ナッシュ均衡における実行可能性の修正概念

都築, 治彦

https://doi.org/10.15017/3000059

出版情報：経済論究. 84, pp.117-127, 1992-10. 九州大学大学院経済学会

ナッシュ均衡における実行可能性の修正概念

都　築　治　彦

1. はじめに

ナッシュ均衡における実行可能性（implementation in Nash equilibrium）の理論は，Maskin〔1977〕により必要条件及び十分条件が提示されて以来，Dasgupta, Hammond, and Maskin〔1979〕, Maskin〔1985〕, Williams〔1986〕, Repullo〔1987〕, Saijo〔1988〕, Moore and Repullo〔1990〕, Dutta and Sen〔1991〕などによって展開されてきた。特に，Moore and Repullo〔1990〕，及び Dutta and Sen〔1991〕は，ナッシュ均衡における実行可能性に対する必要十分条件を提示した。この条件は非常に複雑なものであるが，ナッシュ均衡における実行可能性の特性を考える上で極めて有効である。

一方，ナッシュ均衡における実行可能性と真の実行可能性（truthful implementation）の関係については，1価の社会選択ルール（即ち，社会選択関数）について，Dasgupta, Hammond, and Maskin〔1979〕（以後，D.H.M. と略記する）が様々な性質を提示している。ところが，今回，Moore and Repullo〔1990〕, Dutta and Sen〔1991〕の必要十分条件を用いてこれを再吟味したところ，その主張のいくつかが誤りを含んでいることが明らかとなった。D.H.M. は，「社会選択関数について，真の実行可能性と IPM（independent person-by-person monotonicity）が同値である」と主張したが，IPM が十分条件であるという主張については，本稿で反例を与えることになる。さらに，D.H.M. は，「各人の選好順序の集合が rich domain であるとき，社会選択関数がナッシュ均衡で実行可能ならば，真に実行可能である」と主張したが，これも，こ

の主張を覆す社会選択関数を示すことにより，否定されることになる。本稿で，ナッシュ均衡で実行可能であるにもかかわらず，真に実行可能でない社会選択関数の存在が示されたことの意味は大きい。このような社会選択関数は，事実上実行不可能だからである。ナッシュ均衡における実行可能性が，真の実行可能性を意味しないという事実は，実行可能性の概念に対して再検討を示唆するものである。即ち，実行可能性の概念は，ナッシュ均衡において実行可能であることに加えて，真に実行可能であることを要求する，というのが本稿の主張である。そして，われわれは，ナッシュ均衡において実行可能で，かつ，真に実行可能である社会選択関数について考察し，その性質を見ていくことになる。

本稿の構成は以下の通りである。2節では，以後の議論のための定義や概念について述べる。3節では，D.H.M.の提示した命題の反例を示し，ナッシュ均衡における実行可能性の概念が不十分であることについて述べる。4節では，真にナッシュ均衡において実行可能であることの性質について見る。

2. 定義と概念

$N=\{1,2,\cdots,n\}$ を社会 (society)，$1,2,\cdots,n$ を社会におけるエージェントとする。A を社会的選択枝 (social alternatives) の集合とし，エージェント $i\in N$ の取り得る A 上の選好順序 (preference orderings) の集合を U_i とする。$U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ とすると，社会選択ルール (social choice rule, 略して SCR) は以下で定義される。SCR $f: U\rightarrow p(A)$. ここで $p(A)$ は A の全ての部分集合の集合である。特に1価の社会選択ルールを社会選択関数 (social choice function，略して SCF) という。ゲーム $g: S_1\times S_2\times\cdots\times S_n\rightarrow A$ (S_i はエージェント i の戦略集合) に対して，$S=S_1\times\cdots\times S_n$ とし，$NE_g(u)=\{g(s_1^*,\cdots,s_n^*)\,;\,(s_1^*,\cdots,s_n^*)\in S$ は u のもとでのナッシュ均衡$\}$ とすると，

