

非負行列の性質と線型経済理論：非負行列定理の国際貿易理論への適用

大住, 圭介

<https://doi.org/10.15017/3000003>

出版情報：経済論究. 33, pp.1-25, 1975-02-28. 九州大学大学院経済学会
バージョン：
権利関係：

非負行列の性質と線型経済理論

——非負行列定理の国際貿易理論への適用——

大 住 圭 介

目 次

- I. 序論的考察
- II. 非負行列に関する若干の追加的考察
 - 1. 非負行列定理
 - 2. フロベニウスの定理の証明
- III. 国際貿易の線型理論
 - 1. 一般理論
 - a) 静学モデルの可解性
 - b) 動学モデルの安定性¹⁾
 - c) 静学モデルと動学モデルとの関係
 - 2. 特殊理論
 - a) 静学モデルの可解性
 - b) 動学モデルの安定性
 - c) 静学モデルと動学モデルとの関係
 - 3. 安定行列に関する Gale と二階堂の定義の同値性
- IV. 結 語

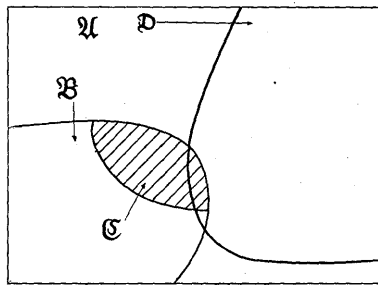
I 序論的考察

本稿で用いられる記号を次のように定義する。

- ℳ n 次元の正方行列全体の集合
- ℳ₊ ℳに属する行列で、非対角元素が非正となるもの全体の集合
- ℳ₊ ℳに属する行列で、ホーキングズ・サイモンの条件を満足するもの全体の集合
- ℳ₊ ℳに属する行列で、その元素が、全て、非負なるもの全体の集合

- R^n n 次元ベクトル全体の集合
- P R^n に属するベクトルで、その元素が、全て、非負なるもの全体の集合
- P' R^n に属するベクトルで、その元素が、全て、正なるもの全体の集合
- I 単位行列
- O 零行列
- A' 行列 A の転置行列
- A^{-1} 行列 A の逆行列
- x) n 次元ベクトル
- c)
- o 零ベクトル
- v 元素が、全て、1となる n 次元ベクトル
- R 実数全体の集合

以下、本稿で扱う条件の間を、直感的に把握可能なように、諸集合の関係を、ヴェン (Venn) 図式で、明示しておく。



本稿では、非負行列に関する既存の諸定理と筆者の導出した定理（非負行列定理）とを、利用して、線型経済理論を展開する。

第II章§1では、二条件を提示し、それらが、非対角要素が非正となる n 次の正方行列全体の集合 \mathfrak{B} の元 A に関して、ホーキンズ・サイモンの条件に同値となることを、非負行列定理(定理2, 定理3)として、提出する。これは、第III章で、Solow〔9〕に存在する叙述の不完全な点を解消する際に、効力を持つ。

次に、第Ⅱ章 § 2 で、フロベニウスの定理の証明を、二階堂〔6〕、Gale〔1〕を援用して、行う。ついで、 $f(\rho) = \rho I - A(\rho \in R, A \in \mathfrak{D})$ の原像の構造を、明確に、浮彫りにする。

第Ⅲ章では、第Ⅱ章の諸性質および非負行列に関する既存のそれを利用して、国際貿易の理論を展開する。以下、これを、概括しておこう。

ある一つの理論に対するある一つのモデルとは、同一のカルキュラス²⁾のある解釈、すなわち理論に対する、ある他の解釈のことである。理論とモデルとをこのように解すれば、さしあたり、第Ⅲ章に於て展開する国際貿易の理論とレオンチェフ・モデルとは、 $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ($A \in \mathfrak{D}$)、 $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}$ ($A \in \mathfrak{D}$) 等のような線型方程式系に関する数学的議論というカルキュラスに関して、理論とモデルとの関係に立つことになる。第Ⅲ章では以下の諸仮定を付して、線型定差方程式系を設定し、それにもとづいて問題を展開していく。i) 我々は、国民所得の系列を考察の対象とし、需要に対して、生産が一期のラグを有するという想定をおく。ii) $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{一定}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)、 $c_i(t) = c_i = \text{一定}$ とする。上記の仮定のもとに、

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

と表わされる。

第Ⅲ章 § 1 a) では、静学体系を展開し、その均衡解の存在性を論じている。b) では、国際貿易に関する動学体系を検討する。生産が需要に対して、一期のラグを持つ線型定差方程式によって表現される体系に於て、所得ベクトルの収束性、つまり第一種の完全安定性の意味での安定性の条件を考察する。c) では、静学体系と動学体系の關係に論及する。

第Ⅲ章 § 2 では、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を交換行列とし、自律的支出ベクトル \mathbf{c} を \mathbf{o} とするような特殊な状況で、§ 1 と同一の問題を考える。

第 III 章 § 3 では、安定行列に関する二階堂 [5] と Gale [1] の定義の同値性を、同一の集合の上で、証明する。

(註 1) Samuelson [8]; 佐藤隆三訳『経済分析の基礎』, 272ページ, 参照。

(註 2) Rudner [7]; 塩原勉訳『社会科学の哲学』, 24ページ, 参照。

II 非負行列に関する若干の追加的考察

1 非負行列定理 (以下の定理 2, 定理 3 を非負行列定理と名付ける)

この節では、 \mathfrak{B} に属する行列に関して、ホーキングズ・サイモンの条件に同値な条件を提示し、その証明を試みる。ところで \mathfrak{B} に属する行列に関する条件で互いに同値なものは \mathfrak{B} の部分集合の中に於ても互いに同値であることはいうまでもない。 R と \mathfrak{D} との直積を定義域とする写像 $f(\rho, A) = \rho I - A$ ($\rho \in R, A \in \mathfrak{D}$) を考える。この写像の値域は \mathfrak{B} の部分集合となる。よって、 $\rho I - A$ ($\rho \in R, A \in \mathfrak{D}$) に関しても、 \mathfrak{B} の中で、ホーキングズ・サイモンの条件に同値な条件はその同値性を保つ。

定理 1 以下の諸条件 [I], [II], [III], [IV] は \mathfrak{B} に属する任意の行列に関する条件として同値である。

[I] Weak solvability: 方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ($B \in \mathfrak{B}$) は、ある正ベクトル \mathbf{c} に対して、非負解 \mathbf{x} をもつ。つまり、 $\exists \mathbf{c} \in P' \exists \mathbf{x} \in P (B\mathbf{x} = \mathbf{c})$ 。

