

消費者余剰に関する一考察：公共投資の便益評価に向けて

松沢，俊雄

<https://doi.org/10.15017/3000012>

出版情報：経済論究. 34, pp.77-100, 1975-07-15. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：



消費者余剰に関する一考察

—公共投資の便益評価に向けて—

松 沢 俊 雄

目 次

は じ め に

第1節 消費者余剰の概念

第2節 所得の限界効用一定性

第3節 補整需要曲線と消費者余剰

第4節 効用変化と所得等価

結 び

は じ め に

消費者余剰については、今日まで多くの人々によって、様々な観点から論議されてきた。論議はそれが進むにつれ、より煩雑さを増してきたが、消費者余剰概念の曖昧さも論議の混乱の一因といえよう。そして、論議の中には、消費者余剰概念の不必要性について言及したものさえある。しかし、公共投資の便益分析等にも関連して、公共経済学的アプローチの盛んな今日では、消費者余剰概念の重要性はより増大しているといえよう。

消費者余剰は、効用の余剰の貨幣額の表示であり、特にそれが測定される点に意義がある。われわれが知り得る知識は、市場における需要曲線であるので、消費者余剰が需要曲線でどのように表わされるかが、とりわけ問題となるだろう。本稿では特に、この問題についての考察を行ないたい。

第1節 消費者余剰の概念

1. 消費者は、ある期間内に与えられた所得と価格体系のもとで、自らの効

用が最大になるように各財の消費量を決める。いま財の数を n , 第 i 財の消費量を x_i , 効用を u , 所得を I , 第 i 財の価格を p_i とすると消費者は

$$\sum_i^n p_i x_i = I$$

のもとで

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

を最大化する。1 階の均衡条件は

$$u_i - \lambda p_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

, $u_i = \partial u / \partial x_i$ で, λ はこの最大値問題のラグランジュ乗数である。(1)と予算制約式から, $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$ に関する $n+1$ 個の方程式が存在するので

$$x_i = x_i(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \quad (3)$$

のように解ける。

通常の需要曲線は第 i 財の価格とその需要量の関係を, 他の事情にして等しいならという条件 (*ceteris paribus*) のもとで描かれている。つまり, 各財の需要曲線は

$$x_i = x_i(p_i; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{i-1}, \dots, \bar{p}_{i+1}, \dots, \bar{p}_n, \bar{I}) \quad (4)$$

から描かれる。市場における消費者の数を N , 第 j 番目の人の所得を I^j , 第 j 番目の人の第 i 財への需要量を x_i^j とすれば, 市場での第 i 財への需要は

$$x_i = \sum_j^N x_i^j = D_i(p_i; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{i-1}, \bar{p}_{i+1}, \dots, \bar{p}_n, \bar{I}, \bar{I}^2, \dots, \bar{I}^N) \quad (5)$$

と表わされる。

このようにして求められた需要曲線はマーシャルの需要曲線ともいわれ, 通常は図 1 のように右下りの曲線として示される。以後この需要曲線を M. D. C. と略記する。

2. M. D. C. は価格→数量の関係を表わすが, 逆にそれを数量→価格の関係 $p=f(x)$ と表わすこともできる。これは, 消費者は x 単位の財に対して, 単位当り p の金額を支払う意志があることを意味する。

図 1 で価格が p^1 のときの需要量を x^1 とすると, 消費者が x^1 を消費するこ

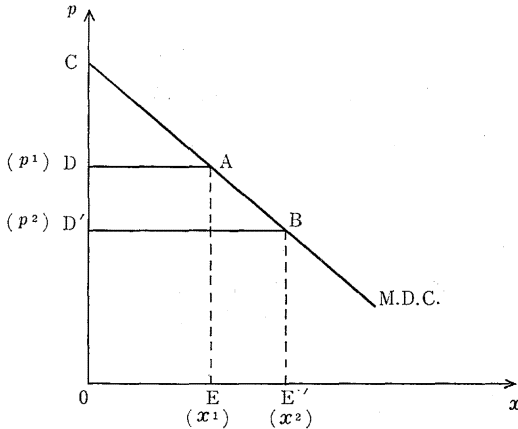


図 1

とに対して支払う意志のある貨幣の総額は

$$\int_0^{x^1} f(x) dx \quad (6)$$

で、これは図1の CAEO で表わされる。しかし、彼が x^1 量の財に支払った貨幣額は図1の DAEO であるから、CAD(=CAEO-DAEO) は、彼が x^1 量の財の消費に支払う意志のある貨幣額と彼が実際に支払った貨幣額の差額と考えられる。また、価格が p^2 のときの消費量を x^2 とすると、この差額は CBD' で表わされるので、価格が p^1 から p^2 に下落したときは、このような差額は DABD' だけ増加することになる²⁾。

ところで、図1の面積で表わされた貨幣額は、効用に対応した貨幣額であるが、もし、所得の限界効用³⁾が一定でないときは、同じ効用に対して同じ貨幣額が対応しなかったり、効用の大きさとそれに対応する貨幣額の大きさとの間に、逆転した関係がみられることもあるだろう。マーシャルは消費者余剰を「それなしですますくらいなら支払ってもよいと考える価格が実際に支払う価格を超過している分」([9], p.124) と定義した。この消費者余剰が効用の余剰に正しく対応した貨幣額であるとするならば、それは所得の限界効用が一定のとき、図1の面積によって表わされるだろう。

本稿では特に、価格が下落した場合の消費者余剰の変化が、M.D.C. でどのように表わされるかを考察するが、この場合特に問題となる貨幣額、図1の矩形 DABD' を、マーシャル測度と呼んでおく。ただし、第2節では、図1の CAD をマーシャル測度と呼んでいる。

注

- 1) $x=0$ の近傍で $f(x)$ は無限大にならないものとする。
- 2) これらのことは最初、デュピー〔3〕によって考えられた。
- 3) 所得の限界効用は、貨幣の限界効用ともいわれている。

