公共資本と最適フィスカル・ポリシー

細江, 守紀

https://doi.org/10.15017/3000007

出版情報：経済論究. 33, pp.117-134, 1975-02-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

公共資本と最適フィスカル・ポリシー

細　江　守　紀

I　序

本稿では，公共資本の存在下における，政府の最適政策を検討する。その際，その最適性は通常の最適成長論の枠組みに属するものとする。

まず，財は公共資本，民間資本および労働の投入によって生産され，その生産技術はただ一つ，即ち，すべての産出係数は固定されているものとする。したがって，公共資本と民間資本と労働の，生産の効率における最適結合比率は決っており，その比率は財の産出量には独立である。公共資本は，その存在量によって，生産の上限をたえず規制しているわけである。また公共資本と民間資本には土地その他の再生産不可能なものは除いてある。生産された財は，政府の所得税政策を通して，民間部門と公共部門に分割される。民間部門に残された財は，民間消費と民間投資にあてられるが，我々はその配分比が一定，即ち，固定貯蓄率の場合を考える。一方，政府の税収入は公共消費として消費者に便益を与えるものと，公共投資として生産者に便益を与えるものとに割りあてられる[1)]。なお，均衡予算を保持するものとする。最後に，政府は民間消費と公共消費に直接依存する消費者の効用を設定し，任意の経済状態（民間資本と公共資本によってきまる）から出発して，その効用を無限視野のもとで最大にするような課税政策と公共投資を決定する。

註 1) したがって，ここでは公共投資と公共消費は分離可能なものとしている。

II　モ　デ　ル

まず，記号の説明をしておく。

k_1：民間部門の一人当り資本ストック

k_2：政府部門の一人当り資本ストック

c_1：一人当り民間消費　a：産出ー労働係数

c_2：一人当り公共消費　b：産出ー公共資本係数

x：一人当り総産出量　π：労働人口成長率

s：国民所得に対する貯蓄比率

γ：両部門に共通の資本減耗比率

δ：時間割引率　：$\eta=\pi+\gamma$　：$\rho=\delta+\pi+\gamma$

t：所得税率，　$k=(k_1, k_2)$.

記号の節約のため，一単位の財の産出に必要な民間資本が一単位であるように単位を調整しておく。また，両部門の資本の減耗比率は等しいものとする[2)]。貯蓄率が一定であるから，一人当りの民間消費は次のように表わされる。

$$c_1=(1-s)(1-t)x. \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

我々のモデルは次のように定式化される。

$$\text{Maximize} \int_0^\infty e^{-\delta t}(c_1+Ac_2)dt \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

subject to

$$\dot{k}_1=s(1-t)x-\eta k_1, \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\dot{k}_2=tx-c_2-\eta k_2, \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$x\leq k_1,\quad x\leq a,\quad x\leq bk_2, \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$c_2\leq tx, \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$0\leq t\leq 1. \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

(2)におけるAは民間消費のウエイトを1とおいた場合の公共消費のウエイトで，政府の各消費需要に対する評価に依存している。(6)は政府が均衡予算を保持することを示している。また，公共消費と公共資本の便益は無料で提供され

るものとする。民間部門では与えられた（k_1, k_2）のもとで(5)の三つの条件を満す産出量を決定しなければならないが，生産の効率性から少なくとも一つの条件式について等号が成立すべきである。我々のモデルにおいては，政府は t，c_2 をコントロール変数とし，民間部門はxをコントロール変数とするのである。

さて，我々の問題に対してポントリャーギンの最大値原理が適用される。最適解が存在するための必要条件は時間に関して連続な二つの補助変数 $q_1(t)$, $q_2(t)$ が存在して次の三つの条件を満すことである。

(i) ハミルトニアン $H\equiv(1-s)(1-t)x+Ac_2+q_1\{s(1-t)\,x-\eta k_1\}+q_2(tx-c_2-\eta k_2)$ が x，t，c に関して制約条件(5)，(6)，(7)のもとで最大となる。

この条件の必要十分条件は次の(8)〜(11)を満す区分的連続な補助変数（$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)\geq 0$ が存在することである。

$$L_x=(1-s)(1-t)+q_1s(1-t)+q_2t-r_1-r_2-r_3+tr_4\leq 0, \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$L_t=-(1-s)x-q_1sx+q_2x+r_4x+r_5-r_6\leq 0, \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

$$Lc_2=A-q_2-r_4\leq 0, \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

$$r_1(k_1-x)=r_2(a-x)=r_3(bk_2-x)=r_4(tx-c_2)=r_5t=r_6(1-t)=0, \quad \cdots\cdots(11)$$

ここで $L\equiv(1-s)\,(1-t)x+q_1\,\{s(1-t)x-\eta k_1\}+q_2(tx-c_2-\eta k_2)+r_1(k_1-x)+r_2(a-x)+r_3(bk_2-x)+r_4(tx-c_2)+r_5t+r_6(1-t)$ である。

(ii) $$\dot{q}_1=\rho q_1-r_1, \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\dot{q}_2=\rho q_2-r_3b. \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

(iji) 横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t)e^{-\delta t}k_i(t)=0 \qquad i=1.2。 \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

我々は “phase” によって，コントロール変数（x, t, c_2）の特定の値の選択を意味するものとしょう。また，それらが(3)〜(6)を満すならば “feasible” と言い，(q_1, q_2, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) が(8)〜(13)を満すならば “efficient” と言うことにする。(8)と(11)から r_1 と r_3 はそれぞれ，民間資本ストック，公共資本ストックの潜在的レンタル率，また，r_2 は潜在的賃銀率と解釈される。し

たがって，⑿と⒀から，q_1, q_2 はそれぞれ民間，公共資本財の潜在的価格と解釈される。即ち，q_1, q_2 は自然利子率 ρ でレンタルの流れを資本還元したものとして評価される。なお，$q=(q_1,q_2)$, $(k,q)=(k_1,k_2,q_1,q_2)$ と定義しておく。

註 2) 両部門の減耗率の差は適当に小さくあれば，同率でなくても以下の議論にはさしつかえがない。

Ⅲ　レオンティエフ・斉一状態

まず，次の二つの仮定を与える。

仮定１　$b>\rho$,　$s>\rho$,　$A>(1-s)$.

