ナッシュ自発的公共財供給に関する中立性定理 : 複数公共財のケース

佐藤, 秀樹

https://doi.org/10.15017/3000062

出版情報：経済論究. 85, pp.25-31, 1993-03-21. 九州大学大学院経済学会

ナッシュ自発的公共財供給に関する中立性定理

——複数公共財のケース——

佐　藤　秀　樹

I．序

Warr〔1983〕の先駆的業績以来，ナッシュ自発的公共財供給の中立性に基づく議論が多くなされている。この議論における公共財供給は複数のエージェントによる「純粋に利他的」(pure altruistic) な動機によって行われるナッシュ「自発的供給」(voluntary provision) の総和と定義されている。このような公共財供給の具体例には企業の「社会貢献」(philanthropy) あるいは環境「NGO」(non-governmental organization) の存在が挙げられよう。このような公共財供給における中立性とは基本的に次のようなことを意味する：複数のエージェントによる自発的供給の総和として公共財供給が存在する経済において，所得の総和が固定されている状況の下で，公共財供給の均衡水準は任意の所得分布から独立であるということである。また，このような中立性の結果は自発的拠出ルールに基づいた公共財のナッシュ供給の均衡水準がパレート効率水準と比較して過小供給であるという結果 (Sugden〔1982〕) を考慮すれば，その改善を目的とした所得再分配政策は公共財供給の均衡水準に影響を及ぼし得ないという公共政策上の負のインプリケーションを持つと言い得る。

Warr〔1983〕が単一公共財モデルにおいて証明した中立性の結果に関する主要な拡張には Kemp〔1984〕による複数公共財モデルへの拡張やエージェントの「純粋でない利他主義」(impure altruism) を考慮した Andreoni〔1989〕による拡張あるいは純粋公共財に対するエージェント間の便益の相違を考慮し

た Ihori〔1992〕による拡張などが存在する。一方，Bergstrom and Varian〔1985〕は中立性定理としてナッシュ均衡がエージェントの特性から独立である必要十分条件を証明しており，その一例として前掲の Warr の単一公共財モデルが挙げられている。本稿の課題は「純粋な利他主義」(pure altruism) に基づいたナッシュ自発的公共財供給の議論を中心に中立性定理を概観し，特に，複数公共財モデルにおける中立性定理を再検討することである。次節において我々は複数公共財モデルを設定し，第3節においてこのモデルにおける中立性定理を証明する。第4節においてはナッシュ自発的公共財供給の課題が複数公共財モデルに存在することを指摘し，最後に，第5節においてこの議論の周辺に存在する幾つかの拡張を要約する。

Ⅱ. 複数公共財モデル(1)

複数の個人が自らの余暇を複数の慈善活動に費やそうとしている状況を想定して以下にモデルを設定する。n 人のエージェントが存在する経済における任意特定のエージェント i を考える。エージェント i の効用水準 U^i は私的消費ベクトル $c^i=(c^i{}_1, c^i{}_2, \cdots, c^i{}_k, \cdots, c^i{}_m)^T$ 及び公共財供給ベクトル $G=(G_1, G_2, \cdots, G_t, \cdots, G_l)^T$ に依存するものとする (^{T}：転置記号)。公共財供給ベクトルの全ての元を全てのエージェントに関する自発的供給 ($g_t{}^i$) の和と定義する：$G_t=\Sigma_i g_t{}^i$ $(t=1,2, \cdots,l)$(2)。エージェント i の効用関数を $U^i=U^i(c^i, G)$ と定義し(3)，関数 U^i (•) は任意の i に関して厳密に準凹で 2 階微分可能及び c^i 及び G に関して増加関数であるものとする。但し，全ての消費者選好の同質性は仮定しない。

エージェント i はある初期賦存量 (e^i) を保有しており，これを私的消費及び全ての公共財に対する自発的供給に配分する：エージェント i の予算制約を $\Sigma_k c_k{}^i+\Sigma_t g_t{}^i \leqq e^i$ と表わす。

更に，任意の i に関して c^i 及び G の全ての元は正常財であるものとする。

Ⅲ．複数公共モデルにおける中立性定理

前節のモデルにおける中立性定理は次の通りである：

定理：$\Sigma_i w^i = \text{const.}$ であるとき，任意の初期保有分布は複数の自発的公共財供給の均衡水準から独立である。(また，私的消費及び消費合計の均衡水準に関しても同様の独立性（中立性）が成立する)