第2節 所得の限界効用一定性

1. 消費者余剰を考える上で重要なことは所得の限界効用（以下 M.U.I. と略記）一定性についてである。これはマーシャルの行なった仮定であり、消費者余剰と M.D.C. の関係を考える上で重大な問題点である。そこでこの節では M.U.I. の一定性が何を意味するかについて考えてみたい¹⁾。

まず、M.U.I. は次のように示される。 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$, 与えられた予算式のもとでの $u(\mathbf{x})$ の最大値を z^0 とし、そのときの $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}^0$ とする。このとき

$$z^0 = u(\mathbf{x}^0) = u(x_1^0(\mathbf{p}, I), \dots, x_n^0(\mathbf{p}, I)) \quad (7)$$

となる。もし $x_i^0 (i=1, 2, \dots, n)$ が I について連続微分可能ならば

$$\frac{\partial z^0}{\partial I} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^0}{\partial I} = \lambda^0(\mathbf{p}, I) \quad (8)$$

を得る²⁾。つまり、所得の増分による効用の増分、すなわち M.U.I. がラグランジュ乗数に等しいということである。したがって (1) 式は、第 i 財の限界効用 = 所得の限界効用 $\times$ 第 i 財の価格となるように消費者は各財を消費することを意味する。

いま価格と所得が一様に m 倍になったとしよう。(2) 式の右辺は価格と所得に関して零次同次だから、どの財の需要量も変化しない。このことから、 u_i は変化しないのに p_i は m 倍になるので、(1) 式から λ は $1/m$ 倍にならなけ

ればならない。つまり λ は $\mathbf{p}$ と I に関して -1 次同次である。

2. サミュエルソン [13] は M.U.I. が一定であることは何を意味するかを次のようにして示した。

λ_u を効用指標 u に関する M.U.I. とするとき $\lambda_u = \lambda_u(\mathbf{p}, I)$ であるが、このとき M.U.I. は $\mathbf{p}$ と I の両者に関しては一定となりえない。つまり

$$\frac{\partial \lambda_u}{\partial p_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \lambda_u}{\partial I} = 0 \quad (10)$$

は同時には成立しえない³⁾。彼は M.U.I. の一定性を 2 つの場合に分けた。第 1 は λ_u が $\mathbf{p}$ に関して一定であるとき、即ち (9) 式だけが成立している場合。第 2 は貨幣の限界効用が一定の場合である⁴⁾。相対価格体系では任意のある 1 財がニューメレールとして用いられており、この場合貨幣の限界効用一定とはニューメレールの限界効用一定ということである。つまり第 1 財をニューメレールとすると

$$\frac{\partial \lambda_u}{\partial p_i} = 0 \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (11)$$

$$\frac{\partial \lambda_u}{\partial I} = 0 \quad (12)$$

が成立するという場合である。第 1 の場合、各財に関する所得弾力性は 1 になり、各財の需要関数を H^i とすると

$$x_i = I \cdot H^i(\mathbf{p}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

となる。(12) 式は $\mathbf{p}$ が一定なら各財の需要量は所得に比例することを表わしている。また第 2 の場合、各財の需要関数を G^i とすると

$$x_i = G^i(\mathbf{p}) = G^i(m\mathbf{p}) \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (13)$$

$$x_1 = \frac{I}{p_1} - \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{p_1} G^i(\mathbf{p}) \quad (14)$$

となる。ただし、 m は正数。これらの式は、所得増分がすべてニューメレールに支出されることを意味する⁵⁾。

3. ヒックスは M.U.I. の一定性を特に仮定することなく消費者余剰を図

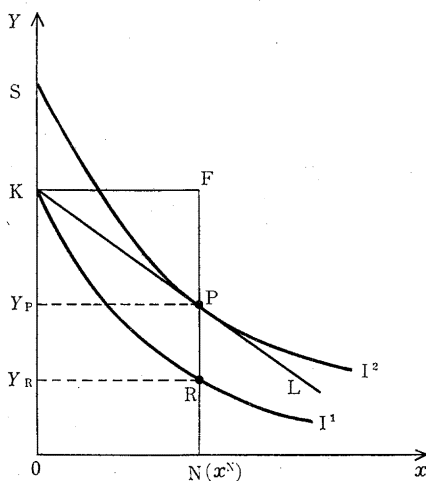


図 2

示した⁶⁾。図2で横軸に財 x の量を、縦軸に他財一般を代表するものとしての所得 Y をとる。 N の座標を x^N とし予算線を KL で表わす。消費者が当初 OK の所得をもっているとするれば均衡では ON 量の財が購入され、それに対して PF の貨幣額が支払われるであろう。 P は K よりも、より高い効用水準にあるので、消費者は財を ON 消費することによって当初より効用を高めることができた。彼が ON の財に支払うことを辞さない貨幣額は RF であり実際の支払い額は PF だから、マーシャルの定義した消費者余剰は PR である。

ところで、このようにして図示された消費者余剰は、どのような場合に M. D. C. 左方の面積によって表わすことができるだろうか。それは図2における無差別曲線 I^1 と I^2 が平行のとき可能である。無差別曲線 I^1 と I^2 が平行のとき、それらの垂直方向の距離は常に等しいので、同じ効用差に常に同じ貨幣額が対応していることになる。この場合 消費者余剰は マーシャル測度 (図1の CAD) によって表わされうる。

無差別曲線が平行であるということは、言い換えれば、 P と R における Y と x の限界代替率が等しく、また、財 x に関して所得効果がゼロということであり、これは所得の増分がすべて Y に向けられることを意味する。従って消費者に

として、その消費計画中に非常に多くの財が存在し、当該財の予算に占める割合が極めて小さいとき、消費者余剰はマーシャル測度に等しいことになる。

次に、この事実と M.U.I. 一定性の関係について考えてみたい。効用関数を $u(x, Y)$ とし、 u は x と Y に関して連続で微分可能とする。図 2 で P, R における x と Y の限界代替率は各々

$$\left(-\frac{dY}{dx}\right)^P = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x^N} \bigg/ \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)_{Y=Y_P} \quad (15)$$

$$\left(-\frac{dY}{dx}\right)^R = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x^N} \bigg/ \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)_{Y=Y_R} \quad (16)$$