この仮定から $b>\eta$, $s>\eta$ が成立するが，もし $b<\eta$, $s<\eta$ ならば，民間資本ストックと公共資本ストックはどんな課税政策をとっても共にゼロに減衰することを意味している。

仮定２　$\dfrac{1}{\rho}>\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{s}$.

生産技術における前提から b は民間資本財で評価した民間資本・公共資本の最適結合比率であるから，通常，$b>1$ と考えてさしつかえない。したがって，δ を s より適当に小さくとれば，この仮定は妥当であろう。

今，我々のモデルにおいて，両資本の完全利用と労働の完全雇用が維持される状態を考える。この時，直ちに，$x^*=a$, $k_1{}^*=a$, $k_2{}^*=\dfrac{a}{b}$ が成立する。したがって，$\dot{k}_1=0$, $\dot{k}_2=0$ が成立するが，(3)と(4)を考慮すれば，この状態における課税政策 t^* と公共消費 $c_2{}^*$ が一意にきまる。

$$t^*=\frac{s-\eta}{s}>0,\quad c_2{}^*=\left(1-\frac{\eta}{s}-\frac{\eta}{b}\right)a>0.$$

我々は，この状態をレオンティエフ・斉一状態と呼び，以後 L・S・状態と略称する。したがって，L・S・状態ではコントロール変数は一意の値をもつ。この L・S・状態では(8)～⑾と $c_2{}^*>0$, $t^*a>c_2{}^*$ から次の式が成り立つ。

$$r_4=0,\ r_5=0,\ r_6=0,$$

$$q_2=r_1+r_2+r_3, \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

$$(1-s)+q_1 s=q_2, \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

$$A=q_2. \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

したがって，L・S・状態では公共資本財の潜在価格が公共消費財の評価額に等しいことがわかる。また，その時の課税率は，課税率の増加による，民間消費の減少分と民間資本の減少分の価格評価の総和が，一方，増収による公共資本の増加分の価格評価に等しいように定められているわけである。次に，(16)と(17)により，$\dot{q}_1=0$, $\dot{q}_2=0$ が成り立つ。したがって，(12)と(13)により $r_1=\frac{\rho(A-(1-s))}{s}$, $r_3=\frac{\rho A}{b}$, $q_1=\frac{A-(1-s)}{s}$ が成立する。$q_1^*=\frac{A-(1-s)}{s}$, $q_2^*=A$ と定義しておく。また，(15)より $r_2=A(1-\frac{\rho}{b}-\frac{\rho}{s})+\frac{\rho(1-s)}{s}$. これは仮定2より正である。

さて，我々は以下において任意の初期資本構成から出発した最適経路がL・S・状態に達するをことを示す。

IV　Phase の可能性

この節ではさきの最適性の必要条件によって可能な phase について feasiblity と efficiency を検討する。

Phase I ：$r_1>0$, $r_2>0$, $r_3>0$.

この phase はL・S・状態にほかならない。いうまでもなく $r_4=r_5=r_6=0$ が成り立つ。

Phase II ：$r_1>0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4=0$.

ここでは $k_1=a=x$, $a\leq bk_2$. Phase II が維持されるためには $\dot{k}_1=0$, 即ち $t=\frac{s-\eta}{s}$が成立しなければならない。(9)と(11)より $(1-s)+q_1 s=q_2$ である。ここで c_2 について場合分けをする。まず $c_2>0$ の場合には，(10)より $q_2=A$. したがって，$\dot{q}_2=0$, 即ち，$r_3=\frac{\rho A}{b}$となるが，これは $r_3=0$ に矛盾。次に，$c_2=0$ の場合を考える。$s\dot{q}_1=\dot{q}_2$ であるから，(12)と(13)より $r_1=-(1-s)\rho$ とな

り，これは不適当である。以上のことより，phase II は efficient ではない。

Phase III：$r_1>0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4>0$.

ここでは，$k_1=a=x$, $a\leq bk_2$, $c=ta$. この phase が維持されるには $\dot{k}_1=0$, 即ち，$t=\dfrac{s-\eta}{s}$ である。また $c_2>0$ より $A=q_2+r_4$ が成り立つ。これと(9)より求まる $-(1-s)-sq_1+q_2+r_4=0$ から，$q_1=\dfrac{A-(1-s)}{s}>0$. したがって $\dot{q}_1=0$ から $r_1=\dfrac{\rho(A-(1-s))}{s}$. (8)より $r_2=A-\dfrac{\rho(A-(1-s))}{s}>0$ が求められる。したがって，phase III の微分方程式は次のようになる。

$$\dot{k}_1=0,\qquad \dot{q}_1=0,$$
$$\dot{k}_2=-\eta k_2,\qquad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

Phase IV－I：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3>0$, $r_4=0$, $c_2=0$.

