

オプション価格決定についての一考察

詹, 錦宏

<https://doi.org/10.15017/3000050>

出版情報：経済論究. 83, pp.31-55, 1992-07-21. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：



オプション価格決定についての一考察

詹 錦 宏

はじめに

オプションは数世紀前から取引されてきたが、1973年に株式オプションがシカゴ・オプション取引所（CBOE）で取引されるまで、オプションはあまり注目される金融手段とは言えなかった。しかし、その頃から、オプションの取引が米国の証券市場において前例のない成長を遂げた。

オプションの評価理論は長く、輝かしい歴史を持つが、これも1973年に革命的な変化が起きた。その頃、Black - Scholes が初めて完備された 均衡オプション評価理論を発表した。同年に、Merton は彼らのモデルをいくつかの重要な方法で拡張した。これらの論文が研究の道を切り開いて、その後の研究の基礎を成してきた。また、日本でも1989年に大証、名証、東証の3取引所で株価指数オプション取引が開始された¹⁾。オプションの評価に対する理論的研究と実証的分析も進んでいる²⁾。

それらの研究によって示されているように、オプション評価理論は財務のほとんどの分野に関連する。例えば、すべての会社証券は企業の資産を原資産とするプットとコールのポートフォリオとして解釈されうる。事実、この理論が非常に一般化された経済問題“契約”の評価に応用された。すなわち、将来事象の不確実性に依存する契約をオプションとして見做すことができる。

オプション評価においてもっとも重要な要素は、株価の変動を規定する確率過程のタイプである。ブラック＝ショールズ・モデルに使われているのはボラティリティ (volatility) 一定のディフュージョン過程であるが、実証では、こ

れはオプションの現実状況をうまく説明できない場合がしばしば見られる³⁾。しかし、Cox = Ross (1976) がいくつかの代替的なジャンプとディフュージョン過程を提示し、Merton (1976) がディフュージョン・ジャンプの混合過程を提示した。これらの確率過程の提示によって、オプションの評価モデルが現実の世界にいつそう接近し、オプション価格の決定をより明晰に解釈できるようになった。さらに、Hull = White (1987) が株価と独立的で、かつ、確率的なボラティリティのオプションの評価式を導き、オプションの変動過程をより正確に説明することを試みている。一方、Geske (1979) は負債とエクイティの資本構成の概念をオプション評価式に導入し、企業価値を原資産とするオプションを構築し、株主が負債を償還するかどうかということが満期日の企業の価値により決められ、オプションの価値が株価だけに依存するのではなく、企業の価値にも依存するという複合モデルの概念を提示した。Rubinstein (1983) が Geske の理論をさらに展開し、企業の資本構成に加えて、資金運用の面も考慮し、企業の資本構成と資金運用を結合する効果がオプションの評価にどう影響するかを説明した。

本稿ではヨーロッパ・コールの株式オプションを中心として議論し、構成は以下の通りとする。第一節はブラック = ショールズ・モデルの構成を考察し、オプション評価の基本モデルを解明する。第二節でブラック = ショールズ・モデルのいくつかの評価の偏りを検討する。第三節で株価が非連続の確率過程に従うオプション評価モデルを考察する。第四節でブラック = ショールズ・モデルを拡張し、資本構成と資金運用を取り上げるいくつかのオプション評価モデルを検討する。第五節でこれらの代替的なモデルとブラック = ショールズ・モデルを比較し、それぞれのモデルの妥当性を検討するとともに、今後の課題を提起したい。

I. ブラック = ショールズ・モデル

ブラック = ショールズは一つの証券の買い持ちと他の証券の空売りによって、ヘッジ・ポジションを作り出すために必要とされる株式対オプションの比

率を計算する。そして、均衡の場合に、ヘッジ・ポジションの期待収益が非危険資産の収益に等しくならなければならないという均衡条件を利用して、理論的評価式を導く。

株価に基づいたオプションの価値に対する評価式を導くために、ブラック・ショールズは株式とオプションとの市場についていくつかの“理想的状況”を仮定する。

(a) 非危険資産の利子率は時間に関して不変であり、投資家に知られている。

(b) 株価 (S) は時間的にも、価格的にも連続的な確率過程に従う。

$$\Delta S = \alpha S \Delta t + \sigma S \Delta Z$$

この確率過程は伊藤プロセス (Ito process) と呼ばれる。 α は株式の瞬間的な期待収益率、 σ はその標準偏差、 ΔS は株価の変化、 Δt は時間の変化、 ΔZ は標準ガウス＝ウィナー過程である。

(c) 標準偏差は一定であり、これに対して、投資家たちの意見は一致している。

(d) 株式に配当とその他の分配はない。

(e) オプションはヨーロピアン型であり、つまり満期日まで行使されない。

(f) 株式あるいはオプションの売買についての取引コストはない。

(g) 非危険資産の利子率で、無制限の借入を行なうことにより、証券を買い、保有することができる。

(h) 空売りに対するペナルティはない。証券を保有していない売り手は、単に買い手からの証券価格を受け、そして、ある将来の期日にその時点の証券価格に等しい金額を買い手に支払い、買い手と精算することに合意する。

これらの仮定のもとで、オプションの価値はただ株価と時間及び、定数と見做してよい変数に依存する。したがって、株式のロング・ポジションとオプションのショート・ポジションを含むヘッジ・ポジションを作り出す可能性があり、そのヘッジ・ポジションの価値は株価に依存しないが、ただ時間と定数に知られる変数に依存する。オプションの価値は株価 S と時間 t の関数 $C(S, t)$ で示し、株式の買い持ちに対して空売りを行なわなければならないオプション

の数は、

$$1/C_1(S, t) \quad (1-1)$$

(1-1) 式の中で、下付き文字は $C(S, t)$ の第一の独立変数に関する偏微分を表す。

そのようなヘッジ・ポジションの価値は株価に依存しないことに注意しなければならない。株価の変化が小さい場合、オプションの価値の変化対株価の変化の比率は $C_1(S, t)$ である。もし株価が ΔS で変化するなら、オプションの価格は $C_1(S, t) \Delta S$ で変化し、そして、(1-1) 式の中でオプションの数は ΔS で変化する。したがって、1株のロング・ポジションの価格の変化はおおよそ $1/C_1$ 単位のオプションのショート・ポジションの価値の変化で相殺される。

