

市場均衡の安定性：模索過程と非模索過程

是枝，正啓

<https://doi.org/10.15017/3000005>

出版情報：経済論究. 33, pp. 51-78, 1975-02-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：



市場均衡の安定性

— 模索過程と非模索過程 —

是 枝 正 啓

目 次

序	II. 非模索過程の安定性
I. 模索過程の安定性	II, 1. 粗代替性のもとでの非模索過程の安定性
I, 1. モデルの構成	II, 2. ハーン・プロセス
I, 2. 粗代替性のもとでの安定性	II, 3. エッジワース・プロセス
I, 3. 顕示選好の弱公理と安定性	結 語
I, 4. 不安定の例	

序

経済における安定性の問題とは、何らかの経済的要因によって、価格が均衡価格、即ち、需要と供給を一致させる価格から乖離したとき、均衡価格に復帰できるか否かということである。この問題は、ワルラス〔20〕の一般均衡論に端を発する。ワルラスは、一般均衡論において、経済諸量の均衡値、したがって、すべての財の需要と供給の均衡量は、連立方程式の解として同時に決定されると考え、この均衡値が実際に求められるための条件を、一財が他の財の *numéraire* として機能する二財市場について与えたのである。その条件とは、ある価格のもとで、需要が供給を上まわるとき、その差を超過需要、逆のとき超過供給と呼ぶならば、超過需要の発生は価格を引き上げる作用を及ぼし、超過供給の発生は逆に作用するということである。また、このことは、その市場に参加している需要者と供給者が価格の変動に対して瞬間的に反応すると想定すれば、価格の変動に対応して逆に需要と供給が決まるといってもよい。ワルラスは、市場においては实际的に競争の機構を通じて、超過需要および超過供給が発生し、その作用によって価格の調整が行われ、均衡価格が求められていくのだとした。このワルラス的調整過程は、「模索」(*tâtonnement*)といわれ、具体的に、次のような過程であると解釈することができる。即ち、ある想定された「レフェリー」が、ある価格を提示し、その価格に対する需要と供給を計

算し、需要と供給の差に応じて価格の調整を行なう。そして、新しい価格を提示して、新しい需要と供給を求める。なお、需要と供給が一致するまでこの操作を続けるが、その過程中取引は一切認められず、均衡にいたってはじめて認められる、といった予備的な試行錯誤の過程である。

ヒックス〔8〕は、ワルラスによって与えられた二財市場の場合を拡張して、多数財市場の安定条件を求めた。しかし、ヒックスの安定条件は、市場の動学的調整過程を陽表的に考慮していないために、即ち、価格の均衡価格からの乖離が生じるとき、価格や需要量、供給量の時間を通じての変化を決定する明示的な枠組を全くもたないために、本質的には静学的なものであり、安定条件としては不十分であった。この欠陥を埋めるために、サムエルソン〔15〕は、市場の調整過程を微分方程式や定差方程式などの動学的方程式で表わすことによって動学化をはかったのであった。しかし、サムエルソンを中心とする安定分析は、多くの場合、価格の変動が小さい場合、即ち、価格の均衡価格からの乖離がその近傍に限られる場合の主として数学的な安定条件を求める局所的安定分析 *local stability analysis* であった。したがって、経済に大きな攪乱が生じたときには、局所的安定分析は適用できないという問題が残されたのである。

アロー・ハーウィツ〔1〕を契機として展開された大域的安定性 *global stability* の研究では任意の初期点から出発する価格がいずれかの均衡点に収束するか否かにまで議論が広げられ、これによって、この問題に解答が与えられる一方、超過需要に関する経済学的諸性質がたくみに導入された。ただ、市場における日々の最初の取引は、均衡価格からそれほど離れてない価格、例えば、前日の均衡価格に近い均衡価格から始まると考えられるから、大域的安定性を求めることは必ずしも局所的安定性よりも望ましいとは限らない。しかし、均衡が一意ならば、大域的安定性は局所的安定性を意味するが逆は成立しないという点からは、大域的安定性は局所的安定性よりも一般的である。このような意味を含めて、ワルラス的模索過程の安定性の研究は、数学的には一般化、動学化され、経済学的には、ワルラス法則や超過需要関数の価格に関する 0 次同次性などの経済学的諸性質が導入される方向をたどるとともに、更に、現在で

は、均衡に到達する過程中でも取引が認められる、より現実の市場の状況に近いと考えられる非模索過程 *non-tâtonnement process* の大域的安定性にまで議論が及んでいるのである。

ところで、安定分析は、競争経済のメカニズムを分析する理論にとって本質的に重要である。というのは、まず第一に、現実の市場では何らかの調整過程が動くことによって、需要と供給の均衡が達成されていると考えられる。したがって、安定分析はこのような市場調整過程を分析する動学的モデルが現実のよりよき描写であるための保証を与える。第二に、競争メカニズムは安定性が保証されるときのみ、資源および産出物の最適な分配がもたらされるのである。なぜなら 消費者の嗜好、生産技術および資源の量などの与件は変わりやすく、したがって、均衡がこれらの変化によって攪乱されるとき、もし、この競争経済が均衡に復帰する可能性をもたないならば、競争メカニズムの最適性を論じてみても、ほとんど意味がないからである。ワルラス以後、数多くの学者が安定性の研究に傾注した理由は主としてこの重要性にあったのである。

本論文の目的は、安定性の研究の重要性に鑑み、模索過程と非模索過程の大域的安定性に関する最近までの諸業績を吟味、整理し、今後の動向について若干の考察を加えることにあつた¹⁾。

- 1) 模索過程の大域的安定性に関する文献の展望が、奥口 [22], T. Negishi [12] によってなされている。前者は模索過程に限定されている点で本論文と性格が異なる。後者は非模索過程まで含めているが、非模索過程で掲げられている論文には修正が必要とされるものが含まれているという意味で完全でない。

I. 模 索 過 程 の 安 定 性

I, 1. モデルの構成

記号は次のように定める。ただし、ベクトルの用法は通常の方法にしたがうものとする²⁾。

p_i : i 番目の財の価格, ($i=1, \dots, n$).

$\bar{x}_{\alpha i}$: α 番目の人の i 番目の財のストック, ($\alpha=1, \dots, m$).

$\bar{x}_i$: i 番目の財の総量 ($\sum_{\alpha=1}^m \bar{x}_{\alpha i}$) で一定.

$x_{\alpha i}$: α 番目の人の i 番目の財の需要量 (非負).

x_i : i 番目の財の需要量 ($\sum_{\alpha=1}^m x_{\alpha i}$).

I_{α} : α 番目の人の所得ないし資産 ($\sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_{\alpha i}$).

U_{α} : α 番目の人の効用, $x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha n}$ の微分可能, 増加, 強準凹関数³⁾.

$\bar{X}$: 個人間の最初の分配行列, $m \times n$ 型行列.

α 番目の人の i 番目の財に対する需要 $x_{\alpha i}$ は効用関数 $U_{\alpha}(x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha n})$ を最大にする点である.

また, 第 i 財の超過需要 z_i を, 価格ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)$ の関数として,

$$z_i = F_i(p) = x_i(p, \bar{X}) - \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

とし, この超過需要関数に対しては,

(H) 価格に関する 0 次同次性

(D) 価格に関する微分可能性と一価性

(B) 下からの有界性

(W) ワルラス法則 ($\sum_{i=1}^n p_i F_i(p) = 0$)

を仮定する. なお, ある正の価格ベクトル $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ は $F = (F_1(p),$

$\dots, F_n(p))$ とすれば, $F(\bar{p}) = 0$ を満たすとき, 均衡価格ベクトルといわれる.

以上の定義によって, 我々は, 価格の変化率が超過需要に比例する場合のワルラス的模索過程 (T) を次の微分方程式体系で表わすことができる.

$$(T) \quad \frac{dp_i}{dt} = x_i(p, \bar{X}) - \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

ただし, t は時間を表わす⁴⁾. なお, 均衡に到達するまで取引がないのであるから, 財の分配 $\bar{X}$ は不変であり, 需要関数の変数から落として考えることができる.

ここで (T) の大域的安定性, 準安定性 quasistability をそれぞれ次のように定義しよう.