(証明)　エージェントｉの効用最大化行動を仮定すると，上の結果は次の最大化問題の１階条件を解くことによって得られる：

$$\underset{c_i,\ G_i}{\text{maximize}}\ U^i = U^i\ (c^i, G)\ \text{subject to}\ G = g^i + G_{-i}$$

$$\text{and}\quad \Sigma_k c_k{}^i + \Sigma_t g_t{}^i \leqq e^i|_{given} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

但し，$G_{-i} = \Sigma_{j \neq i} g^j = (\Sigma_{j \neq i} g_1{}^j,\ \Sigma_{j \neq i} g_2{}^j, \cdots,\ \Sigma_{j \neq i} g_t{}^j, \cdots,\ \Sigma_{j \neq i} g_1{}^j)^T$

である。

この G_{-i} に対して，ナッシュの仮定を起用して，任意のｉに関して所与とする。この問題のキューン・タッカー条件を求めると

$$(1)\quad c_k{}^i(U^i{}_c - \lambda) = 0,\ g_t{}^i(U^i{}_g - \lambda) = 0,\ \Sigma_k c_k{}^i + \Sigma_t g_t{}^i = e^i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

但し，$U^i{}_c = \partial U^i/\partial c^i{}_k$, $U^i{}_g = \partial U^i/\partial g^i{}_t$, λ はラグランジュ未定乗数である。

ここで簡単のため，任意の i，k 及び t に関して，$c_k{}^i > 0, g_t{}^i > 0$ を仮定し[4]，第１自発的供給 ($g^i{}_1$) をニューメレールに取り，条件(1)の第１式及び第２式から限界代替率を求めこれを関数 $M^i(\bullet)$ と定義すると，次のような１階条件が得られる：

$$(2)\quad M^i{}_c(c^i, G) \equiv U^i{}_c/U^i{}_g = 1,\ M^i{}_t(c^i, G) \equiv U^i{}_1/U^i{}_t = 1,$$

$$\Sigma_k c_k{}^i + \Sigma_t g_t{}^i = e^i \qquad (i=1,2,\cdots,\ n; t=1,\ 2,\cdots,\ 1\text{-}1)$$

$M^i(\bullet)$ に陰関数定理を適用することができて，条件(2)より c^i の各元に関して解くと，次のように解を得ることができる：

$$(3)\quad c^i{*} = H^i{*}(G) \qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

但し，$H^i{*}(G) = (H^i{}_{1}{*}\ (G),\ H^i{}_{2}{*}\ (G), \cdots,\ H^i{}_{k}{*}(G),\ \cdots,\ H^i{}_{m}{*}(G))^T$

である。関数 $H^i{*}(\bullet)$ の各元は正常財の仮定により単調増加関数である。

予算制約を満たす均衡解を得るために(3)式を１階条件の予算式に代入し，更

に，iに関して合計すると

(4)　$\Sigma_i H^i(G^i)+\Sigma_i\Sigma_t g_t{}^i=\Sigma_i w^i$

上式より G^i の各元に関して一意解が得られ，解をベクトル表示すると

(5)　$G^i*=D(\Sigma_i w^i)$

但し，$D(\Sigma_i w^i)=(D_1(\Sigma_i w^i), D_2(\Sigma_i w^i), \cdots, D_t(\Sigma_i w^i), \cdots, D_l(\Sigma_i w^i))^T$

である。

これを(3)式に代入すると次式を得る：

(6)　$c^i*H^i(D(\Sigma_i w^i))$　　　　$(i=1,2,\cdots,n)$

また，上式を全てのiに関して合計すると次式を得る：

(7)　$\Sigma_i c^i*=\Sigma_i H^i(D(\Sigma_i w^i))$

(5)式ないし(7)式は所望の中立性定理を意味する。　■

上述の結果は消費者選好の同質性を仮定することなしに得られたので，直ちに次の系が得られる：

系：中立性は任意の消費者選好構造に関して成立する。

Ⅳ．複数公共財モデルにおける自発的供給関数の導出：議論の拡張の可能性

前節において複数公共財モデルにおいて中立性定理が得られることが証明されたが，一方，Bergstrom and Varian〔1985〕が単一公共財モデルにおいて自発的供給関数 $g^i*(\bullet)$ を導出していをことに対して，複数公共財モデルにおける自発的供給関数 $g^i*(\bullet)$ の導出は行われていない。そこで，最後に，それがナッシュ自発的公共財供給の議論を理論的側面で完結させる意味において残された課題となっていることを指摘する。