で表わされよう。P と R における限界代替率が等しく、当該財の限界効用が Y (他財の消費量) から独立、即ち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} = 0 \quad (17)$$

であれば、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{Y=Y_P} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{Y=Y_R} \quad (18)$$

なので、(15)と(16)から、M.U.I. すなわち $\partial u / \partial Y$ は P と R で等しく、それは Y に関して一定であることがいえる。

逆に、M.U.I. が Y に関して一定で (17) が成り立つときは、(15)、(16) から、任意の x について x と Y の限界代替率が等しいことがいえるので、このときは無差別曲線は平行で、消費者余剰はマーシャル測度に等しい。

4. 以上のことは次のようにしても示することができる⁷⁾。消費者の計画を

$$\text{maximize } u(x, Y) \quad (19)$$

$$\text{subject to } px + Y = I \quad (20)$$

とする。 p は財 x の価格、 I は与えられた所得、 Y は他財一般を代表する所得とし、その価格は 1 とする。均衡条件は、

$$u_x - \lambda p = 0 \quad (21)$$

$$u_Y - \lambda = 0 \quad (22)$$

で、 $u_x = \partial u / \partial x$ 、 $u_Y = \partial u / \partial Y$ である。 λ はラグランジュ乗数で、所得の限界効用であることは前にも述べた。(20)、(21)、(22) の各式を I で微分して

$$\begin{pmatrix} 0 & p & 1 \\ -p & u_{xx} & u_{xy} \\ -I & u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial I} \\ \frac{\partial x}{\partial I} \\ \frac{\partial Y}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

を得る⁸⁾。この方程式の係数行列は正則とし、係数の行列式を

$$D = \begin{vmatrix} 0 & u_x & u_Y \\ u_x & u_{xx} & u_{xy} \\ u_Y & u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix}$$

とすると、(21), (22), (23)から

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial I} &= \frac{-u_Y}{D} \begin{vmatrix} u_x & u_{xy} \\ u_Y & u_{yy} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial Y}{\partial I} &= \frac{u_Y}{D} \begin{vmatrix} u_x & u_{xx} \\ u_Y & u_{yx} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。 u_x, u_Y, u_{xx} は 0 でないものとし、 $u_x \cdot u_{yy} \neq u_Y \cdot u_{xy}$, $u_x \cdot u_{yx} \neq u_Y \cdot u_{xx}$ とする。このとき、M.U.I. が Y に関して一定で、財の限界効用が Y から独立なら、つまり $u_{YY} = u_{xy} = 0$ なら

$$\frac{\partial x}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial I} = 1 \quad (25)$$

となる。逆に (25) が成立するには、 $u_{YY} = u_{xy} = 0$ でなければならない。(25) 式は、所得の増分は当該財 x には向けられず、すべて他の財 Y (この場合ニューメレールでもある) に支出されることを意味している⁹⁾。

以上から、所得の限界効用が一定であることは、当該財に関して所得効果が 0 であることを意味し、この場合、消費者余剰はマーシャル測度に等しいことがわかった。

注

- 1) M.D.C. の解釈についての議論はここでは行なわないことにする。ここで
の M.D.C. は第 1 節で導かれたものであり、代替効果と所得効果の両者を考

慮した需要曲線とする。

2) 予算制約式

$$\sum_i^n p_i x_i = I$$

を I で微分して両辺に λ^0 を掛けると

$$\sum_i^n \lambda^0 p_i \frac{\partial x_i^0}{\partial I} = \lambda^0$$

を得る。この式と(1)から(8)を得る。

3) M. U. I. 即ち λ_u は p と I に関して -1 次同次だから、オイラーの定理より

$$\sum_i^n \frac{\partial \lambda_u}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial \lambda_u}{\partial I} I = -\lambda_u \quad (26)$$

となり、 $\lambda_u \approx 0$ だから(9)(10)が同時には成立しえない。

4) 通常、所得の限界効用と貨幣の限界効用は同じ意味で用いられているが、サミュエルソンは特にこれらを区別して考えた。本稿ではこの節のサミュエルソンの論議を除いてはこれらを区別していないし、所得に関する記号 I と M も意味上の差はない。

5) (12), (13)及び(14)は、各々第1, 第2の場合の必要十分条件である。また、 H^i は -1 次同次、 G^i は零次同次である。

以上の証明については[13]の pp. 78-86. を参照。

6) ヒックス[5], 「第2章への補論」参照。

7) パティンキン[12]参照。

8) u のサフィックスは、それらの変数による u の導関数を表わす。

9) (24)の第1式の右辺は、分母に比べて分子が極めて小さい場合等、他にも0になる場合は考えられるが、(25)の恒等式が成立するには $u_{YX} = u_{XY} = 0$ が必要である。

また M. U. I. が、価格 p と所得 I に関して一定の場合は次のようになるだろう。

(20), (21), (22)の各式を P で微分して得られた方程式から

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \lambda^2 x & u_x & u_Y \\ -\lambda^2 & u_{xx} & u_{xY} \\ 0 & u_{Yx} & u_{YY} \end{vmatrix}$$

が、(23)から

$$\frac{\partial \lambda}{\partial I} = \frac{u_x^2}{D} \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xY} \\ u_{Yx} & u_{YY} \end{vmatrix}$$

が導かれる。ここで $u_{xx}u_{YY} \approx u_{xY}u_{Yx}$ であるとする。 $\partial \lambda / \partial p = 0$ は $u_{YX} = u_{XY} =$

