

## 遂行理論と社会選択ルール of 諸性質

都築, 治彦

<https://doi.org/10.15017/3000103>

---

出版情報 : 経済論究. 91, pp.189-210, 1995-03-31. 九州大学大学院経済学会  
バージョン :  
権利関係 :

# 遂行理論と社会選択ルールの諸性質

都 築 治 彦

## 1. 序

社会選択理論において、社会選択ルール (social choice rule) とは、ある選択肢の中から、社会における各人の各々の選好順序 (preference ordering) に対して、社会的に「最適」な元を選択するものである。社会選択ルールは複数の元を選択することもある。その時、選択した元の集合を、社会選択集合 (social choice set) という。社会選択ルールの例としては、多数決原理やパレート最適ルールなどが挙げられる。

いま、ある社会選択ルールが与えられたとする。もし、社会における各人の選好順序が公に知られているのであれば、その社会選択ルールは困難なく遂行される。しかし、各人の選好順序についての情報が不完全な場合、問題は容易ではない。各人の操作可能性を考慮に入れた時、我々は社会選択の結果が均衡として保証されるようなゲームを考えなければならない。このようなゲームが存在するとき、このゲームはその社会選択ルールを遂行する (implements the social choice rule) という。また、遂行するゲームが存在するような社会選択ルールを、遂行可能である (implementable) という。

ゲームの均衡概念については様々なものがあり、事実、遂行可能性もいくつかの均衡概念のもとで研究されてきたが、本論文では特に優れている均衡概念であるナッシュ均衡のもとでの遂行可能性を論じる。

ナッシュ均衡における遂行可能性の理論づけを最初に行ったのは、Maskin [1977] である。Maskin [1977] は、ナッシュ均衡における遂行可能性の必要条件として、社会選択ルールの単調性 (monotonicity) を示した。単調性とは、

ある選好プロフィールのもとで選択された元は、その元のランクが全ての人にとって維持、または上昇しているような選好プロフィールのもとでは、必ず選択されねばならない、という性質である。さらに Maskin [1977] は社会が 3 人以上で構成されるとき、十分条件として、単調性かつ非拒否権性 (no veto power) を示した。非拒否権性とは、1 人を除いて、社会の他の構成員が一致して同じ元を 1 位にランクすれば、その元が選択されねばならない、という性質である。この Maskin の所論は、Williams [1986], Repullo [1987], Matsuo [1987] などによって修正されてきたが、必要十分性を提示したのが、Moore and Repullo [1990] および Dutta and Sen [1991] である。Moore and Repullo [1990] は社会が 3 人以上より構成される場合の必要十分条件を提示した。この条件は極めて複雑なものであるが、Maskin [1977] の主張通り、単調性と単調性かつ非拒否権性の中間に位置するものとなっている。Dutta and Sen [1991] は社会が 2 人より構成される場合における必要十分条件を示した。この条件は 3 人以上の場合に比べ若干強い条件であり、さらに複雑となっている。

本稿では、以上の諸結果を踏まえ、社会選択ルールの様々な性質とナッシュ均衡における遂行可能性との関係を探っていくことをその主題としている。第 2 節では、ナッシュ均衡における遂行可能性の定義や概念について、厳密な定式化を行う。第 3 節では、ナッシュ均衡における遂行可能性の必要十分条件の定式化を、(1)社会が 3 人以上で構成される場合、と(2)2 人で構成される場合、に分けて行う。第 4 節では、以上の定式化を基礎として、社会選択ルールの主要な性質との関係を見る。本稿では、単調性、非拒否権性の他に、中立性 (neutrality) との関係論じる。中立性とは、社会の構成員全てについて、任意の元の選好順序を入れ替えたならば、社会選択の結果もそれに従って入れ替わっていなければならない、という性質である。ここで我々は、任意の置換 (permutation) について閉じている順序集合、という概念を定義する。この概念を導入して初めて中立性が定義できる。今回この概念が導入されたことで、不明瞭な部分が一掃された。

## 2. 定義と概念

本節では、第3節以降のため、基本的枠組みの設定を行う。選好順序や社会選択ルール、ゲーム及びそのナッシュ均衡などについて明確な定義を与え、ナッシュ均衡における遂行可能性についての定義、及び概念を厳密に述べる。

$N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  を社会 (society),  $1, 2, \dots, n$  を社会におけるエージェントとする。 $A$  を社会的選択肢 (social alternatives) の集合とする。 $A$  は無限個の集合でもよい。 $U_A$  を  $A$  上の全ての全順序 (又は順序, ordering) の集合とする。即ち、

$u \in U_A \Leftrightarrow u$  は以下を満たす  $A$  上の二項関係

(i) 完備性 (completeness)

$$\forall a, b \in A \quad u(a) \geq u(b)$$

$$\text{又は } u(a) \leq u(b)$$

(ii) 反射性 (reflexivity)

$$\forall a \in A \quad u(a) \geq u(a)$$

(iii) 推移性 (transitiveness)

$$\forall a, b, c \in A$$

$$u(a) \geq u(b) \wedge u(b) \geq u(c)$$

$$\Rightarrow u(a) \geq u(c)$$

但し、 $u$  の下で  $a$  を  $b$  より選好する、又は無差別であることを、 $u(a) \geq u(b)$  と表記する。

$\forall i \in N$  に対し、 $U_i \subset U_A$  を定め、その元  $u_i \in U_i$  を、エージェント  $i$  の  $A$  上の選好順序 (preference ordering) といい、 $U_i$  を  $i$  の選好順序集合という。

$N$  人の社会選択ルール (social choice rule, 略して SCR) とは、以下で定義される。

$$f: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow P(A)$$

$P(A)$  は  $A$  の全ての部分集合の集合

$\forall u=(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^n U_i$  に対し,  $f(u)$  を社会選択集合 (social choice set) という。

