

顕示選好理論：アローのオープン・クエスチョンについて

田中，広滋

<https://doi.org/10.15017/3000018>

出版情報：経済論究. 35, pp.73-90, 1975-12-26. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：



顕 示 選 好 理 論

—アローのオープン・クエスチョンについて—

田 中 広 滋

1. 序

顕示選好理論は、1938年、画期的なサムエルソンの論文〔9〕によって、新しい消費者需要理論として、世に出された。そしてサムエルソンは、需要曲線の右下りの性質のように、従来は仮定されていた需要関数の特性を、消費者の合理的な選択行動だけを公理（サムエルソンの「弱い公理」‘Weak Axiom’）として要請することによって、導出することに成功した。その後、議論の中心は、リットル〔4〕らによって、伝統的な需要理論とこの新しい顕示選好理論の比較に向けられるようになった。まず、伝統的な需要理論から顕示選好理論を導く問題は、顕示選好理論の性質上以下のようにして、容易に解決される。もし、ある効用関数が与えられるならば、2つの財の間の選好関係は明確にされる。そして、その選好関係がそのまま選択に移されるならば、選好される財が顕示選好される。与えられた効用関数から、顕示選好関係を導くことは可能である。このことは、顕示選好理論が伝統的な需要理論の必要条件であることを意味する。これと逆に、顕示選好理論から伝統的な効用関数を導く問題が出現する。そして、この問題は顕示選好理論が伝統的な需要関数存在の十分条件であることの証明問題にはかならない。もし、この十分性の条件が証明されれば、上の必要性の条件と合わせて、次のように言うことができる。顕示選好理論は、伝統的な需要理論と同じ内容を持つ、あるいは同値である。この十分性の条件の証明は、いろいろな論者によって試みられた。この議論の過程を少しふりかえてみよう。

まず、財の数が2である場合について、顕示選好理論が伝統的な需要理論と同内容であることは、1948年のサムエルソンの証明〔11〕によって示された。しかし、財の数が n 個ある一般の場合についての解決は、その困難な積分可能性の問題のために、ハウタッカーの論文〔3〕を待たねばならなかった。その論文の中で、ハウタッカーは、顕示選好理論の弱い公理でなく、「強い公理」‘Strong Axiom’が伝統的な需要理論の十分条件となることを証明した。しかしながら、アローは1959年の論文〔1〕の中で、「弱い公理」が序数的効用関数存在の十分条件でないことが、完全には証明されていないことを指摘した。この問題は、その後アローのオープン・クエスチョン(open question)と呼ばれた。ゲールは、アローによって提起されたこの問題に対して、1960年の論文〔2〕で、以下のようにして解答した。ゲールは、彼の弱い公理を満たすが、効用関数からは導出されない需要関数を作り出そうと試みようとした。そしてそのことによって、この問題の証明を与えた。しかし残念ながら、その証明にはいくつかの誤りが含まれている。

しかも、ゲールは、顕示選好の「弱い公理」として、一般に成立が保証されていない命題を設定している。したがって、彼が行なった証明の意義は、その公理のためにも幾分減じるように思われる。けれども、われわれが本稿で検討を行なうように、ゲールの証明は、サムエルソンの弱い公理をそのまま公理に採用することによって行なわれる証明によって置き換えられる。本稿で行なわれる証明は、特別の仮定を持ち込まない。したがって本稿の証明は、この理論の他の部分との関係に影響を与えずになされる。このことから、従来の証明によって確かめられた関係は、なんら修正を加えられることなしに成立する。

2. ゲールの方法

まず、はじめにゲールが設定した「弱い公理」(以下では、ゲールの弱い公理と呼ぶ)に検討を加えることから始めよう。ゲールが行なったように、所与の所得を1とする。財の数が n 個あるとし、その n 個の財に割り当てられる価格のベクトルを $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ とする。所得と価格が与えられたとき、需

要される n 個の財の量は、ベクトルを用いて、 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表示される。ここで需要関数は、

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{p})^{1)}$$

と定式化できる。この節では、需要関数は一価関数であると仮定する。所得制約条件は、通常の顕示選好理論のときとは異なって、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq 1^{2)}$$

で与えられる。以上の準備を行なったのちに、ゲールは次のように弱い公理を設定する。

(ゲールの弱い公理)

もし $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ が価格ベクトルであり、

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q}) \leq 1$ で、かつ $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq 1$ であれば、

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{q})$$

である。

ここで、上の関係を財の数が 2 である場合について、図解的に考察してみよう。まず、図 1 の説明を試みよう。 x_1 軸に第 1 財の量、 x_2 軸に第 2 財の量をとる。線分 AB , $A'B'$ の傾きは価格ベクトル $\mathbf{q}$ を、また線分 CD , $C'D'$ の傾きは、価格ベクトル $\mathbf{p}$ を、それぞれ表現する。ここで注意すべきことは、ゲールの弱い公理の条件を満たしながら、 $\mathbf{x}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{x}(\mathbf{q})$ が成立することである。したがって、財の数が 2 である場合には、ゲールの弱い公理を満足しない財の束 $\mathbf{x}(\mathbf{p})$, $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ が存在する。そしてこのことは、財の数が n 個存在する場合にも、以下のようにして確かめられる。まず、仮定の条件式、