ここでは，$bk_2=k_1=x\leq a$ が成り立つ。したがって，この phase が維持されるためには $b\dot{k}_2=\dot{k}_1$ が必要である。このことから(2)と(3)を使えば，$t=\dfrac{s}{s+b}$ が成立する。(8)と(9)から $(1-s)+sq_1=q_2$, $q_2=r_1+r_2$. この二つと $s\dot{q}_1=\dot{q}_2$ から，r_1 と r_3 がきまる。$r_1=\dfrac{sb}{s+b}q_1+\dfrac{(1-s)(b-\rho)}{s+b}>0$, $r_3=\dfrac{sq_2}{s+b}+\dfrac{\rho(1-s)}{s+b}>0$.

したがって，phase IV－I の微分方程式は次のようになる。

$$\dot{k}_1=b\dot{k}_2,\qquad s\dot{q}_1=\dot{q}_2,$$
$$\dot{k}_2=\frac{s}{s+b}k_1-\eta k_2,\qquad \dot{q}_2=\rho q_2=b\left[\frac{sq_2}{s+b}+\frac{\rho(1-s)}{s+b}\right].$$

Phase IV－II：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3>0$, $r_4=0$, $c_2>0$

$c_2>0$ より $A=q_2$ が成り立つ。$q_1=\dfrac{A-(1-s)}{s}$ から $\dot{q}_1=0$, $\dot{q}_2=0$ だから，$r_1=\dfrac{S\{A-(1-s)\}}{S}$, $r_3=\dfrac{qA}{b}$ が成り立つが，一方(8)から $q_2=r_1+r_3$ であり，矛盾である。即ち，phase IV－II は efficient ではない。

Phase V：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3>0$, $r_4>0$.

ここでは，$k_1=x=bk_2\leq a$ が成立する。この phase を維持するためには，$\dot{k}_1=b\dot{k}_2$ が成立しなければならない。$tx=c_2$ を考慮すれば，このことより $t=\dfrac{s-\eta}{s}$ が成り立つ。次に，(8)，(9)，(10)より $q_2+r_4=r_1+r_3$, $A=q_2+r_4$, $-(1-s)-$

$sq_1+q_2+r_4=0$ が成り立ち，$r_1=\dfrac{\rho\{A-(1-s)\}}{s}$，$r_3=A-\dfrac{\rho\{A-(1-s)\}}{s}$ がわかる。したがって，この phase での微分方程式は次のようになる。

$$\dot{k}_1=b\dot{k}_2, \qquad \dot{q}_1=0,$$
$$\dot{k}_2=-\eta k_2, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2-Ab+\frac{\rho b\{A-(1-s)\}}{s}.$$

Phase VI－I：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_4=0$, $c_2>0$, $t=1$.

ここでは，$bk_2=x=a\leq k_1$ が成り立つ。$\dot{k}_2=0$ から $c_2=a(1-\frac{\eta}{b})>0$ がでてくる。また，この phase での微分方程式は次のようになる。

$$\dot{k}_1=-\eta k_1, \qquad \dot{q}_1=\rho q_1,$$
$$\dot{k}_2=0, \qquad \dot{q}_2=0.$$

Phase VI－II：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3>0$, $r_4=0$, $c_2>0$, $t\in(0,1)$.

この phase は，$A=q_2$, $1-s+sq_1=q_2$, $s\dot{q}_1=\dot{q}_2$ から直ちに efficient でないことがわかる。

Phase VI－III：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3>0$, $r_4=0$, $c_2=0$.

ここでは，$\dot{k}_2=0$ より $t=\frac{\eta}{b}$ が成立する。また，$1-s+sq_1=q_2$, $q_2=r_2+r_3$, $s\dot{q}_1=\dot{q}_2$ より，$r_3=\dfrac{\rho(1-s)}{b}$, $r_2=q_2-\dfrac{\rho(1-s)}{b}$ がわかる。したがって，この phase での微分方程式は次のようになる。

$$\dot{k}_1=s\left(1-\frac{\eta}{b}\right)a-\eta k_1, \quad s\dot{q}_1=\dot{q}_2,$$
$$\dot{k}_2=0, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2-\rho(1-s).$$

Phase VII：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3>0$, $r_4>0$.

この phase では $\dot{k}_2=-\eta k_2$ が成り立つが，一方，$k_2=\frac{a}{b}$ で，この phase が維持されるには $\dot{k}_2=0$ でなければならない。これは矛盾であり，したがって，この phase は feasible でない。

Phase VIII－I：$r_1=0$, $r_2=0$, $r_3>0$, $r_4=0$, $c_2=0$, $t=1$.

ここでは，(8), (9), (10)より，$q_2=r_3$, $\{-(1-s)-q_1s+q_2\}x=r_6$, $A\leq q_2$ が成り立ち，微分方程式は次のようになる。

$\dot{k}_1 = -\eta k_1,$ $\dot{q}_1 = \rho q_1,$

$\dot{k}_2 = (b-\eta)k_2,$ $\dot{q}_2 = (\rho - b)q_2 < 0.$

Phase Ⅷ－Ⅱ $r_1=0$ $r_2=0,$ $r_3>0,$ $r_4=0,$ $c_2=0,$ $t\epsilon(0,1).$

ここでは，$s\dot{q}_1=\dot{q}_2,$ $\dot{q}_1=\rho q_1,$ $\dot{q}_2=(\rho-b)q_2$ より，efficient でないことがわかる。