さらに, 以下でゲーム  $g$  を定義する。

$$g: S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \rightarrow A$$

$S_i$  は  $i \in N$  の戦略集合 (strategy set)

次に, 我々はナッシュ均衡を定義する。

【定義 2. 1】  $s^*=(s_1^*, \dots, s_n^*) \in \prod_{i=1}^n S_i$  が  $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)$  に対するゲーム  $g$  のナッシュ均衡 (Nash Equilibrium) であるとは,

$$\forall i \in N \quad \forall s_i \in S_i \quad u_i(g(s_i, s_{-i}^*)) \geq u_i(g(s_i, s_{-i}^*))$$

$$\text{但し } s_{-i}^*=(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

となることをいう。

ここで  $NE_g(u)=\{g(s) \mid s \in \prod_{i=1}^n S_i \text{ は } u \text{ に対するナッシュ均衡}\}$

と定める。さらに,

【定義 2. 2】 ゲーム  $g$  がナッシュ均衡で SCR  $f$  を弱い意味で遂行する ( $g$  weakly implements  $f$  in Nash equilibria) とは,

$$\forall u=(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^n U_i \text{ に対し}$$

$$(1) \quad NE_g(u) \neq \emptyset$$

$$(2) \quad NE_g(u) \subset f(u)$$

が成り立つことをいう。

即ち,  $g$  が  $f$  を弱い意味で遂行するとは,  $g$  は任意の  $\prod_{i=1}^n U_i$  内のプロフィールに対してナッシュ均衡を (純戦略で) 持ち, その均衡点によってもたらされる結果が,  $f$  により定まる社会選択集合の中に含まれている, ということを示している。

【定義 2. 3】 ゲーム  $g$  および SCR  $f$  に対して,

$$\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \text{ に対して } NE_g(u)=f(u)$$

であるとき, ゲーム  $g$  は SCR  $f$  をナッシュ均衡において遂行する ( $g$  fully)

implements  $f$  in Nash equilibria) という。また SCR  $f$  を遂行するゲーム  $g$  が存在するとき、 $f$  をナッシュ均衡で遂行可能な社会選択ルールである (implementable social choice rule in Nash equilibria) という。

即ち、ゲーム  $g$  が SCR  $f$  をナッシュ均衡で遂行するとは、 $\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i$  に対して、 $g$  のナッシュ均衡点の値の集合と、 $f$  による社会選択集合が一致することをいう。

### 3. 必要十分条件

前節で我々はナッシュ均衡における遂行可能性に対する厳密な定義を与えた。本節ではその必要十分条件を述べることにする。

Moore and Repullo [1990] および Dutta and Sen [1991] は、社会が3人以上より構成される場合と、2人より成る場合に分けて必要十分条件を定式化している。

#### (1) 社会が3人以上で構成される場合

必要十分条件の定式化のため、次の記号を導入する。

$$\text{SCR } f: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow P(A)$$

$$\text{ゲーム } g: \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow A \quad \text{に対して}$$

$$\text{range } f \equiv \bigcup_{u \in \prod_{i=1}^n U_i} f(u)$$

$$X \subset A \quad \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \quad \forall i \in N$$

$$M_i(X, u) \equiv \{c \in X \mid u_i(c) \geq u_i(x), \forall x \in X\}$$

[定義 3. 1] SCR  $f$  が条件  $\mu$  を満たすとは

$$\text{range } f \subset \exists B \subset A \quad \text{かつ}$$

$$\forall i \in N, \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i, \forall a \in f(u) \text{ に対して}$$

$$\exists C_i(a, u) \subset B$$

$$\text{s. t. } a \in \bigcap_{i=1}^n M_i(C_i(a, u), u)$$

かつ

$u^* \in \prod_{i=1}^n U_i$  に対して,

$$(i) \quad a \in \bigcap_{i=1}^n M_i(C_i(a, u), u^*) \\ \Rightarrow a \in f(u^*)$$

$$(ii) \quad c \in M_i(C_i(a, u), u^*) \cap [\bigcap_{j \neq i} M_j(B, u^*)] \\ \Rightarrow c \in f(u^*)$$

$$(iii) \quad d \in \bigcap_{i=1}^n M_i(B, u^*) \\ \Rightarrow d \in f(u^*)$$

を満たすことをいう。

〔定理 3. 1〕 (Moore and Repullo [1990])  $\#N \geq 3$  とする。SCR  $f$  がナッシュ均衡で遂行可能であることの必要十分条件は、 $f$  が条件  $\mu$  を満たすことである。

〔証明〕

(必要性) SCR  $f$  が遂行可能ならば  $\mu$  を満たすことを示す。 $f$  が  $g: \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow A$  により遂行されているとする。ここで

$$B = \{g(s) \mid s \in \prod_{i=1}^n S_i\}$$

$$C_i(a, u) = \{c \in A \mid c = g(\hat{s}_i, s_{-i}(a, u)), \hat{s}_i \in S_i\}$$

とおく。ここで  $a \in f(u)$  で、 $s(a, u)$  は  $a = g(s(a, u))$  となるナッシュ均衡戦略とする。

(i) について、 $a \in \bigcap_{i=1}^n M_i(C_i(a, u), u^*)$  ならば、 $s(a, u)$  は  $u^*$  の下でもナッシュ均衡戦略となり、 $a \in NE_g(u^*)$ 、かつ  $f$  は遂行可能だから、 $a \in f(u^*)$ 。

(ii) について、その仮定が満たされれば、 $c$  は  $u^*$  の下でナッシュ均衡値となる。よって  $c \in f(u^*)$ 。

(iii) についても同様に示せる。

以上より  $\mu$  が必要条件であることが示された。

(十分性) SCR  $f$  が条件  $\mu$  を満たせば、ナッシュ均衡で遂行可能であることを示す。

$\forall i \in N$  に対し、戦略集合  $S_i$  を

$$S_i = \{(u^i, a^i, b^i, l^i) \in \prod_{i=1}^n U_i \times A \times B \times Z^+ \text{ s.t. } a^i \in f(u^i)\}$$