[II] Strong solvability: 方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ($B \in \mathfrak{B}$) は、任意の非負ベクトル \mathbf{c} に対して、非負解 \mathbf{x} をもつ。つまり、 $\forall \mathbf{c} \in P \exists \mathbf{x} \in P (B\mathbf{x} = \mathbf{c})$ 。

〔Ⅲ〕 ホーキンズ・サイモンの条件：方程式 $Bx=c$ ($B \in \mathfrak{B}$) の係数行列 B の左上隅から順次にとった首座小行列式の値が正数である。つまり、

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

〔Ⅳ〕 方程式 $Bx=c$ ($B \in \mathfrak{B}$) の係数行列 B は非負の逆行列 B^{-1} をもつ。

証明は省略、二階堂〔6〕13ページ定理1、114ページ定理3、を参照。または、二階堂〔5〕67ページ定理1、69ページ定理2、を参照。

上記の諸条件〔Ⅰ〕、〔Ⅱ〕、〔Ⅲ〕、〔Ⅳ〕を満たす \mathfrak{B} の部分集合を、それぞれ、 \mathfrak{C}_1 、 \mathfrak{C}_2 、 \mathfrak{C}_3 、 \mathfrak{C}_4 とすると、 $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_4$ が成立する。この集合を \mathfrak{C} とおく。以上の準備を前提として、以下、ホーキンズ・サイモンの条件に同値な条件で、上記の諸条件とは異なるものを提示し、証明していくことにする。

定理2 \mathfrak{B} に属する行列に関して、下記の条件〔A〕は、上記の諸条件〔Ⅰ〕、〔Ⅱ〕、〔Ⅲ〕、〔Ⅳ〕に同値である。

$$〔A〕 \quad \forall c \in P' \exists x \in P'(Bx=c).$$

(証明) $M = \{B \mid \forall c \in P' \exists x \in P'(Bx=c), B \in \mathfrak{B}\}$ とする。 $B \in M$ ならば $B \in \mathfrak{C}_1$ となることは明らかである。よって、 $M \subset \mathfrak{C}_1$ 。

次に、 $B \in \mathfrak{C}_2$ ならば、 $\forall c \in P' \exists x \in P(Bx=c)$ が成立する。これを、成分で表示すると、

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1$$

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2$$

.....

$$b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n = c_n$$

となる。ここで、 $b_{ii}x_i = c_i - \sum_{j \neq i} b_{ij}x_j > 0$ ($i=1, \dots, n$) ($c_i > 0, \sum_{j \neq i} b_{ij}x_j \leq 0$ ($i=$

$1, \dots, n$)) となるから $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$ とならなければならない。これで、 $B \in M$ が示されたから、 $\mathfrak{C}_2 \subset M$ となる。よって、以上により、 $\mathfrak{C}_2 \subset M \subset \mathfrak{C}_1$ 。

weak solvability と strong solvability の同値性により、 $\mathbb{C}_1 = M = \mathbb{C}_2$ となる。故に、条件〔A〕が上記の諸条件〔I〕, 〔II〕, 〔III〕, 〔IV〕に同値であることが証明された。 (証終)

次に、さらに、別の条件を提示し、それが上記の諸条件〔I〕, 〔II〕, 〔III〕, 〔IV〕, 〔A〕とやはり同値になることを証明する。

定理 3 \mathfrak{B} に属する行列に関して、下記の条件〔B〕は、上述の諸条件〔I〕, 〔II〕, 〔III〕, 〔IV〕, および〔A〕に同値である。

$$〔B〕 \quad \forall c \geq 0 \exists x \geq 0 (Bx = c).$$

(証明) $M' = \{B \mid B \in \mathfrak{B}, B \text{ は条件 } [B] \text{ を満たす}\}$ とする。

$B \in M'$ ならば、 $B \in \{B \mid \forall c > 0 \exists x \geq 0 (Bx = c)\}$ となるから、 $B \in \{B \mid \exists c > 0 \exists x \geq 0 (Bx = c)\}$ 。よって、 $M' \subset \mathbb{C}_1$ 。

次に、 $B \in \mathbb{C}_2$ とすると、 $c \geq 0, x = 0$ に対しては、 $Bx = c$ は絶対に成立しえない。よって、 $B \in M'$ 。これで $\mathbb{C}_2 \subset M'$ が証明された。以上により、 $\mathbb{C}_2 \subset M \subset \mathbb{C}_1$ が成立する。しかるに、 $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2$ だから、 $\mathbb{C}_1 = M' = \mathbb{C}_2$ となる。これで定理が証明された。 (証終)

さて、以上で、ホーキンズ・サイモンの条件に同値な諸条件を提示し、それらの同値性の証明を終えたわけであるが、上記の互いに同値な諸条件〔I〕, 〔II〕, 〔III〕, 〔IV〕, 〔A〕, および〔B〕と、これまでふれられなかった別の条件との関係を糸として、次に述べておく。これは次節で有効に使用される。

系 上記の諸条件〔I〕, 〔II〕, 〔III〕, 〔IV〕, 〔A〕, および〔B〕のいずれかが成り立つような B の対角元素は正である。

証明は省略、定理 2 の証明の過程から、ただちに、導出される。

2 フロベニウスの定理の証明

まず、本節で取り扱う問題とその論点を略記しておく。前節と同様に、実数の集合 R と非負行列全体の集合 \mathfrak{D} との直積を定義域とする写像 $f(\rho, A) = \rho I -$

$A(\rho \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{D})$ を考える. 値域は \mathfrak{B} である. 定義域を R とある 1 つの非負行列との直積に制限した写像の像は, ρ がマイナス無限大から, プラス無限大へと変化するとき, どのようになるだろうか. この問題に関して, フロベニウスの定理を証明しながら, 逐次, 次の諸点で, 検討を試みていくことにする.

- i) そのような像のうちで \mathfrak{C} の中に入るものが存在するか.
- ii) そのような像が存在するとすれば, その像の集合のもつ性質は何か.
- iii) 像が \mathfrak{C} に含まれるための条件は何か.

以下, フロベニウスの定理の証明を行っていくわけだが, その前に, 証明の方針を簡潔に述べておこう. ここでは, 二階堂〔6〕の中での $L(A)$ と $M(A)$ (これらの定義は, 以下の証明の過程で明示される) が, $L(A) \cap M(A) = \emptyset$, $L(A) \cup M(A) = R$ となることを, Gale〔1〕49ページ定理 2.10 を援用して, 証明する. このことの成立と, $L(A)$ の元と $M(A)$ のそれとの大小関係をも併せて考慮すると, $L(A)$ に最大数があるか, または $M(A)$ に最小数がある (二階堂〔6〕41ページ, 連続の公理). そこで, 以下に述べる $\lambda(A) = \inf M(A)$ が, $M(A) \ni \lambda(A)$ となることを示せば, 上述のことから, $\lambda(A) = \max L(A)$ となる. このような手順で, 定理 (二階堂〔6〕120ページ参照) の証明を行っていく.