大域的安定性：任意の初期条件 p^0 が均衡点 $\bar{p}$ に収束するとき、即ち、 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \bar{p}$ で、かつ、すべての i について $F_i(\bar{p}) = 0$ のとき、 (T) は大域的に安定である。

準安定性：準安定とは 任意の初期点から出発する (T) の解の極限点がすべて均衡点であること、即ち、 t のある部分列 $\{t_v\}$ に対して、 $\lim_{v \rightarrow \infty} p(t_v) = \bar{p}$ ($v \rightarrow \infty$ のとき $t_v \rightarrow \infty$) で、かつ、すべての i について $F_i(\bar{p}) = 0$ となることをいう。

大域的安定は準安定を意味するが、均衡点が一つか複数個あっても、互いに分離していれば逆も成り立つ。

2) 価格が正、非負等はモデルに応じて仮定が異なる。また、ベクトルの転置は Prime をつけ、ベクトルの不等関係は次のように定義する。

任意のベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対して

$$x \geq y \text{ means } x_i \geq y_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$x \geq y \text{ means } x_i \geq y_i \text{ but } x \neq y$$

$$x > y \text{ means } x_i > y_i, \quad i=1, \dots, n.$$

3) $U_\alpha(x) = U_\alpha(x_0)$ となるようなすべての非負ベクトルと、 $0 < \lambda < 1$ なるすべての λ に対して、 $U_\alpha[\lambda x + (1-\lambda)x_0] > U_\alpha(x)$ となるならば、関数 U_α は強準凹関数といわれる。このことは、無差別曲面が原点に対して強く凸ということと同値である。

4) 一般的には、

$$\frac{dp_i}{dt} = a_i x_i(p, \bar{X}) - \bar{x}, \quad i=1, \dots, n \quad (a_i \text{ は正の定数}) \text{ であるが、財の単位を適当にとれば } (T) \text{ になる。〔5〕参照。}$$

I, 2. 粗代替性のもとの安定性

粗代替性の概念には、強粗代替性 (S_D) strong gross substitutability と弱粗代替性 (S_{DW}) weak gross substitutability の二つの概念があり、それぞれ数学的には次のように定義される⁵⁾。

$$(S_D) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{rk} = \partial F_r / \partial p_k (r, k=1, \dots, n) \text{ が存在し、連続で} \\ F_{rs} = \partial F_r / \partial p_s > 0, \text{ for all } r \neq s (r, s=1, \dots, n) \end{array} \right.$$

$$(S_{DW}) \left\{ \begin{array}{l} F_{rk} = \partial F_r / \partial p_k (r, k=1, \dots, n) \text{ が存在し, 連続で} \\ F_{rs} = \partial E_r / \partial p_s \geq 0, \text{ for } r \neq s (r, s=1, \dots, n). \end{array} \right.$$

経済的な意味は次の如くである。他のすべての財の価格が不変で、ある財の価格が騰貴すれば、価格が不変の財の需要は増加する。定義から明らかに 強粗代替性 (S_D) は弱粗代替性 (S_{DW}) よりも数学的にも、経済学的にも厳しい条件である。

まず、我々は、強粗代替性 (S_D) が仮定される場合の模索過程 (T) の安定性を考察しよう。次の定理がこの問題に対する一つの帰結である。

定理 1 強粗代替性 (S_D)、超過需要に関する 0 次同次性 (H)、ワルラス法則 (W) を仮定する。そのとき、もし、均衡価格 $\bar{p} > 0$ が存在するとすれば、模索過程 (T) は大域的に安定である⁶⁾。

証明の準備として次の Lemma 1, 2 を与えよう。

Lemma 1 仮定 (H)、(S) のもとで、均衡価格ベクトル $\bar{p} > 0$ は、スカラー倍を除いて一意に決定される。

(証明) Arrow, Block and Hurwicz [1] による⁷⁾。

任意の $\lambda > 0$ に対して、 $\bar{p}' \equiv \lambda \bar{p}''$ で、 $\bar{p}'$ および $\bar{p}''$ がともに均衡価格ベクトル、即ち、 $F(\bar{p}') = F(\bar{p}'') = 0$ とする。また、 $\bar{p}'_k / \bar{p}''_k = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} (\bar{p}'_k / \bar{p}''_k)$ とすれば、(H) によって、 $\bar{p}''$ を $\bar{p}''' = \mu \bar{p}''$ 、 $\mu > 0$ 、 $\bar{p}'_k = \bar{p}'''_k$ となるような $\bar{p}'''$ で置きかえることができる。もし、すべての $\lambda > 0$ に対して、 $\bar{p}' \equiv \lambda \bar{p}''$ ならば、 $\bar{p}''' \leq \bar{p}'$ であるから、(S_D) と $\bar{p}''$ が均衡価格ベクトルであることより、

$$F_k(\bar{p}') = F_k(\mu \bar{p}''') = F_k(\bar{p}''') < F_k(\bar{p}')$$

となる。したがって、 $F_k(\bar{p}''') < 0$ となって、 $\bar{p}'''$ が均衡価格ベクトルではなくなる。(証明終り)

Lemma 2 均衡価格ベクトル $\bar{p} > 0$ および (S_D)、(H)、(W) を仮定すれば、任意の非均衡価格ベクトル $p > 0$ に対して、

$$\bar{p} F(p) \equiv \sum_{k=1}^n \bar{p}_k F_k(p) > 0^{8)}.$$

(証明) Arrow, Block and Hurwicz [2] pp90—93 を見よ。

(定理1の証明) Arrow, Block and Hurwicz〔1〕による。

証明の基本は、時間とともに減少する連続な関数（ここでは距離関数）を見い出して、リアプノフ1つの安定性定理を適用することである。

点 $p(t)$ から均衡価格へのユークリッドノルムの距離として $D_2(t) = \sum_{i=1}^n (\bar{p}_i(t) - \bar{p}_i(t))^2$ を考えよう。 $\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2(t)$ を t で微分すれば、 (W) を使って、

$$d(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2(t))/dt = 2 \sum_{i=1}^n \bar{p}_i(t) \dot{\bar{p}}_i(t) = 2 \sum_{i=1}^n \bar{p}_i F_i(\bar{p}) = 0$$

となるから、 $\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2(t) = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2(0)$ としてよい。これと、Lemma 1 より、 $\bar{p}$ を $\sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2 = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i^2(0)$ と正規化することができる。 $D_2(t)$ を時間 t で微分し、 (W) と Lemma 2 より、 $p \approx \bar{p}$ のとき、

$$\dot{D}_2(t) = 2 \sum_{i=1}^n \dot{\bar{p}}_i (\bar{p}_i - \bar{p}_i) = 2 \sum_{i=1}^n (\bar{p}_i - \bar{p}_i) F_i(\bar{p}) = -2 \sum_{i=1}^n \bar{p}_i F_i(\bar{p}) < 0.$$

これから、 $D_2(t)$ の連続性と合わせて、 $p(t)$ は $\bar{p}$ に収束する⁹⁾。(証明終り)

次に、我々は、弱粗代替性が仮定される場合に議論を移そう。前述のように、弱粗代替性は強粗代替性よりも条件が緩いという意味で一般的であるが、さらに重要なことは（ここでは述べないが）、弱粗代替性のもとで均衡価格ベクトルが存在することが立証されていることである¹⁰⁾。なぜなら、均衡価格の存在が証明されれば、模索過程の安定性の定理の成立条件が保証され、そのため定理はより意味あるものになるからである¹¹⁾。

定理2 $F(p)$ を (H) , (W) , (B) , および (S_{DW}) を満たす超過需要関数のベクトルとすれば、均衡価格ベクトル $\bar{p} \geq 0$ と非均衡価格ベクトル $p \geq 0$ に対して、

$$\bar{p} \cdot F(p) > 0.$$

(証明) Arrow and Hurwicz〔3〕による。

まず、 (a) において、 $\bar{p} > 0$ の場合の定理を証明し、 (b) で一般の場合、即ち、 $\bar{p} \geq 0$ の場合を証明しよう。

