t z_t \xrightarrow{L} E_{zw}(\sigma_z \sigma_w) \equiv \sigma_z \sigma_w \int_0^1 W_w(r) dW_z(r)$$

見せかけの回帰の場合は, $\hat{\beta}_T$ は一致性を持たなかったが, この共和分回帰においては定常確率過程を扱った場合よりも速い T^{-1} のオーダーで確率収束することがわかる。この性質は超一貫性と呼ばれる。また, 見せかけの回帰の場合は誤差項が $I(1)$ 過程となるのに対して, 共和分回帰では $I(0)$ 過程となっている。このことを考慮して共和分検定が行われる。以下では共和分検定に関して簡単にみていくことにする。

共和分検定では, 仮説:「共和分関係は存在しない」を帰無仮説として検定がなされる。共和分回帰を行い, そのOLS推定によって得られた残差に関して単位根検定を行うものである。この場合も前

節までにみたように、データの非定常性から帰無仮説のもとでの検定統計量は標準的な分布に従わない。単位根検定には、Augmented Dicky Fuller検定の統計量を用いた場合を考える。

ここでは、 n 次元確率ベクトル y_t が次のデータ生成過程にある場合をみる。

$$\Delta y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \epsilon_{t-s}.$$

ただし、 $\epsilon_t \sim \text{i.i.d.}(0, I)$ である。上でみた見せかけの回帰の説明では、 y_t の要素が互いに完全な無相関で、それぞれの要素が i.i.d 系列であるケースを考えたが、このようにデータ生成過程を考えることで、変数間の相関が許されまた系列相関がある場合を考えることができる。このようなケースを考えるにあたって、さらに次の2つの条件を課すことにする。i) ϵ_t には4次のモーメントが存在する。ii) $\{\Psi_s\}_{s=0}^{\infty}$ は絶対可算である。i) の条件は、 Δy_t の2次のモーメントのエルゴード性を認めるために必要とされる。ii) の条件は、 Ψ_s の第 i, j 要素を ψ_s^{ij} とすると任意の $i, j=1, 2, \dots, n$ において $\{\psi_s^{ij}\}_{s=0}^{\infty}$ が絶対可算であることを意味している。この条件によって、 y_t に関するBeveridge-Nelson分解が可能となり、また Δy_t が共分散定常過程であること、つまり $y_t \sim I(1)$ が保証される。

以上の条件が満たされるとき、次の共和分回帰を考えた場合についてみる。

$$y_{1t} = \alpha + \gamma y_{2t} + u_t$$

ただし $y = (y_{1t}, y_{2t})'$ である。帰無仮説のもとで攪乱項 u_t は単位根過程となる。この推定値 $\hat{u}_t$ に関するAugmented Dicky Fuller検定を行う。

$$\Delta \hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^p \Delta \hat{u}_{t-i} + v_{pt} \dots\dots\dots (20)$$

この残差項に関する単位根検定においては、(3)において定数項を含むモデルを考えているので、(20)では定数項は含めなくてもよい。このときの検定統計量は次のように表される。

$$\hat{t}_T = (u'_{-1} Q_{X_p} u_{-1})^{-1/2} (u'_{-1} Q_{X_p} \Delta \hat{u}) / s_v \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $\Delta \hat{u} \equiv (\Delta \hat{u}_{p+2}, \dots, \Delta \hat{u}_T)'$ 、 $u_{-1} \equiv (\hat{u}_{p+1}, \dots, \hat{u}_{T-1})$ で、 X_p を $(\Delta \hat{u}_{t-1}, \dots, \Delta \hat{u}_{t-p})$ の観測値の $(T-p-1) \times p$ 行列とすると、 $Q_{X_p} \equiv I_{T-p-1} - X_p(X'_p X_p)^{-1} X'_p$ である。また、 $s_v \equiv (T-p-1)^{-1} \sum_{i=p+2}^T \hat{v}_{pi}^2$ である。

この検定統計量 (t -type) の極限分布は次のようになることが知られている⁽⁴⁾。

$$\hat{t}_T \xrightarrow{L, \frac{G_n}{H_n}} G_n \equiv \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - h_2' \right) [W^*(1)] \cdot [W^*(1)]' \begin{pmatrix} 1 \\ -h_2 \end{pmatrix} \right] \right\}$$