Phase Ⅷ－Ⅲ： $r_1=0,$ $r_2=0,$ $r_3>0,$ $r_4=0,$ $c_2=0,$ $t=0.$

ここでは，(8)，(9)，(10)より，$(1-s)+sq_1=r_3,$ $\{-(1-s)-q_1s+q_2\}x+r_5\leq 0,$ $A\leq q_2$ が成立する。

$\dot{k}_1 = sbk_2 - \eta k_1,$ $\dot{q}_1 = \rho q_1,$

$\dot{k}_2 = -\eta k_2,$ $\dot{q}_2 = \rho q_2 - b(1-s+sq_1).$

Phase Ⅷ－Ⅳ： $r_1=0,$ $r_2=0,$ $r_4=0,$ $c_2>0.$

この phase では，$t=1,$ $t\epsilon(0,1),$ $t=0$ の場合に分けて考えれば，各場合につき efficient でないことが簡単にわかる。

Phase Ⅸ－Ⅰ： $r_1=0,$ $r_2=0,$ $r_3>0,$ $r_4>0,$ $c_2>0,$ $t=1.$

(8)，(10)より，$A=q_2+r_4=r_3$ が成り立つ。

$\dot{k}_1 = -\eta k_1,$ $\dot{q} = \rho q_1,$

$\dot{k}_2 = -\eta k_2,$ $\dot{q}_2 = \rho q_2 - bA.$

Phase Ⅸ－Ⅱ： $r_1=0,$ $r_2=0,$ $r_3>0,$ $r_4>0,$ $c_2>0,$ $t\epsilon(0,1).$

この場合は，efficient でないことが容易にわかる。

Phase Ⅸ－Ⅲ： $r_1=0,$ $r_2=0,$ $r_3>0,$ $r_4>0,$ $c_2=0,$ $t=0.$

(8)，(9)，(6)より，$1-s+sq_1=r_3,$ $(-r_3+q_2+r_4)x+r_4\leq 0,$ $A\leq q_2+r_4$ が成り立つ。

$\dot{k}_1 = sbk_2 - \eta k_1,$ $\dot{q}_1 = \rho q_1,$

$\dot{k}_2 = -\eta k_2,$ $\dot{q}_2 = \rho q_2 - b(1-s+sq_1).$

なお，phase Ⅸ では $r_4>0$ であるから，$c_2=0,$ $t=1$ の場合，$c_2=0,$ $t\epsilon(0,1)$ の場合はありえない。

Phase Ⅹ－Ⅰ： $r_1=0,$ $r_2>0,$ $r_3=0,$ $r_4=0,$ $c_2=0,$ $t=0.$

(8), (9), (10)より，$A \leq q_2$, $-(1-s)-q_1 s+r_2=0$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2\}x+r_4 \leq 0$ が成り立つ。また，$x=a \leq k_1$, $a \leq bk_2$ が成り立つ。

$$\dot{k}_1=sa-\eta k_1, \qquad \dot{q}_1=\rho q_1,$$
$$\dot{k}_2=-\eta k_1, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

Phase X－II：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $c_2=0$, $t=1$.

(8), (9), (10)より，$A \leq q_2$, $q_2=r_2$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2\}x-r_6=0$ が成り立つ。

$$\dot{k}_1=-\eta k_1, \qquad \dot{q}_1=\rho q_1,$$
$$\dot{k}_2=a-\eta k_2, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

Phase X－III：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $t \in (0,1)$.

この phase では $1-s+sq_1=q_2$，したがって $s\dot{q}_1=\dot{q}_2$ より，efficient ではない。

Phase X－IV：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $c_2>0$.

この phase では，$c_2>0$ より，$A=q_2$ となるが，これは $\dot{q}_2=\rho q_2$ と矛盾する。即ち，efficient ではない。

Phase XI－I：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4>0$, $c_2>0$, $t=1$.

まず，$x=a \leq k_1$, $a \leq bk_2$ が成り立つ。(8), (9), (10)より，$q_2+r_4=r_2$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2+r_4\}x-r_6=0$, $A=q_2+r_4$ である。

$$\dot{k}_1=-\eta k_1, \qquad \dot{q}_1=\rho q_1,$$
$$\dot{k}_2=-\eta k_2, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

Phase XI－II：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4>0$, $c_2>0$, $t \in (0,1)$.

この場合，$A=q_2+r_4$, $-(1-s)-sq_1+q_2+r_4=0$, $\dot{q}_1=\rho q_1$ は矛盾である。

Phase XI－III：$r_1=0$, $r_2>0$, $r_3=0$, $r_4>0$, $c_2=0$, $t=0$.

(8), (9), (10)より，$1-s+sq_1=r_2$, $\{-(1-s)+sq_1+q_2+r_4\}a+r_5 \leq 0$, $A \leq q_2+r_4$ が成り立つ。

$$\dot{k}_1=sa-\eta k_1, \qquad \dot{q}_1=\rho q_1,$$
$$\dot{k}_2=-\eta k_2, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

なお，phase XI では $c_2=0$ かつ $t \in (0,1)$ の場合とか $c_2=0$ かつ $t=1$ の

場合は，$r_4>0$ からありえない。

Phase XII－I：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $c_2=0$, $t=0$.

ここでは，$x=k_1\leq a$, $k_1\leq bk_2$, $1-s+sq_1=r_1$, $A\leq q_2$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2\}x+r_5\leq 0$ が成り立つ。

$$\dot{k}_1=(s-\eta)k_1, \quad \dot{q}_1=\rho q_1-\{sq_1+(1-s)\},$$

$$\dot{k}_2=-\eta k_2, \quad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

Phase XII－II：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $c_2=0$, $t\epsilon(0,1)$.