と定める。ここで  $Z^+$  は非負の整数の集合である。この戦略集合によってゲー

$\Delta g: \prod_{i=1}^n S_i \rightarrow A$  を以下のように定める。

$$(1) \quad \forall i \in N \quad s_i = (u, a, b^i, l^i) \in \prod_{i=1}^n U_i \times A \times B \times Z^+$$

$$\Rightarrow g(s) = a$$

$$(2) \quad i \in N, \quad i \neq \forall j \in N \quad \text{に対し}$$

$$s_j = (u, a, b^j, l^j)$$

$$s_i = (u^i, a^i, b^i, l^i), \quad (u, a) \neq (u^i, a^i)$$

$$\Rightarrow g(s) = \begin{cases} b^i & b^i \in C_i(a, u) \\ a & \notin \end{cases}$$

$$(3) \quad (1)(2) \text{ でないとき, } g(s) = b^i$$

ここで  $i \in N$  は  $\max_{i \in N} l^i$  となる  $i$  である。

このような  $i$  が複数いるときは最小の  $i$  をとる。

こうして構成されたゲーム  $g$  によって  $f$  が遂行されることを示す。

$$(1) \quad f(u) \subset NE_g(u) \quad \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \text{ を示す。}$$

$\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i$  に対し、 $\forall a \in f(u)$  をとる。

$\forall i \in N$  に対し、 $s_i = (u, a, a, 0)$  とすると、ゲームの構成より、 $s$  はナッシュ均衡点となる。よって  $a = g(s) \in NE_g(u)$  となるから、

$$f(u) \subset NE_g(u)。$$

$$(2) \quad NE_g(u) \subset f(u) \quad \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \text{ を示す。}$$

$\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i$  に対し、 $\forall a \in NE_g(u)$  をとると  $\exists s = s(a, u) \in \prod_{i=1}^n S_i; g(s) = a$

ここで次の3つのケースを考える必要がある。

① (1)の戦略で均衡している場合

つまり、 $(\forall i \in N) \quad s_i = (\bar{u}, \bar{a}, \bar{b}^i, \bar{l}^i)$  の時、 $a = g(s) = \bar{a}$  で、 $a \in \bigcap_{i=1}^n M_i(C_i(a, \bar{u}), u)$  より  $a \in f(u)$ 。

② (2)の戦略で均衡している場合

即ち、 $\forall j \neq i$  に対し、 $s_j = (\bar{u}, \bar{a}, \bar{b}^j, \bar{l}^j)$  で  $s_i = (\bar{u}, \bar{a}^i, \bar{b}^i, \bar{l}^i)$ 、 $(\bar{u}, \bar{a}) \neq (\bar{u}^i,$



$\bar{a}^i$  の時,  $a=g(s)=\bar{b}^i$  or  $\bar{a}$  であり,

$$a \in M_i(C_i(\bar{a}, \bar{u}), u) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j(B, u)$$

$\mu^{(ii)}$ より,  $a \in f(u)$ 。

③ (3)の戦略で均衡している場合

$$a=g(s) \in \bigcap_{i=1}^n M_i(B, u)$$

よって  $\mu^{(iii)}$ より,  $a \in f(u)$ 。

以上より十分性が示された。

(注) 上で構成したゲーム  $g$  は, Moore and Repullo [1990] の構成したゲームとはやや異なっている。Moore and Repullo [1990] は, 各人の戦略  $s_i$  の相違によってゲームの値を場合分けしているが, ここでは  $(u, a)$  のみに注目し, その相違によって場合分けしている。このようにゲームの構成を変えたことは, 各人が, その真の選好順序を報告することが常に均衡となっている, という特長を持っている。

上の証明より, 条件  $\mu$  が必要十分条件であることがわかった。 $\mu^{(i)}$ は単調性 (monotonicity) を強めた条件である。 $\mu^{(ii)}$ は非拒否権性 (no veto power) を弱めたものである。 $\mu^{(iii)}$ は満場一致性 (unanimity) である。条件  $\mu$  を満たすとは, 即ち  $\mu^{(i)} \wedge \mu^{(ii)} \wedge \mu^{(iii)}$  を満たす  $C_i(a, u)$  を用いて, 遂行するゲームを構成できる, ということである。この条件  $\mu$  が, Maskin [1977] がすでに提示した, 必要条件としての単調性, 十分条件としての単調性かつ非拒否権性の中間的存在になっているのは興味深い。

以上は社会の構成員が 3 人以上のケースであった。しかし 2 人から成る社会を考えた場合, 様相はやや異なる。

## (II) 社会が 2 人で構成される場合

[定義 3. 2] SCR  $f$  が条件  $\beta$  を満たすとは,

$$\text{range } f \subset \exists B \subset A \text{ かつ}$$

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall u \in U_1 \times U_2 \quad \forall a \in f(u)$$

$$\exists C_i(a, u) \subset B$$

$$\text{s. t. } a \in \bigcap_{i=1}^2 M_i(C_i(a, u), u)$$

$$(i) \quad \forall \bar{u} \in U_1 \times U_2 \quad \forall b \in f(\bar{u})$$

$(a, u) \neq (b, \bar{u})$  に対して

$$(a) \quad C_i(a, u) \cap C_j(b, \bar{u}) \neq \emptyset$$

$$i, j \in \{1, 2\} \quad i \neq j$$

$$(b) \quad \exists e(a, u, b, \bar{u}) \in C_1(a, u) \cap C_2(b, \bar{u})$$

$$\text{s. t. } e(a, u, b, \bar{u}) \in M_1(C_1(a, u), u^*) \cap M_2(C_2(b, \bar{u}), u^*)$$

$$\Rightarrow e(a, u, b, \bar{u}) \in f(u^*)$$

$$(ii) \quad a \in \bigcap_{i=1}^2 M_i(C_i(a, u), u^*)$$

$$\Rightarrow a \in f(u^*)$$

$$(iii) \quad c \in M_i(C_i(a, u), u^*) \cap M_j(B, u^*)$$

$$\Rightarrow c \in f(u^*) \quad i \neq j \in \{1, 2\}$$

$$(iv) \quad d \in \bigcap_{i=1}^2 M_i(B, u^*)$$

$$\Rightarrow d \in f(u^*)$$

3人以上の場合の条件  $\mu$  と異なるのは、 $\beta(i)(a)(b)$  が加えられたことである。Dutta and Sen [1991] の示したこの条件  $\beta$  は2人の場合のナッシュ均衡における遂行可能性の必要十分条件である。