(4) ただし、このような極限分布を得るためには、 $T \rightarrow \infty$ のとき $p = \infty$ 、 $p = o_p(T^{1/3})$ という条件が必要となる。詳細については、Phillips and Ouliaris [11] 参照。

$$\begin{aligned}
 & -h_1[W^*(1)] - \frac{1}{2}(1+h_2'h_2) \Big\} \\
 H_n &= \int_0^1 [W_1^*(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 W_1^*(r) dr \int_0^1 [W_1^*(r)][W_2^*(r)] dr \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \int_0^1 [W_2^*(r)] dr \\ \int_0^1 [W_2^*(r)] dr & \int_0^1 [W_2^*(r)][W_2^*(r)] dr \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_0^1 W_1^*(r) dr \\ \int_0^1 W_2^*(r) W_1^*(r) dr \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

この分布は、単位根検定の場合と異なるものとなっている。 h_1 , h_2 , H_n は共和分回帰に定数項が含まれているかまた回帰に含まれる確率的説明変数の数に依存しており、それぞれのケースの分布表が、例えば、MacKinnon [9], Phillips and Ouliaris [11] で与えられている。

以上で単一方程式による共和分検定の方法を示した。しかしながらこの検定方法にはいくつかの注意すべき点がある。まずこの検定方法は、共和分の関係に被説明変数が含まれていることが前提とされ、他の変数を被説明変数として回帰を行った場合、異なる結果が得られる可能性がある。また、説明変数間に共和分の関係が存在する場合はMacKinnon [9], Phillips and Ouliaris [11] で与えられた分布とは異なることが知られている。

このような点を克服し、複数の共和分の関係を検出できる方法としてJohansenの共和分検定があり、これについては次節で説明することにする。

4 Johansenの共和分検定

この節では、Johansenの共和分検定について説明する。Johansenの共和分検定はGrangerの表現定理と密接な関係にあり、したがってまずGrangerの表現定理についてみておく。

4.1 Grangerの表現定理

次のようなVAR(p)を考えることにしよう (y は n 次元ベクトル)。

$$y_t = \sum_{i=1}^p \Pi_i y_{t-i} + a + \epsilon_t$$

ただし、 $y_{-n+1}, \dots, y_0$ は固定されており、 $\{\epsilon_t, t=1, 2, \dots\} \sim IN(O, \Omega)$ とする。これは次のような誤差修正表現が可能である。

$$\Delta y_t = \sum_{i=1}^{p-1} \zeta_i \Delta y_{t-i} + a - \zeta_0 y_{t-1} + \epsilon_t \dots\dots\dots (22)$$

ただし、 $\zeta_0 \equiv \sum_{i=1}^p \Pi_i - I_n$, $\zeta_i \equiv -\sum_{j=i+1}^p \Pi_j$, ($i=1, 2, \dots, p-1$)である。Grangerの表現定理では、 y_t が1次の和分過程である場合に成立する定理が述べられており、 y_t が1次の和分過程であるために次のような仮定がなされている。

1. y_t は定常過程または単位根過程である。

つまり, $\{z|\Pi(z)|=0\}\subset[1, \infty)$ である。ここで $\Pi(z)\equiv I_n-\sum_{i=1}^p\Pi_i z^i$ を示している。これによって, y_t が発散過程である場合を排除している。

2. y_t は定常過程でない。

つまり, $\text{rank}(\xi_0)=h<n$ と示される。例えば, $\text{rank}(\xi_0)=n$ であれば $|\Pi(1)|=(-1)^n|\xi_0|\neq 0$ となるので仮定1.より y_t は定常過程となる。この仮定により y_t が定常過程である場合を排除している。

3. y_t は2次以上の和分過程とはならない。

この仮定は $\text{rank}(B'_\perp\Psi(1)A_\perp)=n$ と表される (表記に関しては以下を参照)。

以上の条件が満たされる場合, Grangerの表現定理は, Δy_t は定常で y_t に共和分の関係が存在することを示している。このことを確かめる前に, まず以下で用いる表記について説明しておく。

$n\times h$ 行列 P において, $P_\perp$ を $P_\perp P=O$, $P'P_\perp=O$ を満たし, $\text{rank}(P_\perp)=n-h$ となる P のゼロ空間に存在する $n\times(n-h)$ 行列とする。 $\overline{P}\equiv P(P'P)^{-1}$, $\varphi\equiv(P'P_\perp)$ とする。またこの表記を用いると φ は正則行列となるので $\varphi(\varphi'\varphi)^{-1}\varphi=P\overline{P}'+P_\perp\overline{P}'_\perp=I_n$ となる。