この場合は，$(1-s)+sq_1=q_2$, $q_2=r_1$ が成り立つが，q_1, q_2 に関する微分方程式を考慮すれば，この phase は efficient でないことがわかる。

Phase XII－III：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $c_2=0$, $t=1$.

この phase では $q_2=r_1$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2\}x-r_6=0$, $A\leq q_2$ が成り立つ。

$$\dot{k}_1=-\eta k_1, \quad \dot{q}_1=\rho q_1-q_2,$$

$$\dot{k}_2=k_1-\eta k_2, \quad \dot{q}_2=\rho q_1.$$

Phase XII－IV：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4=0$, $c_2>0$.

この phase は t の値のいかんにかかわりなく，efficient でないことが容易にわかる。

Phase XIII－I：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4>0$, $c_2>0$, $t=1$.

まず，$k_1=x\leq a$, $x\leq bk_2$ が成り立ち，(8), (9), (10)より，$q_2+r_4=r_1$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2+r_4\}x-r_6=0$, $A=q_2+r_4$ がわかる。

$$\dot{k}_1=-\eta k_1, \quad \dot{q}_1=\rho q_1-A,$$

$$\dot{k}_2=-\eta k_2, \quad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

Phase XIII－II：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4>0$, $c_2>0$, $t\epsilon(0,1)$.

この場合は，$q_2+r_4=r_1$, $-(1-s)-q_1s+q_2+r_4=0$, $A=q_2+r_4$, それに，$\dot{q}_1=\rho q_1-r_1$ から efficient でないことがわかる。

Phase XIII－III：$r_1>0$, $r_2=0$, $r_3=0$, $r_4>0$, $c_2=0$, $t=0$.

この場合，$1-s+sq_1=r_1$, $\{-(1-s)-sq_1+q_2+r_4\}x+r_5\leq 0$, $A\leq q_2+r_4$ が成立する。

$$\dot{k}_1=(s-\eta)k_1, \qquad \dot{q}_1=\rho q_1-(1-s+sq_1),$$
$$\dot{k}_2=-\eta k_2, \qquad \dot{q}_2=\rho q_2.$$

以上で可能な phase を残らず示したが，ここで，(k_1, k_2) 平面，(q_1, q_2) 平面を次のように分割しよう。（図—I，図—II）

$R_1=\{k_1, k_2)：k_1\leq bk_2,\ k_1\leq a\}$,

$R_2=\{(k_1, k_2)：k_1\geq a,\ \ k_2\geq a\ \ b\}$,

$R_3=\{(k_1, k_2)：k_1\geq bk_2\ \ k_2\leq a\ \ b\}$,

$T_1=R_1\cap R_2,\quad T_2=R_2\cap R_3,\quad T_3=R_3\cap R_1$,

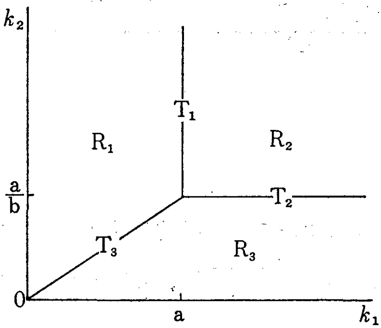
$S_1=\{(q_1, q_2)：q_2\geq 1-s+sq_1,\ \ q_2\geq A\}$,

$S_2=\{(q_1, q_2)：q_1\leq \dfrac{A-(1-s)}{s},\ \ q_2\leq A\}$,

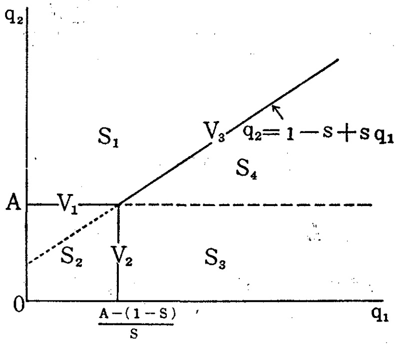
$S_3=\{(q_1, q_2)：q_1\geq \dfrac{A-(1-s)}{s},\ \ q_2\leq A\}$,

$S_4=\{q_1, q_2)：q_2\leq 1-s+sq_1,\ \ q_2\geq A\}$,

$V_1=S\cap S_2,\ \ V_2=S_2\cap S_3,\ \ V_3=S_4\cap S_1,\ \ S_5=S_3\cap S_4$.



図—I

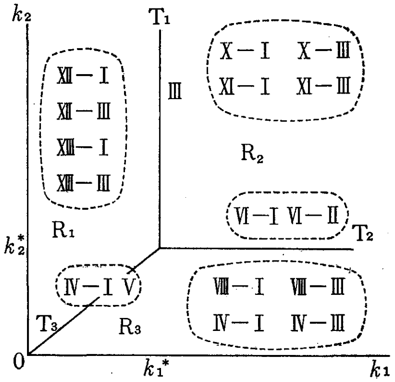


図—II

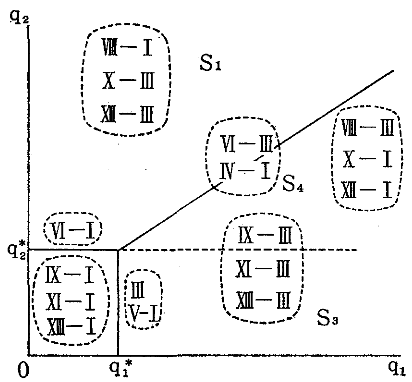
これまでの phase の分析から，次の補題が成り立つ。

補題 I　R_1 においては，phase XII－I，XII－III，XIII－I，XIII－III が feasible である。R_2 においては，phase X－I，X－III，XI－I，XI－III が feasible である。R_3 においては，phase VIII－I，VIII－III，IX－I，IX－III が feasible である。また，T_1 では phase III，T_2 では phase VI－I と VI－III，T_3 では phase IV－I と V がそれぞれ feasible である。