変数 S と t が変化する際、1株の変化に対するヘッジ・ポジションを作り出すために、いくつかのオプションの空売りが行なわれる。もし、このヘッジが連続的に行なわれるならば、前述のヘッジ・ポジションの収益は株価の変化と完全に独立である。事実、ヘッジ・ポジションの収益は一定になる。

一般的に、ヘッジ・ポジションは1株のロングと $1/C_1$ 単位のオプション・ショートを含むので、このポジションのエクイティの価値は、

$$S - C/C_1 \quad (1-2)$$

である。ある短い期間 dt におけるエクイティの価値の変化は、

$$\Delta S - \Delta C/C_1 \quad (1-3)$$

である。もしショート・オプションが連続的に変化すると仮定すれば、我々は確率微分法を使い、 ΔC を下記のように展開できる。

$$\Delta C = C_1 \Delta S + \frac{1}{2} C_{11} \sigma^2 S^2 dt + C_2 dt \quad (1-4)$$

(1-4) での σ^2 は株式の収益の分散である。(1-4) を (1-3) に代入し、ヘッジ・ポジションのエクイティの価値は次式のように変化する。

$$-\left(\frac{1}{2} C_{11} \sigma^2 S^2 + C^2\right) dt / C_1 \quad (1-5)$$

ヘッジ・ポジションのエクイティの収益は一定であるので、この収益は $r dt$ に等しくなければならない。したがって、ヘッジ・ポジションの期待収益は

必ず短期利子率であり、エクイティ (1-5) の変化はエクイティ (1-2) の変化に $r dt$ を乗じたものに等しくなければならない。

$$-\left(\frac{1}{2}C_{11}\sigma^2S^2+C_2\right)dt/C_1=(S-C/C_1)r dt \quad (1-6)$$

(1-6) の両辺から dt を消去し、再整理すると、オプションの価値に関する微分式を得る。

$$C_2=rC-rSC_1-\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{11} \quad (1-7)$$

T をオプションの満期日、 K を権利行使価格として、すでに分かるように、

$$\begin{aligned} C(S,T) &= S-K & S \geq K \\ &= 0 & S < K \end{aligned} \quad (1-8)$$

(1-8) の境界条件に制約され、(1-7) の微分式を満足する $C(S, t)$ 式は唯一である。この式はオプション評価式でなければならない。ブラック＝ショールズは (1-7) と (1-8) の変数変換と物理学の熱伝導の式を利用して、この解を導く⁴⁾。

$$C(S, t) = SN(d) - Ke^{-r\tau}N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (1-9)$$

ただし、

$$d = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\tau = T - t$$

$N(d)$ は正規累積密度関数である。

株価の期待収益が (1-9) の中で現われないことに注意しなければならない。オプションの価値は株価の関数であるが、株式の期待収益とは独立的である。しかしながら、オプションの期待収益は株式の期待収益に依存する。(1-9) の関数関係を通し、評価式の中の各パラメーターの値の変化がオプションの価格にどう影響するのかを検討し、各パラメーターのモデルに対する感応性を示す。

$$(1) \quad \partial C / \partial S = N(d) > 0$$

$$(2) \quad \partial C / \partial K = -e^{-r\tau}N(d - \sigma\sqrt{\tau}) < 0$$

$$(3) \quad \delta C / \delta \tau = \frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} N'(d) + Ke^{-r\tau} r N(d - \sigma\sqrt{\tau}) > 0$$

$$(4) \quad \delta C / \delta \sigma = S\sqrt{\tau} N'(d) > 0$$

$$(5) \quad \delta C / \delta r = \tau Ke^{-r\tau} N(d - \sigma\sqrt{\tau}) > 0$$

株価の上昇，行使価格の下落，および満期日の延長がオプションの価値を連続的に増加させる。(1), (2), (3)により) これは直観的に理解できる。株価の変動 (σ) が大きくなるならば，オプション価値が増加する。それはオプションの価値が負の値にならないので，満期日でコールがアウト・オブ・ザ・マネーでも価値が0だからである。したがって， σ の増大は単に満期日でコールのイン・ザ・マネーの確率を増加するだけである。非危険利率 (r) の上昇がコール価値を増加させる。これは r の上昇によって，行使価格の現在価値が減少するからである。

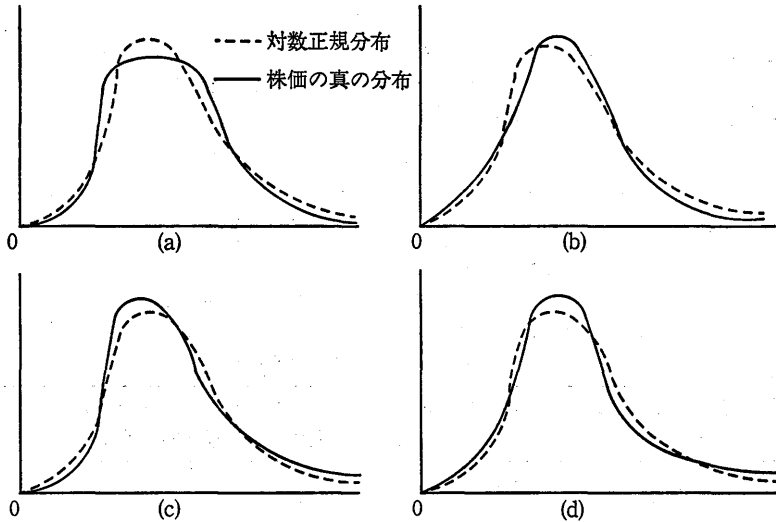
(1-9) と(1)から見ると， $\frac{\delta C / \delta S}{C/S}$ が常に1より大きいのは明らかである。これはオプションが常に株式より変化しやすいことを表している。

II. オプション評価の偏りを起こすいくつかの例

株式オプションの価格の主な決定要素は株価の確率分布である。ブラック＝ショールズはこれが対数正規分布であると仮定する。図1に，株価の確率分布が対数正規分布と異なるが，株価の収益の平均値と標準偏差が対数正規分布と同じである4種類の分布を示している。図1(a)は，両側の裾が対数正規分布より薄く，図1(d)，両側の裾がより太く，図1(b)と1(c)，一側の裾がより薄く，もう一側の裾がより太い。

もし株価の真の変動がこの4つの分布のどれかに従うが，ブラック＝ショールズ・モデルがオプションの評価に使われるならば，オプション評価の正確性はどうなるのか。まず，ディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのコール・オプションを考えよう。株価が大幅に上昇する場合，このオプション価値は正になる。したがって，そのオプションの価値は期間末の株価分布の右側の裾だけに依存する。この裾が太ければ太いほど，このオプションの価値が高くなる。そ