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q}) \leq 1$$

の両辺に $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p})$ を加えて整理を行なえば、

$$-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{p}) - \mathbf{x}(\mathbf{q})) \leq 1 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) \quad (2.2)$$

が成立する。同様に、仮定の条件式

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq 1$$

の両辺に、 $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q})$ を加えれば、関係

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}(\mathbf{p}) - \mathbf{x}(\mathbf{q})) \leq 1 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

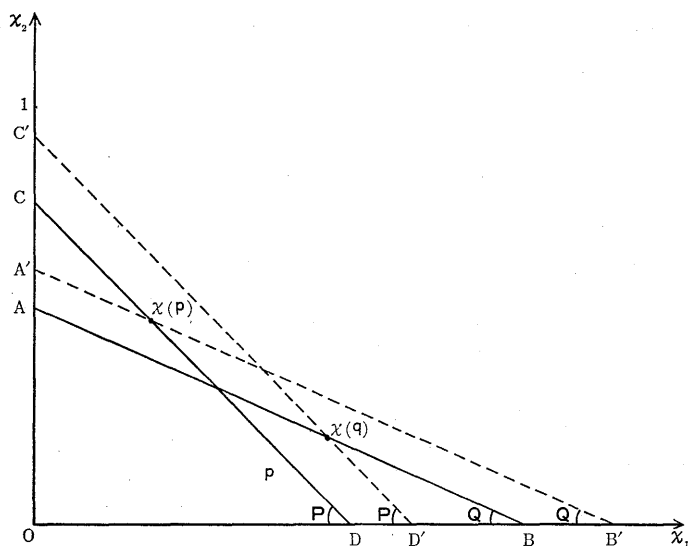


図 1

が得られる。(2.2) に (2.3) を加えれば,

$$(-p+q) \cdot (x(p) - x(q)) \leq 2 - p \cdot x(p) - q \cdot x(q) \quad (2.4)$$

が成立する。この関係式は、予算制約不等式 $p \cdot x(p) \leq 1$, $q \cdot x(q) \leq 1$ より、 $x(p) = x(q)$ が成立するときには、常に成立する。しかし、(2.4) を展開すると、不等式

$$p \cdot x(q) + q \cdot x(p) \leq 2 \quad (2.5)$$

が得られる。(2.5) 式は、仮定より常に成立が保証されている。したがって、 $x(p) \neq x(q)$ を満足する $x(p)$, $x(q)$ に対しても (2.5) 式は成立する。以上のように、ゲールの弱い公理は強い条件を持つ。2つの財の束の間に成り立つ関係において、 $x(p) = x(q)$ を満たさない場合が、満たす場合より、より一般的に起こると考えられる。それゆえこの命題を、ゲールのように公理として仮定することは少し無理がある。

ここで、あらためて証明すべきことを整理してみよう。もし、われわれが図 2 に表わされるような関係を導くことができるのなら、われわれの目的は達成

されたことになる。まず、選好場に存在する財の束に対して行なわれる選好のうちで、弱い公理, 強い公理, 効用関数を満足するものの集合を, それぞれ(W), (S), (U)で表示する。そして, これら(W), (S), (U)が視覚的に理解されるように, ベン図を制作する。ここでわれわれは, 図2を得ることができる³⁾。この関係の証明に移るまえに, 本稿で使用される効用関数の内容を明確にしておこう。

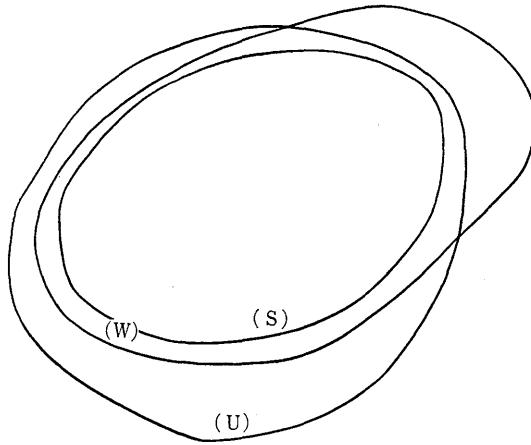


図 2

- 1) 需要関数は, 価格ベクトルと所得(M)の関数であると定義する。 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{P}, \mathbf{M})$
- 2) 内積 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n P_i X_i$$

- 3) 顕示選好理論(強い公理)は, 効用関数の存在の必要・十分条件である。しかし, この効用(需要)関数は, 連続でかつ, 連続な導関数を持つことが要求される。ところで一般の効用(需要)関数は, 必ずしもこの条件を満足しない。したがって, (U)を一般の効用関数で表わされる選好関係と解釈すれば, 図2に表示されるような関係が得られる。