補題II　S_1 においては，phase VIII−I，X−III，XII−III は efficient である。S_2 においては，phase IX−I，XI−−I，XIII−I は efficient である。S_4 においては，phase VIII−III，X−I，XII−I が efficient である。S_5 においては，phase IX−III，XI−III，XIII−III が efficient である。また，V_1 では phase VI−I，V_2 では phase III とV，V_3 では phase IV−I とVI−III がそれぞれ efficient である。(図−III，IVを参照)



図−III



図−IV

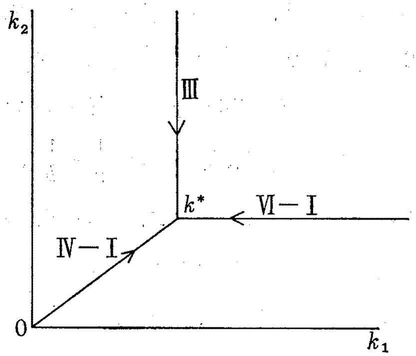
V　最適径路の構成

さて，$L \cdot S$・状態への径路の到達可能性について次の補題が成り立つ。なお，$k^*=(k_1^*, k_2^*)=\left(a, \frac{a}{b}\right)$，$q^*=(q_1^*, q_2^*)=\left(\frac{A-(1-s)}{s}, A\right)$ と定義しておく。

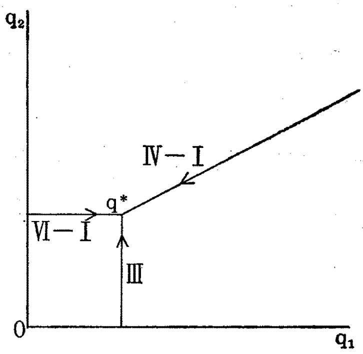
補題III　T_1，T_2，T_3 の任意の民間・公共資本ストック構成から出発する径路は，$q_1(0)$，$q_2(0)$ を適当にとれば，それぞれ phase III，VI−I，IV−I によってのみ $L \cdot S$・状態に到達できる。さらにその到達時間は有限となる。

(証明) T_1 において feasible な phase はIIIだけである。この phase での k_2 と q_2 の微分方程式は，$\dot{k}_2=-\eta k_2$, $\dot{q}_2=\rho q_2$ であるから，T_1 における任意の点 $(a, k_2(0))$ から出発する径路は phase III によって，適当な $\left(\frac{A-(1-s)}{s},\right.$

$q_2(0)\Big)$を選べば，有限時間後にはL・S・状態（(k^*, q^*)）に到達する。この$q_2(0)$ は $k_2(0)$ の関数とみなして，$q_2(0)=q_2(k_2(0))$ と書くことができる。次に，T_2 においては phase VI－I と VI－III が feasible である。Phase VI－III では，$\dot{k}_1=s\left(1-\frac{\eta}{b}\right)a-\eta k_1$ であり，定常解は $(k_1, k_2)=\left(as\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{b}\right), \frac{a}{b}\right)$で，しかも，仮定2から $as\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{b}\right)>a$ である。したがって，この phase ではL・S・状態には到達しない。また，その定常解に収束するが，この径路は $\dot{q}_1=\rho q_1$ より q_i が無限大に発散し，横断性の条件を満さないから最適径路ではない。Phase VI－I では $\dot{k}_1=-\eta k_1$, $\dot{q}_1=\rho q_1$ であるから，T_2 の任意の点$\left(k_1(0), \frac{a}{b}\right)$から出発する径路は $q(0)=(q_1(0), A)$ を適当にとれば，L・S・状態に有限時間で到達できる。この $q_1(0)$ は $k_1(0)$ の関数とみなせるから $q_1(0)=q_1(k_1(0))$ と書ける。なお，Phase VI－I と VI－III は efficient な領域が互いに異なるから，互いに接続することはできない。最後に，T_3 においては phase IV－I と V が feasible である。Phase V では $\dot{k}_1=b\dot{k}_2$, $\dot{k}_2=-\eta k_2$ より，T_3 の任意の点から出発する径路はゼロに収束するが，この径路はL・S・状態より明らかに劣る。Phase IV－I では $t=\frac{s}{s+b}$ より $\dot{k}_1=\left(\frac{sb}{s+b}-\eta\right)k_1>0$, $\dot{k}_1=b\dot{k}_2$ である。したがって，k^*に到達できる。また，この phase では $\dot{q}_2=\left(\rho-\frac{sb}{s+b}\right)q_2-\frac{b\rho(1-s)}{s+b}$ であるが，仮定2より $\dot{q}_2<0$ である。このことから，T_3 の任意の点 $(k_1(0), k_2(0))$ から出発する径路は，phase IV－I によって，V_3 上の適当な点を $q(0)=(q_1(0), q_2(0))$ ととれば，L・S・状態に到達できる。この $q(0)$ は $k_1(0)$ の関数とみなせるから $q(0)=q(k_1(0))=(q_1(k_1(0)), q_2(k_1(0)))$ と書くことができる。なお，phase IV－I とVは互いに接続できないことは，その efficiency を考慮すれば容易にわかる。図－V と図－VIは以上の有様を示している。（$Q.E.D$）