定理 4 (フロベニウスの定理) A を非負行列とするとき,

- (i) A は非負の実固有値をもつ. 最大非負固有値 $\lambda(A)$ に属する非負の固有ベクトル $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が存在する.
- (ii) ある $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して, $A\mathbf{x} \geq \mu\mathbf{x}$ がなりたつような実数 μ は, 不等式 $\mu \leq \lambda(A)$ をみたす. とくに, A の任意の固有値 (一般に複素数) を ω とすれば, $|\omega| \leq \lambda(A)$. ここに, $|\omega|$ は複素数 ω の絶対値である.
- (iii) $\lambda(A)$ は A の単調増加関数である. すなわち, $A_1 \geq A_2 \geq \mathbf{0}$ ならば, $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$.
- (iv) ρ を実数, I を n 次単位行列とするとき, $\rho I - A$ が非負の逆行列 $(\rho I - A)^{-1}$ をもつための必要十分条件は, $\rho > \lambda(A)$.
- (v) $\lambda(A) = \lambda(A')$.

実数 R の元 ρ に、 $\rho I - A (A \in \mathfrak{D})$ を対応させる写像を考え、これを f とする。そうすると、 $f(\rho) = \rho I - A$ とかける。 f の値域を $V(f)$ とすると、 $V(f) = \{B \mid B = \rho I - A, \rho \in R\}$ となる。

補助定理 1 値域 $V(f)$ の元で、かつ \mathfrak{C} の元となるものが存在する。つまり、 $V(f) \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$ 。

(証明) ある $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ に対して、

$$\rho > \max_i \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{x_i}$$

を満たす実数 ρ は存在するから、そのような ρ をとると、

$$\rho \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

つまり、 $\rho \mathbf{x} - A\mathbf{x} > \mathbf{0}$ が成立する。よって、ある $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ に対して、上述のような ρ をとると、 $(\rho I - A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ となり、 $\rho I - A$ は weak solvability を満たしている。故に、 $V(f) \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$ 。 (証終)

この補助定理 1 は、上述の i) の解答となっている。

補助定理 2 ある ρ に対して、 $\rho I - A \in \mathfrak{C}$ とすると、 $\sigma > \rho$ なる σ に対して、 $\sigma I - A \in \mathfrak{C}$ となる。

(証明) $\rho I - A \in \mathfrak{C}$ であるから、ある $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ に対して、 $(\rho I - A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ となる。その \mathbf{x} に対して、 $(\sigma I - A)\mathbf{x} - (\rho I - A)\mathbf{x} = (\sigma - \rho)\mathbf{x}$ 。ところで、 $(\sigma I - A) - (\rho I - A) = (\sigma - \rho)I \geq O$ だから $(\sigma - \rho)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ 。

よって、 $(\sigma I - A)\mathbf{x} > (\rho I - A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ となる。 $\sigma I - A$ も weak solvability を満足するから、 $\sigma I - A \in \mathfrak{C}$ 。 (証終)

補助定理 3 $\rho I - A \in \mathfrak{C}$ となるような ρ の集合は下に有界である。

(証明) 前節の系より、 $\rho I - A \in \mathfrak{C}$ であるためには、対角元素が正である

こと、つまり $\rho > \max_i a_{ii} \geq 0$ であることが必要である。よって、そのような ρ の集合は下に有界である。 (証終)

$M(A) = \{\rho \mid \rho I - A \in \mathbb{C}, \rho \in R\}$ とおく。下に有界な実数の集合は下限を有するから、それを、 $\inf M(A) = \lambda(A)$ とする。

補助定理 4 $\lambda(A)$ は $M(A)$ に属さない。つまり、 $\lambda(A) \notin M(A)$ 。

(証明) $\lambda(A) \in M(A)$ とすると、ある $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ に対して、 $\lambda(A)\mathbf{x} > A\mathbf{x}$ が成立する。そうすれば、

$$0 < \varepsilon < \min_i \left(\lambda(A) - \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}{x_i} \right)$$

となる ε に対して、 $(\lambda(A) - \varepsilon)\mathbf{x} > A\mathbf{x}$ が成立して、 $(\lambda(A) - \varepsilon)I - A$ も \mathbb{C} の元となり、 $\lambda(A)$ の定義に矛盾する。 (証終)

次に、 $\{\rho \mid \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} (A\mathbf{x} \geq \rho \mathbf{x})\}$ という R の部分集合を考え、 $L(A) = \{\rho \mid \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} (A\mathbf{x} \geq \rho \mathbf{x})\}$ とおく。ここで、 $\rho \leq 0$ なる ρ に対しては、 $\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} (A\mathbf{x} \geq \rho \mathbf{x})$ という条件が成立することは明白である。

補助定理 5 $L(A) \cap M(A) = \phi$, $L(A) \cup M(A) = R$ 。

(証明) ここで、 $M(A)$ と $L(A)$ を再記しておく。

$$M(A) = \{\rho \mid \forall \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} ((\rho I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c})\} = \{\rho \mid \forall \mathbf{c} \leq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \leq \mathbf{0} ((\rho I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c})\}.$$

$$L(A) = \{\rho \mid \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} (A\mathbf{x} \geq \rho \mathbf{x})\} = \{\rho \mid \exists \mathbf{c} \leq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} ((\rho I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c})\}.$$

$M(A)$ と $L(A)$ の定義から明らかなように、 $L(A) \cap M(A) = \phi$ 。

次に、 $\rho \in L(A)$ と仮定すると、 $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して、 $(\rho I - A)\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ は成立しない。そこで Gale [1] 49ページ定理 2.10 により、ある $\mathbf{x}' \geq \mathbf{0}'$ が存在して、 $\mathbf{x}'(\rho I - A) > \mathbf{0}'$ が成立する。つまり、ある $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して、 $(\rho I - A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ 。よって $\rho I - A' \in \mathbb{C}$ 。定理 1 により、 $\rho I - A \in \mathbb{C}$ 。故に、 $\rho \in M(A)$ 。これで、 $L(A) \cup M(A) = R$ ということが証明された。 (証終)