図1 期間末の株価分布の形



(出所) J. Hull (1989) P. 306

して、ブラック＝ショールズ式は図1(c)と1(d)でアウト・オブ・ザ・マネー・コールを過小評価し、図1(a)と1(b)で、アウト・オブ・ザ・マネー・コールを過大評価しがちである。次に、ディープ・アウト・ザ・マネーのプット・オプションを考えよう。株価が大幅に下落する場合、このオプション価値は正になる。したがって、そのオプションの価値は期間末の株価分布の左側の裾だけに依存する。この裾が太ければ太いほど、このオプションの価値が高くなる。それ故に、ブラック＝ショールズ式は図1(b)と1(d)でのアウト・オブ・ザ・マネー・プットを過小評価し、図1(a)と1(c)でのそれを過大評価しがちである。同様に、イン・ザ・マネー・プットはアウト・オブ・ザ・マネー・コールと同じ価格偏りを示す。イン・ザ・マネー・コールはアウト・オブ・ザ・マネー・プットと同じ価格偏りを示す。これらの偏りが表1に示されている。

図1でのいくつかの状況がどうして起こるのか、その一般的な例を挙げるために、株価のボラティリティが確率的であると仮定しよう。その原因はボラティリティが株価の関数であるか、またはボラティリティが完全に不確実の異なる

表1 図1における代替的な株価分布に対応する偏り

分 類	特 徴	偏 り
図1(a)	両側の裾がより薄い	$B=S$ はアウト・オブ・ザ・マネー・とイン・ザ・マネーのコールとプットを過大評価する
図1(b)	左側の裾がより太い 右側の裾がより薄い	$B=S$ はアウト・オブ・ザ・マネー・コールとイン・ザ・マネー・プットを過大評価し、 アウト・オブ・ザ・マネー・プットとイン・ザ・マネー・コールを過小評価する
図1(c)	左側の裾がより薄い 右側の裾がより太い	$B=S$ はアウト・オブ・ザ・マネー・プットとイン・ザ・マネー・コールを過大評価し、 アウト・オブ・ザ・マネー・コールとイン・ザ・マネー・プットを過小評価する
図1(d)	両側の裾がより太い	$B=S$ はアウト・オブ・ザ・マネーとイン・ザ・マネーのコールとプットを過小評価する

(出所) J. Hull (1989) p. 308.

る情報に依存するのかということである。まず、ボラティリティが株価と正の相関であるケースを考えよう。株価が上昇する場合、ボラティリティも大きくなる。これは、このケースで非常に高い株価の確率が対数正規分布での確率より高いということの意味する。逆に、株価が下落する場合、ボラティリティも小さくなる。これは、このケースで非常に低い株価の確率が対数正規分布での確率より高いということの意味する。図1(c)はボラティリティが株価と正の相関であることを示している。次に、ボラティリティが株価に負の相関であるケースを考えよう。株価が上昇するが、ボラティリティは反対に小さくなる場合、非常に高い株価に達する確率が低くなる。株価が下落するが、ボラティリティは大きくなる場合、非常に低い株価に達する確率は高くなる。図1(b)はボラティリティが株価と負の相関であることを示している。

第三節と第四節にこれらの株価分布に従ういくつかのオプション評価モデルを考察し、ブラック＝ショールズ・モデルと比較する。

Ⅲ． 株価が非連続の確率過程に従うオプション評価 モデル

ブラック＝ショールズに用いられる 基本的な 仮定は、 株価が対数正規分布（ディフュージョン）過程に従う。つまり、 株価の収益が次式の確率過程に従う。

$$dS/S = \alpha dt + \sigma dZ \quad (3-1)$$

ただし、 S は株価、 αdt は変位項、 σ は標準偏差、 dZ はウィナー過程である。

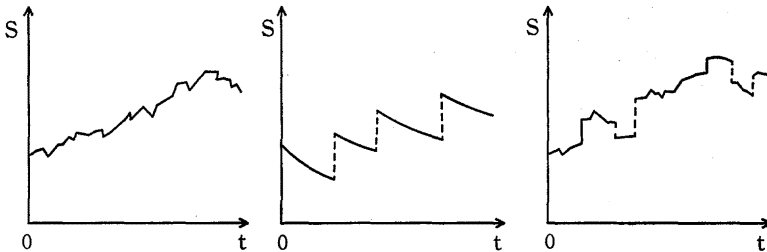
しかし、このディフュージョン過程は二種類の、一般的で、連続的な時間確率過程の中の一つである。連続的な時間におけるもう一つの確率過程はジャンプ過程である。一般のジャンプ過程は（3-1）と同じように示すことができる。

$$dS/S = \alpha dt + (k-1) d\pi \quad (3-2)$$

$$= \alpha dt + \begin{cases} k-1 \\ 0 \end{cases} \lambda dt$$

（3-2）において、 π は連続時間のポアソン過程、 λ は事象の発生率、 $k-1$ はジャンプの幅である。（3-2）では株価の変化が変位項 αdt と $d\pi$ 項から

図2 株価の変動



(a) ピュア・ディフュージョン (b) ピュア・ジャンプ (c) ディフュージョン・ジャンプ

（出所）J. Cox and M. Rubinstein, "Option Markets", (1985) p. 374

構成される。 dr 項は確率 λdt で株価の変化が $k-1$ 倍率でジャンプし、確率 $1-\lambda dt$ で株価が変化しないことを表している。ディフュージョン過程と反対に、(3-2) のジャンプ過程は離散的な行動に従う。この株価の変動過程が図 2 に示されている。次に、その非連続的な確率過程のオプション評価モデルを検討する。

1. 純粋ジャンプ・モデル

ジャンプ・モデルは Cox-Ross (1976) により初めて提示されたが、Cox-Ross-Rubinstein (1979) はジャンプ過程を二項過程の極端な例としてジャンプのオプション評価式を導く⁹⁾。つまり、二項過程において n (事象の発生率) $\rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$ の場合、ポアソン過程が二項過程の特殊なケースになる。