(a) $\bar{p} > 0$ の場合

$\bar{p} > 0$ であるから、適当に測定単位をえらべば、一般性を失わずに、

$$(1) \bar{p}_k = 1 \quad (k=1, \dots, n)$$

とすることができる。もちろん, $\bar{p}$ は均衡価格ベクトルであるから,

$$(2) F(\bar{p}) = 0.$$

そこで, ある与えられた非0ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)$ に対して, 財が,

$$(3) p_k \geq p_{k+1} \quad (k=1, \dots, n-1)$$

と番号づけられると仮定する。そうすれば, $p \neq 0$ によって,

$$(4) p_1 > 0.$$

また, ベクトルの数列 $p^s (s=1, \dots, n)$ の要素を

$$(5) p_k^s = \max(p_s, p_k)$$

と定義する。(3) (5)から, $p^s = (p_1^s, \dots, p_n^s)$ に対して 次のことが容易に導かれる。

$$(6) p_k^s = \begin{cases} p_k & (k \leq s) \\ p_s & (k > s) \end{cases}$$

$$(7) p_k^{s+1} = \begin{cases} p_k & (k \leq s) \\ p_{s+1} & (k > s). \end{cases}$$

次に, (H), (4)および(2)から,

$$(8) F(p^1) = 0$$

となる。また, 代替性 (S_{DW}) によって,

$$(9) F_k(p^{s+1}) \leq F_k(p^s) \quad (k \leq s).$$

さらに

$$(10) F_k(p^{s+1}) \geq F_k(p^s) \quad (k > s).$$

不等式(10)はまた次の形に書かれる。

$$F_k(p^{t+1}) \geq F_k(p^t) \quad (k > s \geq t \geq 0).$$

帰納法によって, $F_k(p^{t+1}) \geq F_k(p^0) \quad (k > s \geq t \geq 0).$

ここで, $t=s-1$ とおけば(8)より,

$$(11) F_k(p^s) \geq 0 \quad (k > s).$$

(b) 上の結果から, 次の不等式(12), (13)が導かれる。

$$(12) \sum_{k=1}^n F_k(p^{s+1}) \geq \sum_{k=1}^n F_k(p^s) \quad (s=1, \dots, n-1).$$

もし、 p^s が均衡ベクトル、 p^{s+1} が不均衡ベクトルならば、

$$(13) \sum_{k=1}^n F_k(p^{s+1}) > \sum_{k=1}^n F_k(p^s) \quad (s=1, \dots, n-1).$$

(12)から、帰納法によって、すべての s に対して、

$$\sum_{k=1}^n F_k(p^s) \geq \sum_{k=1}^n F_k(p^1)$$

が成り立つ。ここで、 $s=n$ とすれば(8)より、

$$\sum_{k=1}^n F_k(p^n) = \sum_{k=1}^n F_k(p) \geq 0.$$

(1) および $p^m = p$ より、

$$(14) \bar{p} F(p) \geq 0, \text{ for all } p.$$

さらに、もし、 $p^m = p$ が不均衡ベクトルと仮定するならば、そのとき、 p^1 は均衡ベクトルであるから、 p^s が均衡ベクトル、 p^{s+1} が不均衡ベクトルとなるようなある s が存在しなければならない。そのとき(13)によって、同じ議論で、

$$(15) \bar{p} F(p) > 0, \text{ for any disequilibrium } p$$

を得る。これは定理の帰結である。

この定理 2 から安定性を導くには、定理 1 の証明と同様の議論をおこなえばよい。

5) 我々は、以下では、differetial form を仮定するが、ほかに、finite increment form がある。ここでは、統一性を保つために、後者は取り扱わない。

6) ほかに、 H_i を $F_i(p)$ の連続な sign-preserving function とすると、
 $dp_i/dt = H_i[F_i(p)], i=1, \dots, n$

は、 (S_D) , (H) , (D) , $p > 0$ の仮定のもとに安定であることが示される。
 Uzawa [17] pp625—627.

7) [1] は、一財を numéraire とした numéraire 体系について証明しているが、ここでは non-numéraire 体系を取り扱う。しかし、安定性の問題には、いずれの体系をとりあげても結果的には本質的相違は生じない。

8) これは、後に I, 3 で示すように均衡点と不均衡点の間で超過需要に関して、顕示選好の弱公理が成立することを示している。

9) ユーリッドノルムではなく、距離として、

$$D_m(t) = \max_j \{ |p_j(t) - \bar{p}_j| / \bar{p}_j \}$$

を考えれば、 $D_m(t) < 0$ となって、これからも安定性が証明できる。〔Arrow, Block and Hurwicz [1] p. 95.〕

- 10) Kuga, K [9] は、超過需要関数の連続性、および (W) 、 (H) の仮定に、価格が 0 に近づけば、その財の需要は無限になるという限界条件を付加することによって、均衡価格の存在を証明している。
- 11) ワルラス法則 (W) 、連続性の仮定のもとでの均衡価格の存在は Arrow and Debrue [25] や二階堂 [21] などに見られる。しかし、これは、 (W) 、 (D) (S_{DW}) のもとでの均衡価格の存在のための必要条件であって十分条件ではないから、 (W) 、 (C) 、 (S_{DW}) のもとでの均衡価格の存在を保証しない。

I, 3. 顕示選好の弱公理と安定性

定理 1 および 2 においては、粗代替性から顕示選好の弱公理を導き出すことによって、価格の変化率が超過需要に比例する場合の模索調整過程の大域的安定性が確立されたのであるが、粗代替性を仮定することなく、直接顕示選好の弱公理から、より一般的な模索調整過程の安定性を証明することができる。さらにこの場合、模索経路、即ち、微分方程式の解の存在が保証されるとともに、その初期条件の非負性が考慮されていることに注意さるべきである。以下では、顕示選好の弱公理が述べられた後に、そのもとで、ワルラスの模索過程が安定であることが示される。

顕示選好の弱公理とは、ある財の組 $x_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ が他の財の組 $x_2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ よりも顕示選好され、かつ、 x_2 が x_1 よりも顕示選好されることが両立しないこと、即ち、 $x_2 \neq x_1$ に対して、 $p_1 x_2^1 \leq p_1 x_1^1$ ならば、 $p_2 x_2^2 < p_2 x_1^2$ であることをいう。

以下で我々は、normalized 体系を扱う。

non-normalized 価格ベクトルを $q = (q_0, \dots, q_n) \geq 0$ とし、第 i 財の超過需要を $E_i(q) = E_i(q_0, q_1, \dots, q_n)$ とすれば、超過需要関数に関し、顕示選好の弱公理は、次のことを意味する。

$$\sum_{i=0}^n \bar{q}_i E_i(q) > 0.$$

ここで, $\bar{q}=(\bar{q}_0, \dots, \bar{q}_n)$, $q=(q_0, \dots, q_n)$ はそれぞれ均衡価格ベクトル, 不均
衡価格ベクトルである。

0 番目の財を numéraire として,

$$p=(p_1, \dots, p_n), \quad p_i=q_i/q_0 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$F_i(p)=E_i(1, p_1, \dots, p_n) \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

と表わす。

定理 3 (存在性) $F_i(q)$ の一価性と, $q \geq 0$ に対する連続性, 0 次同次性を
仮定すれば, 方程式(1)は任意の与えられた初期点 $p(0) \geq 0$ から出発する解 (模
索経路) をもつ。

$$(1) \quad \frac{dp_i}{dt} = \theta_i(p) - p_i \quad (i=1, \dots, n).$$

ここで, $\theta_i(p) = \max [\rho F_i(p) + p_i, 0]$, ρ : 正の定数。

(証明) Nikaido and Uzawa [13] PP53—54を見よ。

定理 4 (安定性) もし, 各財の価格が均衡において正, すなわち, $\bar{q}_i > 0$
($i=0, 1, \dots, n$) ならば, 超過需要関数に関する連続性, ワルラス法則, 0 次
同次性, および顕示選好の弱公理の仮定のもとで, (1)の任意の解は十分小さい
 $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{p}$ に収束する。 $p(t)$ の $\bar{p}$ への収束の間, $p(t)$ の $\bar{p}$ からの距離
は単調に 0 に減衰する。

(証明) 証明の概略を述べよう。詳しい証明は Nikaido and Uzawa [13]
を見よ。

証明は (α) , (β) , (γ) , (δ) の 4 段階に分れる。

(α) 仮定により, 均衡価格ベクトル $\bar{p}$ は正であり, しかも,

$$F_i(\bar{p}) = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

を満たすから, $F_i(\bar{p}) + \bar{p}_i > 0$ ($i=1, \dots, n$), $F_i(p)$ は $p \geq 0$ に対して連続であ
るから, $0 < \rho \leq 1$ となる任意の ρ に対して, $\bar{p}$ の ε 近傍 $U(\bar{p}, \varepsilon)$ が存在して,

$$(\alpha, 1) \quad \rho F_i(p) + p_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

