資産選択の理論構造

江副, 憲昭

https://doi.org/10.15017/2999997

出版情報：経済論究. 29, pp.63-95, 1973-02-10. 九州大学大学院経済学会

資産選択の理論構造

江　副　憲　昭

目　次

序

資産選択の理論は，またポートフォリオ・セレクションともよばれるが，これまで J. Tobin, H. Markowitz, J. Lintner, A. Roy らによって，豊かに展開されてきた。本論では，この流れに沿って資産選択の理論構造を把握することを狙いとしている。

資産選択理論は，形式的には制約条件下の最適問題を取り扱うものである。

従って，その操作はいきおい数学的に展開されざるをえない。しかし，定式化にいたるまでの基礎的な理論展開こそが，理論の成否にかかわるところであるので，第一章では，選択決定の目標となる行動基準に関して，特に重点をおいて展開している。

第二章は，導出された行動基準に従って，最適な資産構成（最適ポートフォリオ）が，いかに決定されるかを取扱っている。このプロセスは，機会軌跡の導出とその最適決定との2段階に分けて展開される。

つづく，第3章は， Roy により提唱された「安全第一原理」を検討し，それを最適資産決定に応用する。この原理は，期待効用最大化原理と似た点もあるが，その発想には見逃せないユニークさがある。そこでは，効用関数に関する情報が必要とされないのである。

第一章　資産選択の行動基準

1—1　資産選択と不確実性

資産選択の理論は，投資主体（投資家ともよぶ）の保有する資産総額を所与とするとき，そのポートフォリオ（資産混合）をいかに配分・構成するかについての最適化問題である。ここでポートフォリオとは，各種資産の組合せの配合比構成を意味するものとする。

対象となる資産は，現金・株式などの金融資産，家屋・設備などの実物資産等々，いろいろ考えられるが，ここでは一般に市場で取引されるものはすべて対象に含まれるものとしょう。

ところで，これら各種資産のもたらす収益は，将来の出来事に属しているので，不確実かつ不慮の損失の危険におびやかされていると考えられる。したがって，資産選択論は，不確実な収益をもたらす各種資産をいかに構成して最適ポートフォリオを見い出すかという問題となる。そこでは予想と結果とが1対1に対応する確実性下の選択問題とは，本質的に異なった取扱いが必要となっ

てくる。この不確実性を保った決定問題という点こそが，従来のミクロ経済学の決定理論と区別する，資産選択論の本質的な特徴なのである。

では，この不確実性（危険と同じ意味とする）を経済行動にとり入れるにはどうすればよいか。それは，この不確実性を確率分布として表現すればよいのである。もちろん，それは唯一の方法ではないが，現在支配的な方法である。

次に考えなければならないことは，不確実ないし危険が存在する状況下で，何を最適化の指標すなわち行動基準として採用すべきかという問題である。この問題に対する解答が，次節のテーマである「期待効用最大化原理」なのである。

1—2　期待効用仮説

不確実性あるいは危険のある状況での選択行動を分析する場合，何を合理的な行動の基準とするかを考えねばならない。

まず，はじめに「期待収益最大化」の行動基準が考えられた。だがこれは次の例にみるように矛盾が生ずる。

いま歪みのないコインを表が出るまで投げつづけるとする。n回投げて始めて表が出るならそのとき 2^n 円の報酬を受けるという賭けを考える。この場合の収益の期待値は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n)\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\cdot\frac{1}{2}+2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots\cdots=\infty$$

となる。賞金の期待値が無限大ならば，その賭けにいくら巨額の金を賭けても有利なはずである。しかし，人々はこの賭けに参加しないので，これは実際の経験と矛盾する。この矛盾は，有名な St. Petersburg のパラドックスといわれるものである。

この事実は，不確実性が存在するとき，人々の行動基準を収益の期待値の最大化に置くことが，不適当であることを示すものである。

そこで，その解決として考えられたのは[1]，D. Bernoulli による「期待効用

仮説」であった。これは収益の期待値でなく，収益の効用に対する期待値の最大化を行動基準とする発想である。だが，これはギャンブルの行動が説明できないとして否定された。

その後，Von. Neumann および O. Morgenstern によるエポックメーキングな著書，*Theory of Games and Economic Behavior* 1944が出るにおよんで，期待効用仮説は確固とした基礎づけが与えられることになった。彼らは次にのべるような公理的接近法をとった。

すなわち，その命題は経済主体にとって，合理的かつもっともらしく，否定しえないような基本的諸原理を設定し，その公理系にそって不確実性下の選択を行うならば，そのとき，彼は収益の基数的効用関数を設定することが可能であり，効用の数学的期待値の最大化を志向するように行動するというのである。

この公理的接近法は，その後いろんな学者により，この公理体系をできるだけ合理的かつ簡潔にする努力がなされた。ここではその試みの1つである I. Herstein および J. Milnor[2] による公理体系を示すことにしよう。

考えられるすべての収益の予想を f，g，h……とし，その集合をSであらわす。f, g, h……は確率分布と想定する。集合Sの任意の元の凸一次結合はまたSの元であるとする。このときSは混合集合とよばれる。

公理1　集合Sで定義された対関係$\gtrsim$（例えば，$f \gtrsim g$ はgはfより選好されないと解釈する）は完全順序である。完全順序とは次の条件を満たせばよい。

（i）任意の f，$g \epsilon S$ に対して

$f \gtrsim g$; あるいは $g \gtrsim f$

が成立しなければならない。

（ii）任意の，f，g，$h \epsilon S$，かつ $f \gtrsim g$，$g \gtrsim h$

ならば，そのとき

$f \gtrsim h$ となる。

公理2　任意の $f, g, h \in S$ に対して,

集合 $\{\alpha \mid \alpha f+(1-\alpha)g \gtrsim h\}$ および $\{\alpha \mid c \gtrsim \alpha f+(1-\alpha)g\}$

は閉じている。

公理3　もし $f, f' \in S$ かつ $f \sim f'$ (但し$\sim$は互に無差別な関係をあらわす) ならば, そのとき任意の $g \in S$ に対して,

$$\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}g \sim \frac{1}{2}f'+\frac{1}{2}g$$

が成立する。

以上の3つの公理の意味を考える。まず公理1は, すべてのSの元について, 個別主体が完全な選好順序を決定しうることを意味している。公理2は, 個人の選好順序は確率分布に関して連続であるという意味である。公理3は, もし個人がfとf'との間の選択に関して無差別ならば, かれはまたAとA'との間の選択に対してもまた無差別であることを意味する。ただし, Aはfあるいはgを得る機会が50対50, A'はf'あるいはgを得る機会が50対50であることを示すとする。

以上のもっともらしい公理系を前提とすると, 集合Sに属するすべての元から次の条件を満たす実数値関数Uが存在することが証明できる[3]。

(i)　$f>g$ ならば $U(f)>U(g)$

(ii)　$U[\alpha f+(1-\alpha)g]=\alpha U(f)+(1-\alpha)U(g)$

さらに, (i)(ii) を満たす任意の関数 $U(f)$, $U(f')$ について,

$$U'(f)=w_0U(f)+w_1$$

が成立する。ただし $w_0>0$, w_1 は定数。関係$>$は選好関係である。

以上により, 3つの公理から出発して, 順序保存的でしかも線型であり, さらに正一次変換をのぞき一意的に定まる可測な効用関数を導くことができるのである。これを「期待効用定理」とよぶ。