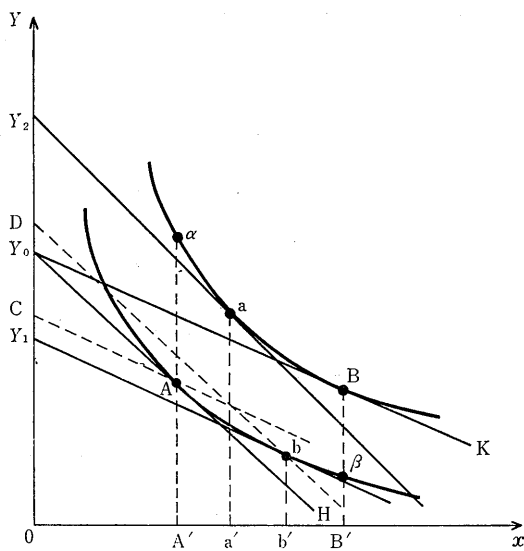
0 を意味し、このとき $\partial \lambda / \partial I = 0$ である。 u の 2 次導関数 u_{xy} , u_{yx} が連続なら、 $u_{yx} = u_{xy}$ となるので、そのときは $u_{YY} = u_{Yx} = u_{xy} = 0$ を意味することになる。そしてこの場合(25)が成立する。

第 3 節 補整需要曲線と消費者余剰

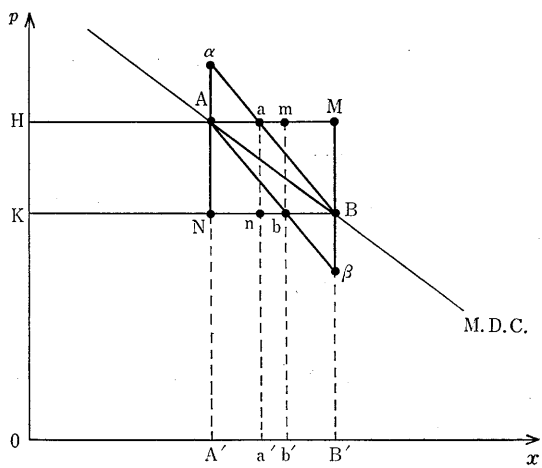
1. ヒックス〔6〕は所得の限界効用の一定性を特に仮定することなく、通常の需要曲線との対比で消費者余剰に接近した¹⁾。ヒックスは二つの概念「補整の変差 (Compensating variation)。以下 C.V. と略記」と「等価の変差 (Equivalent variation)。以下 E.V. と略記」を考えた。前者は価格が変化した後、消費者が新しい価格で財の購入を行なえるとき、彼を最初の効用水準に残しておくように支払われたり受け取られたりする補償額である。後者は価格が変化した後、消費者が旧い価格でしか財の購入が行なえないとすると、彼を新しい価格で達成されうる効用水準に残しておくように支払われたり受け取られたりする補償額である。そして C.V. は、価格が下落あるいは上昇したときに、消費者を同じ効用水準に残しておくように、受け取られたり支払われたりする貨幣額であり、彼の実質所得を一定にしておくような補償額である。E.V. はこれとは逆で、価格下落、上昇の際の E.V. はそれぞれ、価格上昇、下落の際の C.V. に等しい。さて我々はこの 2 つの概念をもとに消費者余剰を考えてゆこう。その際考察する財は上級財であるものとしておく。

図 3 は第 2 節の図 2 と同じようにして描かれたものであり、図 4 は M.D.C. の一部 AB を描いたものである。

2. 財 x の価格が OH から OK に下落したとする。これは図 3 では予算線が Y_0H から Y_0K に変化したことによって示される。消費者はこのとき A から B に移るだろう。この際もし C.V. に相当する所得が減少させられるとすれば彼は b を選ぶだろう。価格下落が生じて A に留まった場合、彼は新しい価格体系で同じ量の財を購入するから費用を節約できるが、それは図 3 では Y_0C 、図 4 では矩形 HANK で表わされる。これを費用較差と呼ぶと C.V. はこの費用較差よりも必ず大きい。



☒ 3

 4

次に所得の補整的增加を伴いながら価格が上昇して再びもとにもどったとする。このとき彼は b から A にもどるだろう。価格の再上昇に際して、もし彼が b に留まったとすれば、その場合の費用較差（この場合は費用増）は Y_1D 或いは $HmbK$ である。 A と b は同じ効用水準にあるから、このときの $C.V.$ は価格下落の際の $C.V.$ と等しい。そして後者の $C.V.$ （価格の再上昇の際の）は $HmbK$ よりも小さい（何故なら、価格が再上昇したときは財 x の量を減らすことにより有利な点を選択可能であるから。）ので結局、価格が OH から OK に下落した場合の $C.V.$ は、 $HANK \leq C.V. \leq HmbK$ の関係にあることがわかった。図4における Ab は補整需要曲線といわれ、価格変化の代替効果のみを反映する需要曲線である²⁾。

3. 価格が OK から OH に上昇した場合も同様にして補整需要曲線 Ba を描くことができ、このときの $C.V.$ は $HanK \leq C.V. \leq HMBK$ の関係にある。ところで、価格上昇の際の $C.V.$ は価格下落の際の $E.V.$ に等しいので、価格が OH から OK に下落した場合の $E.V.$ は $HanK \leq E.V. \leq HMBK$ となる。

図4において、補整需要曲線 Ab , Ba は考察中の財が上級財だから、各々 AB の左方、右方に存在するが、その範囲は上述した不等式関係で制限されよう。

4. これ迄の需要曲線とは逆に数量→価格の見方をするにより、同じ需要曲線を限界評価曲線と考えることもできる。補整需要曲線に関してそれらは $Ab\beta$ 及び $Ba\alpha$ である。ところでマーシャルが定義した消費者余剰は、財のある単位における限界評価と実際の支払い価格の差であるから、それは $Ab\beta$ に沿って測れば $HAbK - bB\beta$ であり、 $Ba\alpha$ に沿っては $HaBK + aA\alpha$ である。ヒックスは前者を補整的余剰（以下 $C.V.S$ と略）、後者を等価的余剰（以下 $E.V.S$ と略）と呼んだ。図3において、 $C.V.S$, $E.V.S$ は各々 $B\beta$, $A\alpha$ で表わされる。

5. 消費者は財の価格が OH のときは A を、同じく OK のときは B を選ぶ。価格の下落 (OH から OK) と価格の上昇 (OK から OH) は同じ効用差をも