〔定理 3. 2〕 (Dutta and Sen [1991])  $\#N=2$  のとき、SCR  $f$  がナッシュ均衡で遂行可能であることの必要十分条件は、 $f$  が条件  $\beta$  を満たすことである。

〔証明〕

(必要性) ここでは形式的な証明でなく、概説するにとどめる。条件  $\beta(ii)(iii)(iv)$  については  $\#N \geq 3$  の場合と同様に示せるため、省略し、 $\beta(i)(a)(b)$  についてのみ見る。

いま、SCR  $f$  がゲーム  $g$  によって遂行されていると仮定する。このゲームは図1のように表される。各行、各列がそれぞれエージェント1, 2の戦略である。

図 1

	$t_1$	$t_2$	.....	
$s_1$	$a$			
$s_2$	$e(a, u, b, \bar{u})$	$b$		
⋮				

$(s_1, t_1)$  を  $u \in U_1 \times U_2$  の下でのナッシュ均衡点,

$(s_2, t_2)$  を  $\bar{u} \in U_1 \times U_2$  の下でのナッシュ均衡点とする。

$$C_1(a, u) = \{g(s, t_1) \mid s \in S_1\}$$

$$C_2(a, u) = \{g(s_1, t) \mid t \in S_2\}$$

とすると, 明らかに,

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad a \in M_i(C_i(a, u), u)$$

また戦略の組  $(s_2, t_1)$  を考えると,

$$C_1(a, u) \cap C_2(b, \bar{u}) \neq \emptyset \quad (\beta(i)(a))$$

さらに,  $g(s_2, t_1) = e(a, u, b, \bar{u})$  とする

と, 明らかに

$$e(a, u, b, \bar{u}) \in M_1(C_1(a, u), u^*) \cap M_2(C_2(b, \bar{u}), u^*)$$

$$\Rightarrow e(a, u, b, \bar{u}) \in NE_g(u^*)$$

$f$  は  $g$  にナッシュ均衡で遂行されているという仮定より,  $e(a, u, b, \bar{u}) \in f(u^*) \quad (\beta(i)(b))$ .

(十分性) この証明は厳密に行う。# $N \geq 3$  のとき同様, 条件  $\beta$  を満たす集合  $C_i(a, u)$  をとって, SCR  $f$  を実行するゲーム  $g$  を構成する。

$\forall i \in \{1, 2\}$  に対し, 戦略集合  $S_i$  を

$$S_i = \{(u^i, a^i, b^i, r^i, k^i) \in \prod_{i=1}^2 U_i \times A \times B \times \{F, NF\} \times Z^+ \text{ s.t. } a^i \in f(u^i)\}$$

ここで  $F, NF$  はそれぞれ  $FLAG, NO FLAG$  を示している。この戦略集合によってゲーム  $g: S_1 \times S_2 \rightarrow A$  を以下のように定める。

- (1)  $s_1=(u, a, b^1, NF, k^1), s_2=(u, a, b^2, NF, k^2)$   
 $\Rightarrow g(s_1, s_2)=a$
- (2)  $s_1=(u^1, a^1, b^1, NF, k^1), s_2=(u^2, a^2, b^2, NF, k^2)$   
 $\Rightarrow g(s_1, s_2)=e(a^2, u^2, a^1, u^1) \quad (u^1, a^1) \neq (u^2, a^2)$   
 s. t.  $e(a^2, u^2, a^1, u^1)$  は  $\beta(i)(b)$  を満たす。
- (3)  $s_1=(u^1, a^1, b^1, F, k^1), s_2=(u^2, a^2, b^2, NF, k^2)$   
 $\Rightarrow g(s_1, s_2)=\begin{cases} b^1 & b^1 \in C_1(a^2, u^2) \\ e(a^2, u^2, a^1, u^1) & \notin \end{cases}$
- (4)  $s_1=(u^1, a^1, b^1, F, k^1), s_2=(u^2, a^2, b^2, F, k^2)$   
 $\Rightarrow g(s_1, s_2)=\begin{cases} b^i & k^i > k^j \\ b^1 & k^1 = k^2 \end{cases}$
- (5)  $s_1=(u^1, a^1, b^1, NF, k^1), s_2=(u^2, a^2, b^2, F, k^2)$   
 $\Rightarrow g(s_1, s_2)=\begin{cases} b^2 & b^2 \in C_2(a^1, u^1) \\ e(a^2, u^2, a^1, u^1) & \notin \end{cases}$

以上により構成された  $g$  について

$$NE_g(u^*) = f(u^*) \quad \forall u^* \in U_1 \times U_2 \text{ を示す。}$$

- (1)  $NE_g(u^*) \supset f(u^*) \quad \forall u^* \in U_1 \times U_2$  を示す。

$\forall a \in f(u^*)$  に対して

$$s_1 = s_2 = (u^*, a, a, NF, 0)$$

ととると,  $a \in M_i(C_i(a, u^*), u^*) \quad \forall i \in \{1, 2\}$  だから,  $(s_1, s_2)$  は  $u^*$  の下でナッシュ均衡となり,

$$a = g(s_1, s_2) \in NE_g(u^*)。$$

- (2)  $f(u^*) \supset NE_g(u^*) \quad \forall u^* \in \prod_{i=1}^2 U_i$  を示す。

$\forall a \in NE_g(u^*)$  に対して

$$\exists \bar{s}(a, u^*) = (\bar{s}_1, \bar{s}_2); g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = a$$