制約条件を目的関数に代入して，更に，エージェントiは w^i-c^i を $(g^i{}_1, g^i{}_2, \cdots, g^i{}_t, \cdots, g^i{}_l)^T$ に割り当てるのでその割当量をベクトル表示して $w^i=(w^i{}_1, w^i{}_2, \cdots, w^i{}_t, \cdots, w^i{}_l)^T$ と定義すると，前掲の問題は次のような非負制約最大化問題として定式化される：

$$\underset{G^i}{\text{maximize}}\ U^i = U^i\ (w^i - G_{-i}{}^j,\ G^i)\ \text{subject to}\ c^i > 0\ \text{and}\ g_t{}^i > 0$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n; t=1,\ 2\cdots,\ 1)$$

上式を G^i の各元に関して微分して解き，ベクトル表示すると，次の関数を得る：

(8)　$G^{i*} = F_i(w^i - G_{-i}{}^j)$　　$(i=1,\ 2, \cdots,\ n)$

$F_i(\bullet)$ の逆関数を $F_i{}^{-1}(\bullet)$ と表わして上式に適用すると

(9)　$w^i - G_{-i}{}^j = F_i{}^{-1}(G^{i*})$　　$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

G^i の定義を用いて g^{i*} を求めると

(10)　$g^{i*} = (w^i + G^{i*}) - F_i{}^{-1}(G^{i*})$　　$(i=1,2,\cdots,n)$

本稿においては上の関数 $g^{i*}(\bullet)$ を複数公共財モデルにおけるエージェント i の「自発的供給関数」と呼ぶ。この関数形は Bergstrom and Varian〔1985〕が証明した単一公共財モデルにおける中立性命題の十分条件に類似している(5)。この自発的供給関数が複数公共財モデルにおける中立性定理の十分条件に一致するか否かの確認は以後行う予定である。

V．結　　語

本稿において我々は純粋な利他主義に基づいたナッシュ自発的純粋公共財供給に関する議論を概観し，特に，複数公共財モデルに関するこの議論の可能性を指摘した。この中立性に関する議論の拡張には (a) Andreoni〔1989，1990〕の「純粋でない利他主義」(impure altruism) モデルや (b) Ihori〔1992〕の準自発的公共財モデル (c) Cornes and Sandler〔1984〕ないし Dasgupta and Itaya〔1992〕に至る「非ナッシュ行動」(non-Nash behavior) モデルがある。以後これらの検討によってモデルの現実的妥当性を高めることも重要な課題である。

注

(1)　本稿の複数公共財モデルは第Ⅲ節における自発的供給関数の導出の議論との接続を行うために Kemp〔1984〕のモデルを再構成したものである。

(2)　Ihori〔1992〕は3エージェント・モデルを用いて他の2者の自発的供給の和に対す

る評価（便益）が自己（i=1, 2, 3）に異なる外部効果をもたらす意味で単一の純粋公共財供給に対する各エージェントの評価（便益）が異なる "impure" な自発的公共財が存在し得るケースを考察している：i エージジントに対する j エージェントの外部性を $\varepsilon_{ij}(j \neq i)$ と表すと，自発的公共財供給は $G^i = g^i + \Sigma_{j \neq i} \varepsilon_{ij} g^j$ と定義される。Ihori〔1992〕はこの "impure" な自発的供給モデルにおいて中立性が成立することを証明している。

(3) Andreoni〔1989；1990〕の解釈を拡張すると効用関数 $U^i(c^i, G)$ はエージェント i の自発的供給ベクトル（g^i）自体が独立変数でないことから "pure altruistic" な効用関数と解釈することが出来る。更に，これに対して "warm-glow giving" と呼ばれる（倫理的解釈は微妙であるがある意味において "egoistic" な）寄付行為に該当する g^i 自体が独立変数となる効用関数 U^i（c^i, G, g^i）は純粋公共財に対する自発的供給という観点から倫理的な意味において "impure altruistic" な効用関数と解釈することが出来る。（この解釈に従えば "egoistic" な効用関数は U^i（c^i, g^i）と定式化することが出来る。）Andreoni〔1989；1990〕は単一公共財モデルにおいて前述の意味における "impure altruistic" な自発的供給モデルにおいて中立性定理が成立しないことを証明している。