が, $p \in U(\bar{p}, \varepsilon)$ に対して成り立つ。

(β) 顕示選好の弱公理から, $p \neq \bar{p}$ ならば,

$$F_0(p) + \sum_{i=1}^n \bar{p}_i F_i(p) \equiv f(p) > 0.$$

次に、

$$\inf_{p \in U(\bar{p}, \varepsilon)} f(p) = M > 0$$

となることが導かれる。これは以下のように示すことができる。もし $M < 0$ とすれば、 $f(p)$ は $p \in U(\bar{p}, \varepsilon)$ に関して連続であるから、 M の近傍に $f(p) < 0$ となる p が存在することになる。 $(\alpha, 1)$ に矛盾する。従って、 $M \geq 0$ 。ここで $M = 0$ としよう。このことは差集合 $R^n_+ - U(\bar{p}, \varepsilon)$ の中に $\lim_{q \rightarrow \infty} f(p^q) = M$ となる点列 $\{p^q\}$ が存在することを意味する。

さて、連続写像 $\varphi: R^n_+ \rightarrow S_{n+1}$ ($S_{n+1} = \{q \mid q_i \geq 0, \sum_{i=1}^n q_i = 1\}$) を次の如く定義する。

$$\varphi_0(p) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n p_i}, \quad \varphi_i(p) = \frac{p_i}{1 + \sum_{i=1}^n p_i} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

この連続写像を使えば、点列 $\{\varphi(p^q)\}$ の部分列が S_{n+1} の中の $q > 0$ に収束し、しかも、特に $1 + \sum_{i=1}^n p_i^q$ が $1/q_0$ に収束する、つまり、 $\{p^q\}$ は R^n_+ の有界点列であることがわかる。それゆえ、 $\{p^q\}$ が p に収束するとしてよい。もちろん、 $\Delta = R^n_+ - U(\bar{p}, \varepsilon)$ は閉集合となるから p を含む。したがって、連続性によって、

$$f(p) = \lim_{q \rightarrow \infty} f(p^q) = M = 0$$

となり、顕示選好の弱公理によって、 $p = \bar{p}$ 。これは $\bar{p} \in \Delta$ に矛盾する。ゆえに $M > 0$ 。

(γ) S_{n+1} はコンパクトであり、 $E_i(p)$ は S_{n+1} 上で連続であるから、 S_{n+1} 上で有界。ゆえに、 $F_i(p)$ ($i=1, \dots, n$) も $p \geq 0$ に対して有界である。したがって、 $L > 0$ が存在して、

$$\sum_{i=1}^n F_i(p)^2 \leq L.$$

(δ) 次に、 $0 < \rho < \min(2M/L, 1)$ を満たす任意の定数 ρ に対して、任意の初期点 $p(0) \geq 0$ から出発する(1)の解 $p(t)$ が $\bar{p}$ に収束することを示そう。

$$2V = \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p}_i)^2 \text{ とする。まず、} p(t) \in U(\bar{p}, \varepsilon) \text{ の場合、Arrow — Block —}$$

Hurwicz [1] と同じ方法で,

$$\frac{dV}{dt} = \rho \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p}_i) F_i(p) = -\rho f(p)$$

が成立する。

また, $p(t) \in U(\bar{p}, \varepsilon)$ の場合には, $\delta = (\rho L/2)(2M/L - \rho) > 0$ に対して,

$$\frac{dV}{dt} \leq \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^n F_i(p)^2 - \rho f(p) \leq \frac{\rho^2}{2} L - \rho M = \frac{\rho L}{2} (\rho - 2M/L) = -\delta$$

を示すことができる。したがって, $p \in U(\bar{p}, \varepsilon)$, $p \in U(\bar{p}, \varepsilon)$ のいずれであっても,

$$\frac{dV}{dt} \leq -\min[\delta, \rho f(p)]$$

とすれば,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0 \text{ (単調に)}. \text{ (証明終り)}$$

I, 4. 不安定の例

前節において, 粗代替性または顕示選好の弱公理の仮定のもとに, 模索過程が安定であることが示されたのであるが, このような仮定をおかなくては, 模索過程が安定であることは必ずしもいえない。我々はこれを示すために, Gale [6] によって与えられた不安定の例を考察しよう。

Gale [6] は二人の消費者と, そのうちの 하나가 numéraire となるような三つの財が存在する経済モデルを想定し, ある財についてギッフェンパラドックスが生じる場合, このモデルは大域的に不安定になることを示した¹²⁾。

まず, 二人の個人を消費部門と生産部門に分割しよう。消費部門には財の総量が g_0 で示され, その価格がいつも numéraire として機能する財があてがわれ, 生産部門は, 二つの財 G_1 と G_2 を年に総量 g_1, g_2 生産するものとする。また, 消費部門は効用を最大にするように行動するものとする。

次に, G_1 と G_2 の価格の組 $p = (p_1, p_2)$ が与えられたとき, 財 G_1, G_2 に対する超過需要関数を f, g で表わす。また, p_1, p_2 に関する f, g の偏導

関数をそれぞれ f_1, f_2 および g_1, g_2 とし, $\bar{p}$ を均衡価格ベクトルとした場合, $f_1(\bar{p})$ が正のとき, キップェンバラドックスが起るものとする。

以上の仮定および定義のもとに, 我々は, 価格調整の微分方程式体系を次のように表わすことにしよう。

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} p_1 &= \dot{p}_1 = \lambda_1 f(p) \\ \frac{d}{dt} p_2 &= \dot{p}_2 = \lambda_2 g(p) \end{aligned}$$

ここに, λ_1, λ_2 は正数である。

DEFINITION: もし均衡価格 $\bar{p}$ に近づく (1) のただ一つの解が constant solution $p(t) = \bar{p}$ ならば, 点 $\bar{p}$ は anti-stable である。

定理 5 もし効用関数 ϕ が $\bar{p}$ において, 2 階微分可能で, しかも, その点でギッフェン効果が生じるならば, そのとき, 定数 λ_1 と λ_2 の値の範囲に対して, 点 $\bar{p}$ は anti-stable である。

この定理の証明の骨格は, 体系 (1) が局所的に安定でないなら, 大域的に安定でない。それゆえ局所的に安定でないことを示せば十分であるということである。

また, 体系 (1) が $\bar{p}$ において局所的に安定であるための必要十分条件は, ヤコビ行列,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(\bar{p}), & \lambda_1 f_2(\bar{p}) \\ \lambda_2 g_1(\bar{p}), & \lambda_2 g_2(\bar{p}) \end{pmatrix}$$

の固有値が負の実部分をもつことである。

このことを示そう。(1) の体系はマトリックス形式で次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} p_1 \\ \frac{d}{dt} p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 f(p) \\ \lambda_2 g(p) \end{pmatrix}$$

これを均衡点 $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ の近傍で線型近似すれば,

$$(2) \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{\partial f(\bar{p})}{\partial p_1} p_1 + \lambda_1 \frac{\partial f(\bar{p})}{\partial p_2} p_2 \\ \lambda_2 \frac{\partial g(\bar{p})}{\partial p_1} p_1 + \lambda_2 \frac{\partial g(\bar{p})}{\partial p_2} p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(\bar{p}) & \lambda_1 f_2(\bar{p}) \\ \lambda_2 g_1(\bar{p}) & \lambda_2 g_2(\bar{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

作用素 $\frac{d}{dt}$ を λ で表わせば、(2)は次のように書ける。

$$(3) \lambda \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(\bar{p}), & \lambda_1 f_2(\bar{p}) \\ \lambda_2 g_1(\bar{p}), & \lambda_2 g_2(\bar{p}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

この作用素に代数的性質をもたせれば、(3)は

$$(A - \lambda I) p = 0$$

と書くことができる。このことから $|A - \lambda I| = 0$ が導かれる。したがって、

$$\lambda = \frac{\lambda_1 f_1(\bar{p}) + \lambda_2 f_2(\bar{p}) \pm \sqrt{(\lambda_1 f_1(\bar{p}) + \lambda_2 f_2(\bar{p}))^2 - 4\lambda_1 f_1(\bar{p})\lambda_2 g_2(\bar{p}) + 4\lambda_1 f_2(\bar{p})(\bar{p})\lambda_2 g_1(\bar{p})}}{2}$$