ここで均衡の状態により5つの場合を考える必要がある。

- ①  $\bar{s}_1=(u, a, b^1, NF, k^1), \bar{s}_2=(u, a, b^2, NF, k^2)$  のとき,  $\beta(ii)$  より  
 $a \in \bigcap_{i=1}^2 M_i(C_i(a, u), u^*) \Rightarrow a \in f(u^*)$

よって、この場合、 $NE_g(u^*) \subset f(u^*)$ 。

②  $\bar{s}_1 = (u^1, a^1, b^1, NF, k^1)$ ,  $\bar{s}_2 = (u^2, a^2, b^2, NF, k^2)$

$(u^1, a^1) \neq (u^2, a^2)$  のとき、

$$a = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = e(a^2, u^2, a^1, u^1)$$

よってゲーム  $g$  の構成および  $\beta(i)(b)$  から、

$$a = e(a^2, u^2, a^1, u^1) \in M_1(C_1(a^2, u^2), u^*) \cap M_2(C_2(a^1, u^1), u^*)$$

$$\Rightarrow a = e(a^2, u^2, a^1, u^1) \in f(u^*)$$

③  $\bar{s}_1 = (u^1, a^1, b^1, F, k^1)$ ,  $\bar{s}_2 = (u^2, a^2, b^2, NF, k^2)$  のとき、 $g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = a$

であり、 $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  がナッシュ均衡だから、

$$a \in M_1(C_1(a^2, u^2), u^*) \cap M_2(B, u^*)$$

よって  $\beta(iii)$  より  $a \in f(u^*)$ 。

④  $\bar{s}_1 = (u^1, a^1, b^1, F, k^1)$ ,  $\bar{s}_2 = (u^2, a^2, b^2, F, k^2)$  のとき、

$$a = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in M_1(B, u^*) \cap M_2(B, u^*)$$

よって  $a \in f(u^*)$  ( $\beta(iv)$  より)。

⑤ ゲーム  $g$  の構成(5)の状態 で均衡している場合は、③でエージェント 1, 2 が入れかわったケースである。

以上より、 $NE_g(u^*) \subset f(u^*) \quad \forall u^* \in U_1 \times U_2$ 。

(注) 十分性の証明の中で構成したゲーム  $g$  は Dutta and Sen [1991] が構成したものとは若干異なっている。本論文で構成したゲームの戦略集合には、 $b \in B$  という要素が新たに加わっている。よってゲームの構成における、(3)、(4)、(5)が異なっている。この新たな要素を加えることによって、ゲームの値  $g(s_1, s_2)$  が、各戦略に対して一意に決定されることになった。

以上により、2人から構成される社会の場合、ナッシュ均衡における遂行可能性の必要十分条件が条件  $\beta$  である、ということが示されたわけである。

我々は(I)社会が3人以上より構成される場合、と、(II)2人で構成される場合、を合わせて、ナッシュ均衡における遂行可能性の完全な特性化を達成した。

[定理 3. 3] (Moore and Repullo [1990], Dutta and Sen [1991])

- (i)  $\#N \geq 3$  のとき, SCR  $f$  が遂行可能であるための必要十分条件は,  $f$  が条件  $\mu$  を満たすことである。
- (ii)  $\#N = 2$  のとき, SCR  $f$  が遂行可能であるための必要十分条件は,  $f$  が条件  $\beta$  を満たすことである。

(Ⅲ) 具体例

本節では, 遂行可能な SCR の具体例を挙げていくことにする。

[例 1] (Maskin [1985]) 次の SCR  $f_{IR}$  はナッシュ均衡において遂行可能である。

$$f_{IR}(u) = \{a \in A \mid u_i(a) \geq u_i(a_0) \quad \forall i \in N\}, \quad a_0 \in A$$

このように定義される  $f_{IR}$  を個人合理的選択ルール (individual rationality correspondence) という。  $f_{IR}$  を実行するのは以下のゲーム  $g$  である。

$$g(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} s & s_1 = s_2 = \dots = s_n = s \\ a_0 & \text{他} \end{cases}$$

但し,  $S_i = A \quad (\forall i \in N)$

[例 2] (Moore and Repullo [1990])

$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad N = \{1, 2\}$$

$$U_1 = \{u_1, \bar{u}_1\} \quad U_2 = \{u_2, \bar{u}_2\}$$

$$u_1: u_1(a) > u_1(c) > u_1(d) > u_1(b) > u_1(z)$$

$$\bar{u}_1: \bar{u}_1(a) > \bar{u}_1(d) > \bar{u}_1(c) > \bar{u}_1(b) > \bar{u}_1(z)$$

$$u_2: u_2(b) > u_2(c) > u_2(d) > u_2(a) > u_2(z)$$

$$\bar{u}_2: \bar{u}_2(b) > \bar{u}_2(d) > \bar{u}_2(c) > \bar{u}_2(a) > \bar{u}_2(z)$$

のとき,

$$f(u_1^*, u_2^*) = \begin{cases} d & (u_1^*, u_2^*) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \\ c & \text{他} \end{cases}$$

$C_i(x, u) = L_i(x, u), \quad B = A$  ととれば,  $f$  が遂行可能であることがわかる。

(注)  $L_i(x, u) = \{y \in A \mid u_i(x) \geq u_i(y)\}$

〔例 3〕 (Palfrey and Srivastava [1991])