(4) 本稿の議論は簡単のため内点解のみを考えている。なお単一公共財モデルにおける端点解に関する議論は Bergstrom, Blum, and Varian〔1985〕で行われている。

(5) 中立性定理（単一公共財のケース）：公共財供給のナッシュ均衡値（G^i*）が方程式体系 $g^i = g^i(w^i + G^i, G^i)$（i=1, 2, …, n；n≧3）の解として表わされるとき，G^i* がエージェントの所得分布から独立である必要十分条件は $g^i(\bullet)$ の関数形が $g^i*(w^i + G^i*, G^i*) = a^i(G^i*) + b(G^i*) \bullet (w^i + G^i*)$ であることである。

（証明） Bergstrom and Varian〔1985〕 ■

$g^i*(w^i + G^i*, G^i*)$ を単一公共財モデルにおけるエージェント i の自発的供給関数と呼ぶ。複数公共財モデルと同様の方法を用いると結果的に次式が得られる：

(※) $g^i* = w^i + G^i* - f_i^{-1}(G^i*)$ (i=1, 2, …, n)

明らかに，関数 $a^i(\bullet)$ 及び関数 $b(\cdot)$ が各々 $f_i^{-1}(\bullet)$ 及び線形のケースとして所望の関数が得られる。

参考文献

Andreoni J.,〔1988〕, "Privately Provided Public Goods in a Large Economy: the Limits of Altruism," *Journal of Public Economics*, vol. 35, pp. 57-73.

Andreoni J.,〔1989〕, "Giving with Impure Altruism: Applications to Charity and Recardian Equivalence", *Journal of Political Economy*, vol. 97, pp. 1447-1459.

Andreoni J.,〔1990〕, "Impure Altruism and Donations to Public Goods: a Theory of Warm-Glow Giving", *Economic Journal*, vol. 100, pp. 464-477.

Bergstrom T. C., L. Blume and H. R. Varian, 〔1986〕, "On the Private Provision of Public Goods", *Journal of Public Economics*, vol. 29, pp. 25-49.

Bergstrom T. C., L. Blume and H. R. Varian, 〔1992〕, "Uniqueness of Nash Equilibrium in Private Provision of Public Goods: an Improved Proof", *Journal of Public Economics*, vol. 49, pp. 391-392.

Bergstrom T. C. and H. R. Varian, 〔1985〕, "When are Nash Equiliblia Independent of the Distribution of Agents Characteristics ?", *Review of Economic Studies*, vol. 52, pp. 715-718.

Bernheim D., 〔1986〕, "On the Voluntary and Involuntary Provision of Public Goods", *The American Economic Review*, vol. 76, pp. 789-793.

Cornes R. and T. Sandler, 〔1984〕, "The Theory of Public Goods: Non-Nash Behavior", *Journal of Public Economics*, vol. 23, pp. 367-379.

Dasgupta D. and J. Itaya, 〔1992〕, "Comparative Statics for the Private Provision of Public Goods in a Conjectual Variations Model with Heterogeneous Agents'" *Public Finance*, vol. 47, pp. 17-31.

Fraster C. D. 〔1992〕, "The Uniqueness of Nash Equilibrium in the Private Provision of Public Goods: an Alternative Proof", *Journal of Public Econo mics*, vol. 49, pp. 389-390.

Ihori, T, 〔1992〕, "Impure Public Goods and Transfers in a Three-Agent Model", *Journal of Public Economics*, vol. 48, pp. 385-401.

Kemp, M. C., 〔1984〕, "A Note of the Theory of International Transfers", *Economics Letters*, vol. 14, pp. 259-262.

Sugden R., 〔1982〕, "On the Economics of Philanthropy", *The Economic Journal*, vol. 92, pp. 341-350.

Sugden R., 〔1985〕, "Consistent Conjectures and Voluntary Contributions to Public Goods: Why the Conventional Theory does not Work", *Journal of Public Economics*, vol. 27, pp. 117-124.

Warr, P. G., 〔1983〕, "The Private Provision of a Public Good is Independent of the Distribution of Income',, *Econo mics Letters*, vol. 13, pp. 207-211.