純粋ジャンプの確率過程が (3-3) 式に示されている。短い期間 Δt に、ポアソン事象が発生するとき、確率 $\lambda \Delta t$ で、株価が S から uS に上昇し、ポアソン事象が発生しないとき、確率 $1-\lambda \Delta t$ で、株価が S から $Se^{-w \Delta t}$ に下落する。

$$S = \begin{cases} uS & \text{with probability } \lambda \Delta t \\ e^{-w \Delta t} S & \text{with probability } 1 - \lambda \Delta t \end{cases} \quad (3-3)$$

(3-3) の中で、 Δt は短い期間、 λ はポアソン過程の発生率、 u と w は定数である。

このオプション評価式は次式のようになる。

$$C = S \Psi[x; y] - K e^{-r t} \Psi[x; y/u] \quad (3-4)$$

ただし、

$$\Psi[x; y] = \sum_{i=x}^{\infty} \frac{e^{-y} y^i}{i!}$$

$$y = \frac{(r-w)ut}{u-1}$$

$$x = \frac{\ln(K/S) - wt}{\ln u} \text{ より大きく、最小の非負整数}$$

$$r \equiv 1 + (\text{一期間の非危険利子率})$$

2. ディフュージョン・ジャンプ・モデル

ディフュージョン・ジャンプ・モデルにおいては、株価の変動は次の二つのタイプの変動を組み合わせたものである。

(1) 価格の“正常”な変動——需給間の一時的な不均衡，経済展望の変化などにより，価格の連続的な限界の変化が生じる。この変動がディフュージョン過程に従う。

(2) 価格の“異常”な変動——株式に関する重要な新しい情報の発生，企業または産業に特殊な関係の情報の発生などにより，株価の大きな変化を起こす。この変動が非連続的に発生して，ジャンプ過程に従う。

ディフュージョンとジャンプから混合される株価収益の確率過程が次式に従う。

$$dS/S = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ + dq \quad (3-5)$$

α は株式の瞬間的な期待収益， σ^2 は重要な新しい情報が発生しない（つまり，ジャンプが発生しない）条件の下での，その収益の分散， dZ はウィナー過程， $q(t)$ は独立ポアソン過程， λ はその発生率， dq と dZ が独立的であると仮定され， $k \equiv \varepsilon(Y-1)$ ，ただし， ε は確率変数 Y の期待値の作用素である。

(3-5) は少し複雑な形態で表すことができる。

$$\begin{aligned} dS/S &= (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ && \text{ポアソン事象が発生しない} \\ &= (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ + (Y-1) && \text{ポアソン事象が発生する} \end{aligned} \quad (3-6)$$

ジャンプ過程 dq の存在によって，ブラック＝ショールズの株式とオプションとの裁定方法を使っても，リスクを完全に消去することができない。それ故に，株式，オプション，と非危険資産のそれぞれ w_1 ， w_2 ， w_3 （ただし， $\sum_{j=1}^3 w_j = 1$ ）の割合で構成されるポートフォリオを考慮しよう。

Merton はブラック＝ショールズのヘッジ方法に従って，ディフュージョン項 dZ ($\delta C/\delta S$ のヘッジ比率を取り) を (3-5) から消去し，ヘッジされたポ

ートフォリオ (P^*) を求める。それで、(3-5) から次式を得る。

$$dP^*/P^* = (\alpha_p^* - \lambda k_p^*) dt + dq_p^* \quad (3-7)$$

(3-7) 式において収益の不確実性をもたらす唯一のものは株価のジャンプである。もし株式の収益のジャンプ成分が“非対称的な”あるいは“分散できる”リスクを表し、つまり、このジャンプ成分が市場のリスクに影響しないということを保定するならば、このポートフォリオの“ β ”は0になる。もし資本資産評価モデル (CAPM) が成立するならば、すべての“ $\beta=0$ ”の証券の収益率は非危険利子率に等しくなければならない。したがって、 $\alpha_p^*=r$ になる。この仮定と伊藤のレンマを使って、 C を満足する偏微分式が導かれる。

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS} + (r - \lambda k) S C_S - C - rC \\ & + \lambda \varepsilon \{C(SY, \tau) - C(S, \tau)\} \end{aligned} \quad (3-8)$$

(3-8) 式の中で、 C の下付き文字は偏微分を表し、 τ はオプションの満期日までの時間である。(3-8) 式は次式の境界条件に制限される。

$$C(0, \tau) = 0 \quad (3-8a)$$

$$C(S, 0) = \max[0, S - K] \quad (3-8b)$$

(3-8b) の中で K はオプションの行使価格である。

もし $\lambda=0$ ならば (つまり、もしジャンプがないならば)、(3-9) はブラック-ショールズの偏微分方程式になる。ここで、 $W(S, \tau; K, r, \sigma^2)$ をジャンプのないブラック-ショールズ式として定義する。(3-8) 式を満足するオプション評価式が次式になる。

$$C(S, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \tau} (\lambda \tau)^n}{n!} [\varepsilon_n \{W(SX_n e^{-\lambda k \tau}, \tau; K, \sigma^2, r)\}] \quad (3-9)$$

ただし、 $X_n \equiv \prod_{i=1}^n Y_i$ ($X_0=1$ とし、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ は独立とする)。 ε_n を X_n の分布の期待値作用素として定義する。

ジャンプ・ディフュージョン・モデルは株価の異常な変動“ジャンプ”を考慮するので、ブラック-ショールズ・モデルより株価の現実の変化を正確に反映する。もしジャンプの幅が大きく、ジャンプの発生率が高くない場合、この

二つのモデルに評価される結果には著しい差が生じる⁶⁾。

IV. ブラック＝ショールズ・モデルの拡張

第三節においてはいくつかの代替的な株価の確率過程を考察し、オプションの評価をより正確に説明してきた。この節では資本構成をも取り上げ、ブラック＝ショールズ・モデルを拡張し、オプション評価モデルをより一般化することを検討する。

1. CEV (Constant Elasticity of Variance) モデル

CEV モデルの仮定はブラック＝ショールズ・モデルの各仮定と同様であるが、ボラティリティが以下のように仮定される。

株価の期待収益の標準偏差 $\sigma(S, t) = \sigma S^{\phi-1}$ 、ただし、 $\phi < 1$ 。

したがって、確率過程は次式になる。

$$dS = \alpha S dt + \sigma S^{\phi} dZ \quad (4-1)$$

これを(1-7)の微分方程式に代入し、CEVの偏微分方程式を導く。

$$C_2(S, t) = rC - rSC_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2\phi} C_{11} \quad (4-2)$$