また、 $\forall x \in L(A)$, $\forall y \in M(A)$ に対して、 $x < y$ が成立することは明らか

であるから、連続性の公理より、 $\lambda(A)$ は $L(A)$ の最大数である。よって、 $\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して、 $A\mathbf{x} \geq \lambda(A)\mathbf{x}$ が成立する。これから、二階堂〔6〕122ページの方針に従う。

補助定理 6 $A > O$ の場合、ある $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して、 $A\mathbf{x} = \lambda(A)\mathbf{x}$ が成立する。

(証明) $\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ($A\mathbf{x} > \lambda(A)\mathbf{x}$) と仮定し、 A を左側から乗ずると、

$$A(A\mathbf{x}) > \lambda(A)(A\mathbf{x})$$

となる。ところで、 $A\mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ($A\mathbf{x} > \mathbf{0}$ だから $\mathbf{y} > \mathbf{0}$) とおくと、 $A\mathbf{y} > \lambda(A)\mathbf{y}$ が成立する。

ここで、

$$0 < \varepsilon < \min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j}{y_i} - \lambda(A) \right)$$

を満たすような ε をとると、 $A\mathbf{y} > (\lambda(A) + \varepsilon)\mathbf{y}$ となって、 $\lambda(A) + \varepsilon$ も $L(A)$ の元となり、 $\lambda(A)$ が $L(A)$ の最大数であるということに矛盾する。よって、 $A > O$ の場合には、 $\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して $A\mathbf{x} \geq \lambda(A)\mathbf{x}$ が成立していれば、必ず、等号で成立しているのである。 (証終)

補助定理 7 $A_1 \geq A_2 \geq O \Rightarrow L(A_1) \supset L(A_2)$.

(証明) $\rho \in L(A_2)$ とすると、 $\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ($(\rho I - A_2)\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$)。 $(\rho I - A_2) - (\rho I - A_1) = A_1 - A_2 \geq O$ だから、その存在する $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ に対して、

$$\mathbf{0} \geq (\rho I - A_2)\mathbf{x} \geq (\rho I - A_1)\mathbf{x}$$

よって、 $(\rho I - A_1)\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ 。故に $\rho \in L(A_1)$ 。したがって、 $L(A_1) \supset L(A_2)$ 。

$L(A_2) \subset L(A_1)$ だから、 $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$ 。 (証終)

補助定理 8 任意の非負行列 A に対して、ある $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が存在して、 $A\mathbf{x} = \lambda(A)\mathbf{x}$ 。

(証明) o に単調に収束する正数列 $\{\varepsilon_r\}$ をとり、 A に上方から近似する正行列 $A_r = (a_{ijr})$ 、 $a_{ijr} = a_{ij} + \varepsilon_r$ ($r = 1, 2, \dots$) を考える。 $\lambda(A_r)$ に属する非負固有ベクトルの存在性は補助定理 6 で証明されているので、 $\lambda(A_r)$ に属する固有

ベクトル $\mathbf{x}^r \in \{\mathbf{x} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)\}$ をとると, $A_r \mathbf{x}^r = \lambda(A_r) \mathbf{x}^r$ ($r=1, 2, \dots$). 補助定理 7 により, $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2) \geq \dots \geq \lambda(A)$. 単調減少数列は下限に収束する. よって $\{\lambda(A_r)\} (r=1, 2, \dots)$ は $\lambda(A)$ に収束する. その部分列も, やはり, $\lambda(A)$ に収束することは明らかである. また, $\{\mathbf{x}^r\}$ の各項は, $\{\mathbf{x} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)\}$ (コンパクト集合) の元である. ここで, 点列 $\{\mathbf{x}^r\}$ から収束する適当な部分列 $\{\mathbf{x}^{r^2}\}$ を選び出すことが可能であり, その部分列の収束値を \mathbf{x} ととると, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (A_{r^2} \mathbf{x}^{r^2} - \lambda(A_{r^2}) \mathbf{x}^{r^2}) = \mathbf{0}$ だから, $A\mathbf{x} - \lambda(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる. 故に, $A\mathbf{x} = \lambda(A)\mathbf{x}$. ここで, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. (証終)

以上の諸補助定理から, 定理 4 が成立することを確認しておこう.

(定理 4 の証明)

(i) 補助定理 8 より, 導出される ($\because \lambda(A) = \inf M(A) \geq 0$).

(ii) $\lambda(A) = \max L(A)$ となることから, 導かれる. 後半の証明は省略, 二階堂 [6] 121 ページ参照.

(iii) 補助定理 7.

(iv) $\lambda(A)$ の定義と定理 1 より, 明らかである.

(v) $\det(\rho I - A) = \det(\rho I - A')$ だから, $\lambda(A) = \lambda(A')$. (証終)

最後に, f の像に関して, 検討すべき点が残っているので, これを吟味しておく. i) に対しては, 既に, 補助定理 1 で解答を与えておいた. ii) については, 補助定理 2, 補助定理 3, 補助定理 4 がその解答となっている. つまり, $\lambda(A) < \rho$ なる ρ に対しては, $\rho I - A$ は, \mathbb{C} の中に, 入りつつける. iii) の像が \mathbb{C} の中に入るための条件は, $\rho > \lambda(A)$ となることである.

III 国際貿易の線型理論

1 一般理論

a) 静学モデルの可解性

いま, 世界経済が n 個の国から構成されているものとし, 第 i 番目の国の国

民所得を x_i であらわす。さて、第 i 番目の国の総生産は、自国、あるいは自国以外の諸外国で需要される。ここで、第 j 国の第 i 国からの限界輸入性向を a_{ij} 、第 i 国の自律的な支出 (autonomous expenditure)¹⁾ を c_i とする。

そうすると、総支出が産出量に等しいという均衡条件は、

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + c_i \quad (i=1, \dots, n) \text{ と表わされる。}$$

さて、ベクトルを、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と定義し、行列を、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義すれば、この体系は簡単に、

$$(I - A) \mathbf{x} = \mathbf{c} \quad (3.1)$$

と表わすことができる。経済学的観点から推して、 \mathbf{x} 、 \mathbf{c} は非負ベクトル、 A は非負行列である。

ところで、このように定式化すると、非負なる自律的な支出ベクトル \mathbf{c} に対して、非負解 \mathbf{x} が存在するか否かが、吟味されねばなるまい。第II章定理1から推察されるように、 $I - A$ がホーキングズ・サイモンの条件を満足することと上述の存在性とは同値である。また、フロベニウスの定理より、 A のフロベニウス根が1より小であることが、上述の存在性と同値である。さらに、第II章で述べておいた条件のなかで、ホーキングズ・サイモンの条件に同値なものを満たすことと、上述の存在性とは同値である。これで、任意の非負なる自律的な支出ベクトル \mathbf{c} に対して、非負ベクトル \mathbf{x} の存在性の条件が確認された。

