Totally nonnegativeなLaurent-Jacobi行列の逆固有値問題の解法について

赤岩, 香苗
京都産業大学情報理工学部

前田, 一貴
福知山公立大学

https://doi.org/10.15017/2927451

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.157-162, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 27 (pp. 157 - 162)

Totally nonnegativeな Laurent-Jacobi行列の逆固有値問題の解法について

赤岩 香苗（AKAIWA Kanae），前田 一貴（Maeda Kazuki）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

Totally nonnegative な Laurent-Jacobi 行列の逆固有値問題の解法について

京都産業大学情報理工学部　赤岩 香苗 (AKAIWA Kanae)
福知山公立大学　前田 一貴 (MAEDA Kazuki)

概要　本稿では，Laurent-Jacobi 行列と呼ばれる zig-zag 構造をもつ 5 重対角行列の逆固有値問題に対して，直交多項式を用いた解法を提案する．さらに，提案法によって作成される Laurent-Jacobi 行列が「すべての小行列式が非負」である totally nonnegative 行列となるための条件について考察する．

1　はじめに

与えられた行列に対して，固有値および固有ベクトルを求める（順）固有値問題は，理学・工学において非常に重要な課題であり，盛んに研究されている．逆固有値問題は，固有値問題の逆問題であり，指定した固有値をもつ行列を作成する問題である．逆固有値問題は，作成する行列の固有値や構造に対する制約により種々の小問題に分類される [4]．また解が一意に定まらない非適切な問題であることが多く，一般に順問題より難しい．

すべての小行列式が非負である行列を totally nonnegative (TN) 行列という [3, 6, 9, 7]．TN 行列は組合せ論や確率過程など様々な分野に現れる．TN 行列の逆固有値問題については，組合せ論からの観点による TN 行列のジョルダン構造の解析 [5] や，指定した固有値をもつ対称な TN 行列を構成する手法 [10] について研究がなされている．赤岩ら [1, 2] は，指定した固有値をもつ非対称な TN 帯行列を離散可積分系を用いて構成する手法を提案している．

本稿では，Laurent-Jacobi 行列と呼ばれる，zig-zag 構造をもつ 5 重対角行列の逆固有値問題の解法を，直交多項式理論を用いて提案する．アルゴリズムとともに数値例も示す．

2　Laurent 双直交多項式と直交 Laurent 多項式

本節では，モニックな Laurent 双直交多項式と Laurent 双直交多項式から導出される離散可積分系 [11]，および関連する直交 Laurent 多項式 [8] について復習する．次で定義される多項式 $P_n^{(t)}(z) \in \mathbb{C}[z]$ を（モニックな）Laurent 双直交多項式という：整数 t および非負整数 n に対して

$$P_n^{(t)}(z) = \begin{vmatrix} f_{t-n+1} & f_{t-n+2} & \cdots & f_t & f_{t+1} \\ f_{t-n+2} & f_{t-n+3} & \cdots & f_{t+1} & f_{t+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_t & f_{t+1} & \cdots & f_{t+n-1} & f_{t+n} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} / \tau_n^{(t)}, \quad \tau_n^{(t)} = \det_{1\le i,j\le n}(f_{t-n+i+j-1}). \tag{1}$$

Laurent 双直交多項式 $P_n^{(t)}(z)$ は，モーメント $\mathcal{L}[z^i] = f_i$（$i \in \mathbb{Z}$）により決まる線形汎関数 $\mathcal{L} : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \to \mathbb{C}$ について，以下の直交関係式を満たす：

$$\mathcal{L}[P_n^{(t)}(z) z^{t-j}] = h_n^{(t)} \delta_{n,j}, \quad 0 \le j \le n.$$

ただし，$h_n^{(t)}$ は非零の定数，$\delta_{n,j}$ は Kronecker のデルタである．Laurent 双直交多項式 (1) は，3 項間漸化式

$$\begin{aligned} &P_0^{(t)}(z) = 1, \quad P_1^{(t)}(z) = z - q_0^{(t)}, \\ &P_{n+1}^{(t)}(z) = (z - q_n^{(t)}) P_n^{(t)}(z) - e_n^{(t)} z P_{n-1}^{(t)}(z), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