3. 効 用 関 数

財を非負のものに限定すれば, 財の束の集合Xは,

$$X = \{\mathbf{x} | x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n\}$$

と書かれる。Xに属する3つの元を $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ としておく。ただし、この3つの元は互いに異なる。 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ である。ある序数的効用関数を $u(\mathbf{x})$ とする。不等式 $u(\mathbf{a}) > u(\mathbf{b})$ が成立するときは、 $\mathbf{a}$ の効用は $\mathbf{b}$ の効用より大きい。 $u(\mathbf{a}) = u(\mathbf{b})$ が成立するときは、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の効用は等しい。明らかに、次の3つの関係

$$1) \quad u(\mathbf{a}) = u(\mathbf{a})$$

$$2) \quad u(\mathbf{a}) = u(\mathbf{b}) \rightarrow u(\mathbf{b}) = u(\mathbf{a})$$

$$3) \quad u(\mathbf{a}) = u(\mathbf{b}), u(\mathbf{b}) = u(\mathbf{c}) \rightarrow u(\mathbf{a}) = u(\mathbf{c})$$

が成立する。ここで新たに、記号 I を

$$\mathbf{a} I \mathbf{b} \leftrightarrow u(\mathbf{a}) = u(\mathbf{b})$$

と定義する。上の1), 2), 3) より

$$1)' \quad \mathbf{a} I \mathbf{a} \quad (\text{反射律})$$

$$2)' \quad \mathbf{a} I \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b} I \mathbf{a} \quad (\text{対称律})$$

$$3)' \quad \mathbf{a} I \mathbf{b}, \mathbf{b} I \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{a} I \mathbf{c} \quad (\text{推移律})$$

を得ることができる。ゆえに、 I は X における同値関係になる。 u に付随する同値関係を $I(u)$ で表示する。 X の元 $\mathbf{a}$ に対して、 $\mathbf{a} I(u) \mathbf{x}$ であるような X の元 $\mathbf{x}$ の集合を $c(\mathbf{a})$ と表示する。ここで $c(\mathbf{a})$ は、

$$c(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in X, \mathbf{a} I \mathbf{x}\}$$

と書かれ、 $I(u)$ による $\mathbf{a}$ の同値類と呼ばれる。 $I(u)$ による同値類全体の集合を N とすれば N は X の部分集合系をなし、その和集合 $\cup N$ は、関係

$$\cup N = X$$

を満たす。さらに、 X の部分集合系 N のある2つの元を L_1, L_2 とすれば、

$$L_1 \neq L_2 \rightarrow L_1 \cap L_2 = \phi$$

が得られる。 N は X の直和分割となる¹⁾。また、同値類全体の集合 N を X の I による商集合といい、記号 X/I で表示する。以上を図解的に表わせば、図3を得る。

効用関数の説明をこれで終え、次に本論へ移ろう。

1) 松坂和夫〔5〕p.57, 定理8を参照せよ。

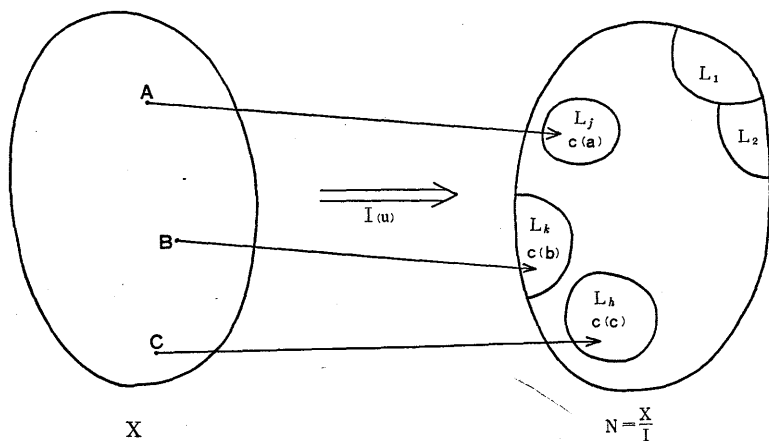


図 3

4. 顯 示 選 好

2. と異なって、以下では所得制約条件は、 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = \mathbf{M}$ で与えられる。2つの価格ベクトルを $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b$ とし、そのとき選択される財の束を $\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b$ とする。ここで、サムエルソンの弱い公理を掲げると次のようになる。

(サムエルソンの弱い公理)

$\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b$ をそれぞれ上で定義された価格ベクトルと財の束であるとし、 $\mathbf{X}_a \neq \mathbf{X}_b$ であるとき、

$$\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{X}_a \geq \mathbf{P}_a \cdot \mathbf{X}_b \quad (4.1)$$

であれば、

$$\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_a > \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_b \quad (4.2)$$

が成立する。

(4.1) の関係は、記号 R を用いると、

$$\mathbf{x}_a R \mathbf{x}_b$$

と表示される。そして、「 $\mathbf{X}_a$ は $\mathbf{X}_b$ より顕示選好される」と言う。一般にこの公理は以下のように解釈される。貯蓄も財の購入の一種と考えれば、価格ベクトルが $\mathbf{P}_a$ であるときには、財の束 $\mathbf{X}_b$ も購買可能であるが、 $\mathbf{X}_a$ が購入される。このことは、消費者が $\mathbf{X}_b$ より $\mathbf{X}_a$ を選好することを意味する。そして、価格