〔定義〕 SCR $f: U\rightarrow p(A)$ がナッシュ均衡で実行可能である (implementable in Nash equilibrium) とは，以下が成立することをいう。

$$\exists g: S\rightarrow A \text{ s.t. } \forall u\in U,\ NE_g(u)=f(u).$$

ナッシュ均衡における実行可能性について，Moore and Repullo〔1990〕，Dutta and Sen〔1991〕は以下が成立することを示した。

$L_i(a, u)=\{x\in A\,;\ u_i(x)\leqq u_i(a)\}$,

$M_i(C, u)=\underset{c\in C}{\mathrm{argmax}}\ u_i(c),\ C\subset A,\ \forall i\in N$　とすると，

〔定理〕(Moore and Repullo〔1990〕)$\#N\geqq 3$ の時，SCR$f: U\to p(A)$ がナッシュ均衡で実行可能であることの必要十分条件は，以下が成立することである。

$\mathrm{RANGE}\, f\subset\ \exists B\subset A,\ \forall i\in N,\ \forall u\in U,\ \forall a\in f(u)$

$\exists C_i(a, u)\subset B\cap L_i(a, u)$

s.t.

(1) $a\in\bigcap_{i=1}^{n} M_i(C_i(a, u), u^*)\quad\Rightarrow\quad a\in f(u^*).$

(2) $c\in M_i(C_i(a, u), u^*)\cap\bigcap_{j\neq i} M_j(B, u^*)\quad\Rightarrow\quad c\in f(u^*).$

(3) $d\in\bigcap_{i=1}^{n} M_i(B, u^*)\quad\Rightarrow\quad d\in f(u^*).$

この条件をμとよぼう。さらに，

〔定理〕(Dutta and Sen〔1991〕)$N=\{1,2\}$の時，SCR$f: U\to p(A)$ がナッシュ均衡で実行可能であることの必要十分条件は，以下が成立することである。

$\mathrm{RANGE}\, f\subset\ \exists B\subset A$ かつ，$\forall i\in N,\ \forall u\in U,\ \forall a\in f(u)$

$\exists C_i(a, u)\subset B\cap L_i(a, u)$

s.t.

(1) $a\in\bigcap_{i=1}^{2} M_i(C_i(a, u), u^*)\quad\Rightarrow\quad a\in f(u^*).$

(2) $c\in M_i(C_i(a, u), u^*)\cap M_j(B, u^*)\quad\Rightarrow\quad c\in f(u^*).$

(3) $d\in\bigcap_{i=1}^{2} M_i(B, u^*)\quad\Rightarrow\quad d\in f(u^*).$

(4) $\forall u'\in U,\ \forall b\in f(u'),\ (a, u)\neq(b, u')$ に対して，

(a) $C_i(a, u)\cap C_j(b, u')\neq\phi,\ \forall i\neq j\in N.$

(b) $\exists e(a, u, b, u')\in C_1(a, u)\cap C_2(b, u')$

s.t.

$$e(a, u, b, u') \in M_1(C_1(a, u), u^*) \cap M_2(C_2(b, u'), u^*)$$
$$\Rightarrow \ e(a, u, b, u') \in f(u^*).$$

この条件を β とよぼう。

次に，真の実行可能性について定義しよう。

$DSE_g(u) = \{g(s_1^*, \cdots, s_n^*)$; $(s_1^*, \cdots, s_n^*) \in S$ は，ゲーム g に対する，u のもとでの支配戦略均衡 (dominant strategy equilibrium)$\}$ と書くことにすると，

〔**定義**〕 SCR$f: U \to p(A)$ が真に実行可能である (truthfully implementable) とは，以下が成立することである。

$$\exists g: U \to A \ \ \text{s.t.} \ \ g(u) \in DSE_g(u), \ \ g(u) \in f(u).$$

さらに以後の展開のために，次を定義しておく。

〔**定義**〕 SCR$f: U \to p(A)$ が単調 (monotonic) であるとは，

$$a \in f(u), \ u' \in U, \ L_i(a, u) \subset L_i(a, u'), \ \forall i \in N \Rightarrow a \in f(u').$$

が成立することである。

単調性がナッシュ均衡における実行可能性の必要条件であることは有名な事実である。

〔**定義**〕 SCF$f: U \to A$ が IPM (independent person-by-person monotonicity) を満たすとは，

$$\forall i \in N, \ \forall u \in U, \ u_i' \in U_i, \ a, b \in A, \ a \in f(u),$$
$$u_i(a) \geqq u_i(b), \ u_i'(a) > u_i'(b)$$
$$\Rightarrow \ b \notin f(u_i', u_{-i}).$$