以下ではGrangerの表現定理についてみていく。仮定2.より $\xi_0=-BA'$ と表すことができる。ただし, A , B はそれぞれランクが h の $n\times h$ 行列である。ここで, $w_t\equiv\overline{A}'y_t$, $v_t\equiv\overline{A}'_\perp\Delta y_t$ とすると次のような関係が成り立つ。

$$\Delta y_t = A\Delta w_t + A_\perp v_t \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$A'y_t = A'Aw_t \quad \dots\dots\dots(24)$$

したがって, w_t , $v_t\sim I(0)$ であれば $\Delta y_t\sim I(0)$, $A'y_t\sim I(0)$ であることが証明される。

(22)を次のように変形する (L はラグオペレータを表す)。

$$\Psi(L)\Delta y_t - \xi_0 y_{t-1} = \alpha + \epsilon_t$$

ただし, $\Psi(L)\equiv I_n - \sum_{i=1}^p \xi_i L^i$ である。この式の左から B , B' を掛け(23)等を用いると, それぞれ次のような関係が得られる。

$$-B'BA'A w_{t-1} + B'\Psi(L)A\Delta w_t + B'\Psi(L)A_\perp v_t = B'(\alpha + \epsilon_t) \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$B'_\perp\Psi(L)A\Delta w_t + B'_\perp\Psi(L)A_\perp v_t = B'_\perp(\alpha + \epsilon_t) \quad \dots\dots\dots(26)$$

これを $Z_t\equiv(w'_t, v'_t)'$ の自己回帰表現に書き換えると次のようになる。

$$\tilde{A}(L)Z_t = B'(\alpha + \epsilon_t) \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\tilde{A}(L) = \begin{pmatrix} -B'BA'Az + B'\Psi(z)A(1-z) & B'\Psi(z)A_\perp \\ B'_\perp\Psi(z)A(1-z) & B'_\perp\Psi(z)A_\perp \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(28)$$

ここで, (28)の行列式を調べることによって Z_t の定常性についてみる。

まず, L を z に置き換え, $z=1$ の場合に関して考える。この場合,

$$|\tilde{A}(1)| = (-1)^h |B'B||A'A||B'_\perp\Psi(1)A_\perp|$$

と表される。したがって、仮定2., 仮定3.より $z=1$ は $|\tilde{A}(z)|=0$ の根でないことがわかる。次に $z \neq 1$ の場合, $\Pi(L)y_t = \Psi(L)\Delta y_t - \xi_0 y_{t-1}$ より, $\Psi(z) = (1-z)^{-1}(\Pi(z) - BA'z)$ であることから,

$$|\tilde{A}(z)| = |B||\Pi(z)||A|(1-z)^{n-h}$$

となる⁽⁵⁾。 $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ より, $z \neq 1$ である場合, $|\tilde{A}(z)|=0 \iff |\Pi(z)|=0$ となる。したがって、仮定1.より $|\tilde{A}(z)|=0$ の根は区間 $(-1, 1)$ に存在することがわかる。これより, $w_t, v_t \sim I(0)$ であることが示される。

以上のことより, 仮定1.~3.が満たされる場合, $\Delta y_t \sim I(0)$ で A の h 個の列ベクトルは y_t に関する共和分ベクトルとなっている。

4.2 Johansenの共和分検定

前小節でみたように, Grangerの表現定理は, ξ_0 のランクが起ころうる最大のランクよりも小さい場合, そのランクに等しい数の共和分関係が存在することを示している。したがって, ξ_0 のランクを調べることによって共和分関係の有無を検定することができる。以下では共和分検定, 共和分ベクトルの推定に関してみていく。

ここでは説明の簡素化のため, $a=0$, $p=1$ のモデルを考えた場合についてみる。

$$\Delta y_t = \xi_0 y_{t-1} + \epsilon_t = -BA'y_{t-1} + \epsilon_t$$

これは, $\Delta y_t, y_{t-1}$ を定数項と $\Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p}$ からの影響を取り除いた後の系列と考えることによって一般性を失わないためである。