ベクトルが P_b であるとき、 X_a が選択されないのは、価格ベクトルが P_b のときには、 X_a は高すぎて購入できないからであると解釈される。

サムエルソンは、「合理的な消費者」¹⁾ を考察の対象とする。この「合理的な消費者」は、次のような行動をとる消費者のことである。かれは自分の選好を選択の形で、実際に表現するとき少なくとも、どの2つの選択の間にも矛盾がないように選択を行なう。サムエルソンが実際に考察の対象としたのは、2つの選択の間に一貫した選択を行う、あるいは最低限度の一貫した選好を持つ消費者であった。2つの選択の間の一貫性を弱い一貫性と呼ぶことにすれば、弱い公理はその内容から、弱い一貫性の公理と理解される。ところで以上の前提から、この場合には財の束 X_b は、価格ベクトルが P_a であるとき、購買可能であるにもかかわらず購入されない。このように、2つの財の束の間に明確な顕示選好関係が呈示されるときは、この2つの財の束の間には、効用関数を用いて表わしても、同じ順序関係が保たれると仮定できる。ここで、効用関数 u を用いれば、

$$x_a R x_b \rightarrow u(x_a) > u(x_b) \quad (4.3)$$

という関係が成立する。ここで注意すべきことは、(4.3) は選好場全体の財の束についての効用の順序関係を明示するのでないことである。つまり、(4.3) は X_a と、予算線 $P_a X_a$ あるいはそれより下の領域内に存在する財の束との効用の関係を示すにすぎない。

次に、関係 $x_a R x_b$ の否定を、

$$\neg x_a R x_b$$

と表示しよう。そこで上の公理は、簡単に

$$x_a R x_b, X_a \neq X_b \rightarrow \neg x_b R x_a \quad (4.4)$$

と書き直される。また、 $\neg R$ については、推移律が成立すると仮定する。

(仮定)

$$\neg x_a R x_b, \neg x_b R x_c \rightarrow \neg x_a R x_c \quad (4.5)$$

X_a が X_b より顕示選好されず、かつ X_b が X_c より顕示選好されないならば、少なくとも X_a は、 X_c よりも顕示選好されない。ここで注意すべきことは、 R に

ついて推移律の成立が仮定されていないことである。さて、もし2つの財の束について、関係

$$\neg x_a R x_b, \neg x_b R x_a \quad (4.6)$$

が成立するときには、この2つの財の束についての関係は、以下のように解釈することができる。 X_a は X_b より顕示選好されないし、 X_b は X_a より顕示選好されない。したがって、(4.6)を成立させる2つの財の束に対して、消費者はなんら明確な選好順序を示しえない。このことから次の推論をうる。消費者にとって、(4.6)を満足する2つの財の束は無差別である。記号 I' を次のように定義する。

(定義)

$$x_a I' x_b \leftrightarrow \neg x_a R x_b, \neg x_b R x_a$$

I' は、次の1), 2), 3)を満足する。

- 1) $x_a I' x_a$ (反射律)
- 2) $x_a I' x_b \rightarrow x_b I' x_a$ (対照律)
- 3) $x_a I' x_b, x_b I' x_c \rightarrow x_a I' x_c$ (推移律)

2)の証明から行なう。 $x_a I' x_b$ であれば定義より、 $\neg x_a R x_b, \neg x_b R x_a$ が成立する。そして、これは $\neg x_b R x_a, \neg x_a R x_b$ と同じことなので $x_b I' x_a$ を得る。次に3)の証明に移ろう。 $x_a I' x_b, x_b I' x_c$ であれば同様に、定義から $\neg x_a R x_b, \neg x_b R x_a, \neg x_b R x_c, \neg x_c R x_b$ を得る。 $\neg R$ についての推移性の仮定を用いれば、 $\neg x_a R x_b, \neg x_b R x_c$ から、 $\neg x_a R x_c$ と、 $\neg x_c R x_b, \neg x_b R x_a$ から $\neg x_c R x_a$ を導出できる。定義により、 $x_a I' x_c$ が成立する。最後に残しておいた1)の証明を行なう。まず、 $x_a I' x_b$ である X_b が存在するならば、2)より $x_b I' x_a$ が導かれる。これに3)を使用すれば、求める $x_a I' x_a$ を得ることができる。

以上の証明によって、 I' は、 X における同値関係になることがわかる。それゆえ、3.で行なった同値類に関する説明は、そのまま I を I' におきかえても有効である。すなわち、選好場の財の束全体は、同値関係 I' に関して類別される。この場合、商集合は X/I' となる。もしなんらか基準に従って、商集合の元となる各部分集合を代表する元の間に、順序付けを行なえば、その手続によ

って、序数的効用関数を導くことができる。以下で、 I で I' を表示する。

- 1) サムエルソンが考察の対象とした「合理的消費者」は、後に6. で、われわれが分類する合理的消費とは異なる概念である。以上の2つの概念を混同しないようにお願いしたい。

5. オープン・クエスチオン

サムエルソンの弱い公理を満たす財の束が、弱い公理によって示される選好関係と矛盾する効用関数の上にある例を示そう。まずはじめに、効用関数の一例として、擬凹な関数 (quasi-concave function) を導入する。擬凹な関数とは、 $\mathbf{X} \in [\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b]$ に対して、

$$u(\mathbf{x}_a) \geq w, u(\mathbf{x}_b) \geq w \rightarrow u(\mathbf{x}) \geq w \quad (5.1)$$