たらずが、以上の議論は、同じ効用差に対して二つの余剰が対応することを意味している。

マーシャル測度（図5の HABK）をMと表わせば、

$$C.V.S \leq C.V. \leq M \leq E.V. \leq E.V.S. \quad (27)$$

の関係が成立する³⁾。当該財に関して所得効果が小さい程これらの値は接近し、所得効果がゼロのときは一致する。また図3からも分かるように、無差別曲線が平行に近い程これらの値は接近し、平行になれば一致する。つまり、所得の限界効用について何ら考慮することなく、第2節と同じ結論が得られる⁴⁾⁵⁾。

注

- 1) ヒックスは、〔6〕に先立ついくつかの論文でも以下のことについて述べている。
- 2) 価格変化を小さな変化に分割して考え、それぞれの小変化区間での補整需要曲線を求める。それらを合わせ、分割幅を限りなく小さくした場合に描かれたのが Ab である。各々の小変化区間での論理は上に述べた論理と同じである。
- 3) ヒックスは、図4の AB がほぼ直線であれば、マーシャル測度が C.V. と E.V. の中間の大きさであることを示した。〔5〕、「追加補論A一般化された需要法則」参照。
- 4) ヒックス〔5〕では、消費者余剰を補整的変差と考えていた。しかしこの誤りはヘンダーソン (Henderson, A., "Consumer's surplus and the compensating variation", *Review of Economic Studies*, vol. 8, 1940-1.) によって指摘された。

モーリング〔11〕では、道路改良による輸送費低下が消費者に与える便益は、補整的変差に等しいとされている。この場合、マーシャル測度は（道路サービスが上級財なら）消費者の受ける便益を過大評価することになる。

- 5) 以上では、1財に関しての消費者余剰を考察してきたが、より一般的な（多数財に関しての）消費者余剰も、1財の場合とほぼ同じようにして考えることができる。この場合も、消費者余剰とマーシャル測度の関係は、当該財に関する所得効果の大きさによって決まる。〔6〕, 18章参照。

第4節 効用変化と所得等価

1. 本節ではこれまでのような、マーシャルの定義した消費者余剰の概念に

特にとらわれずに、効用変化に対応する所得の等価という観点から出発したい¹⁾。

価格と所得のベクトルを $(\mathbf{p}, M) = (p_1, p_2, \dots, p_n, M)$ とし²⁾、これが $(\mathbf{p}^1, M^1)$ から $(\mathbf{p}^2, M^2)$ に変化した場合を考える。このとき効用の変化分は、

$$du = \sum_j \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} dp_i + \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial M} dM \quad (28)$$

によって表わされる。予算式 $\sum_i p_i x_i = M$ を各々 $\mathbf{p}, M$ で、微分して

$$-x_i = \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

$$\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial M} = 1 \quad (30)$$

をうる。(29), (30)及び(1)を(28)に代入して

$$du = -\sum_i \lambda x_i dp_i + \lambda dM = \lambda (dM - \sum_i x_i dp_i) \quad (31)$$

となる。効用の変化分に対応する貨幣額として所得等価を考え、それを I. E. で表わす。 $\mathbf{p}$ と M の変化が極めて小さく、しかもそれによって λ は変化しないと考えられるときは

$$\text{I. E.} = dM - \sum_i x_i dp_i \quad (32)$$

となる。所得の変化はなく価格だけ変化するときには

$$\text{I. E.} = -\sum_i x_i dp_i \quad (33)$$

で、特に1財の価格変化だけが問題となるときには

$$\text{I. E.} = -x_1 dp_1$$

は M. D. C. の左方と価格線 $p=p_1^1$ と $p=p_1^2$ ではさまれた矩形、即ちマーシャル測度で表わされる。多数財の価格が変化するときには、各財に関する M. D. C. の性質 (ceteris paribus) から、上に述べた矩形を各財について合計したもののによって I. E. を表わすことはできないが、価格変化が極めて小さいので、I. E. はほぼそれらの合計と考えてもよいだろう。

しかし、 $\mathbf{p}, M$ の変化が λ を変化させるようなときには I. E. は(32)では表わせない。そしてわれわれは、このような λ の変化が伴う一般的な場合で

I. E. を考えなければならない。この場合、 (p^1, M^1) から (p^2, M^2) を多数の連続的小変化の総和と考え、各小変化の間は λ は一定とみなしてよいものとする。そうすれば、各小変化に対する各々の所得等価が求まり、それらを加え合せたものとして求めるべき所得等価が得られる³⁾。

いま、 (p^1, M^1) から (p^2, M^2) への価格下落の場合を考える。 $p^1 \geq p^2$ とし、各 p_i ($i=1, 2, \dots, n$) は単調に減少するものと仮定する⁴⁾。価格変化の分割を限りなく小さくすれば、求めるべき所得等価は(31)から

$$I. E. = \int \frac{1}{\lambda} du = \int dM - \sum_i^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} x_i dp_i \quad (34)$$

となる。(34)式は次のようなことを意味する。 p, M の変化に伴ない u が変化し、 λ も変化する。各小変化区間で u の変化と対応した所得の等価が、 λ のまさにその値に関して測られるが、それらの値を p, M の全変化区間について求めたものが(34)の I. E. である。この式で $1/\lambda$ は所得の限界効用の逆数だから、それは効用の限界費用である。従って I. E. は効用変化の帰属地代またはシャドウプライスと考えることができよう⁵⁾。所得の変化がないときは $dM=0$ で(34)式は

$$I. E. = - \sum_i^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} x_i dp_i \quad (35)$$

となる。

2. ところで(35)の右辺は、一般には一意に定まらない。I. E. は価格の変化による財の調整経路が異なれば、それに応じて値が異なってくるからである。そこでまず、価格変化に伴なう財の調整経路が一意に決まるような場合、つまり他の条件は変わらずに、1財の価格のみ変化する場合を考えよう。

1財の価格だけが変化するときは(35)から

$$I. E. = - \int_{p^1}^{p^2} x dp \quad (A \cdot B) \quad (36)$$

で、 x の経路は図5の $A \cdot B$ に沿う。このとき I. E. は図1の $DABD'$ で表わされる⁶⁾。同じ無差別曲線に沿って x が動くときは効用の変化はないので、 $I. E. = 0$ となり、(32)から $dM = x dp$ となる。ところで、図5で A から C への移