この定理が成立するならば, 投資家は, 期待効用を最大化するように行動するという基準が得られることになる。したがって, 各投資家の選好指標は

$E[U(f)]$であらわされることになった。ただしEは数学的期待値をあらわす。

ところでこの効用の可測性については，Friedman & Savage[4] による解釈がある。概略を述べておこう。

予想fの効用は任意の実数 $V[U(f)]$ の関数族で与えられる。これを特定化して考えてみる。いま予想を単位時間当りの収益Rとする。また $P_f(R)$ をRの発生する確率密度関数とすると，予想は累積確率分布関数となり

$$F_f(R) = \int_{-\infty}^{R} P_f(R)dR$$

とあらわされる。前定理から，選好順序特性を満たすような実数値関数の存在が保証されているので，それをRのある関数 $C(R)$ の期待値と想定する。これは式であらわすと

$$E[C_f(R)] = \int_{-\infty}^{\infty} C_f(R)P_f(R)dR = \int_{-\infty}^{\infty} C_f(R)dF_f(R)$$

となる。このような関数 $C(R)$ が存在すれば，原点と単位が与えられれば，それは一意に定まる。また $E[C_f(R)]$ は順序保存的であるから族 $V[U(f)]$ に属する。これを改めて効用とよることにすればよい。このことは

$$U(f) = E[C_f(R)]$$

を意味している。

以上で明らかなごとく，C(R) が存在し，f，g，h…間の序列が指定されると，それぞれ可能な収益を含む予想 f，g，h… の間で投資家がどのような選択を行なうかは，対応する序列系列$E[C_f(R)]$，$E[C_g(R)]$，$E[C_h(R)]$……のうちで最高序列水準に対応する予想を選ぶと考えればよいのである。これが期待効用仮説の内容である。

注

1）このような学説史的展開は，K. Arrow, "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica*, 1951 に詳しい。

2）Herstein〔文献 2〕.

3）Herstein〔文献 2〕の p293～p297 に証明があるが，長くなるので引用は避け

た。

4) Friedman〔文献1〕.

1—3 E—V投資基準

投資家にとって，ポートフォリオがもたらす収益は確率分布とみなすことができる。そこでその確率分布のいくつかの特性を投資家の合理的投資基準として採用することを考えてみよう。

投資家は収益が不確実なので，最も確からしい平均的結果を行動の目安とするであろう。これは確率分布の数字的期待値で表わされる。他の事情が等しいなら，より大なる期待値を与える資産構成ほど望ましいものである。ところが，同じ期待値を与えるものでも，その期待値が実現する確からしさの確信の程度が異なれば，その間の選好順序は異なるであろう。その程度は，期待値を中心とする確率分布のばらつきの程度，即ち分散あるいは標準偏差で測ることができる。

かくして，投資家はポートフォリオのもたらす収益の期待値$\boldsymbol{E}$と標準偏差$\boldsymbol{V}$という2つのパラメーターで構成される選好関数を最大にするように行動するという仮説が得られる。これを2パラメーター接近法といい，その行動基準は$\boldsymbol{E}$—$\boldsymbol{V}$投資基準と呼ばれている。これは多くの投資理論で採用されている基準である。

したがって選好指標を$\boldsymbol{F}$とすれば，

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{V})$$

となる。

次に，前節でのべた期待効用仮説とこの $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{V}$ 投資基準との関係を考えてみよう。いま期待効用仮説にもとづいて行動し，かつ $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{V}$ 投資基準に従うとするならば，このとき投資家の効用関数の形状を確定することができる。そ

れは次の定理によって保証される。

定理[1)] EはRの期待値，Fは$f(R)$の期待値とする。

このとき，（ i ）投資家が，ある効用関数の期待値を最大にし，（ ii ）かれの選好は，EとFだけに基づくならば，

かれは，効用関数 $aR+bf(R)$ の期待値を最大化する。その逆も真である。

証　　明

$U=aR+bf(R)$ が（ i ），（ ii ）を意味することは自明である。その逆，（ i ）と（ii）は，$U=aR+bf(R)$ を意味することの証明。もし，(E_1, F_1)と(E_2, F_2)が2つのポートフォリオの（E, F）組合せならば，「確率pでポートフォリオ1，確率（$1-p$）でポートフォリオ2という確率結合」の（E, F）組合せ（E^o, F^o）は，

$$E^o=pE_1+(1-p)E_2$$

$$F^o=pF_1+(1-p)F_2$$

である。このことから公理系がこの（E, F）組合せにも適用可能となることがわかった。例えば，もし$(E_1, F_1)>(E_2, F_2)$ならば，公理Ⅱより $p(0<p\leq 1)$ に対して，

$$p(E_1,F_1)+(1-p)(E_3,F_3)>p(E_2,F_2)+(1-p)(E_3,F_3)$$

となる。したがって公理2は，収益の確率分布の場合と同様に，（E, F）組合せにも適用できる。公理1および3もまた（E, F）組合せに適用できることが示される。（E, F）組合せに適用されるこれらの公理は，これらの組合せが線形の順序関数

$$E[U]=aE+bF$$

によって順序づけられることを意味する。$E[U]$ は，$U=aR+bf(R)$ の期待値である。（証明終り）

上の定理では，危険の尺度を収益Rに関する関数fの期待値としている。それゆえ危険の尺度はFの定義を満すものなら何でもよいわけである。そこで，もしRの分散を危険の尺度とするならば，Rの分散 $E[(R-E[R])^2]$ はRの関

数 $f(R)=(R-E[R])^2$ の期待値にほかならない。

したがって（i）期待効用の最大化を志向する投資家の選好が，（ii）収益 $\boldsymbol{R}$ の確率分布に関する期待値 $\boldsymbol{E}$ と分散 $E[(R-E(R))^2]$ に依存すると設定するとき，効用関数 $\boldsymbol{U}$ は，$\boldsymbol{R}$ の2次式となることが明らかになった。

注

1）この定理と証明は Markowitz〔文献4〕による。彼の公理体系は，前述の公理系と比べて，公理2および3で異なってみえる。すなわち，

公理2　$f>g$ ならば

$$\alpha f+(1-\alpha)h>\alpha g+(1-\alpha)h$$

が成立する。

公理3　$f>g$ かつ $g>h$ ならば，

$$g\sim\alpha f+(1-\alpha)h$$

となる定数 α が存在する。

しかし，この公理はいずれも，Herstein〔文献2〕の公理系から導けるのである。

またこの定理の証明は，他に，Marcel Richter, "Cardinal Utility, Portfolio Selection and Taxation," *Review of Economic Studies*, 1960. p153～154に別証がある。

1—4　投資主体の類型

前の定理により，効用関数の形は収益 $\boldsymbol{R}$ に関する2次多項式であることがわかった。このことを利用すると，期待効用関数は明確に指定され，また選好指標 $\boldsymbol{F}$ の具体的な形状とその特徴も明らかにすることができる。効用関数が2次式ということを媒介として期待効用仮説と $\boldsymbol{E}$—$\boldsymbol{V}$ 投資基準の選好指標 $\boldsymbol{F}$ とが斉合するのである。

効用関数を，

$$U(R)=aR+\frac{1}{2}bR^2 \qquad (1-1)$$

としよう。投資家は収益に関して不飽満であるから，$\dfrac{dU}{dR}=a+bR>0$ の範囲

で定義される。

（1—1）の期待値をとると，

$$E[U(R)]=aE[R]+\frac{1}{2}bE[R^2]$$

$$=a\mu_R+\frac{1}{2}b\left(\mu_R^2+\sigma_R^2\right) \qquad (1—2)$$

となる。ここで μ_R は R の期待値を，σ_R は R の標準偏差をあらわすものとする。

$E[U]$ をある水準に固定すると，$E[U]^0$ をもたらす σ_R と μ_R の関係が求まる。これは同じ水準の期待効用をもたらす点（$\mu\sigma$，μ_R）の軌跡，すなわち無差別曲線の式である。