(4-2)式にCの下付き文字が偏微分を表す。そして、(4-2)は次式の境界条件に制限される。

$$C(S, t) = \max\{S - K, 0\} \quad (4-3)$$

ただし、Kは行使価格である。

この境界条件を満たす偏微分方程式のオプション評価式は次式のようにになる。

$$C(S, t) = S \sum_{n=0}^{\infty} g(\lambda S^{-\phi}, n+1) G\left(\lambda (Ke^{-r\tau})^{-\phi}, n+1 - \frac{1}{\phi}\right) \\ - Ke^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda S^{-\phi}, n+1 - \frac{1}{\phi}\right) G\left(\lambda (Ke^{-r\tau})^{-\phi}, n+1\right) \quad (4-4)$$

ただし、

$$\phi = 2\phi - 2$$

$$\lambda = 2r/\sigma^2\phi(e^{\phi r\tau} - 1)$$

$\Gamma(n) \equiv$ ガンマ関数で $\int_0^\infty e^{-v} v^{n-1} dv$ を表す

$$g(z, n) \equiv e^{-z} z^{n-1} / \Gamma(n)$$

$$G(w, n) \equiv \int_w^\infty g(z, n) dz$$

このモデルはブラック＝ショールズ・モデルの違いは株式の収益のボラティリティである。ブラック＝ショールズ式の $\text{Var}[dS/S]$ は $\sigma^2(S, t) dt$ であるが、このモデルの $\text{Var}[dS/S]$ は $\sigma^2 S^{2\phi-2} dt$ である。 $\phi < 1$ であるので、 S が上昇すると、 $\text{Var}[dS/S]$ が下がる。すなわち、

$$\frac{\partial \text{Var}[dS/S]}{\partial S} = (2\phi - 2) \sigma^2 S^{2\phi-3} dt < 0$$

である。このモデルを正当化する一つの理由は企業の財務レバレッジの変化である。株価が下落する場合、破産の潜在的な確率が大きくなるから、企業のライアビリティ (liability) の価値も下落するであろう。二つのライアビリティ (負債とエクイティ) の中で、エクイティの市場価値の減少がより大きく、そして、企業の負債／エクイティの比率を引き上げる。財務レバレッジの増加がエクイティ・リスクの上昇をもたらし、株価のボラティリティの増大を生じさせる。つまり、株価の変動がボラティリティと反対の方向で変化する。

これを分散弾力性一定モデルと名付けている理由は収益の分散弾力性が一定の $(2\phi - 2)$ だからである。この分散対株価の弾力性は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Var}[dS/S]}{\partial S} \cdot \frac{S}{\text{Var}[dS/S]} &= \frac{(2\phi - 2) \sigma^2 S^{2\phi-3} S}{\sigma^2 S^{2\phi-2}} \\ &= 2\phi - 2 < 0 \end{aligned}$$

になる。ブラック＝ショールズ・モデルと CEV モデルを比較すると、ブラック＝ショールズ・モデルがイン・ザ・マネー・コールを過小評価し、アウト・オブ・ザ・マネー・コールを過大評価するが、アット・ザ・マネー・コールをほぼ同一の値で評価する。

2. 複合モデル

Geske は株式を企業価値のオプションと見做して、コール・オプションの価値を複合オプションとして見做すことができると提示する。彼のモデルは次

の仮定を置いている。

(1) 普通株と債券を発行している会社を想定する。この債券は額面価額 M 、残存期間 T の割引債である。

(2) 債券の満期まで、企業は、新たな債券を発行せず、現金の配当と株式の買取をしないということを債券の契約条項として規定する。

(3) T 期間後に、可能ならば、債券を償還し、そして、すべての残余価値を精算配当として株主に支払う。

(4) 証券市場はブラック＝ショールズの完全市場の仮定と同様である。

この仮定によって、債券の所有者が企業資産を所有し、そして、株主に債券の満期日に資産を買うオプションを与えている。すなわち、企業の株式を原資産とするコール・オプションはオプションのオプション（複合オプション）になる。したがって、オプションの価格が $C=f(S, t)=f(g(V, t), t)$ の関数として示されうる。ただし、 S は株価、 t は時間、 V は企業価値である。つまり、コールの価値の変化が企業価値の変化と時間の変化の関数として示される。しかし、企業の収益は次式のディフュージョン過程に従う。

$$dV/V = \alpha_V dt + \sigma_V dZ_V \quad (4-5)$$

α_V は単位時間における企業の瞬間的な期待収益率、 σ_V はその分散、 dZ は標準ガウス＝ウィナー過程である。

コール・オプションは企業の価値と時間との関数 $C(V, t)$ であるので、その収益もディフュージョン過程に従う。

$$dC/C = \alpha_C dt + \sigma_C dZ_C \quad (4-6)$$

ただし、 α_C は単位時間におけるコールの瞬間的な期待収益率、 σ_C はその分散である。したがって、伊藤のレンマを使って、コール・オプションを次式のとおりに展開する。

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} V^2 \sigma_V^2 dt \quad (4-7)$$

ブラック＝ショールズ・モデルに示されるように、裁定理論が二種類の証券（このケースで、企業価値とコール）から構成されうる。一方、Merton (1973) はそれに一つの非危険財務証券を加えて、三種類の証券から正味投資額 0 の非

危険ヘッジ・ポートフォリオが造り出されうることを示した。それゆえに、 n_1 を企業価値に投資する金額、 n_2 をコールに投資する金額及び、 $n_3 = -(n_1 + n_2)$ を非危険債券に投資する金額にしよう。そして、ヘッジの方法を使って、コール・オプションの偏微分方程式を導く。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rV \frac{\partial C}{\partial V} - \frac{1}{2} \sigma_V^2 V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \quad (4-8)$$

このコール・オプションが次式の境界条件に制限される。

$$C(V, t^*) = \max(0, S(V, t^*) - K) \quad (4-9)$$

(4-9) 式において t^* はオプションの満期日までの時間である。

株式が企業価値のオプションと見られるから、(4-8) のオプション価値を決定する確率変数は株価 S でなく、企業価値 V である（株価が境界条件になる）。しかしながら、株式が企業価値のオプションであるから、株式が企業価値と同様なディフュージョン過程に従う。したがって、また伊藤のレンマを使って、次式を展開する。

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} V^2 \sigma_V^2 dt \quad (4-10)$$