となり、 λ の実部分、即ち、 A の $\text{trace} = \lambda_1 f_1(\bar{p}) + \lambda_2 f_2(\bar{p})$ が負のときまたそのときにのみ(1)の解は安定、正のとき不安定となる¹³⁾。それゆえ、不安定を示すには、 A の固有値が正の実部分をもつように適当に λ_1 と λ_2 を選ばばよい。このことは、 f_1 が正であるようにギッフェン効果が生じるならば、十分大きな λ_1 に対して可能となる。

我々は、以下に Gale [6] によって与えられた具体的な例を図 I で示そう。

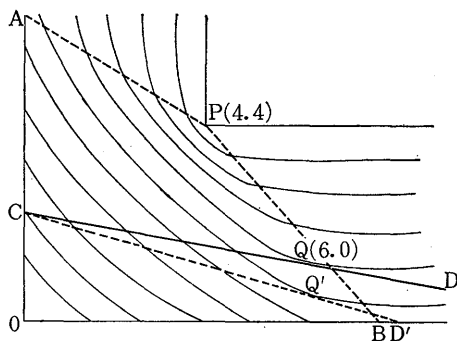


図 I

図 I に描かれている無差別曲線は、領域 OAPB で有効で、かつ、 G_1, G_2 の

非負量 X_1, X_2 で定義された効用関数

$$\phi(X_1, X_2) = 28X_1 + 28X_2 - 2X_1^2 - 3X_1X_2 - 2X_2^2$$

に対する点をプロットしたものである。この OAPB の領域の外では、無差別曲線は直線になり、それ以上の追加的な財は価値を全く追加しないような点、即ち、完全な飽和点が点 (4, 4) で生じる。

最初に消費部門は G_0 の 12 単位、生産部門は G_1 の 6 単位、 G_2 の 1 単位をもつとしよう。価格直線は均衡点 (6, 1) を通り、その点を通る無差別曲線に接する。

価格直線 CD' はわずかに増加した p_1 の値に対する価格であり、そしてそれは、無差別曲線に点 Q' で接する。 Q' は Q の右側にあり、 X_1 に対する需要がギッフェン効果により増加したことを示している。

計算によって、超過需要に対するヤコビ行列が次のようになることが確かめられる。

$$A = \frac{1}{56} \begin{pmatrix} 24 & -60 \\ 10 & -11 \end{pmatrix}$$

これは、正の trace をもち、したがって、超過需要に比例する価格の導関数の動学的調整過程は anti-stable である。

- 12) 一般には、価格が均衡価格から乖離したとき、例えば、 p_1 が増加したとき、その財 G_1 に対する需要は減少し、そのため、均衡価格へと向って価格 p_1 の落ち込みが生じるというのが普通の動学的仮定である。しかし、ある状況のもとでは p_1 が上昇すれば、さらに G_1 に対する需要が増加するような事態、即ち、ギッフェンパラドックスが生じる。このことから、ギッフェン効果が均衡の近傍で起る場合、大域的安定性は得られないことが示される。

- 13) 一般に、正規形の定係数線型同次微分方程式系

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^n a_{js}^j x_s, \quad j=1, \dots, n.$$

ベクトル表示で

$$\dot{x} = Ax$$

の解は、 A の固有値、即ち $|A - \lambda I| = 0$ の根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて単根の場合には、各成分が 0 次の多項式となるベクトル g_i を用いて、次のように書かれる。

$$x_i = g_i \lambda_i t.$$

この解が安定であるための十分条件は、 λ_i の実部が負となることである。

II 非模索過程の安定性

非模索過程は、模索過程と違って、均衡に到る過程中に取引が許される不均衡価格での取引過程である。模索過程にあっては均衡に到達するまでに取引が許されないから、時間に関して財の分配は一定であるが、非模索過程にあっては、需要者と供給者が取引相手を見出し次第取引が行われ、それに応じて財の価格および分配も刻々変っていくから、価格と財の分配の変動は不確定である。したがって、非模索過程の分析では、到達される初期の財の分配に対応するワルラス的均衡とは違って、最後の財の分配に対応するワルラス的均衡が求められるにすぎない。ただ 現実の市場は、模索過程を適用するに十分に整備された市場は例外的で、むしろ非模索過程のモデルに近いと考えられる。さらに、以下で示されるように、非模索過程は、粗代替性のような強い仮定を置くことなく、交換ルールを規定するだけで安定性が示される。この二つの意味において、非模索過程は、模索過程より一般的であると考えられる。以下で、これまで得られた非模索過程に関する業績を整理、吟味したい。

II, 1. 粗代替性のもとでの非模索過程の安定性

Negishi [11] によって示された等価交換を一つの取引ルールと仮定した非模索過程を考察しよう。この場合、非模索過程 (NT) は次の微分方程式体系で表わされる。

$$\frac{d}{dt} p_i = x_i(p, \bar{X}) - \bar{x}_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$(NT) \quad \frac{d}{dt} \bar{x}_{\alpha i} = F_{\alpha i}(p, \bar{X}) \quad \alpha=1, \dots, m, i=1, \dots, n$$

$$(B) \quad \sum_{i=1}^n p_i \dot{\bar{x}}_{\alpha i} = \sum_{i=1}^n p_i F_{\alpha i}(p, \bar{X}) = 0, \quad \alpha=1, \dots, m.$$

ここで、(B) は等価交換条件を表わす。

仮定 I 交換取引によって、財の保有は、 $\sum_{i=1}^n \bar{x}_{\alpha i}(t) = \bar{x}_{\alpha}, \sum_{i=1}^n p_i (d\bar{x}_{\alpha i}/dt) = 0$ を

満たす連続微分可能な時間の関数 $\bar{x}_{\alpha i}[t : d\bar{x}_{\alpha i}/dt]$ となる。また、それはすべての α, i に対して、初期条件 $p_i(0), \bar{x}_{\alpha i}(0)$ に関して連続である。

仮定 II ワルラス法則 $\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \bar{x}_i) = 0$ の条件のもとで、動学的価格経路は $\dot{p}_i = x_i - \bar{x}_i, i=1, \dots, n$ によって決定される。この動学的体系の解として、価格は、すべての i に対して $p_i \geq \delta > 0$ を満たす時間の連続的関数であり、すべての α, i に対して初期条件 $p_i(0), \bar{x}_{\alpha i}(0)$ に関して連続である。

仮定 III すべての財が強粗代替財である。

即ち、

$$\frac{\partial x_r}{\partial p_k} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x_r}{\partial I^{\alpha}} \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial p_k} > 0, \quad r \neq k.$$

定理 6 仮定 I, II, III のもとで、過程 $\dot{p}_i = x_i - \bar{x}_i$ ($i=1, \dots, n$) はすべての財の超過需要 $x_i - \bar{x}_i$ ($i=1, \dots, n$) が 0 に収束するという意味で安定である。

(証明) Negishi [11] による。

次のような特性関数を構成しよう。

$$V(t) = \sum_{i \in I^+} I^+(t) p_i(t) [x_i(t) - \bar{x}_i],$$

ここに、 $I^+(t) = \{i | x_i(t) - \bar{x}_i > 0, \text{ or } x_i(t) - \bar{x}_i = 0, x_i(t) > 0\}$ 。

また、ワルラス法則によって、

$$V(t) = \sum_{i \in I^-} I^-(t) [-p_i(t)] [x_i(t) - \bar{x}_i],$$

ここに、 $I^-(t) = \{i | x_i(t) - \bar{x}_i < 0, \text{ or } x_i(t) - \bar{x}_i = 0, x_i(t) < 0\}$ 。

十分小さい $h > 0$ に対して、我々は次の式を得る。

$$V(t+h) = \sum_{i \in I^+} I^+(t) p_i(t+h) [x_i(t+h) - \bar{x}_i] + \sum_{i \in I^-} I^-(t) p_i(t+h) (x_i(t+h) - \bar{x}_i),$$

ここに、 I は $I^0(t) = \{i | x_i(t) - \bar{x}_i = 0, x_i(t) = 0\}$ の適当な部分集合。

次に、我々は、ワルラス法則、および仮定 III を使って、

$$W(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{V(t+h) - V(t)\} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{h_v} \{V(t+h_v) - V(t)\} \leq 0.$$

ここに $\{h_v\}$ は $v \rightarrow \infty$ に対して $h_v \rightarrow \infty$ および等式は均衡でのみ成立するような点列である。均衡において、 I^- および I^+ は空集合になり、 $V=0, W=0$ が