もし y_t の間に h 個の共和分の関係が存在するのであれば, パラメータ行列の $-BA'$ は特異行列となっている。この場合, 通常の回帰分析とは異なった方法で推定値が求められる。つまり, Anderson [1]の *reduced rank regression* の方法である。Johansenは正準相関分析の理論を利用したAndersonの *reduced rank regression* の方法を用い, 共和分の検定, 共和分ベクトルの検定方法を見出した。その考え方は以下で要約される。

ここで ϵ_t に正規性の仮定をすると, $(y_1, \dots, y_T)$ の対数尤度関数 L_0 は次のように示される。

$$L_0(A, B, \Omega) = -(Tn/2) \log(2\pi) - (T/2) \log|\Omega| \\ - (1/2) \sum_{t=1}^T [\Delta y_t + BA'y_{t-1} \Omega \Delta y_t + BA'y_{t-1}] \dots\dots\dots (29)$$

$$(5) \quad \tilde{A}(z) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(z) & \tilde{A}_{12}(z) \\ \tilde{A}_{21}(z) & \tilde{A}_{22}(z) \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= -B'BA'A + B'\Pi(z)A & \tilde{A}_{11} &= B'\Pi(z)A_{\perp} + B'BA'A_{\perp}(1-z)^{-1} \\ &= B'\Pi(z)A & &= B'\Pi(z)A(1-z)^{-1} \\ \tilde{A}_{21} &= B'_{\perp}\Pi(z)A + B'_{\perp}BA'A & \tilde{A}_{22} &= B'_{\perp}\Pi(z)A_{\perp}(1-z)^{-1} + B'_{\perp}BA'A_{\perp}(1-z)^{-1} \\ &= B'_{\perp}\Pi(z)A & &= B'_{\perp}\Pi(z)_{\perp}(1-z)^{-1} \end{aligned}$$

この関数は、 A を固定したとき、 Δy_t を $A'y_{t-1}$ に回帰させたときの B の OLS 推定量 $\hat{B}(A) \equiv -S_{12}A(A'S_{22}A)^{-1}$ 、またそのときの残差共分散行列 $\hat{\Omega}(A) \equiv S_{11} - S_{12}A(A'S_{22}A)^{-1}A'S_{21} \equiv (1/T) \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}\hat{\epsilon}'$ において最大化される。ただし、

$$S_{11} \equiv (1/T) \sum_{t=1}^T \Delta y_t \Delta y_t' \quad S_{12} \equiv (1/T) \sum_{t=1}^T \Delta y_t y_{t-1}' \\ S_{21} \equiv (1/T) \sum_{t=1}^T y_{t-1} \Delta y_t' \quad S_{22} \equiv (1/T) \sum_{t=1}^T y_{t-1} y_{t-1}'$$

である⁽⁶⁾。したがって集約対数尤度関数 L_1 は次のようになる。

$$L_1 = -(Tn/2) \log(2\pi) - (T/2) \log|\hat{\Omega}| - (1/2) \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t' \hat{\Omega}^{-1} \hat{\epsilon}_t \\ = -(Tn/2) \log(2\pi) - (T/2) \log|\hat{\Omega}| - (1/2) \text{trace } \hat{\Omega}^{-1} T \hat{\Omega} \\ = -(Tn/2) \log(2\pi) - (T/2) \log|S_{11} - S_{12}A(A'S_{22}A)^{-1}A'S_{21}| - (Tn/2) \\ = -(Tn/2) \log(2\pi) - (T/2) \log \left[\frac{|S_{11}| |A'(S_{22} - S_{21}S_{11}S_{12})A|}{|A'S_{22}A|} \right] - (Tn/2) \quad \dots\dots\dots(30)$$

したがって、この集約対数尤度関数の最大化問題は、

$$\frac{|S_{11}| |A'(S_{22} - S_{21}S_{11}S_{12})A|}{|A'S_{22}A|} \quad \dots\dots\dots(31)$$

の最小化問題となる。この値は A の 0 次同次となっているので、 $A'S_{22}A = I_h$ の基準化のもとで、最小値は $\hat{A} = [\hat{v}_1 \hat{v}_2 \dots \hat{v}_n]$ を選択することによって与えられ、 $\hat{V} = [\hat{v}_1 \hat{v}_2 \dots \hat{v}_n]$ は $S_{11}^{-1} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}$ の固有値 $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots \hat{\lambda}_n > 0$ に対応する固有ベクトルで $\hat{V}' S_{22} \hat{V} = I_n$ によって基準化されている。したがって、(31)の最小値は $|S_{11}| \prod_{i=1}^h (1 - \hat{\lambda}_i)$ によって与えられる。