を満たす．ただし，係数 $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ は Hankel 行列式 $\tau_n^{(t)}$ を用いて，以下のように表せる：

$$q_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(t+1)} \tau_n^{(t)}}{\tau_n^{(t+1)} \tau_{n+1}^{(t)}}, \quad e_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(t+1)} \tau_{n-1}^{(t)}}{\tau_n^{(t+1)} \tau_n^{(t)}}. \tag{3}$$

また $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ は以下の qd 型の漸化式を満たす：

$$q_n^{(t+1)}e_n^{(t)} = q_{n-1}^{(t)}e_n^{(t+1)}, \quad q_{n-1}^{(t+1)} + e_{n-1}^{(t+1)} = q_{n-1}^{(t)} + e_n^{(t)}, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

ただし，$e_0^{(t)} \equiv 0$ である．漸化式 (4) は，離散相対論戸田方程式と呼ばれる離散可積分系である．

次で定義される Laurent 多項式 $\Phi_n^{(t)}(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ を（モニックな）直交 Laurent 多項式という：

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}^{(t)}(z) &= \begin{vmatrix} f_{t-2n+1} & f_{t-2n+2} & \cdots & f_t & f_{t+1} \\ f_{t-2n+2} & f_{t-2n+3} & \cdots & f_{t+1} & f_{t+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_t & f_{t+1} & \cdots & f_{t+2n-1} & f_{t+2n} \\ z^{-n} & z^{-n+1} & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} \Big/ \tau_{2n}^{(t)}, \\
\Phi_{2n+1}^{(t)}(z) &= \begin{vmatrix} f_{t-2n} & f_{t-2n+1} & \cdots & f_t & f_{t+1} \\ f_{t-2n+1} & f_{t-2n+2} & \cdots & f_{t+1} & f_{t+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_t & f_{t+1} & \cdots & f_{t+2n} & f_{t+2n+1} \\ z^{-n-1} & z^{-n} & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} \Big/ \tau_{2n+1}^{(t)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

直交 Laurent 多項式は，以下の直交関係式を満たす：

$$\mathcal{L}[z^{t+1}\Phi_m^{(t)}(z)\Phi_n^{(t)}(z)] = \hat{h}_m^{(t)}\delta_{m,n}.$$

ただし，$\hat{h}_m^{(t)}$ は非零の定数である．直交 Laurent 多項式 (5) は Laurent-Jacobi 行列と呼ばれる，zig-zag 構造をもつ対称な 5 重対角行列

$$\begin{pmatrix}
* & * & * & & & & & & & \\
* & * & * & & & & & & & \\
* & * & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & & \\
 & & & & * & * & * & & & \\
 & & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & & & * & * & * & \\
 & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

の固有値問題と関連づくことが知られている．以下では，zig-zag 構造をもつ対称な 5 重対角行列を Laurent-Jacobi 行列，zig-zag 構造をもつ非対称な 5 重対角行列を非対称 Laurent-Jacobi 行列と呼ぶことにする．

3 Laurent-Jacobi 行列の固有値問題

本節では，Laurent 双直交多項式と直交 Laurent 多項式の関係に着目し，（非対称）Laurent-Jacobi 行列の固有値問題を考える．

式 (1), (5) から，以下の関係式が成り立つ：

$$\Phi_{2n}^{(t)}(z) = z^{-n}P_{2n}^{(t)}(z), \quad \Phi_{2n+1}^{(t)}(z) = z^{-n-1}P_{2n+1}^{(t)}(z). \tag{6}$$