得られる。

$p(t)$, 分配行列 $\bar{x}=(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ は有界であることは容易に導かれる。 $V(t)$ は 0 によって有界であるから, $V(t)$ が減少することは $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V^*$ の存在を意味する。 $p_i^*, \bar{x}_{ai}^*$ を, $t \rightarrow \infty$ に対する $p_i(t), \bar{x}_{ai}$ の極限, 即ち, $p_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i(t_k) : p(0), \bar{x}(0)$, $\bar{x}_{ai}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_{ai}(t_k : p(0), \bar{x}(0))$ ($k \rightarrow \infty$ に対して $t_k \rightarrow \infty$) とする。そのとき, $p_i, \bar{x}_{ai}$ および V の連続性から $V^*(t) = V^*[t : p^*, \bar{x}^*] = \lim_{k \rightarrow \infty} V[t : p(t_k), \bar{x}(t_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} V[t + t_k : p(0), \bar{x}(0)] = V^*$ 。したがって, $p^*, \bar{x}^*$ において $W(t) = 0$ 。我々は, $t \rightarrow \infty$ に対して $x_i - \bar{x}_i \rightarrow 0$ となることを結論する。(証明終り)

14) これは, スルキー方程式, 粗代替性, および強粗代替財の性質から導かれる。

II, 2. ハーン・プロセス

次に我々は, Hahn and Negishi [7] によって提示された非模索過程の一つのモデルを検討しよう。Negishi によってハーン・プロセスと呼ばれたこのプロセスの最も注目すべき点は, 個人と社会全体の超過需要の関係であろう。個人の超過需要と社会全体超過需要の符号が一致するという仮説がそれである。そして, 彼らは, この場合には, 非模索過程が安定であることを示したのであるが, しかし, この仮説に対する問題が残されている。我々はまず, 安定性を示した後この問題を述べることにする。以下 [7] をまとめてみよう。

調整仮説 (A. H.)

(i) $h > 0$ が存在して超過需要ベクトル $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ に対して

(a) $\dot{p}(t) = Kz(t)$ for $t \geq h$,

ここで, K は正の対角要素 $k_1, \dots, k_n$ をもった対角行列。

(b) $\dot{p}(t) = 0$ for $t < h$.

(ii) $\dot{\bar{x}}_\alpha(t) = G_\alpha(p(t), \bar{x}(t)), \alpha = 1, \dots, m, t \geq 0$,

ここに, G_α および $z = Z(p, \bar{x})$ は次の性質をもつ。

(a) $n(m+1)$ 次元の正の点から成る閉集合 H の上で単価および連続。

(b) $\sum_{\alpha=1}^m G_{\alpha}(p(t), \bar{x}(t))=0, \quad t \geq 0.$

(c) $p'(t)G_{\alpha}(p(t), \bar{x}(t))=0, \quad t \geq 0.$

(d) $Z_{\alpha i}(h)Z_i(h) \geq 0$ for all i .

(e) $Z_{\alpha i}(t)Z_i(t) \geq 0, \quad t \geq h$ for all i .

(iii) 関数 $z=Z(p, \bar{x})$ および $G(p, \bar{x})$ はリプシッツ条件を満たす。このことは、次のことを意味する。即ち、上に述べられた微分方程式の解

$$p(t)=p(t:p(0), \bar{x}(0))$$

$$\bar{x}(t)=x(t:p(0), \bar{x}(0))$$

が存在して、そして、それは初期値 $p(0), \bar{x}(0)$ に関して一意かつ連続である。

以上の仮説において、本質的に重要な役割を果たすのは (ii) の (d), (e) である。この仮説については次のような説明がなされている。「非模索過程は、相対売買の形をとるから、相手を見出し次第取引が行われる。即ち、『早いもの勝ち』といった方法で取引が行われる。このように考えれば、いくつかの計画が予定前に達成されなければならないとしても、この条件を満たすことは可能である。この予定前の達成は常識と認められるように思える。なぜなら、自己の予算制約式を満たすために、ある市場から他の市場に溢出 spillover することを不足によって強制されるかも知れないからである」。

これらの仮説のほかに、次の仮定を付け加えよう。

仮定 I α 番目の個人の初期資産ないし所得は $\bar{x}_{\alpha}(0)$ で示され、正である。即ち、すべての $\alpha=1, \dots, m$ に対して、 $\bar{x}_{\alpha} > 0$ 。

仮定 II 各 $\alpha=1, \dots, m$ に対して、 α 番目の家計は連続微分可能で、強準凹効用関数 $U_{\alpha}(x_{\alpha})$ をもつ。また、任意の時間 t の需要は、予算制約のもとで効用関数を最大にする。即ち、各 t と α に対して、

$$p'Z_{\alpha}(p, \bar{x}_{\alpha})=0,$$

および、 $p'w=0$ となるような任意の w に対して、

$$U_{\alpha}(Z_{\alpha}(p, \bar{x}_{\alpha}) + \bar{x}_{\alpha}) \geq U_{\alpha}(w + \bar{x}_{\alpha}).$$

以上の仮説, 仮定のもとに次の Lemma および定理が証明される。

Lemma $U_{\alpha}(x_{\alpha}(t)) = U_{\alpha}(t)$ とする。また, $Z_{\alpha}(p^*, x^*) = 0$ となる p^* と x^* の組の集合を E とする。そのとき, $(p, \bar{x}) \in E$, A.H. を仮定すれば, すべての α に対して, $\dot{U}_{\alpha}(t) \leq 0$, およびある α に対して $\dot{U}_{\alpha}(t) < 0$ ($t \geq h$)。

(証明) α 番目の人の予算制約式

$$B_{\alpha}(t) = p'(x_{\alpha}(t) - \bar{x}_{\alpha}(t)) = 0$$

を考えよう。そのとき,

$$\dot{B}_{\alpha}(t) = \dot{p}'z_{\alpha}(t) + p'(\dot{x}_{\alpha}(t) - \dot{\bar{x}}_{\alpha}(t)) = 0.$$

A.H. (i)(a) および (ii)(e) より, すべての α に対して $\dot{p}'z_{\alpha}(t) \geq 0$, さらに, ある α および $(p, \bar{x}) \in E$, $t \geq h$ に対して, $\dot{p}'z_{\alpha}(t) > 0$. また, A.H. (ii)(c) によって, $p'\dot{\bar{x}}_{\alpha}(t) = 0$. ゆえに,

(1) $p'\dot{x}_{\alpha}(t) \leq 0$ for all α , $p'\dot{x}_{\alpha}(t) < 0$, for some α , for $(p, \bar{x}) \in E, t \geq h$.
さて, 我々は効用理論から所得 I_{α} の限界効用を $\lambda_{\alpha}(t) > 0$ とすれば,

$$(2) \quad \dot{U}_{\alpha}(t) = \lambda_{\alpha}(t)p'\dot{x}_{\alpha}(t)$$

を得る。そこで(1)によって,

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} \dot{U}_{\alpha}(t) \leq 0 \text{ for all } \alpha \\ \dot{U}_{\alpha}(t) < 0 \text{ for some } \alpha \end{array} \right\} (p, \bar{x}) \in E, t \geq h.$$

定理 7 仮説および仮定が成り立つとする。そのとき, 一般均衡体系は準安定である。即ち, $p(t: p(0), \bar{x}(0))$ と $\bar{x}(t: p(0), \bar{x}(0))$ のあらゆる極限点は, すべての $p(0), \bar{x}(0)$ に対して E に属す。

(証明) 次の関数を考えよう。

$$V = V(p, \bar{x}) = \sum_{\alpha=1}^m U_{\alpha}(x_{\alpha}).$$

$p(t), \bar{x}_{\alpha}(t)$ が有界であることは容易に示される。したがって, $U_{\alpha}(t), V(t)$ は下から有界であるから, すべての $t \geq h$ に対して $\dot{V} < 0$ ならば, それは, $\dot{V}(p^{**}, \bar{x}^{**}) = 0$ となるような極限 $V^* = V(p^{**}, \bar{x}^{**})$ に近づく。しかし, Lemma によって, $(p, \bar{x}) \in E$ に対して $\dot{V} < 0$, $(p, \bar{x}) \in E$ に対して $\dot{V} = 0$ とな

ることがいえる。したがって、準安定性が確立された。(証明終り)