株式、企業価値、および非危険債券から構成されるヘッジ・ポートフォリオの裁定方法を再び使って、株式の偏微分方程式を導く。

$$\frac{\partial S}{\partial t} = rS - rV \frac{\partial S}{\partial V} - \frac{1}{2} \sigma_V^2 V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \quad (4-11)$$

(4-11) の解は次式の境界条件に制限される。

$$S(V, T) = \max(0, V - M) \quad (4-12)$$

(4-12) 式において T は割引債の満期日までの時間である。

(4-8) の境界条件は (4-11) の解に依存するので、(4-8) を解くために、(4-8) と (4-11) は同時に成立しなければならない。(4-8) と (4-11) の偏微分方程式及び、それぞれの境界条件が与えられるならば、複合コール・オプションの解が求められうる。

$$C = VN_2(h + \sigma_V \sqrt{\tau_1}, k + \sigma_V \sqrt{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) \\ - Me^{-r\tau_1} N_2(h, k; \sqrt{\tau_1/\tau_2}) - Ke^{-r\tau_2} N_1(h) \quad (4-13)$$

ただし、

$$h \equiv \frac{\ln \frac{V}{\bar{V}} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_1}{\sigma_V \sqrt{\tau_1}}$$

$$k \equiv \frac{\ln \frac{V}{M} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_2}{\sigma_V \sqrt{\tau_2}}$$

$$\tau_1 \equiv t^* - t, \tau_2 \equiv T - t$$

$\bar{V}$ は $S - K \equiv V N_1(k + \sigma_V \sqrt{\tau}) - M e^{-r\tau} N_1(k) - K = 0$ を満足する場合の V である。ただし、 $\tau \equiv T - t^*$ 。

$N_1(\cdot)$ ≡ 一変量累積正規分布関数

$N_2(\cdot) \equiv h$ と k を上限の整数とし、 $\sqrt{\tau_1/\tau_2}$ を共相関係数とする二変量累積正規分布関数

複合オプション評価式は、企業の資本構成における変化の影響を考慮して、オプションの価値は評価する。もし企業の負債がない ($M=0$ 、または $T \rightarrow \infty$) ならば、この複合モデルはブラック＝ショールズ・モデルと一致する。なお、株価の変化は企業の価値の変化に完全に相関するので、株式の収益のボラティリティと企業価値のボラティリティの関係は次式のように示されう。

$$\sigma_S = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \frac{V}{S} \right) \sigma_V \quad (4-14)$$

つまり、株式のボラティリティ (σ_S) が企業価値のボラティリティ (σ_V) だけに影響されるのではなく、企業の資本構成 (V/S) にも影響されることを示す。

ブラック＝ショールズ・モデルでは株式の収益のボラティリティが一定と仮定されるが、複合モデルでは、株式の収益のボラティリティが株価と反対の方向に変化する。つまり、

$$\frac{\partial \sigma_S}{\partial S} = - \frac{V}{S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) \sigma_V = - \frac{V}{S^2} N_1(k + \sigma_V \sqrt{\tau_2}) \sigma_V < 0$$

になる。株価が下がる時、企業の負債／エクイティの比率が上がり、そして、そのリスクの増大が株式の収益のボラティリティの拡大を反映する。

複合オプション・モデルをブラック＝ショールズ・モデルと比較した場合、CEV モデルと同様、ブラック＝ショールズ式はイン・ザ・マネー・コールを過小評価し、アウト・オブ・ザ・マネー・コールを過大評価しがちである。

3. ディスプレイスト・ディフュージョン・オプション・モデル

Rubinstein (1983) は、企業の各資産の差別危険、企業の価値を決定する各資産の相関的なウェイト、企業負債の効果及び、定率と一定金額とを持つ配当政策の効果を同時に取り上げる。ブラック＝ショールズ・モデルをいっそう一般化する。

以下のような企業を想定しよう。

1. その企業はただ二種類の資産を持ち、一つが危険資産、もう一つが非危険資産である。現時点で、企業の総価値 V の $0 \leq \alpha \leq 1$ 部分が危険資産に、 $(1-\alpha)$ が非危険資産に投資される。

2. 危険資産の価値がボラティリティ σ_R を持つ対数正規ディフュージョン過程に従い、非危険資産が年間に複利率 $r-1$ で成長する。

3. 企業の資本構成は負債／エクイティ（債券／株式）の比率 β である。
したがって、 t 期間後の企業価値は、

$$[ae^y + (1-\alpha)r^t]V$$

ただし、 y は瞬間ボラティリティ $\sigma_R \sqrt{t}$ を持つ正規分布の確率変数である。

S を株式の現在市場価値として、したがって、もし配当がなく、負債が非危険であるならば、 t 時間後の株価の価値 S^* は次式になる。

$$\begin{aligned} S^* &= [ae^y + (1-\alpha)r^t](1+\beta)S - \beta S r^t \\ &= [\alpha(1+\beta)e^y + (1-\alpha-\alpha\beta)r^t]S \end{aligned} \quad (4-15)$$

ところで、負債の非危険性を保証するために、我々は $1-\alpha-\alpha\beta \geq 0$ を要求しなければならない。それ故に、 $\beta \leq (1-\alpha)/\alpha$ 。

より一般的に、この企業が以下の配当政策を持つと仮定しよう。

(1) 将来の各配当済み ($k \leq t$) の時点で、企業は少なくとも、特定の総金額 dkS を支払う。これは株式の価値の非危険部分 $(1-\alpha-\alpha\beta)r^t S$ から支払われる。したがって、

$$\sum_{k \leq t} dk r^{-k} \leq 1-\alpha-\alpha\beta \quad (4-16)$$

になる。(2) 将来の各配当済みの k 時点で、企業が株主にその時点での危険資産の価値の特定の割合 δ_K を支払う。 k 時期後、その時期での総配当は、

$$D_k = [\alpha(1+\beta)(\Pi_{r < k}(1-\delta_r))\delta_k e^y + d_k]S \quad (4-17)$$

である。これは t 時期後の株式の価値が二つの成分に分けられることを示唆する。

(a) 危険資産部分

$$[\alpha(1+\beta)(\Pi_{k \leq t}(1-\delta_k))e^y]S \equiv ae^y S \quad (4-18)$$

(b) 非危険資産部分

$$[(1-\alpha-\alpha\beta)r^t - \sum_{k \leq t} d_k r^{t-k}]S \equiv bS \quad (4-19)$$