（1—2）式の左辺を固定し σ_R，μ_R について全微分し，適当に整理すると，無差別曲線の勾配 $\frac{d\mu_R}{d\sigma_R}$ と曲率 $\frac{d^2\mu_R}{d\sigma_R{}^2}$ が得られる。

$$\frac{d\mu_R}{d\sigma_R}=-\frac{b\sigma_R}{a+b\mu_R} \qquad (1—3)$$

$$\frac{d^2\mu_R}{d\sigma_R{}^2}=-\frac{b\{(a+b\mu_R)^2+(b\sigma_R)^2\}}{(a+b\mu_R)^3} \qquad (1—4)$$

（1—3）および（1—4）の符号を調べることによって，無差別曲線の形状を明らかにできる。

ところで，J. Tobin[1] は投資家は危険に対する選好特性により，次の3つに分類できるとした。

（i）危険回避者，期待値一定のもとで収益の危険が増大すると期待効用が減少する。記号であらわすと，

$$\frac{\partial E[U]}{\partial\sigma_R}=b\sigma_R<0 \qquad (1—5)$$

（ii）危険愛好者；期待値一定のもとで収益の危険が増大すると期待効用が増大する。記号であらわすと，

$$\frac{\partial E[U]}{\partial\sigma_R}=b\sigma_R>0 \qquad (1—6)$$

(iii) 危険中立者；危険に対して中立である。

$$\frac{\partial E[U]}{\partial \sigma_R}=b\sigma_R=0$$

この分類を応用すると，無差別曲線は，投資家の危険選好特性により，明確にその特徴づけができる。

危険回避者は，

$$\frac{d\mu_R}{d\sigma_R}>0, \qquad \frac{d^2\mu_R}{d{\sigma_R}^2}>0 \tag{1—7}$$

であるから，無差別曲線はつねに右上りであり，上方に凹である。

危険愛好者は，

$$\frac{d\mu_R}{d\sigma_R}<0, \qquad \frac{d^2\mu_R}{d^2{\sigma_R}^2}<0 \tag{1—8}$$

であるから，無差別曲線はつねに右下りであり，上方に凸である。

危険中立者の場合，無差別曲線は直線となることは明白である。

ここで（1—7），（1．8）の符号の判別は，

$$\frac{\partial E[U]}{\partial \mu_R}=a+b\mu_R>0, \qquad \sigma_R>0$$

がわかっているので，結局（1—5），（1—6）の符号で判別される。

以上3つの無差別曲線の形状は，それぞれ次表に示されている。

結局，投資家の3つの危険選好特性によつて，$E[U]=F=\text{const}$ は μ_R, σ_R において，3つの無差別曲線群として分類されたのである。

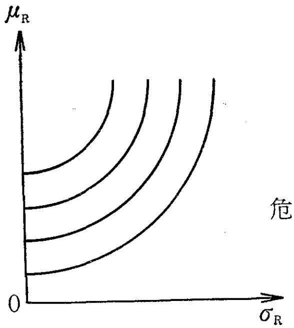
以上は，効用関数がRに関する2次式であることを利用して無差別曲線を導いたのであるが，同じ結果が別のルートを通じても導かれることが，J. Tobin[2] によって指摘されている。それは，確率分布が，正規分布のような特殊な分布関数[3] であることを仮定すればよい。

その証明を簡単に示しておこう[4]。

ポートフォリオ収益Rの確率密度関数を，$p(R\,;\mu_R,\ \sigma_R)$ とする。

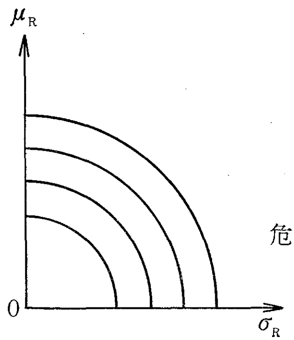
効用の期待値は，

（1－1）図



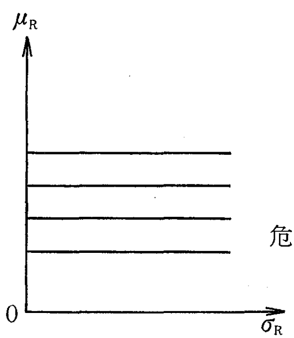
危険回避者の無差別曲線

（1－2）図



危険愛好者の無差別曲線

（1－3）図



危険中立者の無差別曲線

$$E[U]=\int_{-\infty}^{\infty}U(R)\cdot p(R\,;\,\mu_R,\,\sigma_R)dR \qquad (1-9)$$

と書ける。ここで $R=\mu_R+z\sigma_R$ の一次変換を行うと,

$$E[U]=\int_{-\infty}^{\infty}U(\mu_R+z\sigma_R)\cdot p(z\,;\,0.1)dz \qquad (1-10)$$

になる。上式から無差別曲線の傾きを得ることができる。

$$\frac{d\mu_R}{d\sigma_R}=-\frac{\int_{-\infty}^{\infty}U'(\mu_R+z\cdot\sigma_R)\cdot z\cdot p(z\,;\,0.1)dz}{\int_{-\infty}^{\infty}U'(\mu_R+z\cdot\sigma_R)\cdot p(z\,;\,0.1)dz} \qquad (1-11)$$

この式の符号を調べればよい。

$U'(\mu_R+z\sigma_R)=U'(R)$ は, Rの限界効用であるから常に正である。故に,上式の分母は正となる。

もし, U' がRの減少関数ならば,上式の分子は負となる。それゆえ無差別曲線の勾配は正となる。定義からこの無差別曲線が特性づけられる投資主体は危険回避者である。またU'がRの増加関数ならば,(1—11) の分子は正で,無差別曲線の勾配は負となる。このような効用関数は危険受好者を特徴づけるものである。

次に無差別曲線の曲率を検討しよう。任意の2点(σ_R, μ_R)および(σ_R', μ_R')とが同一無差別曲線に属し,

$$U(\mu_R+z\cdot\sigma_R)=U(\mu_R'+z\cdot\sigma_R')$$

であるとしよう。この2点を結ぶ中点$\left(\frac{\sigma_R+\sigma_R'}{2},\ \frac{\mu_R+\mu_R'}{2}\right)$が,同一の無差別曲線よりも高位にあるか低位にあるかを問題にすればよい。いま効用関数の形状が増加的であるが,その限界効用が逓減的である場合(すなわち危険回避者の場合)には,

$$\frac{1}{2}U(\mu_R+z\cdot\sigma_R)+\frac{1}{2}U(\mu_R'+z\cdot\sigma_R')<U\left(\frac{\mu_R+\mu_R'}{2}+z\frac{\sigma_R+\sigma_R'}{2}\right)$$

が成立つ。したがって中点の期待効用は$(\sigma_R,\ \mu_R)$および$(\sigma_R',\ \mu_R')$を含む無差別曲線の対応する期待値よりも高位となる。このことから,危険回避者の

無差別曲線は必ず上方に凹となる。同様の議論は，逓増的限界効用をもつ効用関数の場合についても成立し，危険受好者の無差別曲線は必ず上方に凸であることが示される。以上で証明は終った。