以上がハーン・プロセスの概略であるが、我々はここでこのプロセスに対する問題点をあげよう。それは、仮説 A·H(ii)(d) に対する E. C. H. Veendorp [19] によってなされた指摘である。Hahn and Negishi [7] は A·H(ii)(d) が満たされるためには、市場の参加者が不足によって取引を強いられなければならないとしたが、そうではなく、それは、取引を妨げるための必要な権限を与えられた競売人によってなされなければならないことを Veendorp は、具体例をもって示したのである。したがって、A·H(ii)(d) を成立させるためには、彼らが考えているよりも厳しい条件が課される必要があることが指摘されたのである。

それゆえ、競売人によって取引を強制されるという不自然なルールによって、取引が行なわれていくとしたならば、財の分配および価格の変動は不自然なものとなり、このプロセスは非模索過程の分析としては完成されたものとはみなされないかも知れない。しかし、我々は、一つのモデルとして定式化した点で、このプロセスは意義あるものとみなし、定理の形で述べた。

II, 3. エッジワース・プロセス

エッジワース・プロセスとは、個人の選好と予算制約下のもとで個人間の連続的なバーター取引のプロセスのことである。各個人はそれぞれ一定の財の保有量をもって他の個人との交換にのぞむが、その交換において各個人は、自己の効用が取引によって増加するときのみ取引を行う。このようにして、交換が進んでいくともはやどの個人も効用を増加させることのできない点、即ち、パレート最適の点に到達する。この点が均衡点といわれる。このような非模索過程の安定性に関する研究は、現在まで、Uzawa [16],¹⁵⁾ Morishima [10] の二つを数えるだけである。我々は、ここでは Morishima [10] によって与えられたエッジワース・プロセスを考察することにする。

完全均衡のもとで m 人が n 財を交換する経済を考える。 $\bar{x}$, $\bar{x}_{\alpha i}$ の記号は前節と同じとするが、さらに $\bar{x}_{\alpha} = \{\bar{x}_{\alpha 1}, \dots, \bar{x}_{\alpha n}\}$, $\bar{x}^* = \sum_{\alpha=1}^m \bar{x}_{\alpha}$ と定義しよう。

仮定 I (i) 効用関数 $U_{\alpha}(x_{\alpha})$ は、 n 次元ユークリッド空間の非負象限 R_+^n の上で、強準凹、連続微分可能関数とする。

(ii) $\partial U_{\alpha}(x_{\alpha}) / \partial x_{\alpha i} > 0$ (すべての R_+^n に属する x_{α} に対して)

また、 $x_{\alpha}(p, \bar{x}_{\alpha})$ を、 $p'x \leq p'\bar{x}_{\alpha}$ および $x \geq 0$ の条件のもとで $U_{\alpha}(x)$ が最大となる点とする。仮定 I (ii) は すべての α に対して、 $p'x_{\alpha}(p, \bar{x}_{\alpha}) = p'\bar{x}_{\alpha}$ を意味する。さらに、 $x^*(p', \bar{x}) = \sum_{\alpha=1}^m x_{\alpha}(p', \bar{x}_{\alpha})$ となる場合、 $z = x^*(p, \bar{x}) - \bar{x}^*$ と書く。その i 番目の要素 z_i は i 財に対する超過需要を表わす。

仮定 II 集計的需要関数に対して、顕示選好の弱公理が成立する。即ち、すべての $h > 0$ に対して $p^1 \neq h p^0$ となるような p^0 と p^1 の任意の価格集合に対して、 $p^0 x^*(p^1, \bar{x}) \leq p^0 \bar{x}^*$ ならば、そのとき、不等式 $p^1 x^*(p^0, \bar{x}) > p^1 \bar{x}^*$ が満たされる。

さて、

$E(\bar{x}) = \{p > 0 \mid U_{\alpha}(x)$ は、 $p'x \leq p'\bar{x}_{\alpha} (\alpha=1, \dots, m)$ のもとで $\bar{x}_{\alpha}$ において最大である。}

としよう。

$p \in E(\bar{x})$ となる点 $(p, \bar{x})$ は均衡点といわれる。なぜなら、 $(p, \bar{x})$ において、あらゆる個人は彼の予算制約のもとで効用最大となる、したがって、 $z=0$ となるからである。

次に我々は、規準化されない価格調整過程を次の微分方程式(1)で表わす。

$$(1) \quad \frac{dp_i}{dt} = z_i \quad (i=1, \dots, n)$$

仮定 III (i) すべての $t \geq 0$ に対して $\bar{x}(t) = \{\bar{x}_1(t) \dots \bar{x}_m(t)\} \geq 0$.

(ii) すべての $t \geq 0$ に対して、 $\bar{x}^*(t) = \bar{x}^*(0)$.

仮定 IV すべての α に対して $U_{\alpha}(\bar{x}_{\alpha}) \geq U_{\alpha}(\bar{x}_{\alpha})$ で、すくなくとも一つの α に対して強い意味の不等式が成り立ち、すべての α に対して、 $p'\bar{x}_{\alpha} \leq p'\bar{x}_{\alpha}$ で、

$\bar{x}^* = \sum_{\alpha=1}^m \bar{x}_\alpha$ の場合には $\bar{x}^* \leq \bar{x}^*$ が成り立つような $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ が存在するならば、そのときのみ p と $\bar{x}$ において $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$, $\frac{d\bar{x}}{dt} \neq 0$ のとき、ある α に対して、 $dU_\alpha(\bar{x}_\alpha(t))/dt > 0$.

仮定 V もし $p_i / \sum_{i=1}^n p_i$ が十分小さいならば、そのとき $z_i > 0$.

仮定 VI 任意の正の初期値 $[p(0), \bar{x}(0)]$ に対して、 t および $[p(0), \bar{x}(0)]$ において連続一意の経路 $[p(t, p(0), \bar{x}(0)), \bar{x}(t, p(0), \bar{x}(0))]$ が存在する。さらに、関数の族 $\{p_i(t, p(0), \bar{x}(0)) (i=1, \dots, n) | t \geq 0\}$ は $[p(0), \bar{x}(0)]$ において equicontinuous¹⁶⁾ である。

簡単に仮定の説明をしておこう。仮定 III (i) は、いかなる個人も財の負の量をもたないことを示しており、III (ii) は、価格調整および取引の間財の生産と消費は生じないことを表わしている。仮定 IV は、いかなる個人も損をすることなく、ある個人が得をするときにのみ取引が生じることを意味する。仮定 V は価格を正にとどめておく。仮定 I, VI は比較的厳しくない数学的仮定である。

定理 8 仮定 I—VI が満たされ、 $p(0) \geq 0$ で、すべての α に対して $\bar{x}_\alpha(0) \geq 0$ ならば、そのとき、この体系は $t \rightarrow \infty$ に対して任意に均衡に近づく。

(証明) 要点と方向を述べるにとどめる。詳しい証明は Morishima [10] を見よ。

仮定 I (ii) から得られるワルラス法則、(I) および仮定 V によって、

$$p(t) \in \{p | p_i > 0, \sum_{i=1}^n (p_i)^2 = \sum_{i=1}^n [p_i(0)]^2\} \text{ for all } t > 0$$

が得られる。 $\bar{x}(t, p(0), \bar{x}(0))$ は仮定 III より有界であるから、 $t \rightarrow \infty$ に対して、 $p(t, p(0), \bar{x}(0))$ および $\bar{x}(t, p(0), \bar{x}(0))$ は極限点 $p^1, \bar{x}^1$ をもつ。

$\nu \rightarrow \infty$ ならば $t_\nu \rightarrow \infty$ となる点列 $\{t_\nu\}$ に対して、 $p^1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} p(t_\nu, p(0), \bar{x}(0))$, また、 $\bar{x}^1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{x}(t_\nu, p(0), \bar{x}(0))$ とする。

仮定 IV, III から、各 α に対して $U_\alpha[\bar{x}_\alpha(t, p(0), \bar{x}_\alpha(0))]$ は非減少である。