以下の 3 つの SCR はナッシュ均衡で遂行可能ではない。

〔パレート最適ルール (Pareto correspondence)〕

$$A = \{x, y, z\} \quad N = \{1, 2\}$$

$$U_1 = \{u_1, \bar{u}_1\} \quad U_2 = \{u_2\}$$

$$u_1: u_1(x) > u_1(y) > u_1(z)$$

$$\bar{u}_1: \bar{u}_1(x) = \bar{u}_1(y) > \bar{u}_1(z)$$

$$u_2: u_2(y) > u_2(x) > u_2(z)$$

とする。

パレート最適ルール  $f$  によって

$$f(u_1, u_2) = \{x, y\} \quad f(\bar{u}_1, u_2) = \{y\}$$

が選択される。ところが、 $x \in f(u_1, u_2)$  かつ

$$x \in \bigcap_{i=1}^2 M_i(L_i(x, (u_1, u_2)), (\bar{u}_1, u_2))$$

だが、 $x \notin f(\bar{u}_1, u_2)$  だから、遂行可能でない。

〔多数決原理 (plurality rule)〕

$$A = \{x, y, z\} \quad N = \{1, 2, 3\}$$

$$U_1 = \{u_1\} \quad U_2 = \{u_2\} \quad U_3 = \{u_3, \bar{u}_3\}$$

$u_1, u_2, u_3, \bar{u}_3$  は以下で定義される。

$$u_1: u_1(x) > u_1(y) > u_1(z)$$

$$u_2: u_2(y) > u_2(z) > u_2(x)$$

$$u_3: u_3(z) > u_3(y) > u_3(x)$$

$$\bar{u}_3 = u_2$$

最多得票した候補が複数のとき、アルファベット順で選択する多数決原理  $f$

は、

$$f(u_1, u_2, u_3) = x \quad f(u_1, u_2, \bar{u}_3) = y$$

を選択する。しかし、 $x \in f(u_1, u_2, u_3)$  だが

$$x \in \bigcap_{i=1}^3 M_i(L_i(x, (u_1, u_2, u_3)), (u_1, u_2, \bar{u}_3))$$

にも拘らず、 $x \notin f(u_1, u_2, \bar{u}_3)$ 。よって  $f$  は遂行可能ではない。

[コンドルセ勝者 (Condorcet winners)]

$$A = \{x, y, z\} \quad N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$U_1 = \{u_1, \bar{u}_1\}, U_2 = \{u_2, \bar{u}_2\}, U_3 = \{u_3, \bar{u}_3\}$$

$$U_4 = \{u_4\} \quad U_5 = \{u_5\}$$

$$u_1 = u_2: u_1(x) > u_1(y) > u_1(z) \quad u_3: u_3(y) > u_3(z) > u_3(x)$$

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2: \bar{u}_1(x) > \bar{u}_1(y) = \bar{u}_1(z) \quad \bar{u}_3: \bar{u}_3(y) = \bar{u}_3(z) > \bar{u}_3(x)$$

$$u_4 = u_5: u_4(z) > u_4(y) > u_4(x)$$

$w, \bar{w} \in A$  に対して、 $w$  が  $\bar{w}$  に対する多数派勝者 (majority winner) であるとは、 $w$  を  $\bar{w}$  より選好する投票者が、 $\bar{w}$  を  $w$  より選好する投票者より多いことをいう。さらに、 $A$  のコンドルセ勝者とは、 $A$  内の他の全ての元に対して多数派勝者となっているものをいう。この例では、コンドルセ勝者は、

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5), \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, u_4, u_5)$$

とすると、 $f(u) = y$   $f(\bar{u}) = z$ 。

しかし、 $y = f(u)$  にも拘らず、 $y \in \bigcap_{i=1}^5 M_i(L_i(y, u), \bar{u})$  だが、 $y \notin f(\bar{u})$ 。よって遂行可能ではない。

#### 4. 主要な性質との関係

前節で我々は社会選択ルールの遂行可能性に関する必要十分条件を定式化した。本節では前節の定式化を用いて、社会選択ルールの主要な性質との関係を探っていくことにしよう。

##### (1) 単調性と非拒否権性

[定義 4. 1] SCR  $f$  が単調 (monotonic) であるとは、

$$\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \quad \forall a \in f(u)$$

$$\bar{u} \in \prod_{i=1}^n U_i \quad (\forall i \in N) \quad L_i(a, u) \subset L_i(a, \bar{u})$$

$$\Rightarrow a \in f(\bar{u})$$

が成立することをいう。



但し,  $L_i(a, u) = \{b \in A \mid u_i(a) \geq u_i(b)\}$

即ち, 単調性とは, ある選好プロフィールの下で選択された元は, その元のランクが全ての構成員にとって, 維持, 又は上昇しているような選好プロフィールの下では, 必ず選択されねばならない, という性質である。

【定義 4. 2】  $\#N \geq 3$  とする。SCR  $f$  が非拒否権性 (no veto power) を満たすとは,

$$\begin{aligned} & \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \quad \forall T \subset N \quad \#T \geq n-1 \\ & b \in \bigcap_{i \in T} M_i(A, u) \\ & \Rightarrow b \in f(u) \end{aligned}$$

を満たすことをいう。

即ち, 非拒否権性とは,  $n-1$  人以上のエージェントが 1 位にランクしたものは, 選択されねばならない, ということである。

【補題 4. 1】 (Maskin [1985], Matsuo [1987]) SCR  $f: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow P(A)$  が単調, かつ  $\bigcup_{u \in \prod U_i} f(u) = A$  とすると,

$$\begin{aligned} & u \in \prod_{i=1}^n U_i, \quad a \in \bigcap_{i=1}^n M_i(A, u) \\ & \Rightarrow a \in f(u) \end{aligned}$$

【証明】 略。

Maskin [1977] は, Moore and Repullo [1990] や Dutta and Sen [1991] が必要十分性を示す前に, 単調性, および非拒否権性と遂行可能性との間に次の重要な関係があることを示していた。

【定理 4. 1】 (Maskin [1977])