以上のことより、集約対数尤度関数の最大値 L_{max} は、

$$L_{max} = -(Tn/2) \log(2\pi) - (Tn/2) - (Tn/2) \log \left[|S_{11}| \prod_{i=1}^h (1 - \hat{\lambda}_i) \right] \quad \dots\dots\dots(32)$$

となり、また A 、 B 、 Ω の推定値がそれぞれ得られる。

以上のことを考慮して共和分検定を考える場合、2通りの方法が考えられている。1つはトレース検定、もう1つが最大固有値検定と呼ばれるものである。

トレース検定

この検定は、帰無仮説：「たかだか h 個の共和分が存在する」、対立仮説：「 n 個の共和分が存在する⁽⁷⁾」として検定が行われる。(32)の結果より尤度比検定統計量は次で与えられる。

(6) これらの統計量は、 Δy_t と y_{t-1} を要素に持つ行列の母集団における分散共分散行列に対応している。この行列は、 y_{t-1} が非定常過程にあることから、時間 t に依存したものとなるが、 $A'y_{t-1}$ が定常過程にあることから $\hat{B}(A)$ 、 $\hat{\Omega}(A)$ は母集団パラメータの標準的な推定量としての性質を満たしている。

(7) このことは全ての y_{t-1} の線形結合が定常であることを意味している。

$$2(L_n^* - L_h^*) = -T \sum_{i=h+1}^n (1 - \hat{\lambda}_i)$$

この統計量の漸近分布は、定数項 α が何を意味しているか (y_t のドリフトか共和分の関係の平均か) に依存しており、それぞれの漸近的な分布がモンテカルロシミュレーションによって、例えば Johansen and Juselius [8] に数表にされている。

最大固有値検定

この検定は、帰無仮説：「たかだか h 個の共和分が存在する」、対立仮説：「 $h+1$ 個の共和分が存在する」として検定が行われる。このときの尤度比検定統計量は次で与えられる。

$$2(L_{h+1}^* - L_h^*) = -T(1 - \hat{\lambda}_{h+1})$$

この漸近分布についてもトレース検定と同じことがいえる。

5 マクロ経済データへの適応

この節では経済データを用いて以上の検定の例を示すことにする。ここで利用されたデータは表 2 にまとめられる。ただし、これらのデータに関して対数変換したものも利用した。

5.1 単位根検定

表 2：利用データ (1970年第 1 四半期～1995年第 1 四半期)

変数名	データ	変数名	データ
m	$M_2 + CD$ (実質・平残)	s	東証一部出来高時価総額
y	実質 GNP	r	コールレート
p	GNPデフレーター		

単位根検定は、トレンドを含まないと考えられる r 以外は④における ADF 検定を、 r に関しては②を採用し以下の手順で行った。1) 回帰モデルのラグの次数の決定。この決定においては、まず AIC 基準によるものと Ljung-Box の Q テストで誤差項に系列相関がないと判断されるもので最小の次数のものの 2 つを考え、AIC 基準によるものが Q テストによる次数よりも大きい場合は、AIC 基準による回帰モデルから Q テストによる次数のモデルへのリダクションの検定を行い、棄却された場合は AIC 基準による次数を、採択された場合は Q テストによる次数を選択することにした。このリダクションの検定統計量は、標準的な F -分布に従っている。2) 回帰モデルの推定と検定。1) で次数が決まり、検定に用いられる回帰モデルが決定されパラメータの推定が可能となる。推定結果に対して以下の検定を片側 5% の有意水準で行った。

test1	$H_0: \rho=1$	v.s.	$H_1: \rho<1$
test2	$H_0: (\alpha, \delta, \rho)=(0, 0, 1)$	v.s.	$H_1: (\alpha, \delta, \rho)=(\alpha, \delta, \rho)$
test3	$H_0: (\delta, \rho)=(0, 1)$	v.s.	$H_1: (\delta, \rho)=(\delta, \rho)$
test4	$H_0: \rho=1$	v.s.	$H_1: \rho<1$
test5	$H_0: (\alpha, \rho)=(0, 1)$	v.s.	$H_1: (\alpha, \rho)=(\alpha, \rho)$

test4, test5は②の回帰モデルを利用したもので、これは補助的に行ったものである。test1, test4の検定にはMackinnon [9] の臨界値を、他の検定に関してはDickey and Fuller [3] の臨界値を利用した。