が成り立つことである。

〔**定義**〕 A 上の選好順序の集合 U が，rich domain であるとは，

$$\begin{array}{llll} \forall u, u' \in U, \ a, b \in A \ \ \text{s.t.} & (1) & u(a) \geqq u(b) & \Rightarrow \ u'(a) \geqq u'(b) \\ & (2) & u(a) > u(b) & \Rightarrow \ u'(a) > u'(b) \\ \Rightarrow \ \exists u'' \in U \ \ \text{s.t.} \ \ \exists c \in A & (1) & u(a) \geqq u(c) & \Rightarrow \ u''(a) \geqq u''(c) \\ & (2) & u'(b) \geqq u'(c) & \Rightarrow \ u''(b) \geqq u''(c) \end{array}$$

が成り立つことである。

3. Dasgupta, Hammond, and Maskin [1979] の命題に対する反例

D.H.M. は，真の実行可能性の持つ性質について，次を主張している。

〔**命題1**〕 SCF$f: U \to A$ が真に実行可能であることと，IPM を満たすことは同値である。

〔**命題2**〕 $U_i\,(\forall i \in N)$ が狭義の選好順序 (strict preferences) のみを含むとき，SCF$f: U \to A$ が IPM を満たせば，単調である。

この2つの命題は，次の反例1によって否定される。

〔**反例1**〕 $A=\{a,b,c\}$, $N=\{1,2\}$, $U_1=\{u,u'\}$, $U_2=\{u\}$

$u: u(c)>u(a)>u(b)$　　$u': u'(a)>u'(c)>u'(b)$

$f(u,u)=a$, $f(u',u)=c$.

この SCFf は IPM を満たすが，真に実行可能ではなく，単調でもない。

まず，IPM を満たすことを示そう。$a=f(u,u)$ で，$u(a)>u(b)$，かつ，$u'(a)>u'(b)$ であり，$b \notin f(u',u)$. また，$c=f(u',u)$ で，$u'(c)>u'(b)$，かつ $u(c)>u(b)$ で，$b \notin f(u,u)$.

しかし，$u(f(u,u))<u(f(u',u))$ であるから，真に実行可能ではない。また，$L_1(a,(u,u))=\{a,b\} \subset \{a,b,c\}=L_1(a,(u',u))$ であり，$a=f(u,u)$ だが，$a \notin f(u',u)$. よって f は単調ではない。

以上より，命題1，2が否定された。しかもここで構成した U_1, U_2 は，rich domain である。但し，命題1において，IPM が真の実行可能性の必要条件であるという主張は正しい。 □

D.H.M. はこれらの命題を用いて，次の結論に達した。

〔**命題3**〕 $U_i\,(\forall i \in N)$ が rich domain であるとき，SCF$f: U \to A$ がナッシュ均衡で実行可能であるならば，f は真に実行可能である。

しかしこの命題も，次の反例2によって否定されるのである。

〔**反例2**〕 $A=\{a,b,c,d\}$, $N=\{1,2\}$, $U_1=\{u_1,u_1'\}$, $U_2=\{u_2\}$

u_1 : $u_1(d) > u_1(c) > u_1(a) > u_1(b)$

u_1' : $u_1'(b) > u_1'(a) > u_1'(c) > u_1'(d)$

u_2 : $u_2(a) > u_2(c) > u_2(b) > u_2(d)$

$f(u_1, u_2) = a$, $f(u_1', u_2) = c$.