- (i) SCR  $f$  がナッシュ均衡で遂行可能ならば,  $f$  は単調性を満たす。
- (ii)  $\#N \geq 3$  とする。SCR  $f$  が単調性および非拒否権性を満たせば,  $f$  はナッシュ均衡で遂行可能である。

〔証明〕 ここでは  $\mu, \beta$  を用いて示す。

- (i)  $\#N \geq 3$  のとき、条件  $\mu(i)$  より明らかである。  $\#N = 2$  のときも  $\beta(i)$  からいえる。
- (ii)  $C_i(a, u) = L_i(a, u) \quad (\forall i \in N) \quad B = A$  ととると、単調性より  $\mu(i)$  が示され、非拒否権性より  $\mu(i)$  が示される。

この定理の、特に(i)の持つ意味は重要である。SCR の定義域が大きくなるにつれ、単調性は極めて強い条件となるからである。SCR の定義域が全ての順序を含むとき、一価の SCR (つまり、社会選択集合が1つの元より成る SCR) は、本質的にナッシュ均衡で遂行されないのである。定義域に強い制限が与えられた時のみ有効な結果が得られる。

### (II) 制限された拒否権性

前節で、Maskin [1977] は、ナッシュ均衡での遂行可能性の十分条件として単調性かつ非拒否権性を示した。非拒否権性を少し弱めるとどうであろうか。

〔定義 4. 3〕 SCR  $f$  が制限された拒否権性 (restricted veto power) を満たすとは、

$$\begin{aligned}
 & u \in \prod_{i=1}^n U_i \quad i \in N \quad a \in \bigcap_{j \neq i} M_j(A, u) \\
 & \exists b \in \text{range } f; \quad u_i(a) \geq u_i(b) \\
 & \Rightarrow a \in f(u)
 \end{aligned}$$

となることである。

この性質の意味するところは、 $i \in N$  以外の全てのエージェントに1位にランクされ、 $i$  にとって狭義に最悪の元でなければ、その元が選択される、ということである。逆にいえば、 $i$  が拒否権を行使できる可能性があるのは、 $i$  にとってその元が狭義に最悪となった時のみである。

制限された拒否権性は、 $\text{range } f$  が大きくなるにつれ、強い意味を持つことになる。 $\text{range } f = A$  のとき、この条件は非拒否権性と一致する。

前節の Maskin [1977] の定理は、非拒否権性を制限された拒否権性におきかえても成立する。

【定理 4. 2】 (Matsuo [1987])  $\#N \geq 3$  とする。SCR  $f$  が単調性および制限された拒否権性を満たすならば、ナッシュ均衡で遂行可能である。

【証明】  $\mu$  を満たすことを示す。 $B=A$ ,  $C_i(a, u) = L_i(a, u) (\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i, \forall a \in f(u))$  とおく。 $\mu(i)$  の成立は明らか。 $\mu(ii)$  の成立を示すため、 $c \in M_i(L_i(a, u), \bar{u}) \cap [\bigcap_{j \neq i} M_j(A, \bar{u})]$  ととると、仮定より、 $c \in f(\bar{u})$ 。 $\mu(iii)$  も明らかである。

以上は  $\#N \geq 3$  の場合であった。 $\#N=2$  のときはどうであろうか。 $\#N=2$  のときには、遂行可能性の必要十分条件に  $\beta(i)(a)(b)$  が加えられた。このままではこの定理は  $\#N=2$  のときは不成立であるが、新たな条件を加えることにより、成立させることができるのである。 $\beta(i)(a)(b)$  は次の条件により、自明に満足される。

【定義 4. 4】  $z \in A$  が最悪元 (bad outcome) であるとは、

$$\forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \quad \forall a \in A \quad \forall i \in N$$

$$u_i(a) > u_i(z)$$

を満たすことをいう。

即ち、最悪元とは、いかなる状態の下でも、誰にとっても、どんな元よりも狭義に悪い元のことである。最悪元では多くの経済環境で容易に見つけることができる。(例えば、交換経済における 0 配分などである。)

最悪元が存在すれば、 $\beta(i)(a)(b)$  は明らかに成立する。

【補題 4. 2】 (Moore and Repullo [1990]) 最悪元が存在する SCR は  $\beta(i)(a)(b)$  を満たす。

よって次が成立する。

【定理 4. 3】 (Moore and Repullo [1990])  $\#N=2$  であり, SCR  $f$  が単調性, 制限された拒否権性を満たし, 最悪元が存在すれば,  $f$  はナッシュ均衡で遂行可能である。

(iii) 中立性

我々は中立性 (neutrality) を定義するため, 選好順序集合にある概念を持ち込まなければならない。この概念は中立性を定義する上で欠くべからざるものである。

【定義 4. 5】  $A$  上の選好順序集合  $U$  が, 任意の置換 (permutation)  $\pi: A \rightarrow A$  に対して閉じている, とは以下が成立することをいう。

$$\begin{aligned} \forall u \in U \quad \exists u_\pi \in U \\ \text{s. t. } a, b \in A \\ u(a) \geq u(b) \Leftrightarrow u_\pi(\pi(a)) \geq u_\pi(\pi(b)) \end{aligned}$$

【例】  $U_A, L_A$  は任意の置換について閉じている。また, 次で定まる  $U$  も, 同様に, 任意の置換について閉じている。

$$\begin{aligned} A = \{a, b, c\} \quad U = \{u^1, u^2, u^3\} \\ u^1: u^1(a) = u^1(b) > u^1(c) \\ u^2: u^2(a) = u^2(c) > u^2(b) \\ u^3: u^3(b) = u^3(c) > u^3(a) \end{aligned}$$

各  $U_i$  が任意の置換について閉じているとき,  $\prod_{i=1}^n U_i$  も任意の置換について閉じている, ということにする。

以上の新しく導入された概念を用いて初めて, 中立性が定義され得る。

【定義 4. 6】  $\prod_{i=1}^n U_i$  が任意の置換について閉じているとする。SCR  $f: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow P(A)$  が中立的である (neutral) とは,

$$\begin{aligned} \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i \quad \forall \text{置換 } \pi: A \rightarrow A \quad \text{に対して} \\ f(u_\pi) = \pi(f(u)) \end{aligned}$$