これまでの節で，不確実を含む決定理論において，行動目標となる行動基準ないしは，選好指標を明確に把握できた。従って，次章では，この目標関数を最大にするには，各資産をいかに構成すればよいか，すわなちポートフォリオの最適決定問題に，いよいよ進むことになる。

注

1）J. Tobin〔文献6， 7〕参照。
2）J. Tobin〔文献6， 7〕参照。
3）正規分布は，(ｉ)投資家は分布の期待値と標準偏差が指定されると，すぐ可能な結果に対する確率を知ることができる (ii) 再生性といわれる性質をもつ，という2点で重要である。
4）詳しい数式展開は，J. Tobin〔文献6， 7〕を参照すること。

第二章　最適ポートフォリオの決定

2—1　仮定と記号

前章で述べた行動基準をもとに，本章ではポートフォリオの最適決定問題を取扱う。最適決定は，

（ｉ）投資機会軌跡の導出，（ii）その最適化

と2段階に分けて行なわれる。まず以下で使用する仮定や記号などを整理しょう。

仮　　定

(a)　投資家は保有する資産をいかなる割合でも任意の個別資産に投資できる。

(b)　すべての資産は将来収益が不確実性をもつ危険資産であり，全部で n 個

あるとする。

(c)　個々の資産は完全競争市場で取引され，取引費用や税金は存在しない。

(d)　投資家は借り入れをしない。

(e)　投資家の資産収益は配当・利子やキャピタルゲインを含んでいるものとする。

(f)　投資家の保有する資産の総現在価値は一定である。

(g)　投資家は，すべて利用可能な資産の予想収益に関するある一定の多変量確率分布を想定している。あるいは少くとも，それぞれの資産の予想収益の数学的期待値および任意の2資産の予想収益間の共分散を確信をもって予測しているとする。これらすべての期待値は，保有する資産の大きさ，その構成から独立な一定の値をとり，分散も同様に一定でゼロでなく，また分散，共分散行列は退化しないと仮定する。

(h)　前章で述べたように，投資家の選好関数は，将来収益の期待値と標準偏差によって構成されている。いま，任意の2組のポートフォリオが同じ期待値を与えるならば，投資家は，より小なる標準偏差を与える構成の方を好み，逆にそれらが同じ標準偏差をもつならば，より大なる期待値を与えるポートフォリオを好むとする[1]。

記　　号

R_i　i 番目危険資産の収益。

α_i　i 番目危険資産のポートフォリオにおける構成比。

μ_{Ri}　i 番目危険資産収益R_iの期待値。

σ_{Ri}　i 番目危険資産収益R_iの標準偏差。

σ_{Rij}　i 番目と j 番目の危険資産収益間の共分散[2]。

ρ_{ij}　i 番目と j 番目の危険資産収益間の相関係数　($\rho_{ij}=\dfrac{\sigma_{Rij}}{\sigma_{Ri}\,\sigma_{Rj}}$ なる関係がある)。

V　分散・共分散行列。

P　相関係数行列。

ところで，仮定(b)より

$$\sigma_{Ri}>0$$

となり，また仮定(h)より

$$-1<\rho_{ij}<1$$

となる。同じく，行列$\boldsymbol{V}$および$\boldsymbol{P}$は，対称行列であり，非特異である。

注

1）仮定(h)は，明らかに危険回避者を想定している。
2）2資産が同じものであった場合には，$\sigma^2{}_{Ri}$：は分散をあらわす。

2—2　投資機会軌跡

$\boldsymbol{n}$種の危険資産を編成してポートフォリオをつくる。そのとき構成比は非負で，その和は1とする。

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\qquad \alpha_i\geqq 0 \tag{2—1}$$

$\boldsymbol{n}$種危険資産を任意に編成して得られるポートフォリオの収益$\boldsymbol{R}$は

$$R=\alpha_1R_1+\alpha_2R_2+\cdots+\alpha_nR_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iR_i \tag{2—2}$$

である。

そのとき，収益$\boldsymbol{R}$の期待値 μ_R と分散 $\sigma_R{}^2$ を求めれば，

$$\mu_R=E[R]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE[R_i]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_{Ri} \tag{2—3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_R{}^2&=E[(R-E[R])^2]=E[\{\sum\alpha_i(R_i-\mu_{Ri})\}^2]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\sigma_{Rij}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\rho_{ij}\sigma_{Ri}\sigma_{Rj}\end{aligned} \tag{2—4}$$

となる。

投資家にとって，期待収益が同じであれば，危険はなるべく小さいポートフォリオを選ぶであろう。そこで，同一期待収益 $\mu_R{}^o$ を与えるポートフォリオのなかで危険 σ_R を最小にする構成比（$\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n$）の組を求める。それは次の最小化問題の解として与えられるが，その解の集合が投資機会軌跡と云われるものにほかならない。

問題〔I〕Minimize；$\sigma_R{}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\rho_{ij}\sigma_{Ri}\sigma_{Rj}$

Subject to；$\mu_R{}^o=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_{Ri}$

$$1=\Sigma\alpha_i$$

$$\alpha_i\geqq 0\ (i=1\cdots\cdots n)$$

ただし，ρ_{ij}，σ_{Ri}，μ_{Ri} $\mu_R{}^o$ の数値は所与。

この問題は２次計画問題[1]といわれる。Kuhn-Tncker の定理[2]を利用すれば，解が求まる。簡単化のため

$$y=\begin{pmatrix}\alpha_1\sigma_{R1}\\ \vdots\\ \vdots\\ \alpha_n\sigma_{Rn}\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}\dfrac{\mu_{R1}}{\sigma_{R1}}\\ \vdots\\ \dfrac{\mu_{Rn}}{\sigma_{Rn}}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_{R1}}\\ \vdots\\ \dfrac{1}{\sigma_{Rn}}\end{pmatrix}\qquad(2-5)$$

とおけば，問題〔I〕は，ベクトルで表示される。

問題〔I'〕Minimize；$\sigma_R{}^2=y'Py$

Subject to；$\mu_R{}^o=y'a$

$$1=y'b$$

$$\alpha_i\geqq 0$$

ラグランジュ関数を L とおけば，

$$L=y'Py+2\lambda_1(\mu_R{}^o-y'a)+2\lambda_2(1-y'b)\qquad(2-6)$$

となる[3]。ここで〔I'〕の $\sigma_R{}^2$ を最小にする条件は，最適解（z^o，λ^o）が L の非負鞍点となることである。したがって，次の等式·不等式体系を解けばよい。

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2Py - 2\lambda_1 a - 2\lambda_2 b \quad \geqq 0 \\[2ex]
y \cdot \dfrac{\partial L}{\partial y} = y(2Py - 2\lambda_1 a - 2\lambda_2 b) = 0 \\[2ex]
\quad y \geqq 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \mu_o^R - y'a = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - y'b = 0
\end{array}
\right.
\tag{2—7}
$$

いま $y>0$ とすると，結局

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
2Py - 2\lambda_1 a - 2\lambda_2 b = 0 & (2—8) \\
\mu_R{}^o - y'a = 0 & (2—9) \\
1 - y'b = 0 & (2—10)
\end{array}
\right.
$$

を解けばよい。

（2—8）より，$|P| \fallingdotseq 0$ だから

$$y = P^{-1}(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \tag{2—11}$$

となる。(2—11)，(2—9)，(2—10) より

$$
\begin{pmatrix} \mu_R{}^o \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} a'P^{-1}a & b'P^{-1}a \\ a'P^{-1}b & b'P^{-1}b \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}
\tag{2—12}
$$