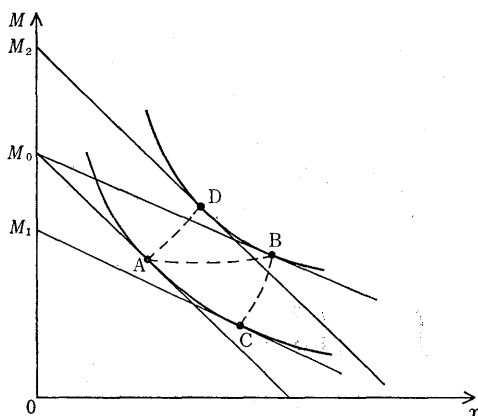


図 5

動では所得水準が下がり、CからBへの移動ではそれは上がる。AとBでは所得水準は等しいので、CからBへの移動に必要な所得額はAからCへの移動の際の所得減に等しいと考えられる。従って補整的変差は、

$$C.V. = \int dM = \Delta M = \int_{p^1}^{p^2} x dp (A \cdot C) \quad (37)$$

同じく等価的変差は

$$E.V. = \int_{p^2}^{p^1} x dp (B \cdot D) = - \int_{p^1}^{p^2} x dp (D \cdot B) \quad (38)$$

となる。図5において A, B, C, D の x 座標を各々 x^A, x^B, x^C, x^D とする。考察中の財が下級財でないならば、 $x^A \leq x^D, x^C \leq x^B$ となるので、

$$- \int_{p^1}^{p^2} x dp (A \cdot C) \leq - \int_{p^1}^{p^2} x dp (A \cdot B) \leq - \int_{p^1}^{p^2} x dp (D \cdot B) \quad (39)$$

がいえる。つまり $C.V. \leq I.E. \leq E.V.$ となる⁷⁾。これら3つの値は、この財に関して所得効果が小さいほど、言い換えれば無差別曲線が平行に近いほど接近し、所得効果がゼロ、つまり無差別曲線が平行のときは一致する。

3. 次に多数財の価格が変化する場合にもどらう。(35)式の値は一意に決まらないことは前にも述べた。しかし、

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

が成立するときは(35)式の値は一意に決まる⁸⁾。

さて(35)は

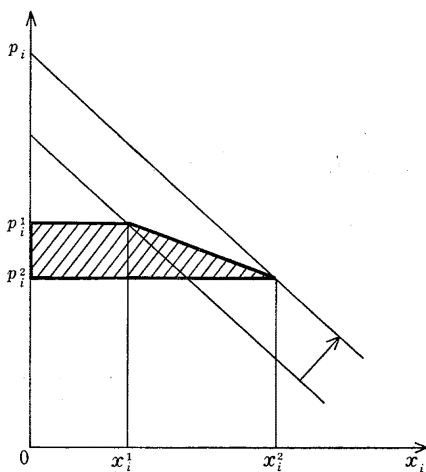


図 6

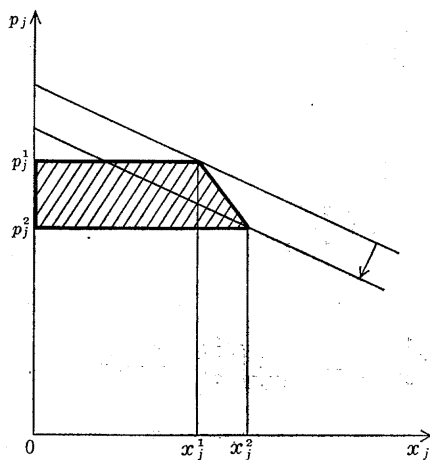


図 7

$$I. E. = - \sum_i^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \left\{ \sum_j^n \int_{p_j^1}^{p_j^2} \left[p_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} d\pi_j \right] dp_j + \sum_i^n (p_i^1 - p_i^2) x_i^1 \right\} \quad (41)$$

と表わすことができるが、(41)は各財について、その需要曲線（多数財の価格の変化によりシフトしている）と価格線ではさまれた矩形を加え合わせたものを表わしている。図6, 7では、需要曲線が右方、左方にシフトした図が描かれているが、(41)はこれらの図の斜線部を各財について合計したものである。

1財の価格変化の場合と同様に C. V. を考えると

$$C. V. = \Delta M = \sum_i^n \sum_j^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \int_{p_j^1}^{p_j^2} \left[p_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right) u = u^1 d\pi_j dp_i \right. \\ \left. - \sum_i^n (p_i^1 - p_i^2) x_i^1 \right] \quad (42)$$

となる。ここで u^1 は価格変化前の効用水準である。スルツキー方程式から(42)は

$$\sum_i^n \sum_j^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \int_{p_j^1}^{p_j^2} \left[p_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} \right) d\pi_j dp_i - \sum_i^n (p_i^1 - p_i^2) x_i^1 \right] \quad (43)$$

とも表わすことができる。また、E. V. は

$$E. V. = \sum_i^n \sum_j^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \int_{p_j^1}^{p_j^2} \left[p_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right) u = u^2 d\pi_j dp_i + \sum_i^n (p_i^1 - p_i^2) x_i^2 \right. \\ \left. = \sum_i^n \sum_j^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \int_{p_j^1}^{p_j^2} \left[p_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} \right) d\pi_j dp_i + \sum_i^n (p_i^1 - p_i^2) x_i^2 \right] \quad (44)$$

となる。ここで u^2 は価格変化後の効用水準である。

(41)と(43)から、所得等価と補整的変差は

$$I. E. - C. V. = \sum_i^n \sum_j^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \int_{p_j^1}^{p_j^2} x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} d\pi_j dp_i \quad (45)$$

の関係にある。次に、 p^2 から p^1 の変化に対する所得等価を $I. E. '$ とすると

$$I. E. ' = - \sum_i^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} x_i dp_i = - \sum_i^n \sum_j^n \int_{p_i^1}^{p_i^2} \int_{p_j^1}^{p_j^2} p_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} d\pi_j dp_i \\ - \sum_i^n (p_i^1 - p_i^2) x_i^2 \quad (46)$$