最後に、本項で述べた問題をめぐって、Solow [9] に、非負行列の構造に

ついでに認識の不完全な点があると思われるので、それを指摘しておく。Solow〔9〕(31ページ～32ページ)では、 $A > O$ の場合に、 $I - A$ に関して、ホーキンズ・サイモンの条件と第II章の条件〔A〕とが同値であるとし、 $A \geq O$ の場合には、 $I - A$ に関して、ホーキンズ・サイモンの条件の成立は第II章の条件〔II〕の成立を保証すると述べている。このように、Solow〔9〕に於ては、 $A \geq O$ の場合にも、 $I - A$ に関して、ホーキンズ・サイモンの条件と条件〔A〕とが同値であるということ認識していない。これらの同値性は、第II章で提示した非負行列定理(定理2)に於て、指摘している。

b) 動学モデルの安定性

前項で、世界経済の均衡を、静学的に、つまり時間を考慮せずに、考えた。本項では、動学的に、すなわち時間を顧慮して、展開していくことにする。 t 期における第*i*番目の国の国民所得を $x_i(t)$ で表わす。ここで、次の仮定をおく。i) $t + 1$ 期における第*i*番目の国の総生産に対する第*j*番目の国の需要は、前の期、つまり t 期における第*j*番目の国の所得に比例する。この比例定数を a_{ij} とする。

ii) 各国の自律的支出は、毎期一定である。第*i*国の自律的支出を c_i とおく。

これらの関係を定式化すると、動学的均衡条件は、

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + c_i \quad (i=1, \dots, n)$$

と表わせる。ベクトルを、

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と定義し、行列を、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義すると、簡単に、

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c} \quad (t=0, \dots) \tag{3.2}$$

と表わすことができる。ここで、 $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ とする。

$\mathbf{x}(0)$ からはじめて、逐次、求めていくと、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= A\mathbf{x}(0) + \mathbf{c} \\ \mathbf{x}(2) &= A\mathbf{x}(1) + \mathbf{c} = A(A\mathbf{x}(0) + \mathbf{c}) + \mathbf{c} \\ &= A^2\mathbf{x}(0) + A\mathbf{c} + \mathbf{c} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

一般に $\mathbf{x}(t)$ は、

$$\mathbf{x}(t) = A^t\mathbf{x}(0) + (I + A + \dots + A^{t-1})\mathbf{c} \tag{3.3}$$

と類推できる。ここで、 t をプラス無限大にすると $\mathbf{x}(t)$ が、静止解 $(I-A)^{-1}\mathbf{c}$ に、収束するか否かが、本項での論点となる。つまり、いかなる状況のもとで、上述の動学体系が安定であるかを明確にすることが必要である。これに関しては、次の定理が解答を与えてくれる。

定理 5 $A \geq O$ の場合、以下の 3 条件は同値である。

- i) $\forall \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ に対して、動学体系の解 $(\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}, t=0, \dots)$ は、静止解 $(I-A)^{-1}\mathbf{c}$ に収束する。
- ii) A の全ての固有値の絶対値は 1 より小である。
- iii) $I-A$ の首座小行列式の値は正である。つまり、

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & \dots & -a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{k1} & \dots & 1-a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k=1, \dots, n)$$

である。

次の定理が成立することを証明しておけば、この定理の成立は、定理 1 より、導出される。

定理 6 $A \geq O$ の場合、次の 3 条件は同値である。

- i) $\forall \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ に対して、動学体系(3.2)の解 $(\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}, t=0, 1, \dots)$ が静止解 $(I-A)^{-1}\mathbf{c}$ に収束する。
- ii) 行列 A の全ての固有値の絶対値が 1 より小である。
- iii) $(I-A)^{-1}$ が非負である。

証明を試みる前に、補助定理を証明しておく。

補助定理9 非負行列 A の全ての固有値の絶対値が1より小となるための必要十分条件は、その行列 A のフロベニウス根が1より小となることである。

(証明) フロベニウス根が1より小であれば、フロベニウスの定理より、 A の任意の固有値 ω に対して、 $|\omega| \leq \lambda(A) < 1$ が成立する。このことから、任意の固有値 ω に対して、 $|\omega| < 1$ となる。

A の全ての固有値の絶対値が1より小であれば、 A のフロベニウス根も、定義より固有値であるから、1より小となる。 (証終)

補助定理10 $A \geq O$ の場合、 $(I-A)^{-1}$ が非負行列となるための必要十分条件は A のフロベニウス根 $\lambda(A)$ が1より小となることである。

証明は省略、第2章 § 2 より、ただちに、導かれる。

以上の補助定理の成立を前提として、定理6の証明を行っていくことにする。

条件 A から条件 B が導かれることを $A \Rightarrow B$ と書くことにすると、本定理の証明には、iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i) \Rightarrow iii) を示せばよい。これが証明されれば、上述の条件のどれを仮定しても、他の二条件が導かれる。

(証明) i) iii) \Rightarrow ii) は補助定理9, および補助定理10より明らかである。

ロ) ii) \Rightarrow i) 行列 A の全ての固有値が1より小であれば、補助定理9より、フロベニウス根 $\lambda(A)$ は1より小である。(3.3)で、 $I+A+\dots+A^{t-1}$ は、 t をプラス無限大とすると、 $(I-A)^{-1}$ に収束する(二階堂〔6〕132ページ系)。また、 t をプラス無限大とすると、 A^t は O に収束する(二階堂〔5〕79ページ定理2)。したがって、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = (I-A)^{-1}\mathbf{c}$ となり、i) が成立する。

ハ) i) \Rightarrow iii). $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{o}$ ($t=0, 1, \dots$) だから $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{o}$.