を満足する関数 u のことである。ここで、 w は定数を、 $[\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b]$ は $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in X, \mathbf{x}_a \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_b\}$ をそれぞれ表わす。2次元の図を用いて、この関係を示す例を図示すれば、図4を得る。図4の座標軸は、図1と同様にとられている。図4において、関係 $\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_b = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_a$ が成り立つので、弱い公理から $\mathbf{x}_b R \mathbf{x}_a$ が得られる。

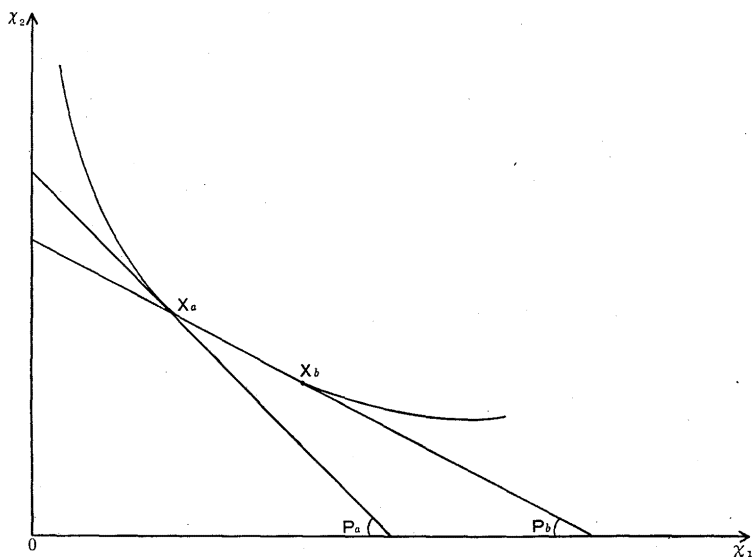


図 4

このことによって、 $\neg \mathbf{x}_a \mathbf{I} \mathbf{x}_b$ の成立が確認される。しかし他方では、 $\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b$ はともに同じ無差別曲線上に存在するの $u(\mathbf{x}_a) = u(\mathbf{x}_b)$ より $\mathbf{x}_b \in c(\mathbf{x}_a)$ 、または $\mathbf{x}_a \mathbf{I} \mathbf{x}_b$ が導かれる。

弱い公理は、実際に同じ効用を持つ2つの財の束が、無差別でない（同じ効用を持たない）ことを明示する。この場合で、弱い公理が誤った効用の順序関係を導いた例、あるいは正しい効用の順序関係を導けなかった例が呈示された。このことによって、われわれが目的としてきた、サムエルソンの弱い公理を満たすが、効用関数を満足しない例を示すことができた。しかし、ハウタッカーや宇沢は〔3〕や〔13〕の証明で、需要関数（したがって効用関数）が、連続で連続な導関数を持ち、リップシッツ条件¹⁾を満たすことを要求している。不合理なことであるが、この例の効用関数は、ハウタッカーのいう効用関数の概念、あるいは集合に含まれていない。それゆえ、この例のように、連続微分可能でない効用関数の例を示しても、ハウタッカーが「サムエルソンの仮説（弱い公理）が（序数的効用関数存在の）必要条件であっても十分条件ではない。」²⁾と言ったことの証明はなされてない³⁾。われわれは、本稿の主たる問題を次に定理として掲げ、その証明を行なおう。

（定理）

価格ベクトルが $\mathbf{P}_a$ と $\mathbf{P}$ であるとき選好される財の束を $\mathbf{X}_a, \mathbf{X}$ とすれば $\mathbf{x} \mathbf{R} \mathbf{x}_a \rightarrow \mathbf{X} \in c(\mathbf{X}_a)$

を満足する $\mathbf{X}_a, \mathbf{X}$ が存在する。

消費者にとって、3つの財の束 $\mathbf{X}_a, \mathbf{X}, \mathbf{X}_b$ に対する選好が循環的であり、かつ、その選好の通りに実際に選択が行なわれると仮定する。その一つの場合として、

$$\mathbf{x} \mathbf{R} \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a \mathbf{R} \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_b \mathbf{R} \mathbf{x} \quad (5.2)$$

が成り立つときについて考察を進める。まずはじめに、(5.2) の第1番目の関係と弱い公理を使用すれば、

$$\neg \mathbf{x}_a \mathbf{R} \mathbf{x} \quad (5.3)$$

を得ることができる。次に、(5.2) の第2番目と第3番目の関係に弱い公理を

適用すれば,

$$\neg x_b R x_a \quad \neg x R x_b \quad (5.4)$$

が成立する。 $\neg R$ についての推移律 (4.5) を活用すれば, (5.4) より,

$$\neg x R x_a \quad (5.5)$$

を得る。(5.3), (5.5) より, X と X_a に関して,

$$x I x_a$$

が成立する。従って, $X \in c(X_a)$ が導出される。これで, 定理の証明は終わる。

もし, この定理の証明で用いられた需要関数が, 連続微分可能であることが示されるならば, アローのオープン・クエスチョンは解決する。このことは, 次のように容易に示される。ここで課せられた需要関数についての条件は,

$$X_a = X(P_a, M_1), \quad X_b = X(P_b, M_2), \quad X = X(P, M_3) \quad (5.6)$$

だけである。これらの値を通る滑らかな関数を考えることは可能である。この条件を満足する関数の最も簡単な例として, 次の曲面の式

$$X(P, M) = h_1 X_a + h_2 X_b + h_3 X$$

をあげる。ここで, h_1, h_2, h_3 はパラメーターである。また一般の滑らかな関数で条件に合うものを求める事も可能である⁴⁾。そして, この滑らかな関数が求める需要関数となる。