U_1, U_2 は明らかに rich domain である。この SCFf はナッシュ均衡で実行可能だが，真に実行可能ではない。以下でこのことを示そう。

$u_1(f(u_1, u_2)) < u_1(f(u_1', u_2))$ であるから，f は真に実行可能ではない。しかし，ナッシュ均衡で実行可能である。f が先の必要十分条件を満たすことを以下で示す。$B = A$, $\forall u'' \in U = U_1 \times U_2$, $x = f(u'')$ に対し，$C_i(x, u'') = L_i(x, u'')$, $\forall i \in N$ とおき，$(u_1, u_2) = u$, $(u_1', u_2) = u'$ と書くことにすると，$C_1(a, u) = \{a, b\}$, $C_1(c, u') = \{c, d\}$, $C_2(a, u) = A$, $C_2(c, u') = \{b, c, d\}$ である。

(2)から示す。この場合となるのは $a \in M_1(C_1(a, u), u) \cap M_2(B, u)$ の場合だけである。$a \in f(u)$ だから，(2)は満たされる。

(3), (4)についてはこうなる場合はないので，自明に満たされる。

最後に(1)を示す。$u'' \in U$ にたいして，$a \in \bigcap_{i=1}^{2} M_i(C_i(a, u), u'')$ となるのは，$u'' = u$ のときのみである。そして，$a \in f(u)$ である。$c \in \bigcap_{i=1}^{2} M_i(C_i(c, u'), u'')$ となるのも，$u'' = u'$ のときしかなく，$c \in f(u')$ だから，(1)は満足された。

以上より，f はナッシュ均衡で実行可能であることが示され，よって命題 3 が否定された。 □

この反例は $N = \{1, 2\}$ の時のものだが，$\# N \geqq 3$ の時も同様に構成できる。例えば，$N = \{1, 2, 3\}$ の時は，$U_3 = \{u_3\}$; $u_3 = u_2$ とし，$f(u_1, u_2, u_3) = a$, $f(u_1', u_2, u_3) = c$ とすればよい。

この反例 2 のもつ意味は深い。反例 2 で構成された SCFf は，次のゲーム g によって，ナッシュ均衡で実行される。

g ;　　　　　　S_2

	a	c	a	b	c	d
	b	c	b	c	d	d
S_1	a	c	a	b	c	d
	b	d	b	c	d	a
	a	d	c	d	a	b
	b	d	d	a	b	c

しかし，事実上この SCFf は実行されることはない。真の選好順序 u_1 を持つエージェント1は，選好順序 u_1' と偽ってゲーム g を行うことにより，均衡 $c=NE_g(u_1',u_2)=f(u_1',u_2)$ が得られる。これは，真の選好順序である u_1 のもとでゲーム g を行ったときの均衡 $a=NE_g(u_1,u_2)=f(u_1,u_2)$ よりも好ましい結果 ($u_1(a)<u_1(c)$) となるからである。

これを一般的に述べると次のようになる。SCFf : $U \to A$ が $g : S \to A$ によってナッシュ均衡で実行されているならば，

$$\forall u \in U \text{ にたいして}, \quad \exists s^*(u)=(s_1^*, s_2^*,.., s_n^*);\ g(s^*(u)) \in NE_g(u).$$

ここで $g^*=gos^*$ と定めると，$g^* : U \to A$. ここで $g^*(u) \in NE_g(u)=f(u)$ であるが，必ずしも $g^*(u) \in NE_{g^*}(u)$ とはいえないのである。このことは，実行可能性を考える上で，ナッシュ均衡における実行可能性だけでは不十分であり，真に実行可能であることが必要であることを示しているのである。次節で我々は，真に実行可能であり，かつ，ナッシュ均衡で実行可能な社会選択関数の性

質をみていこう。

4. 真のナッシュ均衡における実行可能性

〔定義〕 SCR $f: U \to p(A)$ が真にナッシュ均衡で実行可能である (truthfully Nash implementable) とは，以下が成立することである。

$$\exists g_1: U \to A \quad \text{s.t.} \quad \forall u \in U,\ g_1(u) \in DSE_{g1}(u),\ g_1(u) \in f(u).$$

$$\exists g_2: S \to A \quad \text{s.t.} \quad \forall u \in U,\ NE_{g2}(u) = f(u).$$

真の実行可能性については，特に社会選択関数に対して，次が成立する。

〔補題 1〕 SCF $f: U \to A$ が真に実行可能であることと，$\forall u \in U$，$f(u) \in DSE_f(u)$ であることは同値である。

よって明らかに次が成立する。

〔補題 2〕 SCF $f: U \to A$ が真に実行可能であることと $\forall u \in U$，$f(u) \in NE_f(u)$ であることは同値である。

これを用いて，先の定義は次のように書き換えられる。

〔補題 3〕 SCF $f: U \to A$ が真にナッシュ均衡で実行可能であることは，以下と同値である。(1) $f(u) \in NE_f(u)$，$\forall u \in U$. (2) $\exists g: S \to A$ s.t. $f(u) = NE_g(u)$，$\forall u \in U$.