ここで，

$$a'P^{-1}a = \alpha,\ a'P^{-1}b = b'P^{-1}a = \beta,\ b'P^{-1}b = \alpha \tag{2—13}$$

とおくと，（2—12）式より，結局

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}
= \frac{1}{4}
\begin{pmatrix} \gamma & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mu_R{}^o \\ 1 \end{pmatrix}
\tag{2—14}
$$

となる。ただし

$$\varDelta = \alpha\gamma - \beta^2 \fallingdotseq 0$$

一方，

$$
\sigma_R{}^2 = y'Py = [\mu_R{}^o,\ 1]
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}
\tag{2—15}
$$

であるから，（2—14）および（2—15）より次式を得ることができる。

$$[\alpha\gamma-\beta^2]\sigma_R{}^2-\gamma\mu_R{}^{o2}+2\beta\mu_R{}^o-\alpha=0 \qquad (2-16)$$

行列表記では，

$$\begin{vmatrix} \sigma_R{}^2 & \mu_R & 1 \\ \mu_R & \alpha & \beta \\ 1 & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-17)$$

となる。上式は，任意の μ_R に対して危険の最小化を実現する σ_R と μ_R との間の2次関係式である。では，この曲線はどのような形状をしているかをしらべてみよう。

（2—16）ないし（2—17）の2次曲線に関する判別は係数の2つの行列式 δ，Δ について符号をみればよい[4]。

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha\gamma-\beta^2 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{vmatrix} = -(\alpha\gamma-\beta^2)\gamma \qquad (2-18)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha\gamma-\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \beta \\ 0 & \beta & -\gamma \end{vmatrix} = (\alpha\gamma-\beta^2)^2 \qquad (2-19)$$

結局，$\delta<0$，$\Delta\neq0$ となり[5]，上の2式は2次双曲線であることが判明した。

この双曲線[6]が投資機会軌跡といわれるものである。また，Markowitz はこれを有効フロンティアともよんでいる。

注

1）三根　久，『オペレーションズ・リサーチ』上，1966，p153～179. 片岡信二，『数理計画法』，1971，p119～130. 等を参照のこと。

2）多くの文献にあるが，注1）の文献で十分である。

3）λ_1 および λ_2 はラグランジアン乗数である。

4）代数学や幾何学のテキストには必ずこの解説がある。例えば，切力金二郎『線型代数学』1969，p144.

5）任意のスカラー ε をとりQを，2次形式

$$Q=(a\varepsilon+b)'P^{-1}(a\varepsilon+b)$$

とおく。Pは正値定符号なのでP^{-1}も正値定符号となる。したがってQも同じく正値定符号となる。上式をεに関して整理すると，

$$Q=a'P^{-1}a\varepsilon^2+2a'P^{-1}b+b'Pb>0$$

である。εの2次式が常に正であるためには，判別式が常に負であればよい。

$$(a'P^{-1}b)^2-(a'P^{-1}a\cdot b'P^{-1}b)<0$$

$$\therefore \alpha\gamma-\beta^2=(a'P^{-1}a\cdot b'P^{-1}b)-(a'P^{-1}b)^2>0$$

また$b'P^{-1}b$はP^{-1}が正値定符号だから常に正，よって，$\delta<0$，$\Delta\neq 0$が証明された。

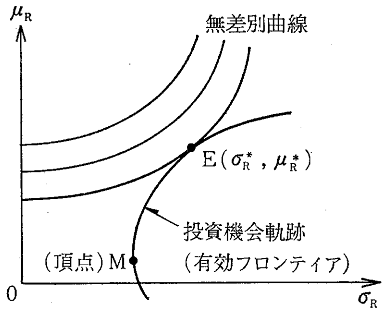
6）この双曲線の頂点の座標は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{b'P^{-1}b}},\ \frac{a'P^{-1}b}{b'P^{-1}b}\right)$$

で与えられる。

2—3　ポートフォリオの最適決定

前節で投資機会軌跡は双曲線であることがわかった。すると，投資家の期待効用を最大にするようなポートフォリオ編成，即ち最適ポートフォリオを求めるには，投資家の主観的選好序列に対応する無差別曲線群と投資機会軌跡との接点を求めればよい。



(2—1) 図

この関係は，（2—1）図に示されている。図で接点$E(\sigma_R^*,\ \mu_R^*)$が最適点であるが，これは最適構成比の組（$\alpha_1^*\cdots\alpha_n^*$）と対応している[1]。

このように，n種危険資産選択の最適化行動は，実行可能な投資機会集合のなかから，期待値を最大にするポートフォリオ編成を発見することとみなすことができる。この観点から，最適化は，制約条件付き期待効用最大化の2次計画問題として定式化される。

問題〔Ⅱ〕Maximize　$E[U(R)]=\beta_1\mu_R+\frac{1}{2}\beta_2(\mu_R^2+\sigma_R^2)$

$$\text{Subject to} \quad \mu_R=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu_{Ri}$$

$$\sigma_R{}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\rho_{ij}\sigma_{Ri}\sigma_{Rj}$$

$$1 \ =\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

$$\alpha_i \geqq 0$$

ここで μ_{Ri}, σ_{Ri}, ρ_{ij} は与件パラメーターであり，α_i, μ_R, $\sigma_R{}^2$ は未知数である。

問題〔Ⅱ〕は次の問題〔Ⅱ〕′と同値である。

問題〔Ⅱ〕′ Maximize $E〔U(R)〕=\beta_1\mu_R+\frac{1}{2}\beta_2(\mu_R{}^2+\sigma_R{}^2)$

$$\text{Subject to} \quad \sigma_R{}^2〔a'P^{-1}a\cdot b'P^{-1}b-(a,P^{-1}b)〕^2-b'P^{-1}b\mu_R{}^2 +2a'P^{-1}b\mu_R-a'P^{-1}a=0$$

ラグランジアン関数を L とし，λ をラグランジアン乗数とする。

$$L=\beta_1\mu_R+\frac{1}{2}\beta_2(\mu_R{}^2+\sigma_R{}^2)+\lambda\{\sigma_R{}^2(\alpha\cdot\gamma-\beta^2)-\gamma\mu_R{}^2+2\beta\mu_R-\alpha\} \quad (2-20)$$

ここで未知変数は σ_R, μ_R および λ である。また（2—13）を利用している。上式において最大化のための条件は，次の連立方程式を解くことである。

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial\sigma_R}=\beta_2\sigma_R+2\lambda\sigma_R(\alpha\gamma-\beta^2)=0 && (2-21)\\ &\frac{\partial L}{\partial\mu_R}=\beta_1+\beta_2\mu_R-2\lambda\cdot\gamma\mu_R+2\lambda\beta=0 && (2-22)\\ &\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\sigma_R{}^2(\alpha\gamma-\beta^2)-\gamma\mu_R{}^2+2\beta\mu_R-\alpha=0 && (2-23)\end{aligned}\right.$$

（2—21），（2—22）より λ を消去すると

$$-\frac{\beta_2\sigma_R}{\beta_1+\beta_2\mu_R}=\frac{\sigma_R(\alpha\gamma-\beta^2)}{\gamma\cdot\mu_R-\beta} \quad (2-24)$$

と得るが，これは左辺が無差別曲線の勾配，右辺が双曲線の勾配をあらわして

いる。すなわち両曲線の相接条件である。また（2—21),（2—22)（2—23) の同時解は，最適ポートフォリオの点（$\sigma_R{}^*$, $\mu_R{}^*$）を与える。