(6) を (2) に代入して整理すると，$\Phi_n(z)$ の漸化式

$$\begin{aligned}
&z\Phi_{2n}^{(t)}(z) = \Phi_{2n+2}^{(t)}(z) + q_{2n+1}^{(t)}\Phi_{2n+1}^{(t)}(z) + (e_{2n+1}^{(t)} + q_{2n}^{(t)} + e_{2n}^{(t)})\Phi_{2n}^{(t)}(z) + e_{2n}^{(t)}q_{2n-1}^{(t)}\Phi_{2n-1}^{(t)}(z) + e_{2n-1}^{(t)}e_{2n}^{(t)}\Phi_{2n-2}^{(t)}(z), \\
&z\Phi_{2n+1}^{(t)}(z) = \Phi_{2n+2}^{(t)}(z) + q_{2n+1}^{(t)}\Phi_{2n+1}^{(t)}(z) + e_{2n+1}^{(t)}\Phi_{2n}^{(t)}(z)
\end{aligned} \tag{7}$$

が成り立つことが分かる．

以下では，ある整数 $N \geq 1$ に対して，モーメント f_i は以下を満たすとする：

$$\tau_n^{(t)} \neq 0, \quad 0 \leq n \leq N; \tag{8}$$

$$\tau_n^{(t)} = 0, \quad n \geq N+1. \tag{9}$$

このとき $e_N^{(t)} \equiv 0$ であり，漸化式 (7) は $z\Phi_{N-1}^{(t)}(z) = \cdots$ のところで打ち切れる．そこで (7) を行列表示すると，非対称 Laurent-Jacobi 行列に対する次のような固有値問題が得られる．

定理 1 (非対称 Laurent-Jacobi 行列の固有値問題)**.** 以下の N 次の非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A^{(t)}$ と N 次ベクトル $\mathbf{\Phi}^{(t)}$ は固有値問題 $A^{(t)}\mathbf{\Phi}^{(t)} = z\mathbf{\Phi}^{(t)}$ を満たす：

$$\mathbf{\Phi}^{(t)} = (\Phi_0^{(t)}, \Phi_1^{(t)}, \dots, \Phi_{N-1}^{(t)})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^N,$$

$$A^{(t)} = \begin{pmatrix} e_1^{(t)} + q_0^{(t)} & q_1^{(t)} & 1 & & & & & \\ e_1^{(t)} & q_1^{(t)} & 1 & & & & & \\ e_1^{(t)} e_2^{(t)} & e_2^{(t)} q_1^{(t)} & e_3^{(t)} + q_2^{(t)} + e_2^{(t)} & q_3^{(t)} & 1 & & & \\ & & e_3^{(t)} & q_3^{(t)} & 1 & & & \\ & & e_3^{(t)} e_4^{(t)} & e_4^{(t)} q_3^{(t)} & e_5^{(t)} + q_4^{(t)} + e_4^{(t)} & q_5^{(t)} & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N}. \quad (10)$$

ただし，$q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ は (3) で与えられる．

漸化式 (7) に対して，変換

$$\Phi_{2n}^{(t)}(z) = \alpha_n^{(t)} \tilde{\Phi}_{2n}^{(t)}(z), \quad \alpha_0^{(t)} = 1, \quad \alpha_n^{(t)} = \sqrt{\prod_{i=0}^{n-1} e_{2i+1}^{(t)} e_{2i+2}^{(t)}},$$

$$\Phi_{2n+1}^{(t)}(z) = \beta_n^{(t)} \tilde{\Phi}_{2n+1}^{(t)}(z), \quad \beta_0^{(t)} = \sqrt{\frac{e_1^{(t)}}{q_1^{(t)}}}, \quad \beta_n^{(t)} = \sqrt{\frac{e_{2n+1}^{(t)} \prod_{i=0}^{n-1} e_{2i+1}^{(t)} e_{2i+2}^{(t)}}{q_{2n+1}^{(t)}}} \quad (11)$$

を行うと，Laurent-Jacobi 行列に対する固有値問題が得られる．

定理 2 (Lauren-Jacobi 行列の固有値問題)**.** 以下の N 次の Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A}^{(t)}$ と N 次ベクトル $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(t)}$ は固有値問題 $\tilde{A}^{(t)}\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(t)} = z\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(t)}$ を満たす：