$\forall \mathbf{c} \geq \mathbf{o}$ に対して、 $\exists \mathbf{x}(t)$ ($t=0, 1, \dots$) が存在して、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = (I-A)^{-1}\mathbf{c}$ ならば、 $I-A$ は定理1の strong solvability の条件を満たす。よって、定理1より、 $(I-A)^{-1} \geq \mathbf{o}$ となる。以上で、定理6の証明がなされた。(証終)

上述の定理から看取されるように、動学体系(3.2)の安定性と同値な条件

を導出してはいるが、非負行列 A に対して、 $I - A$ の左上隅から順次にとった首座小行列式が、全て、正数であるか否かを吟味するのは、余りに、繁雑すぎる。検討の手順をより簡潔にするために、同値な条件ではないが、安定性のための十分条件をここに掲げておく。

定理 7²⁾ $A \geq 0$, $s_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ ($j=1, 2, \dots, n$) とすると、 $s_j < 1$ ($j=1, 2, \dots, n$) ならば、動学体系 (3.2) は安定である。

(証明) 二階堂〔6〕140ページ定理3, 二階堂〔5〕88ページから明らかのように、 $\lambda(A) \leq \max_j s_j < 1$. よって $\lambda(A) < 1$ となり、動学体系 (3.2) は安定である。 (証終)

この定理から次のことが明らかになる。 t 期の所得を、全て、 $t+1$ 期の、自国を含めた諸外国からの輸入に、あててしまわないというように A の構造がなっていれば、動学体系 (3.2) は安定だということになる。

次に、分解可能性、および分解不能性の定義を与え、経済学的解釈を附しておく。

定義 一般に、 n 次非負正方行列 $A = (a_{ij})$ の行、列の番号 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ が二つの空でない部分集合 L, M に分割され、 $N = L \cup M, L \cap M = \phi, L \neq \phi, M \neq \phi$ となり、

$$a_{ij} = 0 \quad (i \in L, j \in M \text{ のとき})$$

が成立するとき、 A は分解可能であるという。分解可能でないとき、分解不能という。分解可能な行列は適当な置換行列 P によって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & * \\ 0 & & & & A_m \end{pmatrix}$$

というかたちになる。左下側の O の部分にある元素はすべてゼロであり、右上側の $*$ の部分には非負の元素がある。

諸国のグループで、そのグループ以外の諸国からは決して輸入しないというようなグループを閉じた経済ブロックと呼ぶ。 A が分解可能な行列であれば、

閉じた経済ブロックが存在し、そのブロックに対する自律的支出の効果は、ブロック外に“leak”することはない。つまり、その閉じた経済ブロックに対する自律的支出の変動は、そのブロックに属さない諸国に対しては誘発的な需要 (derived demand) を創出するという事はない。というのは、そのブロック内の各国は、そのブロック内の諸国のものを需要するだけだからである。これが分解不能行列となると事情が異なってくる。分解不能な場合には、世界のどの国かに費いやされた自律的支出は、結局、部分的ではあるが、せいぜい $n-1$ 年後までには、他の諸国にも影響を与える。

さらに、上述の定義を加味して、非負行列 A に対して、(3.2) が安定となるための十分条件をのべておく。

定理 8³⁾ $A \geq 0$ が分解不能であり、かつ $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ ($i=1, \dots, n$) のうち少くとも一つは 1 より小であり、他は 1 より大でないならば、 $\lambda(A) < 1$ となる。

(証明) 上述の条件から、 $\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$ 、 $\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1$ となることは

明らかである。ここで、 $\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ならば、 $\lambda(A) < 1$ 、 $\max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$

$> \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ならば、二階堂 [5] 88 ページより、 $\min_i \sum_{j=1}^n a_{ij} < \lambda(A) < \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$ となることから、やはり、 $\lambda(A) < 1$ 。 (証終)

定理 9 A を分解可能な非負行列とし、 A のどの列和も 1 以下とする。そうすれば、 A の全ての固有値の絶対値が 1 より小となるための十分条件は、 $P^{-1}AP$ の対角小行列、 A_1, \dots, A_m が、それぞれ、少くとも 1 つ、1 より小なる列和を持つことである。

(証明) $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(\lambda I_{n_1} - A_1) \cdot \det(\lambda I_{n_2} - A_2) \cdot \dots \cdot \det(\lambda I_{n_m} - A_m)$ より、 $\{\lambda \mid |\lambda I - A| = 0\} = \{\lambda \mid |\lambda I_{n_1} - A_1| = 0, \dots, \text{または } |\lambda I_{n_m} - A_m| = 0\}$ となる。 A_1, \dots, A_m が、それぞれ、少くとも 1 つ、1 より小なる列和を持ち、他の列和は 1 より大とならないから、 $\{\lambda \mid |\lambda I_{n_i} - A_i| = 0\}$ ($i=1, \dots, m$) は $\{\lambda \mid \lambda < 1\}$ に含まれる。よって $\{\lambda \mid |\lambda I - A| = 0\}$ も $\{\lambda \mid \lambda < 1\}$ に含まれる。 (証終)

c) 静学モデルと動学モデルの関係

前項で、既に、明らかにしておいたが、静学モデルの非負値条件と動学モデルの安定性の条件は同値となる。これを集合の記法で表示すると、 $\{A \mid I-A \in \mathbb{C}, A \geq 0\} = \{A \mid \forall \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \text{ に対して, } \mathbf{x}(t+1) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} \text{ の解 } \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0} (t=0, 1, \dots) \text{ が存在して, } (I-A)^{-1}\mathbf{c} \text{ に収束する. } A \geq 0\}$ となる。森嶋〔4〕54ページでは、下記に定理として掲げるように、安定条件と静止解の正值条件とを分解不能性の上で、とらえることを強調している。しかし、前項で述べておいたように、広く、任意の非負行列の上でも、同値となることはいえるのである。但し、第II章の非負行列定理（定理2）から推されるように、 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ なる場合に限り、 $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ の存在が保証されている。

定理10 $A \geq 0$. A が分解不能であれば、(3.1) に於て、任意の半正ベクトル \mathbf{c} に対して正ベクトル \mathbf{x} が存在するための必要十分条件は、動学体系 (3.2) が安定となることである。

(証明) 動学体系 (3.2) が安定であれば、 $I-A \in \mathbb{C}$. A は分解不能だから、 $I-A$ の逆行列 $(I-A)^{-1}$ は正行列である(二階堂〔5〕86ページ〔3〕)。よって、任意の $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ に対して $\mathbf{x} = (I-A)^{-1}\mathbf{c} > \mathbf{0}$ となる。

次に、任意の $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ に対して $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ が存在すれば、明らかに、 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ に対しても、 $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ が存在し、weak solvability を満たす。よって $I-A \in \mathbb{C}$ となり、動学体系 (3.2) は安定となる。 (証終)

2 特殊理論

a) 静学モデルの可解性

本項では、下記の状況のもとでの均衡の存在性に言及する。i) 第 i 国の総生産に対する需要は、完全に、自国を含めた、諸外国の所得に依存している。前節での \mathbf{c} は、 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ となる。ii) 各国は、ちょうど、自国の所得分だけ、自国を含めた諸外国から需要する。つまり、第 j 国の所得を x_j 、第 j 国の第 i 国に対する需要を x_{ij} とすると、 $\sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 。iii) 各国の輸入構造は、所得に関係なく、一定である。したがって、 a_{ij} を第 i 国からの輸入に