より理解を明確にするために効用関数を用いて, この定理の意味を解釈してみる。もしなんらかの基準で, X の部分集合である各々の同値類に効用の値 (たんなる順序付けにすぎなくとも) が割り当てられているとすれば, (4.3) の仮定より, 条件 $x R x_a$ は関係 $u(x) > u(x_a)$ を意味する。他方 (5.3), (5.5) は $x I x_a$ を導く。従って, $u(x) = u(x_a)$ が成立する。それゆえ, 強い公理を仮定しないときには, 顕示選好理論 (弱い公理) は, 満足な効用関数を導くことはできない。この循環的な選好を持つ消費者は, 強い公理によって考察の対象から排除される, 積分可能性の条件を満たさない消費者に相当する。

一つの具体例をあげてみよう。 n 次元 (財の数が n) である場合について, 弱い公理を満たすが, 強い公理を満足しない選好順序を持つ消費者の例を考察してみる。その準備として強い公理を次のように掲げる。

(強い公理)

m 個の財の束について、 $m-1$ 個の式

$$P_{t-1} \cdot X_{t-1} \geq P_{t-1} \cdot X_t \quad (t=2, 3, \dots, m)$$

が成立し、ある t について、 $X_t \neq X_{t-1}$ であるならば、

$$P_m \cdot X_1 > P_m \cdot X_m$$

が導出される。

この公理の意味は次のように解釈される。 $x_1 R x_2, \dots, x_{t-1} R x_t, \dots, x_{m-1} R x_m$,
が成立すれば、 X_1 は X_2 より、 X_2 は X_3 よりそして以下同様に X_{m-1} は X_m より
顕示選好される。もし、この財の束の点列 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ において、隣り合う
1 組の相異なる財の束があれば、この点列の最初の項 X_1 と最後の項 X_m の間
には、次の選好関係があると仮定されうる。すなわち、 X_m は X_1 より顕示選好
されることはない。以上で準備のための強い公理の説明を終え、次に具体例に
よる説明に戻ろう。定理の証明の中で行なったのと同時に、3 つの財の束を
 X, X_a, X_b とし、それらが選択されるときに価格ベクトルを P, P_a, P_b と仮定
する。また、これらの財の束のうちには同じものはない。すなわち、 $X \neq X_a$,
 $X_a \neq X_b, X_b \neq X$ が成立すると仮定する。ここであらたに、定数 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$
を導入する。その定数よりなるベクトル $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ は、不等式

$$\alpha \cdot (X_a - X_b) \geq 0 \quad (5.7)$$

を満足するものとする。さらに、定理の証明の中で与えられたのと同じ選好関
係がこの 3 つの財の束に課せられたとする。この選好関係は、 R の定義によっ
て、

$$P \cdot X \geq P \cdot X_a \quad (5.8)$$

$$P_a \cdot X_a \geq P_a \cdot X_b \quad (5.9)$$

$$P_b \cdot X_b \geq P_b \cdot X \quad (5.10)$$

と書きかえられる。ここで注意すべきことは、これらの財の束の点列 (X, X_a, X_b, X) に強い公理を適用すれば、 $P \cdot X > P \cdot X$ が成立せねばならないことである。このことは、この例では暗黙のうちにも、強い公理が仮定されていないことを意味する。

ところで, (5.9), (5.10) と弱い公理を使用すれば,

$$\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_b < \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_a \quad (5.11)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} < \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_b \quad (5.12)$$

が成立する。もし, $\mathbf{P}_b = \mathbf{P} - \boldsymbol{\alpha}$ が成立すれば, (5.11) 式は,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_b + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b) < \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_a$$

と展開されて, $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b) \geq 0$ という仮定と, (5.12) より,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} < \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_a$$

を得ることができる。したがって, 関係 $\neg \mathbf{xR}\mathbf{x}_a$ が導かれた。これと, (5.8)

と弱い公理より導出される関係 $\neg \mathbf{x}_a \mathbf{R} \mathbf{x}$ を考慮すれば,

$$\mathbf{X} \in c(\mathbf{a}) \quad (5.13)$$

となる。さて, (5.8) と, $\mathbf{xR}\mathbf{x}_a \rightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_a)$ という仮定から, 同じ $\mathbf{X}$ について,

$$\mathbf{X} \in \{\mathbf{x} | \mathbf{xR}\mathbf{x}_a\} \subset \{\mathbf{x} | u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_a)\} \quad (5.14)$$