$F_i(a, u) = \{f(u'_i, u_{-i})\ ;\ u'_i \in U_i\}$ $\forall u \in U$，$a = f(u)$ とおくと，次が成立する。

〔定理 1〕 SCF $f: U \to A$ に対して，f が真にナッシュ均衡で実行可能であることと，以下は同値である。

$\forall u \in U$，$a = f(u)$ に対して，$a \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i(F_i(a, u), u)$ かつ，

RANGE $f \subset \exists B \subset A$ かつ，$\forall i \in N$，$\forall u \in U$，$a = f(u)$ に対して，

$\# N \geqq 3$ のとき，

$\exists C_i(a, u) \subset B \cap L_i(a, u)$

s.t.

(1) $a \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i(C_i(a, u), u^*)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $a \in f(u^*)$.

(2) $c \in M_i(C_i(a, u), u^*) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j(B, u^*) \quad \Rightarrow \quad c \in f(u^*).$

(3) $d \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i(B, u^*) \quad \Rightarrow \quad d \in f(u^*).$

$N=\{1, 2\}$ の時，以上に加えて，

(4) $\forall u' \in U,\ \forall b \in f(u'),\ (a, u) \neq (b, u')$ に対して，

(a) $C_i(a, u) \cap C_j(b, u') \neq \phi, \quad \forall i \neq j \in N.$

(b) $\exists e(a, u, b, u') \in C_1(a, u) \cap C_2(b, u')$

s.t.

$e(a, u, b, u') \in M_1(C_1(a, u), u^*) \cap M_2(C_2(b, u'), u^*)$

$\Rightarrow \quad e(a, u, b, u') \in f(u^*).$

さらに，次が成立する。

〔**定理 2**〕 SCF$f: U \to A$ について，$\# N \geqq 3$ の時に条件 μ ($\# N=2$ の時には β) を満たし，かつ，$F_i(a, u) \subset C_i(a, u)$, $\forall i \in N$, $\forall u \in U$, $a=f(u)$ ならば，f は真にナッシュ均衡で実行可能である。

〔**証明**〕 $\forall u \in U$, $a=f(u)$, $\forall i \in N$ に対して，$a \in M_i(C_i(a, u), u)$ であり，かつ，$F_i(a, u) \subset C_i(a, u)$ だから，$a \in M_i(F_i(a, u), u)$, $\forall i \in N$. よって，f は真に実行可能である。 □

定理 2 の十分条件を，$\# N \geqq 3$ の時には μ'，$\# N=2$ の時に β'，とよぼう。すると，次が成り立つ。

〔**定理 3**〕 SCF$f: U \to A$ にたいし，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ が（少なくとも RANGE f の元について）狭義の選好順序のみより成るとき，真にナッシュ均衡で実行可能であることの必要十分条件は，$\# N \geqq 3$ のとき μ'，$\# N=2$ のとき β' である。

〔**証明**〕 十分性は定理 2 による。必要性を示す。$\# N \geqq 3$ の時，f はナッシュ均衡で実行可能だから，

RANGE $f \subset \exists B \subset A,\ \forall i \in N,\ \forall u \in U,\ \forall a \in f(u)$

$\exists C_i(a, u) \subset B \cap L_i(a, u)$

s.t.

(1) $a \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i(C_i(a, u), u^*) \quad \Rightarrow \quad a \in f(u^*).$

(2) $c \in M_i(C_i(a, u), u^*) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j(B, u^*) \quad \Rightarrow \quad c \in f(u^*).$

(3)　$d \in \bigcap_{i=1}^{n} M_i(B, u^*)$　　$\Rightarrow$ $d \in f(u^*)$.