したがって、Rubinstein は危険中立の仮定を用いて株式のオプションを評価する。オプションの現在価格は危険中立のもとで、その期待将来価値の現在価値である。特に、行使価格 K と満期期間 t を持つコールの期待将来価値は、

$$E[ae^y S + bS - K | ae^y S + bS \geq K]$$

である。より一般化する問題の解は次式のようにになる。

$$C = aSN(x) - (K - bS)r^{-t}N(x - \sigma_R \sqrt{t}) \quad (4-20)$$

ただし、

$$x = \frac{\log(\alpha S / (K - bS)r^{-t})}{\sigma_R \sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma_R \sqrt{t}$$

このディスプレイド・ディフュージョン式はブラック＝ショールズ式に関連するいくつかの望ましい特質を持つ。

1. 非危険資産がなく、負債がない場合 ($\alpha=1, \beta=0$)、この公式がブラック＝ショールズ式と一致する。

2. この公式が企業の資本構成と資金運用の基本的な分析から株価を動かす確率過程を導く。複合オプション・モデルと同じように、この式は負債を導入するが、企業の資産を区分して運用することによって、企業の財務構造を深く分析する。この企業の資産が危険資産と非危険資産から構成されるので、企業価値のボラティリティが複合オプション・モデルと同じように一定でなく、もっと正確に言えば、確率的である。

3. ただ特定の配当率を認めるブラック＝ショールズ式と違い、このディスプレイド・ディフュージョン・モデルは一定金額の配当も認める。これはより現実的な配当政策モデルである。

負債がなく ($\beta=0$)、配当がない ($\delta K=dK=0$) 簡単なケースで、ブラック＝ショールズとディスプレイスト・ディフュージョンとのヨーロッパン・コールを比較すると、このモデルでは、アウト・オブ・ザ・マネー・コールがより高く評価され、イン・ザ・マネーがより低く評価されがちである。

4. 確率的なボラティリティ・モデル

Merton のジャンプ・ディフュージョン過程では、株価のボラティリティが一定でない。Geske の複合モデルでは、企業価値のボラティリティが一定であるが、株価が上昇または下落するとき、株価のボラティリティが対称的な方向で変化する。Hull = White は株価のボラティリティが、確率的で、株価の変動と独立的である過程に従うオプション・モデルを構築して評価する。

株価 (S) とその瞬間的な分散 ($V=\sigma^2$) に依存するオプション (C) を考えよう。株価とその瞬間的な分散が以下の確率過程に従うと仮定される。

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dZ \quad (4-21)$$

$$dV = \mu V dt + \xi V dw \quad (4-22)$$

変数 α は S , σ と t に依存するパラメーターである。変数 μ と ξ は σ と t に依存するが、 S に依存しないと仮定される。ウィナー過程 dZ と dw の相関係数が ρ であり、非危険利子率 r は一定である。

この問題の特徴は瞬間に状態変数 σ^2 に相関する資産がない。したがって、すべてのリスクを消滅するヘッジ・ポートフォリオを構成する可能性はないようである。Hull = White は、Garman (1976) の論文で示された状態変数に依存する証券価格の微分方程式を利用して、オプションの偏微分を導く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma S \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + 2\rho\sigma\xi S - \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \xi V \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \right] - rC \\ = -rS \frac{\partial C}{\partial S} - \mu\sigma^2 \frac{\partial C}{\partial V} \end{aligned} \quad (4-23)$$

なお、もしボラティリティが株価と無相関（つまり、 $\rho=0$ ）であると仮定するならば、これが Geske の財務レバレッジを行わず、企業価値のボラティリティ一定の仮定と一致する。そして、Hull = White は危険中立の仮定を使っ

て、オプションの評価式を導く。

$$F(S, \sigma^2, t) = \int C(\bar{V}) h(\bar{V} | \sigma^2) d\bar{V} \quad (4-24)$$

ただし、

$$C(\bar{V}) \equiv SN(d) - Ke^{-r(T-t)} N(d - \sqrt{\bar{V}(T-t)})$$

(ブラック＝ショールズ式のオプション価格)

$h(\bar{V} | \sigma^2) \equiv \sigma^2$ が与えられるとき、 V の条件付き分布

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_\tau^2 d\tau, \text{ オプションの存在期間の平均分散}$$

つまり、株価がボラティリティと無相関である場合、オプションの価格はブラック＝ショールズ式をオプションの存在期間の平均分散の分布で積分することになる。その場合には、ブラック＝ショールズ・モデルがアット・ザ・マネー・オプションを過大評価し、ディープ・イン・ザ・マネー・とディープ・アウト・オブ・ザ・マネー・オプションを過小評価しがちである。しかし、株価がボラティリティと正または負の相関である場合、オプション価格が直接に得られないので、Hull = White はモンテカルロ・シミュレーションの方法を使って、オプションの価格を評価する。株価がボラティリティと正の相関である場合、ブラック＝ショールズ・モデルはイン・ザ・マネー・コールを過大評価し、アウト・オブ・ザ・マネー・コールを過小評価しがちである。株価がボラティリティと負の相関である場合、全く正反対の結果になる。

V. 株価分布の再検討

これまで議論したいくつかのモデルの株価分布を整理し、図2との関係を再び検討しよう。期間末の株価分布のタイプにより分類し、その結果を表2で示した。

株価の変動がボラティリティと反対の方向で変化する場合、もし株価が上昇するなら、ボラティリティが減少し、イン・ザ・マネー・コール（右側の裾）の価格がブラック＝ショールズ・モデル（ボラティリティ一定）より低くなる

表2 期間末の株価分布による分類

図1(b)	図1(c)	図1(d)
*CEVモデル *複合モデル *ディस्प레스ド・ ディフュージョン・ モデル $\alpha > 1$ の場合 *確率的なボラティリティ ・モデル 株価がボラティリティと 負の相関である場合	*純粋ジャンプ・モデル *ディस्प레스ド・ ディフュージョン・ モデル $\alpha < 1$ の場合 *確率的なボラティリティ ・モデル 株価がボラティリティと 正の相関である場合	*ジャンプ・ ディフュージョン・モデル *確率的なボラティリティ ・モデル 株価がボラティリティと0 相関である場合

(出所) J. Hull (1989) p. 315.