が成立する。以下では, 前に行なった推論がそのままあてはまるので, 説明はこれまでにとどめたい。

最後に, 上で掲げたベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の存在について考えてみる。簡単な例であるが, 以下の例で, 上にあげた $\boldsymbol{\alpha}$ の存在が確認される。まず, $n=3$ のとき, すなわち 3 次元ベクトルの例を示す。 $\mathbf{P}_a = (1, 1, 0)$, $\mathbf{P}_b = (1, 0, 1)$, $\mathbf{P} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{X}_a = (1, 0, 1)$, $\mathbf{X}_b = (0, 1, 1)$, $\mathbf{X} = (1, 1, 0)$ とする。(5.8), (5.9), (5.10) の成立は,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_a = 1$$

$$\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{X}_a = \mathbf{P}_a \cdot \mathbf{X}_b = 1$$

$$\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X}_b = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{X} = 1$$

より保証される。さらに, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_b$ より, $\boldsymbol{\alpha} = (-1, 1, 0)$ となる。他方 $\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b = (1, -1, 0)$ より, ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ は, 条件 (5.7) を満足する。 n 次元ベクトルについても, 上の条件を満たす $\boldsymbol{\alpha}$ を求めることができる。この例の n 次元への拡張例を考えてみよう。ある正の定数を e とする。上のベクトル $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b, \mathbf{P}, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b, \mathbf{X}$ は, それぞれ 4 次元から n 次元までの成分がすべて 0 であるベクトル

であると解釈する。これらのベクトルに、 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ を加える。ただし、 $1 \leq i \leq 3$ なる i に対して $e_i = 0$ 、 $4 \leq i \leq n$ なる i に対して、 $e_i = e$ であるとする。このようにして作られた新しいベクトルを、 $P'_a, P'_b, P', X'_a, X'_b, X'$ とすれば、それらのベクトルと $\alpha' (= P' - P'_b)$ が、(5.7), (5.8), (5.9), (5.10) を満足することは、上の3次元の場合の例と同様にして確かめられる。

- 1) リプシッツの条件によれば、次のことが要求される。 $\|P - P^\circ\| < \epsilon$, $|M - M^\circ| < \epsilon$ をみたす、 P と M に対して、 $X(P, M)$ は

$$\|X(P, M') - X(P, M'')\| \leq K |M' - M''|$$
 を満足する。ここで、 $\|\cdot\|$ はノルム、 $K, \epsilon, M^\circ, P^\circ$ はそれぞれ定数または定数のベクトルを表わす。
- 2) Houthakker, H. S., [3], p. 161.
- 3) リヒターは、リプシッツ条件が課されていない需要関数について、その関数がリヒターの強い公理をみたすとき、その関数が、消費者の効用最大化する関数の十分条件となることを証明した。Richter [7] 定理2の系を見よ。
- 4) $U(X, \epsilon) \cap U(X_a, \epsilon) = \phi$, $U(X_b, \epsilon) \cap U(X, \epsilon) = \phi$, $U(X_b, \epsilon) \cap U(X_a, \epsilon) = \phi$ となる $\epsilon (> 0)$ が存在すれば、条件を満足する滑らかな関数を求めることができる。ところで、 $U(X, \epsilon)$ は X の ϵ 近傍を表示する。

6. 補 足

われわれは、本節で2つの異なった消費者（合理的な消費者・一貫した選好を行なう消費者）の概念を用いる。この2つの消費者の概念の整理を行ない、そしてこの両者の関係を明確にしよう。われわれが消費者の実際の行動の分析を行なうとき、消費者の行動は非常に複雑でかつ多様なものとなる。しかしこれらの行動は、いくつかの基準で整理を行なうことができる。たとえば、われわれは次の基準 a. b. に従って、消費者を次の4つの分類 i), ii), iii), iv) に区分する。

- a. かれが行なう選択が、合理的な選好を表わしたものであるかどうか。
- b. かれが行なう選択が、一貫した選好を持つかどうか。
 - i) 合理的で、かつ一貫した選好を持つ消費者。
 - ii) 合理的で、かつ一貫しない選好を持つ消費者。
 - iii) 非合理的で、かつ一貫した選好を持つ消費者。

iv) 非合理的で、かつ一貫ない選好を持つ消費者。

なお、ここでは同一の個人、又はグループが異なった時点で、異なった分類に属する消費者の行動をとる可能性は否定されない。

以上の個々の分類に区分された消費者について検討するまえに、その準備として次の3つの点を明らかにしておく。まず第一に、「合理的」という言葉は必ずしも明確な意味を持たない。そこでわれわれは、次のように合理的な消費者の概念の定義を行なう。合理的な消費者は、関係

$$u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_a) \leftrightarrow \mathbf{x} P \mathbf{x}_a \quad (6.1)$$

を満足する。なお、順序記号 $\mathbf{x} P \mathbf{x}_a$ は、消費者によって、 $\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}_a$ より選好されることを示す。上の命題 (6.1) の解釈を試みれば以下ようになる。ある消費者が合理的な消費者の分類に区分されるならば、当然かれは自分にとって効用が大きい方の財の束を選好する。逆に、この合理的な消費者の定義を満たさない消費者の例には、禁欲主義者などのいくつかの例が考えられる。以前と同様に、 $\mathbf{x} P \mathbf{x}_a$ の否定を $\neg \mathbf{x} P \mathbf{x}_a$ で表わし、 $\mathbf{x} I \mathbf{x}_a$ を

$$\mathbf{x} I \mathbf{x}_a \leftrightarrow \neg \mathbf{x}_a P \mathbf{x}, \neg \mathbf{x} P \mathbf{x}_a$$