以上の手順で行った単位根検定の結果は表3にまとめられる。 r を除いた他の変数は単位根過程であるという結果が得られた。またこれらの変数は、そのデータ生成過程にタイムトレンドを含まないと判断された。したがって、補助的にtest4, test5の検定を行った。 $\log p$ を除く他の変数に関しては単位根過程であると判断されたが、 $\log p$ に関しては定常過程にあるというtest1に反した結果が得られた。このような変数に関しては単位根過程であると考えた方が無難であり、1階の階差をとることで定常化される変数として扱うべきである。

5.2 共和分検定

ここでは、前小節の結果を考慮して、 $\log mp$, $\log y$, $\log s$, mp , y , s の間の共和分検定を行った結果を示す。共和分の関係が存在するのであれば、 $\log mp$ または mp がその関係に含まれていることを仮定し検定を行った。つまり、被説明変数を $\log mp$ または mp とする共和分回帰を考え、残差項に関してMacKinnon [9] の臨界値を用いて単位根検定を行った。その結果、 mp を被説明変数とした場合は共和分の関係は存在しないという結果が得られたので、 $\log mp$ に関する結果のみを表4に示す。またこの検定を行う際に説明変数間の共和分関係について調べたがどのケースにおいても共和分は存在しないと判断された。表4の結果によると、 $\log mp$, y と $\log s$ の間のみに共和分の関数が存在すると判断された。

5.3 Johansenの共和分検定

ここでは前小節で共和分の関係が存在すると判断された $\log(m)$, y と $\log(s)$ のデータにJohansenの共和分検定を適用する。まずこの3変数に関するVARモデルの推定を行った。General to Specificモデリングアプローチに従いモデルのリダクションを行ったところ、VARの次数は2と判断された。このVAR(2)を用いてJohansenの共和分検定を適用した結果は表5にまとめられる。検定の臨界値にはJohansen and Juselius [8] の *table A1* を利用した。この結果によると3変数間に2つの共和分の関係が存在する。

表 3：単位根検定の結果

変数	$\log mp$	$\log y$	$\log p$	$\log s$	mp	y	p	s	r
lags	3	0	3	0	5	4	2	9	2
test1	-2.6895 (-3.4561) accept	-0.0649 (-3.4548) accept	-1.8508 (-3.4561) accept	-0.7793 (-3.4548) accept	-2.5112 (-3.4571) accept	-2.0723 (-3.4566) accept	-1.4407 (-3.4557) accept	-2.4825 (-3.4591) accept	
test2	6.50021 reject	40.25979 reject	4.46461 accept	3.33005 accept	3.33819 accept	3.13513 accept	3.78027 accept	2.21424 accept	
test3	4.44383 accept	3.64161 accept	5.18466 accept	1.35673 accept	3.26335 accept	2.41926 accept	3.96701 accept	3.17090 accept	
test4	-1.5435 (-2.8912) accept	-2.7068 (-2.8903) accept	-3.2374 (-2.8912) reject	-1.6195 (-2.8903) accept	-0.0830 (-2.8918) accept	-0.9737 (-2.8915) accept	-2.8008 (-2.8909) accept	-1.4291 (-2.8932) accept	-3.4509 (-2.8909) reject
test5	6.20513 reject	60.97924 reject	6.76931 accept	4.98294 reject	1.64446 accept	2.68710 accept	5.64112 accept	1.16577 accept	6.04591 accept
判定	U.R., d	U.R., d	U.R., n	U.R., n	U.R., n	U.R., n	U.R., n	U.R., n	Sta.,

注) test 2, 3, 5 の臨界値はそれぞれ4.88, 6.49, 4.71とともに片側 5%の有意水準である。

() 内は臨界値を示している。

判定の欄の‘U.R.’は単位根過程であること, ‘Sta.’は定常過程であることを示している。

また‘d’はドリフトあり, ‘n’はドリフトなしを示している。

表 4：共和分回帰と共和分検定の結果

$$\underline{L.H.V}=\log mp$$

$\log y$	R.H.V.			検定	
	y	$\log s$	s	統計量	臨界値
1.53076	—	—	—	-2.0197	-3.3983
—	5.25097×10^{-6}	—	—	-3.1595	-3.3989
—	—	0.41404	—	-1.6137	
—	—	—	2.50748×10^{-7}	-2.2364	
1.26043	—	0.07708	—	-2.1109	-3.8278
1.39714	—	—	2.80599×10^{-8}	-3.1180	
—	3.58150×10^{-6}	0.14014	—	-4.0846	
—	4.97959×10^{-6}	—	1.62447×10^{-8}	-3.3863	