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(t)} = (\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_{N-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^N,$$

$$\tilde{A}^{(t)} = \begin{pmatrix} e_1^{(t)} + q_0^{(t)} & \sqrt{e_1^{(t)} q_1^{(t)}} & \sqrt{e_1^{(t)} e_2^{(t)}} & & & & & \\ \sqrt{e_1^{(t)} q_1^{(t)}} & q_1^{(t)} & \sqrt{e_2^{(t)} q_1^{(t)}} & & & & & \\ \sqrt{e_1^{(t)} e_2^{(t)}} & \sqrt{e_2^{(t)} q_1^{(t)}} & e_3^{(t)} + q_2^{(t)} + e_2^{(t)} & \sqrt{e_3^{(t)} q_3^{(t)}} & \sqrt{e_3^{(t)} e_4^{(t)}} & & & \\ & & \sqrt{e_3^{(t)} q_3^{(t)}} & q_3^{(t)} & \sqrt{e_4^{(t)} q_3^{(t)}} & & & \\ & & \sqrt{e_3^{(t)} e_4^{(t)}} & \sqrt{e_4^{(t)} q_3^{(t)}} & e_5^{(t)} + q_4^{(t)} + e_4^{(t)} & \sqrt{e_5^{(t)} q_5^{(t)}} & \sqrt{e_5^{(t)} e_6^{(t)}} & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N}. \quad (12)$$

以下の命題が示すように，非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A^{(t)}$ と Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A}^{(t)}$ は相似である．

命題 3. 以下の関係式が成り立つ：

$$\tilde{A}^{(t)} = (S^{(t)})^{-1} A^{(t)} S^{(t)}, \quad S^{(t)} = \mathrm{diag}(\alpha_0^{(t)}, \beta_0^{(t)}, \alpha_1^{(t)}, \beta_1^{(t)}, \dots).$$

ここで，$\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}$ は (11) で与えられる．

これまでの研究 [1, 2] で以下の事実が分かっている：相異なる非零の任意定数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$，および非零の任意定数 $c_1, c_2, \dots, c_N$ から，モーメント f_t を（Hankel 行列式についての条件 (9) を満たすように）

$$f_t = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_i^t \quad (13)$$

により定める．このとき，モーメント f_t が Hankel 行列式についての条件 (8) を満たすならば，非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A^{(t)}$ と Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A}^{(t)}$ の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ になる．

したがって，定理 1–2 から以下のことが言える：相異なる非零の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ と非零の任意定数 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ を決め，f_t を (13) によって与える．この f_t を使って，$q_0^{(t)} = f_{t+1}/f_t$ を計算する．さらに，$q_0^{(t)}$ と境界条件 $e_0^{(t)} \equiv 0$ を初期値として，漸化式 (4) を $1 \le n \le N-1$ の範囲で使って $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ を計算する．このとき，（零除算が起こらなければ）$q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ から (10) および (12) により構成される行列 $A^{(t)}$ および $\tilde{A}^{(t)}$ は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ をもつ．

4 TN 行列になる条件

本節では，非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A^{(t)}$ および Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A}^{(t)}$ が TN 行列になる，すなわち，小行列式がすべて非負になるための条件を調べる．

以下が，本稿の主定理である．

定理 4（（非対称）Laurent-Jacobi 行列が TN 行列となる条件）**.** 相異なる正の任意定数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$，および正の任意定数 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ に対して f_t を (13) により定める．このとき，(i) Hankel 行列式 $\tau_n^{(t)}$（$0 \le n \le N$）は正であり，(ii) 非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A^{(t)}$ および Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A}^{(t)}$ は TN 行列である．

Proof. (i) は [1] で示してあるので，(ii) を示す．非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A^{(t)}$ は以下の行列積に分解できる：

$$A^{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ & e_2^{(t)} & 1 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & e_4^{(t)} & 1 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0^{(t)} & 0 & & & & & \\ e_1^{(t)} & q_1^{(t)} & 1 & & & & \\ & 0 & q_2^{(t)} & 0 & & & \\ & & e_3^{(t)} & q_3^{(t)} & 1 & & \\ & & & 0 & q_4^{(t)} & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