さて、V を

$$(2) \quad 2V = \sum_{i=1}^n [p_i(\tau, p^1, \bar{x}^1) - \bar{p}_i]^2$$

と定義する。これを τ に関して微分し、(2) および $dp_i/d\tau = z_i$ を代入することによって、 $dV/d\tau = -\bar{p}' z(p, \bar{x})$ が得られる。そしてそれは、仮定 II によって、ある $h > 0$ に対して、 $p = h\bar{p}_1$ でなければ負である。したがって、 $p(\tau, p^1, \bar{x}^1)$ でなければ、任意の $h > 0$ に対して、 $p(\tau, p^1, \bar{x}^1) \neq h\bar{p}_1$ であるから、 $\bar{p}_1 = p(\tau, p^1, \bar{x}^1)$ でなければ、

$$\frac{dV}{d\tau} = -\bar{p}' z[p(\tau, p^1, \bar{x}^1), \bar{x}^1] < 0.$$

これは $\tau \rightarrow \infty$ ならば、 V が 0 に収束することを意味する。そこで、 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} p(\tau, p^1, \bar{x}^1) = \bar{p}^1$ 。一方、仮定 III および IV より、

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} U_\alpha[\bar{x}_\alpha(t, p(0), \bar{x}_\alpha(0))] = U_\alpha(\bar{x}_\alpha^1) = U_\alpha[\bar{x}_\alpha(\tau, p^1, \bar{x}_\alpha^1)]$ for all α and τ が導かれる。これより、 $\tau \geq 0$ に対して $\bar{x}(\tau, p^1, \bar{x}^1) \geq 0$ が成立。次に、 $\bar{p}^1$ を $z(\bar{p}^1, \bar{x}^1) \leq 0$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{p}_i^1)^2 = \sum_{i=1}^n (p_i^1)^2$$

を満たす価格集合としよう。このような価格集合は存在する¹⁷⁾。また、 $\bar{p}^1 > 0$ は仮定 V から、 $\bar{p}^1$ の一意性は仮定 II から導かれる。

仮定 VI によって、関数の族

$$\{p(\tau, p^1, \bar{x}^1) \mid \tau \geq 0\}$$

は equicontinuous であるから、 $\lambda > 0, \varepsilon > 0, \delta > 0$ が存在して、 $\tau > \lambda\varepsilon, t_\nu > \lambda\delta$ となるすべての (τ, t_ν) に対して、

$$|p(\tau, p(t_\nu), \bar{x}(t_\nu)) - \bar{p}^1| \leq |p(\tau, p(t_\nu), \bar{x}(t_\nu)) - p(\tau, p^1, \bar{x}^1)| + |p(\tau, p^1, \bar{x}^1) - \bar{p}^1| < 2\varepsilon.$$

$p(\tau, p(t_\nu), \bar{x}(t_\nu)) = p(\tau + t_\nu, p(0), \bar{x}(0))$ であるから、

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(t, p(0), \bar{x}(0)) = \bar{p}^1.$$

最後に、 $p^1 \in E(\bar{x}^1)$ と $\bar{x}^1$ の一意性が示されれば(4)と合わせて、この体系は $t \rightarrow \infty$ ならば任意に均衡 $(\bar{p}^1, \bar{x}^1)$ に近づくことがいえ、証明は完了する。

15) Uzawa [16] において, Lemma 3 [16.229] の証明において不完全な部分があるために, すなわち, $p(t)$ のある部分列が均衡価格ベクトルに収束するという部分が証明されていないために, 安定性定理が成立しないことが, Ruppert and Russell [14] によって指摘された。しかし, 価格の変化率が超過需要に比例するという仮定を設けることによって Uzawa の定理が成立することが示される。[14] を見よ。

16) $|p^0 - p(o)| < \delta$ および $|\bar{x}^0 - \bar{x}(o)| < \delta$ のとき, 任意の $\varepsilon < 0$ が存在して, すべての $t \geq 0$ と i に対して, $|p_i(t, p^0, \bar{x}^0) - p_i(t, p(o), \bar{x}(o))| < \varepsilon$ となるような ε に依存する δ が存在するならば, 関数の族 $\{p_i(o), \bar{x}(o) (i=1, n) t \geq 0\}$ は equicontinuous といわれる。

17) G. Debreu [4. p. 28] を参照せよ。

結 語

我々は, 模索過程の大域的安定性に関して, 三つの視点から考察した後, 非模索過程に議論を移したのであったが, これは, 理論的には当然の方向である。なぜなら, 前にも述べた如く, 非模索過程は, より一般的であると考えられ, 市場モデルとして, より現実的だからである。しかしながら, この非模索過程の研究は, 数少ない上に, 完全なものは現在のところ, Morishima [10] および Uzawa [16] を修正した Ruppert and Russell [14] の二つしかない。非模索過程の研究の重要性にかかわらずこれに関する研究が少ない理由として, 客観的な, したがって, 誰にでも容認できる交換ルールが見い出されてないこと, およびその定式化が難しいことにあると考えられる。したがって, 今後の問題として, Negishi and Hahn [7] によって与えられたハーン・プロセスを条件を緩めることによって, 完全なものにすること, さらに, より客観的な交換ルールを発見することにあるといえる。

引用文献

- [1] Arrow, K. J., H. D. Block, and L. Hurwicz : "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II," *Econometrica*, 27 (1959), pp. 82—109.
- [2] Arrow, K. J., and L. Hurwicz : "On the Stability of the Competitive Equilibrium, I," *Econometrica*, 26, (1958), pp. 522—552,
- [3] — : "Competitive Stability under Weak Gross Substitutability: The Euclidean Distance Approach, *International Economic Review*, 1 (1960), pp. 38—49.
- [4] Debrue, G. : *Theory of Value* (New York: Wiley, 1959).
- [5] Fukuoka, M., D. Kamiya, "The Stability Condition and the Speed of Adjustment : Article Note," 「季刊理論経済学」 XIY — 2 (1964) pp. 76—8.
- [6] Gale, D. "A Note on Global Instability of Competitive Equilibrium", *Readings in Mathematical Economics* : Vol. I (Baltimore : Johns Hopkins Pres, 1968), pp. 348—354.
- [7] Hahn, F. H., and T. Negishi : "A Theorem on Non-Tâtonnement Stability," *Econometrica*, 30 (1962), pp. 463—469.
- [8] Hicks, J. R. : *Value and Capital* (2ed. ed), Oxford : oxford University Press (1936).
- [9] Kuga, K. "Weak Gross Substitutability and The existence of Competitive Equilibrium," *Econometrica*, Vol 33 No. 3 (July, 1965).
- [10] Morishima, M., "The Stability of Exchange Equilibrium An Alternative Approach," (*Equilibrium Stability and Growth*. Oxford University Pres (1964), pp. 43—53.
- [11] Negishi, T. "On the Formation of Price," *International Economic Review*, 2 (January 1961), pp. 122—6.
- [12] — : "On the Stability of Competitive Economy: A Survey Article," *Econometrica* 30 (1962), pp. 635—69.
- [13] Nikaido, H., and H. Uzawa, : "Stability and Non-Negativity in a Walrasian Tâtonnement Process," *International Economic Review*, 1 (1960), pp. 157—172.
- [14] Ruppert, R. W., and R. R. Russell, : "A Note on Uzawa's Barter Process," *International Economic Review*, 2 (1972), pp. 423—4.
- [15] Samuelson, P. A. : *Foundation of Economic Analysis*, Cambridge: Harvard University Press (1947).
- [16] Uzawa, H. : "On the Stability of Edgeworth's Barten Process,"

- Intenational Economic Review*, 2 (1962) pp.218—232.
- [17] —: “The Stability of Dynamic Process,” *Econometrica*, 29 (1961), pp.617—631.
- [18] —: “Walras’ Tâtonnement in the Theory of Exchange,” *Review of Economic Studies*, 27 (1960), pp.182—194.
- [18] Veendorp, E. C. H, “A Theorem on Non-Tâtonnement Stability: A Comment,” *Econometrica*, 37 (1969), pp.142—143.
- [20] Walras, L, : *Elements of Pure Economic* (W. Jaffé, tr.), London: George Allen and Unwin (1954).
- [21] 二階堂副包「現代経済学の数学的方法」(東京・岩波書店, 1960).
- [22] 奥口孝二「粗代替性のもとでの競争均衡の安定」横浜市大論叢・社会科学系列19 (1967).
- [23] 根岸 隆「価格と配分の理論」東京経済新報社, (1965).
- [24] ポントリヤギン (千葉訳)「常微分方程式」共立出版 (1963).
- [25] Arrow, K. J., and G. Debreu: “Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy,” *Economy*, 22 (1954), pp.265—290.