そこで，最適ポートフォリオ構成比を求めることにしよう。まず，最適ポートフォリオの期待収益 $\mu_R{}^*$ は，やはり双曲線（投資機会軌跡）上にあるから，問題〔I'〕を満足させる。したがって，問題〔I'〕の条件である（2—8)，（2—9)，（2—10）の連立方程式において μ_R に $\mu_R{}^*$ を置き，最適構成比 $\alpha_i{}^*(i=1, \cdots, n)$ について解けばよい。

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} & \dfrac{\mu_{R1}}{\sigma_{R1}} & \dfrac{1}{\sigma_{R1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} & \dfrac{\mu_{Rn}}{\sigma_{Rn}} & \dfrac{1}{\sigma_{Rn}} \\ \dfrac{\mu_{R1}}{\sigma_{R1}} & \cdots & \dfrac{\mu_{Rn}}{\sigma_{Rn}} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sigma_{R1}} & \cdots & \dfrac{1}{\sigma_{Rn}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \sigma_{R1} \\ \vdots \\ \alpha_n \sigma_{Rn} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_R{}^* \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2—25)$$

上式左辺の左側行列を Ω と表わす，行列 Ω の主座小行列式である行列 $\boldsymbol{P}$ は正値定符号であるから，$\mu_{R1}=\cdots\cdots=\mu_{Rn}$ とならぬかぎり残余の2列（行）は一致せず，すべての列（行）は1次独立となる。それゆえ Ω は非特異行列である。すると行列 Ω の逆行列が存在する。いま行列 Ω の（i, j）要素の余因子を Ω^{ij} とおけば，（2—25）は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \sigma_{R1} \\ \vdots \\ \alpha_n \sigma_{Rn} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} & \dfrac{\mu_{R1}}{\sigma_{R1}} & \dfrac{1}{\sigma_{R1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} & \dfrac{\mu_{Rn}}{\sigma_{Rn}} & \dfrac{1}{\sigma_{Rn}} \\ \dfrac{\mu_{R1}}{\sigma_{R1}} & \cdots & \dfrac{\mu_{Rn}}{\sigma_{Rn}} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sigma_{R1}} & \cdots & \dfrac{1}{\sigma_{Rn}} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_R{}^* \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2—26)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\ \sigma_{R1} \\ \vdots \\ \alpha_n\ \sigma_{Rn} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\Omega|} \begin{pmatrix} \Omega_{11} \cdots\cdots \Omega^{n1} & \Omega^{n+1,1} & \Omega^{n+2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega^{1,n} \cdots\cdots \Omega^{nn} & \Omega^{n+1,n} & \Omega^{n+2,n} \\ \Omega^{1,n+1} \cdots\cdots \Omega^{n,n+1} & \Omega^{n+1,n+1} & \Omega^{n+2,n+1} \\ \Omega^{1,n+2} \cdots\cdots \Omega^{n,n+2} & \Omega^{n+1,n+2} & \Omega^{n+2,n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_R{}^* \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2-27)$$

任意の $\alpha_i\sigma_{Ri}$ の要素は

$$\alpha_i\sigma_{Ri} = \frac{\Omega^{n+1,i}}{|\Omega|}\mu_R{}^* + \frac{\Omega^{n+2,i}}{|\Omega|}(i=1, \cdots\cdots n) \qquad (2-28)$$

となるから，最適ポートフォリオ構成比 α_i は，

$$\alpha_i{}^* = \frac{1}{\sigma_{Ri}}\left(\frac{\Omega^{n+1,i}}{|\Omega|}\mu_R{}^* + \frac{\Omega^{n+2,i}}{|\Omega|}\right) \qquad (i=1, \cdots\cdots n) \qquad (2-29)$$

によって求まるのである。

注

1）ここでは無差別曲線と投資機会軌跡の双曲線とが接する場合であった。しかしそうならないケースも起りうる。いま無差別曲線が危険回避者の性質をもつとする。そのとき最適点が接するか端点で交わるかは，両曲線の勾配および曲率の相対的大きさによって決まる。この関係を（2—2）図に示しておいた。

また，無差別曲線が，危険愛好者の性質をもつとするならば，（2—3）図にみるように，必ず端点で交わる。

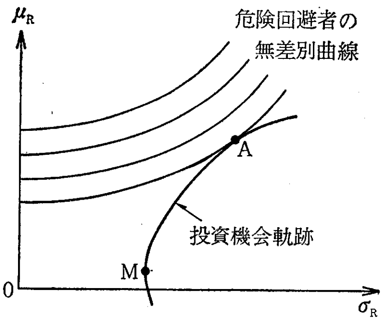
容易にわかるように，最適点が接点のときは，分散投資（α^*_i の複数個は非ゼロ）であり，端点のときは，集中投資（1つの資産に集中して投資する）である。

なお，（2—2），（2—3）図のように端点で交わる場合をコーナーマキシマムと言う。

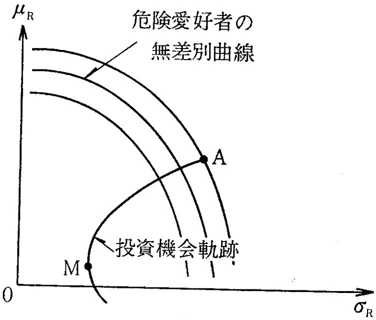
2—4　残された課題

以上で最適ポートフォリオの決定が理論的に展開されることになった。だが，その内容には，まだ検討をつけ加えるべき点も多い。その幾つかをひろってみよう。

（i）資産はすべて危険資産としたが（仮定(b)），実際には，現金のような



(2—2) 図



(2—3) 図

安全資産もポートフォリオ編成のなかに含まれているはずである。したがって，安全資産を含めたポートフォリオ分析が必要である。その場合，「分離定理」[1]の成立が示される。

（ii）市場については，理想的な状態が考えられているが（仮定(c)），実際には，取引費用や税金などが存在する。これらを理論に組み入れる必要がある。

(iii) 投資家は借り入れをしないとされているが（仮定(d)），現実的ではない。借り入れを含んだ場合の検討も必要であろう。

(iv) ここでは将来は，ある1時点のみに限定している。しかし現実には，1年後のこと，10年後のことを同時に考えて，資産投資を行うのである。したがって投資決定を1期間から多期間へと動学化する必要がある。その場合，投資の保有する現在資産仮定も一定でなく(仮定(f))，変動することが考えられる。

その他いろいろな問題が考えられるであろう。だが，これらの諸点に対しては，多くの学者によって取り組まれており，それぞれ稔り豊かな結果を生んでいる。例えば，J. Tobin, H. Markowitz, J. Lintner など。このようにポートフォリオ選択理論の具体化，現実化の努力がなされているが，ここでは，この問題に対してこれ以上触れないことにする。

他方，投資基準（仮定(h)によって示されている）について，何か別な接近法はないのだろうか。これに対して，A. Roy〔文献5〕は「安全第一原理」を提唱した。後に検討するように，本質的にはこれまでのべたことにつながるも

のであるとしても，その発想には見逃せないユニークさがある。そこで我々は，次章において A. Roy の「安全第一原理」を取り上げることにしょう。

注
1）「分離定理」については，特に藤野〔文献9〕に詳しい。

第三章　安全第一原理と最適資産選択

3—1　「安全第一原理」の意義

期待効用仮説とE—V投資基準にもとづく資産選択理論は，投資家の総投資残高を各種資産に配分投資する際に，ポートフォリオ収益に関する効用の期待値が最大となるようなポートフォリオを選択することが最適であると教えている。ところが，そこでは，実際に投資家が，あらゆる実行可能な投資機会に対して，詳細・正確な経済的知識をもつことが要求されている。しかし現実には，そのような経験的知識を持つことは不可能であるし，しかも，その知識は主観的であいまいなものである。