費いやされる第 j 国の所得の割合とすると,

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

となる。さて、ベクトルを,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と定義し、行列を,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad 4)$$

と定義するならば、総需要が産出量に等しいという均衡条件は,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{3.4}$$

で表わされる。

上記のような設定のもとで、はたして、均衡的な状況を現出させる所得の組が存在するだろうか。これに対しては、次の定理の成立を述べれば、十分であろう。

定理11 A が交換行列であれば、 $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ となる半正ベクトル \mathbf{x} が存在する。

(証明) $\min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \lambda(A) \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$ (二階堂〔6〕140ページ 定理3, 二階堂〔5〕88ページ〔9〕) より、 $\lambda(A) = 1$ が成立する。つまり、 A のフロベニウス根は1であるから、フロベニウスの定理により、 $\lambda(A) = 1$ に属する非負の固有ベクトル $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が存在する。

(証終)

ここで、上記 (3.4) 式を満たすような $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ を均衡ベクトルと呼ぶことにする。次に、設定されたモデルの範囲内で、いかなる状況のもとに、各国が正なる所得を有することが可能となるか。つまり、 $A \geq O$ が如何なる条件を満足するときに、(3.4) 式は正の均衡ベクトルを有するのか。以下、これを、考え

ていく。

定理12 交換行列 A が分解不能ならば、任意の均衡ベクトル \mathbf{x} は正であり、それは、正の定数倍を除いて、一意に定まる。

(証明) A は分解不能だから、とにかく、 $\lambda(A)=1$ に属する正固有ベクトル \mathbf{x} が存在して、しかも、 $\lambda(A)$ に属する任意の固有ベクトルは、この \mathbf{x} の定数倍である(二階堂〔5〕86ページ〔1〕)。よって、均衡ベクトルの定義より、任意の均衡ベクトルは、この \mathbf{x} の正数倍となる。(証終)

したがって、 A が前節で定義を附しておいた分解不能性を満たす場合に、上述のような状況が成立するのである。

b) 動学モデルの安定性

まず、 t 期に於る第 i 番目の国の所得を $x_i(t)$ 、第 j 国の第 i 国に対する需要を $x_{ij}(t)$ と表わす。ここで、次のような諸仮定をおく。

i) $t+1$ 期に於る第 i 番目の国の総生産に対する第 j 番目の国の需要 $x_{ij}(t+1)$ は、前の期、すなわち t 期に於る第 j 番目の国の所得に比例している。この比例定数を a_{ij} とおく。

ii) 自律的支出は存在しない($c_i=0$)。

iii) 各国は前の期の所得を、次の期の自国を含めた諸外国に対する需要にあててしまう。つまり、 $x_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, n)$ 。

経済学的に推して、 t 期の所得 $x_j(t)$ がゼロとなることは考えられないから、 $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j=1, \dots, n)$ となる。したがって、以上の設定のもとに、動学的均衡条件は、

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であらわされる。

前項と同様に、ベクトルを、

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

のように定義し、行列を、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

のように定義するならば、上述の動学的均衡条件は簡単に、

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0} \quad (t=0, 1, \dots) \quad (3.5)$$

とあらわすことができる。

次に、本項では、以上の設定のもとに、所得ベクトルの変動の様相を取り扱う。つまり、時点0より、 t が変化していくにつれて、 $\mathbf{x}(t)$ が如何なる変動を示すかを論ずる。 A は上記の仮定より交換行列である。まず最初に、 A が分解不能性を満たす場合を考察していく。分解不能行列 A に関して、次のような定義を与えておく。

定義 交換行列 A は、 $\mathbf{x}_0 \mathbf{v} = \mathbf{x} \mathbf{v}$ を満たす任意の半正ベクトル \mathbf{x}_0 に対して $A^k \mathbf{x}_0$ の列が \mathbf{x} に収束するような非負ベクトル \mathbf{x} が存在するならば、安定である。集合の記法で示すと、 $\{A \mid A \text{は安定である}\} = \{A \mid \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \forall \mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 \mathbf{v} = \mathbf{x} \mathbf{v}\} (\text{点列 } A^k \mathbf{x}_0 (k=1, 2, \dots) \text{ が } \mathbf{x} \text{ に収束する})\}$ 。これは、Gale [1] 272ページで与えられている安定行列の定義である。

この定義と二階堂 [5] の安定行列に関する定義との同値性を次節で証明する。

定義 交換行列 A は、もし指数の集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ が m 個の部分集合 S_1, S_2, \dots, S_m に分割されて、 $r < m$ について、 $j \in S_r, i \in S_{r+1}$ の場合、および $j \in S_m, i \in S_1$ の場合を除き、 $a_{ij} = 0$ となるならば、周期的 (periodic) であるといわれる。

さて、上記の定義を前提として、次の定理が成立する。

定理13 分解不能な交換行列は安定であるか周期的であるかのいずれかである。

証明は省略、Gale〔1〕274ページ定理8.4、二階堂〔5〕109ページ定理1を参照。

この定理から、 A が分解不能行列であれば、上記の動学体系は安定であるか、周期的となる。

最後に、 A が完全分解可能な場合には、このサブモデルの構造に従って、安定となるか、周期的となる。

c) 静学モデルと動学モデルの関係

交換行列 A が分解不能な場合、安定であれば、 $t \rightarrow \infty$ とすると、 $\mathbf{x}(t) = A^t \mathbf{x}(0)$ が、あるベクトル \mathbf{x} に収束することは、次節より、明らかとなる。この \mathbf{x} は、どのような性質のものなのか。これと、a)項の体系(3.4)と如何なる関係にあるのか。以下、これらについて、検討していく。但し、 $\mathbf{x}(0) \geq \mathbf{0}$ とする。

定理14 交換行列 A が、分解不能、かつ、安定であれば、 $t \rightarrow \infty$ とすると、 $\mathbf{x}(t) = A^t \mathbf{x}(0)$ は静学体系(3.4)の均衡解に収束する。

(証明) $\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t+1) = \lim_{t \rightarrow \infty} A \mathbf{x}(t) = A \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = A \mathbf{x}$. このことから、 \mathbf{x} が静学体系(3.4)の均衡解となる($\because \exists \nu (A^\nu > O)$). (証終)

3 安定行列に関する Gale と二階堂の定義の同値性

第Ⅲ章§2で指摘しておいたが、本節では、Gale〔1〕による安定行列の定義と二階堂〔5〕によるそれとの同値性を同一の非負行列の集合の上で証明していく。Gale〔1〕の定義は前節で与えておいたので、ここでは、省略する。二階堂〔5〕90ページでは、安定行列の定義を下記の如く与えている。

二階堂〔5〕による定義：行列 A は非負、かつ、分解不能とする。 $\lambda = \lambda(A)$ とおくとき、 $\forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}$ に対して、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} \mathbf{x}_0$ が存在する場合に、 A を安定行列という。

集合の記法で示すと、 $\{A \mid A \text{は安定である}\} = \{A \mid \forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \in R^n (\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{\lambda(A)^k} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x})\}$.