で表わされる。したがって、価格上昇の際の所得等価と等価変差（価格下落の

際の) の関係は(44), (46)から,

$$E.V. - I.E.' = \sum_i^n \sum_j^n \left[\frac{p_i^1}{p_i^2} \right] \int_{p_j^2}^{p_j^1} x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} d\pi_j dp_i \quad (47)$$

となる。なお, C.V. および I.E.' は負の値をとるが, (45), (47) ではそれらの絶対値で考えている。

いま, 考察中の財がすべて上級財なら, つまり

$$\frac{\partial x_i}{\partial M} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (48)$$

であれば, (45)と(47)は常に非負の値をとる。また, 財の中に $\partial x_i / \partial M < 0$ となるような下級財が含まれていても, (45)と(47)はやはり非負になりうる。そして通常消費計画中には, 上級財の割合が相対的に高いと考えられるので, (45)と(47)の両式は, 常に非負としてよいだろう。

p^2 から p^1 への変化における補整的変差, 等価の変差を各々 C.V.', E.V.' とすると, それらは定義から, 価格下落の際の E.V., C.V. に等しい。従って, (45), (47)から

$$E.V.' = C.V. \leq I.E. \quad (49)$$

$$I.E.' \leq E.V. = C.V.' \quad (50)$$

の関係が得られる。

4. I.E. と I.E.' は, 一般には等しくないが, (40)が成立するときには I.E. と I.E.' の値が一意に決まり, 等しくなる。このときは

$$E.V.' = C.V. \leq I.E. = I.E.' \leq E.V. = C.V.' \quad (51)$$

が成立するであろう。そしてこの場合(45)と(47)が等しくなるなら, I.E. (I.E.') は C.V. と E.V. (E.V.' と C.V.') の中間の値をとり

$$I.E. = \frac{C.V. + E.V.}{2} = I.E.' = \frac{C.V.' + E.V.'}{2} \quad (52)$$

となる⁹⁾。さらに(45)と(47)がゼロになるとき

$$C.V. = I.E. = E.V. \quad (53)$$

がいえ¹⁰⁾。

5. 以上, 所得等価についてのいくつかの性質を考えてきたが, 所得等価

は、効用の変化を、変化しつつある所得の限界効用で評価した貨幣額であるので、マーシャルの定義した消費者余剰とは必ずしも同じものではない。所得等価が、財の価格変化によって生ずる効用変化に対応した貨幣額であることから、次のようなことが考えられるだろう。

第1に、異なる効用水準においては、一般に等しい効用差に対して等しい所得等価は対応しないが、M.U.I. が一定のときは、等しい所得等価が対応する。このことは(31)式から明らかであろう。第2は、この節でも前に述べた、I.E. の一意性についてである。多数財の価格が変化するとき、I.E. が一意に決まらないということは、言い換えれば、 λ の変化が一意でないことである。 λ の変化が価格変化の経路に依存して一意でないなら、同じ効用水準からの二つの効用変化には、その効用差と所得等価の大きさの間に逆転した関係が生ずることも考えられる。図8には、 u と $1/\lambda$ の関係が描かれている。(34)式からもわかるように、所得等価は $1/\lambda$ と u の間の面積で示される。第1の点は、この図から直ちにわかるだろう。第2の点は次のような場合生ずる。最初の効用水準を u^0 とし、価格変化(多数財)によって u^2 の効用水準が達成されたとしよう。このときの $1/\lambda$ の経路が BED であったとすると、所得等価は BEDGA で表わされる。これと同じ価格変化で経路の異なるものを考え、そのときの $1/\lambda$

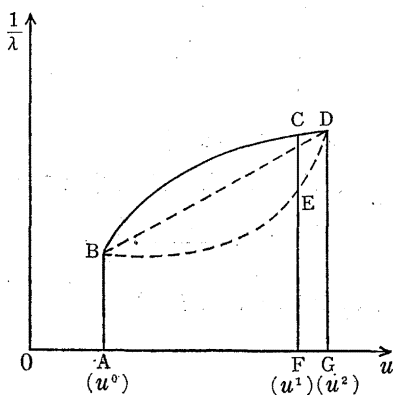


図 8

の経路が BCD となるものとしよう。このときは $u^1(<u^2)$ に対応する所得等価 BCEFA に対して, BCEFA > BEDGA となる可能性が存在するだろう。

ところで第2の点については, ある条件が満たされるときは解決される¹¹⁾。

(40)式が成り立つときは

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial M} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (54)$$

から

$$\frac{\partial x_i}{\partial M} / x_i = \frac{\partial x_j}{\partial M} / x_j \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (55)$$

がいえる。ところで

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = \lambda \frac{\partial x_i}{\partial M} + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial M} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (56)$$

だから, (55)と(56)から

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} / x_i = \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} / x_j \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (57)$$

となる。また

$$d\lambda = \sum_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} dp_i \quad (58)$$

だから, (57)式の値を k とおくと

$$\int d\lambda = \Delta\lambda = \sum_i \int_{p_i^1}^{p_i^2} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} d\pi_i = \sum_i \int_{p_i^1}^{p_i^2} k x_i d\pi_i \quad (59)$$

が得られる。この場合は λ の変化は一意に定まり, 第2の点で問題となった, 効用差と所得等価間での大小関係の逆転は起こらないだろう。

注

- 1) 本節は〔1〕, 〔4〕, 〔14〕の論文をもとにして展開されている。所得等価 (income equivalent) という言い方は〔1〕で用いられているが, 〔4〕では同じものをマーシャル測度 (Marshall measure) と呼んでいる。