表 5 : Johansenの共和分検定の結果

帰無仮説	$\hat{\lambda}_i$	最大固有値検定		トレース検定	
		$-T\log(1-\hat{\lambda}_i)$	臨界値	$-T\sum\log(1-\hat{\lambda}_i)$	臨界値
rank $\zeta_0=0$	0.27945	32.45	20.778	51.34	29.509
rank $\zeta_0\leq 1$	0.155696	16.76	14.036	18.90	15.197
rank $\zeta_0\leq 2$	0.0213973	2.141	3.962	2.141	3.962

6 おわりに

本稿では、近年盛んに行われるようになった非定常時系列データの分析について、共和分の関係を中心に推定、検定の方法を簡単にまとめてみた。非定常時系列データに関してはボックスジェグキンス法のように階差を取ることによって定常化されたとみなしモデルを構築する方法があるが、共和分の関係を用いることによって階差を取ることなしに定常化を行うことができる。したがって、階差を取ることに伴う情報の損失を避けることができるという利点が共和分による定常化にはある。この共和分の関係を利用したモデルとして誤差修正モデルがある。実際にデータ生成過程が共和分の関係を示している場合は、ボックスジェンキンス法のようなARIMAモデルでは真のモデルを説明することができない。したがって、共和分の関係が存在する場合は誤差修正モデルを利用することが最も適しており、共和分検定の重要さがうかがえる。

本稿で示した単位根検定や共和分検定を行うことによって誤差修正モデルによる分析が可能となるが、この他にEngle, Hendry and Richard [4] で示されたような外生性の概念が重要な役割をなす。例えば、共和分ベクトルの妥当な推定のためには弱外生性の条件が必要とされたり、また予測、政策シミュレーションを行うには強外生性、超外生性の条件が課せられることになる。

これまで、多くの分野で回帰分析がなされてきたが、その多くは誤差項の定常性を暗黙裏に前提にしてきたように思える。実際、多くの経済データは非定常過程にあると考えられ、共和分、誤差修正モデルを中心とした分析も必要となるケースが多く存在し、また適切な予測、政策シミュレーションを行うために外生性の検定等が必要とされるであろう。

参考文献

- [1] Anderson, T. W., 'Estimating Linear Restrictions on Regression Coefficients for Multivariate Normal Distributions,' *Annals of Mathematical Statistics*, 22:327-351, 1951.
- [2] Banerjee, A., J. J. Dolado, J. W. Galbraith, and D. F. Hendry, 'Co-integration, Error Correction, and the Econometric Analysis of Non-stationary Data,' Oxford University Press, 1993.
- [3] Dickey, D. A. and W. A. Fuller, 'Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root,' *Econometrica*, 49: 1981.
- [4] Engle, R. F., Hendry, D. F., and Richard, J. F., 'Exogeneity', *Econometrica*, 51:277-304, 1983.
- [5] Hamilton, J. D., 'Time Series Analysis,' Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

- [6] Johansen, S., 'Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector in Autoregressive Models,' *Econometrica*, 59(6):1551-1580, 1991.
- [7] Johansen, S., 'Testing Weak Exogeneity and the Order of Cointegration in UK Money Demand Data,' *Journal of Policy Modeling*, 14(3):313-334, 1992.
- [8] Johansen, S., and K. Juselius, 'Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration — with Application to the Demand for Money —,' *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52(2):169-210, 1990.
- [9] MacKinnon, J. G., 'Critical Values for Cointegration,' *Long-Run Economic Relationships*, R. F. Engle and C. W. J. Granger, eds, London, Oxford, 1991.
- [10] Phillips, P. C. B., 'Understanding Spurious Regressions in Econometrics,' *Journal of Econometrics*, 33:311-340, 1986.
- [11] Phillips, P. C. B., and S. Ouliaris, 'Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration,' *Econometrica*, 58:165-193, 1990.