が成り立つ。

$\forall u \in U$, $a = f(u)$ に対し，$C_i'(a, u) = C_i(a, u) \cup F_i(a, u)$ とおくと，f は真に実行可能だから，$\forall i \in N$, $a \in M_i(F_i(a, u), u)$ であり，$\forall i \in N$, $a \in M_i(C_i'(a, u), u)$ である。また，μ' (1)(3)は明らかであるから，$C_i'(a, u)$ が μ' (2)を満たすことを示す。$c \in M_i(C_i'(a, u), u^*) \cap \bigcap_{j \neq i} M_j(B, u^*)$ とすると，$c \in C_i(a, u)$ ならば，μ (2) より，$c = f(u^*)$ である。$c \in F_i(a, u) - C_i(a, u)$ の時，$c = f(u_i', u_{-i})$, $u_i' \in U_i$ とおくと，$u_i^*(c) \geqq u_i^*(f(u_i^*, u_{-i}))$. また，f は真に実行可能だから，$u_i^*(f(u_i^*, u_{-i})) \geqq u_i^*(c)$. よって，$u_i^*(f(u_i^*, u_{-i})) = u_i^*(c)$. ここで，$u_i^*$ は狭義の選好順序だから，$f(u_i^*, u_{-i}) = f(u_i', u_{-i}) = c$. 一方，c の条件より，$j \neq i$ に対し，$u_j^*(f(u_i^*, u_{-i})) \geqq u_j^*(f(u_i^*, u_j^*, u_{-i-j}))$. また，f は真に実行可能であることから，$u_j^*(f(u_i^*, u_j^*, u_{-i-j})) \geqq u_j^*(f(u_i^*, u_{-i}))$. よって，同様に，$f(u_i^*, u_j^*, u_{-i-j}) = f(u_i^*, u_{-i})$. 以後，同様に続けて，$c = f(u_i', u_{-i}) = f(u_i^*, u_{-i}) = \cdots = f(u^*)$.

♯N=2 の時もまったく同様にして証明できる。　□

5. おわりに

本稿においては，D.H.M. により提示された命題のうちのいくつかを再検討し，それらに対する反例を与え，社会選択関数に対して IPM が真の実行可能性の十分条件でないことや，ナッシュ均衡で実行可能であるにもかかわらず，事実上実行可能でない社会選択関数を示し，実行可能性の概念にとって，真の実行可能性が不可欠であることを示した。そして，特に社会選択関数に限定して議論を進め，真にナッシュ均衡で実行可能であるための十分条件を見た。この特性化を更に進めることが今後の課題である。また，今回は扱わなかったが，多価の社会選択ルールは，より多くの実行可能な範囲を持つことが知られている。このような一般の社会選択ルールについても，同様の分析を行う予定である。

参考文献

Dasgupta, P., Hammond, P. and Maskin, E. [1979]: "The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility," *Review of Economic Studies*, 46, 181–216.

Dutta, B. and Sen, A. [1991]: "A Necessary and Sufficient Condition for Two-Person Nash Implementation," *Review of Economic Studies*, 58, 121–128.

Maskin, E. [1977]: "Nash Equilibrium and Welfare Optimality," mimeo.

——— [1985]: "The Theory of Implementation in Nash Equilibrium: A Survey," in *Social Goals and Social Organization*, ed. by L. Hurwicz, D. Schmeidler and H. Sonnenschein. Cambridge: Cambridge University Press.

Matsuo, T. [1987]: "Implementation of Social Choice Rules in Nash Equilibria and An Informational Aspect of Mechanism Design," mimeo.

Moore, J. and Repullo, R. [1990]: "Nash Implementation: A Full Characterization," *Econometrica*, 58, 1083–1099.

Repullo, R. [1987]: "A Simple Proof of Maskin's Theorem on Nash Implementation," *Social Choice and Welfare*, 4, 39–41.

Saijo, T. [1986]: "On the Gibbard–Maskin–Muller–Satterthwaite Theorem," mimeo.

Saijo, T. [1988]: "Strategy Space Reduction in Maskin's Theorem: Sufficient Conditions for Nash Implementation," *Econometrica*, 56, 693–700.

Williams, S. [1986]: "Realization and Nash Implementation: Two Aspects of Mechanism Design," *Econometrica*, 54, 139–151.