図—V



図—VI

さて，最適径路は次の定理において構成される。

定理 Int R_1[3] においては，phase XIII－III，int R_2 においては phase XI－I，int R_3 においては phase VIII－I，T_1 においては phase III，T_2 においては phase VI－I，T_3 においては phase IV－I をそれぞれ採用すれば，任意の初期民間・公共資本ストック構成 $(k_1(0),\ k_2(0))$ から出発する径路は，$(q_1(0),\ q_2(0))$ を適当にとることによって，L・S・状態へ有限時間で到達でき，その径路が最適径路である。

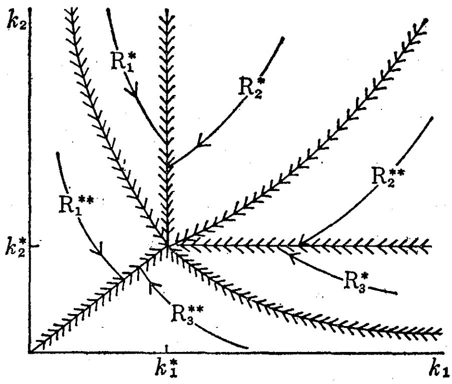
（証明） R_1 内で phase XIII－III によって T_1 に達することができる領域を $R_1{}^*$ とする。即ち，$R_1{}^*$ の任意の点 $(k_1(0),\ k_2(0))$ から phase XIII－III でスタートすればある時間 $\bar{t}$ 後に T_1 のある点 $(a,\ k_2(\bar{t}))$ に到達する。そして $(q_1(\bar{t}),\ q_2(\bar{t}))$ が補題IIIで求めた $\left(\dfrac{A-(1-s)}{s},\ q_2(k_2(\bar{t}))\right)$ になるように初期時点での $q(0)=(q_1(0),\ q_2(0))$ を決めれば，$R_1{}^*$ から出発する径路は，phase XIII－III → phase III によってL・S・状態に到達できる。こうした$q(0)$が決められることは phase XIII－III での $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{q}$ の微分方程式から明らかである。Phase XII－III，と XIII－I は T_1 に到達することができない。また phase XII－I は T_1 に到達することはできるが，到達点では $q(t)\ \epsilon V_2$ でなければならず，S_4 で efficient な phase XII－I は接続できない。次に，R_2 内で phase XI－I によって T_1 に達することができる領域を $R_2{}^*$ とする。したがって，$R_2{}^*$ の任意の点 $(k_1(0),\ k_2(0))$ から phase XI－I で出発すれば

ある時間 $\bar{t}$ 後に T_1 のある点 $(a, k_2(\bar{t}))$ に到達する。そして $(q_1(\bar{t}), q_2(\bar{t}))$ が補題Ⅲで求めた $\left(\frac{A-(1-s)}{s}, q_2(k_2(\bar{t})\right)$ となるように初期時点での $q(0)=(q_1(0), q_2(0))$ を決めれば，R_2^* からスタートする径路は phase XI－I → phase Ⅲ によって L・S・状態に到達できる。この $q(0)$ は phase XI－I の q_i の微分方程式が $\dot{q}_i=\rho q_i$ であることから求めることができる。Phase X－I と XI－Ⅲ とは T_1 に達することができない。また，phase X－Ⅲ は T_1 に到達できるが，この phase は S_1 で efficient であるから phase Ⅲ に接続できない。

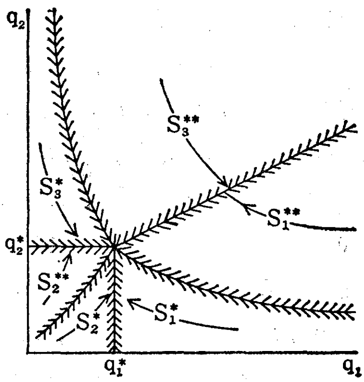
次に，T_2 に到達するケースを考える。R_2 内で phase XI－I によって T_2 に達することができる領域を R_2^{**} とする。phase XI－I の k_i の微分方程式から $R_2=R_2^* \cup R_2^{**}$，かつ，$R_2^* \cap R_2^{**}$ の点は直接に k^* に到達する。R_2^{**} の任意の点 $(k_1(0), k_2(0))$ から phase XI－I でスタートすればある時間 $\bar{t}$ 後に T_2 上のある点 $\left(k_1(\bar{t}), \frac{a}{b}\right)$ に到達する。その時点で $(q_1(\bar{t}), q_2(\bar{t}))$ が補題Ⅲで求めた $(q_1(k_1(\bar{t})), A)$ となるように初期点での $q(0)=(q_1(0), q_2(0))$ を決めれば，R_2^{**} から出発する径路は phase XI－I ⟶ phase VI－I によって L・S・状態に到達する。この $q(0)$ の決定は phase XI－I の q_i の微分方程式の形から明らかである。Phese X－Ⅲ では T_2 に到達できない。また，phase X－I，XI－Ⅲ では T_2 に到達はできるが，それぞれの efficient な領域は S_4，S_5 であり，phase VI－I の V_1 には接続できない。R_3 内で phase Ⅷ－I によって T_2 に到達できる領域を R_3^* とする。即ち，R_3^* の任意の点 $(k_1(0), k_2(0))$ から phase Ⅷ－I でスタートすればある時間 $\bar{t}$ 後に T_2 のある点 $\left(k_1(\bar{t}), \frac{a}{b}\right)$ に到達する。その時点での $(q_1(\bar{t}), q_2(\bar{t}))$ が補題Ⅲ で求めた $(q_1(k_1(\bar{t})), A)$ となるように初期時点での $q(0)=(q_1(0), q_2(0))$ を決めれば，R_3^* から出発する径路は phase Ⅷ－I → phase VI－I によって L・S・状態に有限時間で到達できる。$q(0)$ が実際，そのように決められることは容易にわかる。Phase Ⅷ－Ⅲ，Ⅸ－I，Ⅸ－Ⅲ は T_2 へ達することができない。特に，phase Ⅷ－Ⅲ とⅨ－Ⅲ は k_i がゼロに収束する。この径路は phase V と同じく L・S・状態より明らかに劣っている。