はずである。CEV モデル、複合モデル、とディस्पレスド・ディフュージョン・モデルにおいて $\alpha > 1$ の場合は、企業の資本構成における負債の影響によって、株価はボラティリティと反対の方向で変化する。したがって、ブラック＝ショールズ式はディープ・イン・ザ・マネー・コールを過大評価し、ディープ・アウト・オブ・ザ・マネー・コールを過小評価する。期間末の株価分布は図1(b)になる。一方、ディस्पレスド・ディフュージョン・モデルにおいて $\alpha < 1$ の場合は、非危険資産の価値が負債より高いので、企業の正味価値が正であり、株価の変動がボラティリティと正の相関であり、株価の分布が図1(c)になる。純粋ジャンプ・モデルは正值のジャンプがあるので、株価の分布も図1(c)になる。しかし、ディフュージョン・ジャンプ・モデルのジャンプは正值か、負値かのいずれも可能であるから、株価の分布が図1(d)になる。

さらに、確率的なボラティリティ・モデルの偏りは、満期日までの時間の延長につれてオプション価格のより高いパーセンテージになる。反対に、純粋ジャンプ・モデルの偏りは満期日までの時間の延長につれてオプション価格のより低いパーセンテージになりがちである。

む す び

1973年に、ブラック＝ショールズが観察または予測できる五つの変数でオブ

ションの価格を決定する完備のモデルを提示した。その五つの変数の中で、株価 (S)、時間 (t)、行使価格 (K)、および非危険利子率 (r) は市場から直接に観察できるが、ボラティリティ (σ) は過去のデータから将来の数値を推定しなければならない。しかし、ブラック＝ショールズはボラティリティを一定と仮定し、オプションの価格を評価するので、オプションの評価の偏りが生じる。ブラック＝ショールズ式の偏りを改善するために、多くの研究者が株価の変動の確率過程、またはボラティリティの仮定を修正し、オプションの価格をより正確に評価するモデルを試みている。しかし、オプションをより正確に評価するためには、モデルの複雑化が避けられない。例えば、Merton のディフュージョン・ジャンプ・モデルは、ブラック＝ショールズのディフュージョンモデルおよびジャンプ・モデルより現実的であるが、体系が開いて解を解くためには数値解法⁷⁾に頼らなければならない。Hull = White の確率的なモデルでも同じの問題がある。理論的にかなり完璧なモデルは、実証的にはしばしば使いにくい状況がある。

かくて、これらのモデルの中で最善のモデルはどれであろうか。事実、モデルの選択は投資家の株価の確率過程に対する仮定によって決められる。株価の確率過程が分からないならば、最善のオプション評価モデルは決められないであろう。実務上、モデルの操作の便利さを考慮するために、ブラック＝ショールズ・モデルとその拡張モデル（配当と行使日との条件の弾力化）がもっともよく使われる。しかし、オプション・モデルはオプション価格を適切に評価する条件が二つある。一つはモデルの正当性であり、もう一つはオプション市場の効率性である。したがって、オプション価格をより正確に評価するために、精緻な評価モデルの構築とともに、オプション市場の効率性の検証は今後の課題になるであろう。

注

- 1) 1973年4月にシカゴ・オプション取引所に上場されたオプションは株式オプションであり、株価指数オプションは、米国では1983年まで上場されなかった。日本では、大証、名証、東証に取引されているオプションは株価指数オプションであり、株式オプションはまだ上場されていない。

- 2) 日本のオプション市場の実証分析は高橋滋明—橋本吉史—福田徹「日本の株価指数オプション市場」, 大和総研大和投資資料, 1991年2, 3, 4月号を参照。
- 3) (1-7) 式を解くために, 次の変数変換を行なう。

$$C(S, T) = e^{r(t-T)} y \left[\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left[\ln \frac{S}{K} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t-T) \right] - \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 (t-T) \right]$$

この変数変換によって, (1-7) は次の物理学の熱伝導式になる。

$$y_2 = y_{11}$$

(1-8) の境界条件が次式になる。

$$\begin{aligned} y(u, 0) &= 0 & u < 0 \\ &= K [e^{u(\sigma^2/2)/(r-\sigma^2/2)} - 1] & u \geq 0 \end{aligned}$$

- 4) ブラック = ショールズ・モデルの実証は H. Latane, and R. Rendleman, "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices," *Journal of Finance*, Vol. 31, 1976, pp. 369-382. などを参照。
- 5) Cox - Ross - Rubinstein の二項分布からのオプション評価式は次式である。
二項分布の確率過程：

$$\begin{aligned} S &= \begin{matrix} q \\ \hline uS \\ \hline dS \end{matrix} \\ C &= S \Phi[a; n, p'] - K r^{-n} \Phi[a; n, p] \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} p &= \frac{r-d}{u-d}, \quad p' = \left(\frac{u}{r} \right) p \\ a &= \frac{\log(K/Sd)}{\log(u/d)} \text{ より大きく, 最小の非負の整数} \end{aligned}$$

したがって, $n \rightarrow \infty, u = u, d = e^{-u \Delta t}, q = (t/n)$ のとき, 極限の二項オプション評価式がジャンプ過程のオプション評価式になる。

- 6) R. C. Merton, "The Impact on Option Pricing of Specification Error in the Underlying Stock Price Returns," *Journal of Finance* Vol. 31, 1976, pp. 333-350. を参照。
- 7) オプション・モデルの数値解法 (numerical methods) については三つの代表的な方法がある。(1)モンテカルロ法 (Monte Carlo simulation), (2)定差法 (finite difference), (3)数値積分法 (numerical integration)。

参考文献

Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liability," *Jour-*

- nal of Political Economics* Vol. 81, 1973, pp. 637-659.
- Cox, J. and S. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics* Vol. 3, 1976, pp. 145-166.
- Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics* Vol. 7, 1979, pp. 229-263.
- 岩田暁一 『先物とオプションの理論』 東洋経済新報社 平成1年.
- Geske, R., "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics* Vol. 7, 1979, pp. 63-81.
- Hull, J., "Options, Futures, and Other Derivative Securities," Printice-Hall, Inc., 1989.
- Hull, J. and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance* Vol. 42, 1987, pp. 281-300.
- Jarrow, R. and A. Rudd, "Option Pricing," Richard D. Irwin Inc., 1983.
- Merton, R. C., "Option Pricing When Underlying Stock are Discontinuous," *Journal of Financial Economics* Vol. 3, 1976, pp. 125-144.
- Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science* Vol. 4, 1973, pp. 141-183.
- 大村敬一 『オプション理論と応用』 東洋経済新報社 昭和63年.
- Rubinstein, M., "Displaced Diffusion Option Pricing," *Journal of Finance* Vol. 38, 1983, pp. 213-217.