ただし、Gale〔1〕は交換行列の上で定義し、二階堂〔5〕は分解不能な非負行列の上で定義している。本節では、分解不能な交換行列全体の集合の上で、これらの安定行列に関する定義が同値となることを、証明していく。

(証明) A が分解不能な交換行列だから、 $\lambda(A)=1$. よって、二階堂〔5〕による定義は、 $\{A \mid A \text{は安定である}\} = \{A \mid \forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \in R^n (\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{x})\}$ となる。 $A \in \{A \mid \forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \in R^n (\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{x})\}$ とすると、 A に関して、 $\forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} \in R^n (\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{x})$ が成立する。

ところで、二階堂〔5〕の意味で、 A が安定であれば、適当な ν に対して、 $A^\nu > O$ となる(二階堂〔5〕93ページ〔1〕)。よって、 $k \geq \nu$ に対して、 $A^k > O$ が成立する。

したがって、 $\forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0} \exists \mathbf{x} (\lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} > \mathbf{0})$. この存在する $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ は $\lambda(A)=1$ に属する固有ベクトルである($\because \mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{k+1} \mathbf{x}_0 = A \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}$).

故に、 $\forall \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}$ に対して、 $A^k \mathbf{x}_0 (k=1, 2, \dots)$ は、 $\lambda(A)$ に属する正の固有ベクトルに収束する。

$\mathbf{x}_0 v = m > 0$ とすると、 $\forall \mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 v \doteq m, \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}\}$ に対して、 $A^k \mathbf{x}_0 (k=1, 2, \dots)$ が \mathbf{x} に収束しないことを示せば十分である。

$\mathbf{x}_0 v = m' \doteq m (\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}$ だから $m' > 0$)とすると、 $(\frac{\mathbf{x}_0}{m'}) v = 1$ となるから、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m' \left(A^k \frac{\mathbf{x}_0}{m'}\right)\| = m' \doteq m = \|\mathbf{x}\|$ (ここで、 $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$).
したがって、 $\lim_{k \rightarrow \infty} m' \left(A^k \frac{\mathbf{x}_0}{m'}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \mathbf{x}_0 \doteq \mathbf{x}$ となる。故に、 $\forall \mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 v = m, \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}\}$ に対して、点列 $A^k \mathbf{x}_0$ が \mathbf{x} に収束する。

逆に、 $A \in \{A \mid \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \forall \mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 v = \mathbf{x} v, \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}\}$ (点列 $A^k \mathbf{x}_0$ は \mathbf{x} に収束する)ならば、 $\mathbf{x} v = l > 0$ とすると、 $\forall \mathbf{y} \in \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{x}_0 / l, \mathbf{x}_0 v = l, \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}\} = S_n$ に対

して、点列 $A^k y$ は $x/l \geq 0$ に収束する。故に、 $\forall x_0 \in \{x_0 | x_0 \geq 0\}$ は、 $\exists \alpha > 0 \exists y \in S_n (x_0 = \alpha y \geq 0)$ と表わされるから、 $\forall x_0 \geq \exists \bar{x} \geq 0 (\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k (\alpha y) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} A^k y = \alpha \cdot x/l = \bar{x} \geq 0)$ となる。 (証終)

(註1) 第 i 国に対する需要の中で、各国の所得に依存しない部分。

(註2) 定理6から、明らかなように、安定性の条件は、 $I - A$ がホーキンズ・サイモンの条件を満たすことと同値である。よって、ここに掲げる条件は、 $I - A$ に関して、ホーキンズ・サイモンの条件が成立するための十分条件に他ならないということは理解されるであろう。これが、周知の Solow の列和条件である。

(註3) このことは、二階堂〔5〕88ページより、列和に関しても成立することがいえる。

(註4) この行列 A のことを、Gale〔1〕では、交換行列 (exchange matrix) と呼んでいる。以後、この用語を使用する。これは、確率論での確率行列に、相応している。

IV 結 語

本稿の骨子は、第1章序論的考察に於て、詳細に述べておいたので、ここでは、若干の補足を附して、稿を閉じることとする。

まず、最初に、ホーキンズ・サイモンの条件とドミナント・ダイアゴナル (dominant diagonal) を持つこととが、 $\mathfrak{B} \cap \{A | A \in \mathfrak{A}, a_{ii} > 0 (i=1, \dots, n)\}$ に属する行列に関して、同値となることを指摘しておく。これらの同値性は、Gantmacher〔2〕86ページ補助定理3を援用すれば、Mckenzie〔3〕60ページ定理4'より、直ちに、導出されうる。

次に、第三章§3で、安定行列についての二階堂〔5〕とGale〔1〕の定義の同値性を、分解不能な交換行列全体の集合の上で、証明したが、これらの同値性は、安定行列に関するGale〔1〕と二階堂〔5〕の定理群を比較する際に、効力を持つこととなる。

最後に、第三章に於て使用した動学モデルという用語は、Gale〔1〕, Solow〔9〕の用法に従っており、加速度原理を導入した動学的レオンティエフ・モデル (武野・時政〔10〕第4章参照) とは異なることを附記しておく。

参 考 文 献

- 〔1〕 Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, 1960.
- 〔2〕 Gantmacher, F. R., *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers, 1959.
- 〔3〕 Mckenzie, L. W., "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory," in *Mathematical Methods in the Social Sciences*, edited by K. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes, Stanford University Press, 1960.
- 〔4〕 森嶋通夫『産業連関と経済変動』大阪大学経済学部社会経済研究室, 1955.
- 〔5〕 二階堂副包『経済のための線型数学』培風館, 1961.
- 〔6〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店, 1960.
- 〔7〕 Rudner, R. S., *Philosophy of Social Science*, Prentice-Hall, 1966; 塩原勉訳『社会科学の哲学』培風館, 1971.
- 〔8〕 Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947; 佐藤隆三訳『経済分析の基礎』勁草書房, 1967.
- 〔9〕 Solow, R., "On the Structure of Linear Models," *Econometrica*, Vol. 20, 1952.
- 〔10〕 武野秀樹・時政勲『線型経済学』有斐閣, 1973.