この観点に対して，Roy[1] は「安全第一原理」を提唱したのである。では，その原理はどういう内容であるのか説明しょう。

まず， Roy は，経済主体の主たる関心が，利潤あるいは効用の満足を求めることよりも，むしろ「災難」の発生を避けることにあると考えた[2]。ここで「災難」というのは，経済主体のある行動の結果として，大きな損失が生ずるとか，予想をはるかに下回る収入しか得られないことによって，正常な経済活動の継続が困難となるような事態を意味するものである。投資家は，合理的であれば，かかる「災難」が生ずる機会をできるだけ減少させようとするであろう。彼はこれを「安全第一原理」と名ずけたのである。

いま単純化のため，「災難」の水準は一定であると仮定する。また「安全第一原理」が採用され，可能な行動の集合が与えられるとき，粗収益がある大きさ d 以下にならないよう心がけるとしよう。さらに，あらゆる可能な行動に対して，期待値 μ_R と標準偏差 σ_R をもつ不確定な収益が対応し，それらの値は既知であると仮定する。すべての実行可能な行動選択に対して，μ_R と σ_R の値が所与であるなら，これらの間には何らかの関数関係が存在すると考えられ，この関数を

$$f(\sigma_R, \mu_R)=0 \qquad (3-1)$$

と表記する。

所与の σ_R と μ_R の値に対して，収益が d に等しいかあるいはそれ以下になる確率を正確に決定することは不可能であるが，この確率の上限を求めることはできる。それは Bienaymé-Tchebycheff の不等式によって与えられる。いま収益を確率変数 ξ とすれば，

$$P(|\xi-\mu_R|\geqq\mu_R-d)\leqq\frac{{\sigma_R}^2}{(\mu_R-d)^2} \qquad (3-2)$$

となる。したがって，

$$D(\mu_R-\xi\geqq\mu_R-d)=P(\xi\leqq d)\leqq\frac{{\sigma_R}^2}{(\mu_R-d)^2} \qquad (3-3)$$

とあらわされる。

投資家は収益 ξ がある一定の災難水準 d かそれより落ち込む確率 P を最小にしたいのだから，$P(\xi\leqq d)$ を最小にするかわりに，$\frac{{\sigma_R}^2}{(\mu_R-d)^2}$ を最小にする操作を転用してもよい。そしてこれは，$\frac{\mu_R-d}{\sigma_R}$ を最大にすることに等しい。

したがって，「安全第一原理」は，$f(\mu_R, \sigma_R)=0$ にしたがって，$\frac{\mu_R-d}{\sigma_R}$ を最大にすることであるということができる。

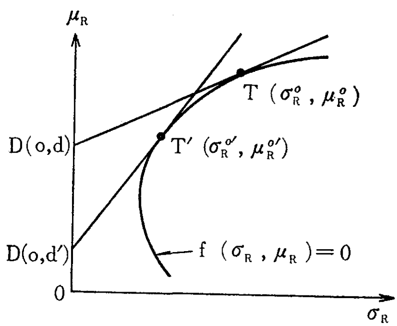
これをグラフで示すと，（3—1）図のようになる。図において $f(\mu_R, \sigma_R)$

$=0$ は曲線であり，一種の機会軌跡である。この上で $\dfrac{\mu_R-d}{\sigma_R}$ を最大にする点を求めればよい。

いま，図において点D（o，d）をとり，これから $f(\mu_R, \sigma_R)=0$ の曲線と接するような線をひけば，接点Tが求める点である。この点が「安全第一原理」に基づく最適行動に対応する（μ_R，σ_R）の点である。なぜなら，接線DTの勾配は $\dfrac{\mu_R-d}{\sigma_R}$ だからである[3)]。

いま，「災難」水準が d' と下がると，機会曲線への接線は急な傾きとなり，接点はTからT'へ移る。このとき，収益が「災難」水準に等しいかそれ以下になる確率の上限はより小さくなる。

さて，このように「安全第一原理」を採用することの意義は何であろうか。それは，期待効用最大化原理と比べて，必要とする情報が少くてすむことである。即ち，収益の確率分布，それも期待値と標準偏差の情報だけが，必要とされ，効用関数に関する情報が必要とされないことである。この点こそが，この「原理」を採用することの最大の利点である。



(3—1) 図

ところで，この「安全第一原理」に準拠する資産選択行動の論理的帰結は，期待効用仮説に準拠する（特に Lintner 型）モデルにきわめて類似してくる。これは後述する代数的分析でも理解できるが，むしろ（3—1）図をみると明らかである。「安全第一原理」の場合は，最適点はD点から出る直線と機会軌跡との接点によって決まるが，期待効用最大化原理の場合は，無差別曲線と機会軌跡との接点によって決まる。したがって，「安全第一原理」は，期待効用最大化原理において，無差別曲線が直線となる特殊ケースであると考えることができるのである。

以上は，主に図を使っての説明であった。しかし，それだけでは正確に説明されたことにはならない。次節以下では，上述したことを数学的に厳密に展開しょう。

注

1）Roy〔文献５〕.

2）ここで，投資家は危険回避者的性格をもつと考えられている。

3）もし接線の傾きが45°よりゆるやかで１より小になったとする。そのとき

$$\frac{\mu_R-d}{\sigma_R}\geqq 1$$

となるので，

$$\frac{\sigma_R{}^2}{(\mu_R-d)^2}\geqq 1$$

となる。この不等式の意味は，収益がdかそれ以下になる確率の上限が１より大となることであり，大した意味をもたなくなる。

３―２　「災難」の確率上限

安全第一原理にしたがう場合，投資残高を多種資産にどう配分するかを考えよう。いま，期末に資金価値が，ある災難額$\boldsymbol{d}$かそれ以下に下落しないことを心がけているとする。ここで，以下で使う仮定を幾つか列挙する。

（ｉ）$\boldsymbol{k}$は投資資金の初期保有である。

（ii）各資産価格は期末にどうなるか推測されており，その期待価格を$\boldsymbol{p}_i$とする。

（iii）σ_{ij}を危険資産価格間の分散，共分散とし，値は既知とする。ρ_{ij}は相関係数とする。

（iv）すべての現在価格は１である。

（ｖ）各種資産への資金量の配分ベクトルを（$\boldsymbol{x}_1\cdots\cdots\boldsymbol{x}_n$）とする。そこで，次の関係式が成立する。

$$\mu_R = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{3—4}$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{3—5}$$

$$k = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3—6}$$

このとき σ_R と μ_R との関数関係を考える。投資家は危険回避者的性格をもつので（前節注2），第2章の問題〔1〕と同じように考えてよい[1]

問題〔Ⅲ〕Minimize $\sigma_R^2 = y'Py$　(3—7)

Subject to $\mu_R = y'a$　(3—8)

$k = y'b$　(3—9)

ただし

$$y = \begin{pmatrix} x_1\sigma_1 \\ \vdots \\ x_n\sigma_n \end{pmatrix},\quad a = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\mu_n}{\sigma_n} \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} \tag{3—10}$$