ただし  $u_{\pi} = (u_{1\pi}, u_{2\pi}, \dots, u_{n\pi})$

中立性とナッシュ均衡における遂行可能性との関係については、次のようなものが成立することが分かっている。

〔定理 4. 4〕 (Maskin [1985])  $\#N \geq 3$  とする。 $\prod_{i=1}^n U_i$  が任意の置換について閉じていて、SCR  $f: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow P(A)$  が中立かつ単調ならば、ナッシュ均衡で遂行可能である。

〔証明〕 条件  $\mu$  を満たすことを示す。 $B=A, C_i(a, u) = L_i(a, u) \quad \forall u \in \prod_{i=1}^n U_i$   
 $\forall a \in f(u)$  とおくと、 $\mu(i)$  を満たす。 $\mu(i)$  を示すため、

$$\forall i \in N \quad c \in M_i(L_i(a, u), \bar{u}) \cap \left[ \bigcap_{j \neq i} M_j(A, \bar{u}) \right]$$

ととる。 $\pi$  が  $a$  と  $c$  を置換すると、 $a \in f(u)$  及び中立性より、 $c \in f(u_{\pi})$ 。よって単調性より、 $c \in f(\bar{u})$ 、で  $\mu(i)$  が示された。 $\mu(i)$  も全く同様に示せる。

## 5. 結 語

最後に、今後のこの分野における展望をみてゆくことにする。第一に、本稿では、ゲームの均衡概念として、ナッシュ均衡を採用している。ナッシュ均衡は確かに優れた非協力均衡概念だが、非合理的な均衡を含んでしまう、という欠点も指摘されている。この非合理性を排除するため考え出されたものが、サブゲームパーフェクト均衡、そして逐次の均衡などである。ナッシュ均衡の代わりに、これらを用いた遂行可能性が考えられる。サブゲームパーフェクト均衡における遂行可能性を論じたものに、Moore and Repullo [1988], Abreu and Sen [1990] がある。また、Palfrey and Srivastava [1991] は非支配戦略 (undominated strategy) における遂行可能性を論じた。第 3 節で述べた、ナッシュ均衡においては遂行可能でなかった 3 つの社会選択ルール (パレート最適ルール, 多数決原理, コンドルセ勝者) は、非支配戦略の下では、いずれも遂行可能となるのは興味深い話である。このように、ナッシュ均衡の修正概

念を用いて遂行可能性を論じてゆくのが一つの方向であろう。

次に、2人交渉モデル (bargaining model) に対し、遂行可能性の議論を適用することは意義がある、と考えられる。社会が2人より構成される場合に対する遂行可能性の必要十分条件が提示された今、この問題に取り組む準備が整った、といえる。

以上の2点は、大きく発展が期待される分野であり、今後の課題として取り組んで行く予定である。

### 参 考 文 献

- Abreu, D. and Sen, A. [1990] "Subgame Perfect Implementation: A Necessary and Almost Sufficient Condition", *Journal of Economic Theory*, 50, 285-299.
- Dasgupta, P., Hammond, P. and Maskin, E. [1979] "The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility", *Review of Economic Studies*, 46, 181-216.
- Dutta, B. and Sen, A. [1991] "A Necessary and Sufficient Condition for Two-Person Nash Implementation", *Review of Economic Studies*, 58, 121-128.
- [1991] "Implementation under Strong Equilibrium: A Complete Characterization", *Journal of Mathematical Economics*, 20, 49-67.
- Gibbard, A. [1973] Manipulation of Voting Schemes: A General Result", *Econometrica*, 41, 587-601.
- Maskin, E. [1977] "Nash Equilibrium and Welfare Optimality", mimeo.
- [1979] "Implementation and Strong Nash Equilibrium", in *Aggregation and Revelation of Preferences*. ed. by J. J. Laffont, Amsterdam, North-Holland.
- [1985] "The Theory of Implementation in Nash Equilibrium: A Survey", in *Social Goals and Social Organization*. ed. by L. Hurwicz, D. Schmeidler and H. Sonnenschein. Cambridge: Cambridge University Press.
- Matsuo, T. [1987] "Implementation of Social Choice Rules in Nash Equilibria and an Informational Aspect of Mechanism Design", mimeo.
- [1987] "Information, Strategic Behavior and Performance", Ph. D. dissertation, University of Pennsylvania.
- Moore, J. and Repullo, R. [1988] "Subgame Perfect Implementation", *Econometrica*, 56, 1191-1220.
- Moore, J. and Repullo, R. [1990] "Nash Implementation: A Full Characteriza-

- tion", *Econometrica*, 58, 1083-1099.
- Muller, E. and Satterthwaite, M. [1977] "The Equivalence of Strong Positive Association and Strategy-Proofness", *Journal of Economic Theory*, 14, 412-418.
- Myerson, R. B. [1979] "Incentive-Compatibility and the Bargaining Problem", *Econometrica*, 47, 61-73.
- Palfrey, T. R. and Srivastava, S. [1991] "Nash Implementation Using Undominated Strategies", *Econometrica*, 59, 479-501.
- Peleg, B. [1984] "Game Theoretic Analysis of Voting in Committees", Cambridge: Cambridge University Press.
- Repullo, R. [1987] "A Simple Proof of Maskin's Theorem on Nash Implementation", *Social Choice and Welfare*, 4, 39-41.
- Saijo, T. [1985] "Nash Implementation Theory", Ph. D. dissertation, University of Minnesota.
- [1986] "On the Gibbard-Maskin-Muller-Satterthwaite Theorem", mimeo.
- Satterthwaite, M. [1975] "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions", *Journal of Economic Theory*, 10, 187-217.