次に，R_3 内で phase Ⅷ－Ⅰ によって T_3 に到達できる領域を R_3^{**} とする。定義から，R_3^{**} の任意の点 $(k_1(0),\ k_2(0))$ から phase Ⅷ－Ⅰ でスタートすればある時間 $\bar{t}$ 後に T_3 の点 $(k_1(\bar{t}),\ k_2(\bar{t}))$ に到達する。$\bar{t}$ で $(q_1(\bar{t}), q_2(\bar{t}))$ が補題Ⅲで求めた $(q_1(k_1(\bar{t}),\ q_2(k_1(\bar{t}))$ に一致するように初期時点での $q(0)=(q_1(0),\ q_2(0))$ を決めれば，R_3^{**} からでた径路は phase Ⅷ－Ⅰ→phase Ⅵ－Ⅰ によって T_3 をへて $L\cdot S\cdot$状態に到達する。$q(0)$ がこのように決められるのは前と同様である。また，phase Ⅲ－Ⅰ のKの微分方程式より $R_3=R_3^{*}\cup R_3^{**}$ であり，$R_3^{*}\cap R_3^{**}$ の点は直接に k^* に到達する。なお，phase Ⅷ－Ⅲ，Ⅸ－Ⅲ は T_3 へ到達できない。Phase Ⅸ－Ⅰ は T_3 へ到達できるが，その efficient な領域は S_2 であり phase Ⅵ－Ⅰ とは接続できない。最後に R_1 内で phase ⅩⅢ－Ⅲ によって T_3 に到達でき，しかも適当な $q(0)$ をとることで，phase Ⅳ－Ⅰ に切り替えて，$L\cdot S\cdot$状態に到達できる領域 R_1^{**} が存在する。証明は略す。以上によって，最適径路の構成は終った。(**Q. E. D**)

図－Ⅶと図－Ⅷは最適蓄積径路と，対応する価格径路を表わしている。初期資本ストック構成$k(0)=(k_1(0), k_2(0))$に対して最適径路では，ある$q(0)=(q_1(0), q_2(0))$ が対応しているが，$k(0)$ が R_i^{*} と R_i^{**} $(i=1, 2, 3)$ のすべてをつくすことによってできる，対応する $q(0)$ の集合をそれぞれ S_i^{*} と $S_i^{**}(i=1, 2, 3)$ とする。図－Ⅷでは S_i^{*}，S_i^{**} を書き込んでいる。



図—Ⅶ



図—Ⅷ

註 3) IntR_i（$i=1,2,3$）は正象眼に関する R_i の内部を表わす。

VI 結　語

定理より我々は以下の事がいえる。まず，R_1 の点から初期資本構成が出発する場合は，公共資本と労働が過剰にあるわけで，逆にいえば民間資本が不足しているので，課税せず[4] 民間資本の蓄積を進める。(Phase XIII－III)　初期資本構成の状態によって，即ち $R_1{}^*$ にあるか $R_1{}^{**}$ にあるかに応じて，T_1 か T_3 かに到達する。T_1 では公共資本のみ過剰であり，k_1 を一定に保つように課税して $\left(t=\dfrac{s-\eta}{s}\right)$，税収は全部を公共消費につぎこむという政策 (Phase III) により公共資本の過剰は解消し，$L\cdot S\cdot$状態に到達する。また T_3 では労働のみが過剰で，$t=\dfrac{s}{s+b}$，$c_2=0$ という公共・民間資本をともに伸ばす政策 (Phase VI－I) をとって労働の過剰を解消し，$L\cdot S\cdot$状態に到達させる。次に，R_2 に初期資本構成があるときは，民間資本と公共資本がともに過剰なのであるから，$t=1$，$c_2=ta$ という政策 (Phase XI－I) をとって両部門の k_1，k_2 を減らし，もっぱら公共消費の増加にその分をあてる。この政策を通じて，径路は T_1 か T_2 かに到達する。T_2 では民間資本のみ過剰になっているのだから，$t=1$ とおき，かつその税収を適当な割合で公共投資と公共消費に分割する ($b-\eta:\eta$) phase VI－I により民間資本の過剰を解消し，$L\cdot S\cdot$状態に到達させる。最後に，R_3 に初期資本構成がある場合は公共資本が不足しているわけで，$t=1$，$c_2=0$ で公共資本の拡大に全力をそそぐ。その結果，初期資本構成の位置により T_2 か T_3 に到達する事になる。

註 4) われわれのモデルでは無課税，全課税，公共消費ゼロの状態も許しているが適当な制約条件を加えることでこうした極端な場合はまぬがれる。

参 考 文 献

〔1〕 Arrow, K. J., and M. Kurz, Public Investment, the Rate of Return and Optimal Fiscal Policy, Baltimore : The Tohns Hopkins Press, 1970.

〔2〕 Bose, S., "Optimal Growth in a Nonshiftable Capital Model," Econometrica, Vol. 38, No. 1, (January, 1970).