と定義する。効用関数 u を用いれば、

$$\neg \mathbf{x}_a P \mathbf{x}, \neg \mathbf{x} P \mathbf{x}_a \leftrightarrow u(\mathbf{x}_a) = u(\mathbf{x}_b)$$

となる。第二に、一貫した選好を持つ消費者の定義を、あらためて行なおう。

一貫した選好をする消費者は、関係

$$\mathbf{x} P \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_a P \mathbf{x}_b \rightarrow \mathbf{x} P \mathbf{x}_b$$

を満たす消費者である。ここで用いた「一貫性」という言葉を以前に使用した言葉に置きかえると、弱い一貫性ではなく、強い一貫性になる。最後に、種々のタイプの消費者を、はじめから考察の対象から排除しないために、われわれは、効用量についての推移性を仮定しない。このことに別の表現を与えれば、次のようになる。 $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_a)$, $u(\mathbf{x}_a) > u(\mathbf{x}_b)$ が成立しても、必ずしも $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_b)$ が成立するとは限らない。以上で準備は完了する。

以上で考察したように、消費者の特定の行動は、必ずしも合理的な選択行動とは限らない。しかし長期的、あるいは確率的に考えるならば、一般に消費者

は、自分なりに合理的な行動を行なうと考えられる。そこで経済学は、合理的な行動を行なう消費者をその考察の対象とする。ここでも、経済学の伝統に従って合理的な消費者のみを考察の対象とする。したがって、ここで考察されるのは、分類 i) と ii) に属する消費者に限られる。i) と ii) に属する消費者の検討をするまえに、次のことを仮定する。次の関係 $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_a)$, $u(\mathbf{x}_a) > u(\mathbf{x}_b)$ を満足する財の束, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_a$, $\mathbf{X}_b$ が存在すると仮定する。まず、分類 i) に属する消費者について考察を加える。仮定から $\mathbf{xPx}_a$, $\mathbf{x}_a\mathbf{Px}_b$ が得られ、 $\mathbf{xPx}_b$ が成立する。したがって、この分類に属する消費者は、効用量に関する推移律すなわち、 $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_b)$ を満足する。次に、分類 ii) に属する消費者について検討してみよう。この分類に属する消費者は、仮定より選好関係 $\mathbf{xPx}_a$, $\mathbf{x}_a\mathbf{Px}_b$ を持ち、さらに関係 $\neg\mathbf{xPx}_b$ も満足する。(6.1) より $\neg\mathbf{xPx}_b$ から、 $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_b)$ が成立する。したがって、この分類に属する消費者は、効用量に関して、関係

$$u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}_a), u(\mathbf{x}_a) > u(\mathbf{x}_b) \rightarrow u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}_b)$$

を満足する。そしてこの関係は、循環的な選好を示す。以上の事から、次のことが明らかになる。われわれが前節で例に出した、循環的な選好を持つ消費者は、分類 ii) に属する合理的でかつ一貫しない選好を持つ消費者のことである。このことを言いかえれば、次のようになる。顯示選好理論は、その強い公理を設けることによって、合理的な消費者のうちで、特に一貫した選好関係を持つ消費者だけを、その考察の対象とする。他方、通常の需要理論で取り扱われる消費者は、われわれが行なった定義に則して分類すれば、明らかに合理的で一貫した選好を持つ消費者に分類される。われわれは、ここで次の結論を得る。顯示選好理論は、通常の需要理論と同じ分類に属する消費者を考察の対象とする。

参考文献

- 1) Arrow, K. J., "Rational Choice Functions and Orderings," *Economica*, Vol. 26, 1959.
- 2) Gale, D., "A Note on Revealed Preference," *Economica*, Vol. 27, 1960.
- 3) Houthakker, H. S., "Revealed Preference and the Utility Function," *Economica*, Vol. 17, 1950.

- 4) Little, I. M. D., "A Reformulation of the Theory of Consumer's Behaviour," *Oxford Economic Papers*, N.S. 1, 1949.
- 5) 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店, 1968.
- 6) Morishima and others, *Theory of Demand-Real and Monetary*, Oxford University Press, 1973.
- 7) Richter, M. K., "Revealed Preference Theory," *Econometrica*, Vol. 34, 1966.
- 8) Richter, M. K., "Rational Choice," in *Preferences Utility and Demand*, ed. by J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, H. F. Sonnenschein, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1971.
- 9) Samuelson, P. A., "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour," *Economica*, Vol. 5, 1938.
- 10) Samuelson, P. A. *Foundation of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947, 佐藤隆三訳『経済分析の基礎』勁草書房, 1967.
- 11) Samuelson, P. A., "Consumption Theory in Terms of Revealed Preference," *Economica*, Vol. 15, 1948.
- 12) Stigum, B. P., "Revealed Preference — A Proof of Houthakker's Theorem," *Econometrica*, Vol. 41, 1973.
- 13) Uzawa, H., "Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption," in *Mathematical Method in the Social Sciences*, ed. by K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes, Stanford University Press, 1960.