ラグランジアン関数 L を設定すると

$$L = y'Py + 2\lambda_1(\mu_R - y'a) + 2\lambda_2(k - y'b)$$

となる。λ_1 と λ_2 はラグランジアン乗数。

これは2次計画問題である。まず一階の条件を求めると

$$Py = \lambda_1 a + \lambda_2 b \tag{3—11}$$

$$\mu_R = y'a \tag{3—12}$$

$$k = y'b \tag{3—13}$$

である。

（3—11）より

$$y = P^{-1}(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \tag{3—14}$$

これを（3—7），（3—8）に代入し，λ_1 および λ_2 を消去すれば，結局，

次の機会軌跡が求まる。

$$\left[\frac{(a'P^{-1}a)(b'P^{-1}b)-(a'P^{-1}b)^2}{b'P^{-1}b}\right]\cdot\left(\sigma_R{}^2-\frac{k^2}{b'P^{-1}b}\right)=\left(\mu_R-k\frac{a'P^{-1}b}{b'P^{-1}b}\right)^2 \tag{3—15}$$

行列式であらわすと

$$\begin{vmatrix} \sigma_R{}^2 & \mu_R & k \\ \mu_R & a'P^{-1}a & a'P^{-1}b \\ k & a'P^{-1}b & b'P^{-1}b \end{vmatrix}=0 \tag{3—16}$$

である。Pが正値定符号行列ならば，この曲線は双曲線となる[2)]。

さて，接線DTの勾配の２乗の逆数は災難dの確率の上限であったから，dかそれよりも小となる収益の発生する確率の上限を最小にすることが次の問題となる。

点D（0，d）を通る直線は，勾配をθとすれば，

$$\theta\cdot\sigma_R=\mu_R-d \tag{3—17}$$

で表わされる。これが双曲線（3—15）あるいは（3—16）と接する条件は，$\mu_R=\theta\cdot\sigma_R+d$を双曲線に代入し，得られた２次式の判別式がゼロになることである。

$$\begin{vmatrix} \sigma_R{}^2 & \theta\cdot\sigma_R+d & k \\ \theta\cdot\sigma_R+d & a'P^{-1}a & a'P^{-1}b \\ k & a'P^{-1}b & b'P^{-1}b \end{vmatrix}=0 \tag{3—18}$$

この式が，単根を持つ条件である。少しわずらわしい計算をすると[3)]，得られる条件は

$$\theta^2=\left[a-b\left(\frac{d}{k}\right)\right]'P^{-1}\left[a-b\left(\frac{d}{k}\right)\right] \tag{3—19}$$

である。

直線 DT 上では

$$\frac{1}{\theta^2}=\frac{\sigma_R{}^2}{(\mu_R-d)^2}$$

が成立しているので，（3－19）より

$$\frac{1}{\theta^2}=\frac{\sigma_R{}^2}{(\mu_R-d)^2}=\frac{1}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]'P^{-1}\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]}$$

$$=\frac{|P|}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\mu_i-\frac{d}{k}\right)}{\sigma_i}P^{ij}\frac{\left(\mu_j-\frac{d}{k}\right)}{\sigma_j}} \qquad (3—20)$$

となる。ここで

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\begin{vmatrix} P^{11} & \cdots\cdots & P^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P^{n1} & \cdots\cdots & P^{nn} \end{vmatrix}$$

である。この（3—20）式は災難確率の上限を表わすものである。

注

1）問題〔1〕と完全に同じものにするには，k を1でおきかえればよい。 その場合，求める変数は構成比であらわされる。

2）証明は，第2章第2節の場合と同様にしてできる。

3）途中計算は煩わしいので省いた。

3—3　安全第一原理とポートフォリオの最適決定

前節によって，ポートフォリオ収益Rが災難水準dに等しいか，d以下に落ちこむ確率の上限を最小にするには，接点Tにおいて危険資産混合を選択すれば最も安全であるという保証が得られた。

このような危険資産混合は，接点Tにおける座標（$\sigma_R{}'^*$，$\mu_R{}^*$）が指定する収益の確率分布をもつポートフォリオが最適であることを教えている。

まず接点Tの頂点を求めると[1]，

$$\sigma_R{}^*=k\frac{\sqrt{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]'P^{-1}\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]}}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)a\right]P^{-1}a} \qquad (3—21)$$

$$\mu_R{}^* = k\frac{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}a}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}b} \tag{3—22}$$

である。そこで，この最適なポートフォリオ（$\sigma_R{}^*$，$\mu_R{}^*$）をもたらすような最適な資産構成が，どのようになるかを決定する。求めるのは，最適資産構成（$x_1{}^* \cdots\cdots x_n{}^*$）である。

（3—22）で確定した $\mu_R{}^*$ を使い，（3—12）に代入する。

（3—14）を（3—12），（3—13）に代入して，λ_1 および λ_2 と求めると，

$$\lambda_1 = \frac{k}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}b} \tag{3—23}$$

$$\lambda_2 = \frac{-d}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}b} \tag{3—24}$$

を得る。これを再び（3—14）に代入すると

$$y = P^{-1}\frac{1}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}b}\left[ka-db\right]$$

$$= \frac{kP^{-1}\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}b} \tag{3—25}$$

となり，y の値が確定する。したがって，$x_i{}^*$ の値を求めることができる。これが $x_i(i=1\cdots n)$ の最適解である。

$$x_i{}^* = \frac{B}{\sigma_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\mu_j-\frac{d}{k}\right)}{\sigma_j}\cdot\frac{P^{ij}}{|P|}\quad(i=1,\cdots n) \tag{3—26}$$

ただし，$\sum_{i=1}^{n}x_i=k$ となるように B を

$$B = \frac{k}{\left[a-\left(\frac{d}{k}\right)b\right]' P^{-1}b} = \frac{k}{\sum_i^n\sum_j^n\frac{\left(\mu_j-\frac{d}{k}\right)}{\sigma_j\sigma_i}\frac{P^{ij}}{|P|}} \tag{3—27}$$

とおく。また P^{ij} は行列 P の（$i\ j$）余因子。

（3—26）式によって決定される n 種危険資産の配分比が，「安全第一原理」にもとずく最適ポートフォリオの構成比なのである[2)]。

注

1）（3—21）を求めるには，（3—15）式が完全平方になることを利用すればよい。（3—22）は，（3—21）が求まれば，（3—17）によって容易に得ることができる。

2）安全第一原理の実際の応用例は次の文献にある。
桐谷維「市中銀行のポートフォリオ・セレクション」『国債管理と金融政策』日本経済新聞社1968.
本文で詳しい数式展開を省いたところは，上掲書で補うことができる。

文　献

〔1〕Friedman & Savage, "Expected Utility Hypothesis and the Measurability," *Journal of Political Economy*, Vol. LX, December, 1952.

〔2〕Herstein, I. N. & Milnor, "An Axiomatic Approach to Measurable Utility," *Econometrica*, Vol. 21, April, 1953.

〔3〕Lintner, John, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Stalistics*, Vol. XLVII, February, 1965.

〔4〕Markowitz, H., *Portfolio Selection*, John Wiley & Sons, 1959.

〔5〕Roy, A. D., "Safety First and the Holding of Assets," *Econometrica*, Vol. 20, July, 1952.

〔6〕Tobin, J., "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk," *The Review of Economic Studies*, Vol. XXVI, February, 1958.

〔7〕Tobin, J., "The Theory of Portfolio Selection," *The Theory of Interest rates*, Macmillan, 1965.

〔8〕桐谷維『ポートフォリオ・セレクション—金融資産選択の理論』春秋社1968.

〔9〕藤野正三郎・寺西重郎「資産選択の理論—展望」藤野正三郎編『富の構造』日本経済新聞社1969.