- 2) 第2節の注の4)でも述べたが, この M は前出の I と同じものである。

- 3) バーンズ〔1〕の考えによる。
- 4) この仮定がない場合は分析がもっと複雑になるが、基本的論理には影響しない。
- 5) 〔14〕, p. 944 参照。
- 6) (36) 式のカッコ内は x の経路を示している。(37), (38) 式のカッコ内も同様。
- 7) C. V. は価格下落の際は負の値をとるが, I. E., E. V. との大小を比較しているときは, その絶対値で考えている。
- 8) ホテリング〔7〕参照。このことは本節 5. でも述べられる。
- 9) 他の条件が変わらずに 1 財の価格のみ変化する場合は

$$I. E. - C. V. = \int_{p^1}^{p^2} \int_{p^1}^{p^2} p^1 x \frac{\partial x}{\partial M} d\pi dp \quad (45')$$

$$E. V. - I. E' = \int_{p^1}^{p^2} \int_{p^2}^{p^1} p^2 x \frac{\partial x}{\partial M} d\pi dp \quad (47')$$

となり, 当該財が下級財でないなら, (45') と (47') は非負となる。また 1 財の価格のみ変化する場合を考えているから, $I. E. = I. E'$ で, しかも x の調整経路も等しいので

$$C. V. \leq I. E. \leq E. V. \quad (51')$$

$$I. E. = \frac{1}{2} (C. V. + E. V.) \quad (52')$$

が成立する。この財に関して所得効果が 0, つまり (45') と (47') が 0 になれば, (51') は等号で結ばれる。

- 10) すべての財に関して所得効果が 0, 即ち $\partial x_i / \partial M = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ であることは, (53) 式が成立するための十分条件である。
- 11) 〔4〕, pp. 74-75 参照。

結 び

これまでわれわれは, 1, 2, 3 節では消費者余剰について, 4 節では所得等価についてみてきたが, ここではそれらについての一応のまとめを行なってみたい。

われわれの主な関心は, ある 1 財に関して, その価格が下落したときに, 消費者余剰の変化分は, その財の需要曲線でいかに表わされるかということであった。所得の限界効用が一定の場合, 当該財に関して所得効果は 0 で, このとき消費者余剰はマーシャル測度で表わされるということが第 2 節からいえた。

第3節では、補整的変差と等価的変差の概念が導入された。消費者余剰として、補整的余剰と等価的余剰が考えられ、前者は補整的変差より小さく、後者は等価的変差より大きい。マーシャル測度は補整的変差と等価的変差の中間の値をとる。そしてこれら5つの値は、当該財に関して所得効果が小さいほど接近し、所得効果が0のときはすべて一致する。

第4節では、効用変化に対応する貨幣額を、所得等価の概念によって考えた。1財の価格変化を問題とする場合、所得等価は一意に決まり、それはマーシャル測度に等しい。この場合、第4節でも指摘したように、同じ効用水準では、効用変化と所得等価の間に大小関係の逆転は生じない。所得等価は、補整的変差と等価的変差の中間にあるが、当該財に関して所得効果が小さいほど、これら3つの値は接近し、所得効果が0のときは、3つの値は一致する。つまり、所得等価と消費者余剰は、所得効果が小さいほど近づき、所得効果が0のときは一致する。

結局、考察中の財に関して所得効果がごく小さい場合は、その財の価格変化によってもたらされる効用変化に対応した貨幣額——それが消費者余剰の概念であれ、所得等価の概念であれ——は、マーシャル測度すなわち、通常的需求曲線の左方と価格線で挟まれた矩形で表わしてよいだろう。

多数財の価格が変化する場合は、1財の価格変化の場合ほど、明示的な結果は得られない。通常は、価格変化による所得の限界効用(λ)の変化は小さく、経路差によるその変化もそんなに大きくないと考えられる。従って、第2の点で問題となった、効用変化と所得等価の間の逆転関係も、あまり考慮しなくてよいだろう。特に、所得の弾力性が等しいようないくつかの財の価格変化が生ずる場合、所得等価は一意と考えられる。このような場合、所得等価は効用変化に対応するアドミッシブルな貨幣額の表示と考えられ、それはシフトした需要曲線によって(図6, 7参照)一意に表わされるだろう。

以上、消費者余剰と需要曲線の関係についてみてきたが、これらの論議をもとにして、公共投資の便益分析の発展を今後の課題としたい。

〔参 考 文 献〕

- 〔1〕 Burns, M. E., "A Note on the Concept and Measure of Consumer's Surplus", *The American Economic Review*, vol. 63, June 1973.
- 〔2〕 Currie, J. M., J. A. Murphy and A. Schmitz, "The Concept of Economic Surplus and its Use in Economic Analysis", *The Economic Journal*, vol. 81, Dec. 1971.
- 〔3〕 Dupuit, J., "On the Measurement of the Utility of Public Works", originally in 1844, Translation in *International Economic Papers*, no. 2, 1952.
- 〔4〕 Foster, C. D. and H. L. I. Neuburger, "The Ambiguity of the Consumer's Surplus Measure of Welfare Change", *Oxford Economic Papers*, vol. 26, March 1974.
- 〔5〕 Hicks, J. R., *Value and Capital*, 2d. ed., 1946. (安井・熊谷訳『価値と資本』I・II, 1951).
- 〔6〕 ———, *A Revision of Demand Theory*, 1956. (早坂・村上訳『需要理論』, 1958).
- 〔7〕 Hotelling, H., "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates", *Econometrica*, vol. 6, July 1938.
- 〔8〕 今井・宇沢・小宮・根岸・村上『価格理論II』, 1971.
- 〔9〕 Marshall, A., *Principle of Economics*, 8th ed., 1920. (馬場啓之助訳『経済学原理』, 1966).
- 〔10〕 Mishan, E. J., *Cost-Benefit Analysis*, 1971.
- 〔11〕 Mohring, H. and M. Harwitz, *Highway Benefits: An Analytical Framework*, 1962. (松浦義満訳『道路経済学』, 1968).
- 〔12〕 Patinkin, D., "Demand Curves and Consumer's Surplus", in C. F. Christ et al., eds., *Measurement in Economics*, 1963.
- 〔13〕 Samuelson, P. A., "The Constancy of the Marginal Utility of Income", in O. Lange et al., eds., *Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Henry Schultz*, 1942.
- 〔14〕 Silberberg, E., "Duality and Many Consumer's Surpluses", *The American Economic Review*, vol. 62, Dec. 1972.