TN 行列の積は TN 行列なので，右辺の 2 つの行列が TN 行列であることを示せばよい．右辺の 2 つの行列の小行列式は，すべて $0, 1, q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ の積である．また，(i) と (3) より，ここに現れる $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ はすべて正である．ゆえに，右辺の 2 つの行列の小行列式はすべて正である．Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A}^{(t)}$ は以下の行列積に分解できる：

$$\tilde{A}^{(t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{q_0^{(t)}} & \sqrt{e_1^{(t)}} & & & & & \\ 0 & \sqrt{q_1^{(t)}} & 0 & & & & \\ & \sqrt{e_2^{(t)}} & \sqrt{q_2^{(t)}} & \sqrt{e_3^{(t)}} & & & \\ & & 0 & \sqrt{q_3^{(t)}} & 0 & & \\ & & & \sqrt{e_4^{(t)}} & \sqrt{q_4^{(t)}} & \sqrt{e_5^{(t)}} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{q_0^{(t)}} & 0 & & & & & \\ \sqrt{e_1^{(t)}} & \sqrt{q_1^{(t)}} & \sqrt{e_2^{(t)}} & & & & \\ & 0 & \sqrt{q_2^{(t)}} & 0 & & & \\ & & \sqrt{e_3^{(t)}} & \sqrt{q_3^{(t)}} & \sqrt{e_4^{(t)}} & & \\ & & & 0 & \sqrt{q_4^{(t)}} & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

右辺の 2 つの行列の小行列式は $0, \sqrt{q_0^{(t)}}, \sqrt{e_0^{(t)}}$ の積なので，上と同じ理由により $\tilde{A}^{(t)}$ は TN 行列である． □

5 アルゴリズムと数値例

本節では，指定した固有値をもつ totally nonnegative (TN) な（非対称）Laurent-Jacobi 行列を構成するためのアルゴリズムおよびその数値例を示す．

Algorithm 1 および 2 は，それぞれ非対称な Laurent-Jacobi 行列および（対称な）Laurent-Jacobi 行列を構成するためのアルゴリズムである．定理 1–2 および 4 より，これらのアルゴリズムから構成される行列は必ず TN 行列になる．Algorithm 1 および 2 の計算量はともに $O(N^2)$ であり，有限回の演算で逆固有値問題を解くことができる．

以下に数値例を示す．実行環境は macOS Catalina 10.15.3，使用したソフトウェアは Mathematica 12.0 である．

最初の例は，指定した固有値をもつ TN な非対称 Laurent-Jacobi 行列である．行列サイズは $N = 5$，固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 5$，定数は $c_1 = c_2 = \cdots = c_5 = 1$ である．このとき，Algorithm 1 によって構

Algorithm 1 TN な非対称 Laurent-Jacobi 行列を構成するためのアルゴリズム

1: 行列サイズ N, 相異なる正の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, 正の定数 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ を決める．

2: $f_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_N\lambda_N^t$ を計算する．

3: $e_0^{(t)} = 0$ とし, $q_0^{(t)} = f_{t+1}/f_t$ を計算する．

4: 漸化式

$$q_n^{(t+1)} = \frac{q_{n-1}^{(t)} e_n^{(t+1)}}{e_n^{(t)}}, \quad e_n^{(t)} = q_{n-1}^{(t+1)} + e_{n-1}^{(t+1)} - q_{n-1}^{(t)}, \quad 1 \leq n \leq N-1$$

を使って $q_n^{(0)}, e_n^{(0)}$ を計算する．

5: 4 で計算した $q_n^{(0)}, e_n^{(0)}$ から N 次行列 $A = A^{(0)}$ を構成する：

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} e_1^{(0)} + q_0^{(0)} & q_1^{(0)} & 1 & & & & \\ e_1^{(0)} & q_1^{(0)} & 1 & & & & \\ e_1^{(0)} e_2^{(0)} & e_2^{(0)} q_1^{(0)} & e_3^{(0)} + q_2^{(0)} + e_2^{(0)} & q_3^{(0)} & 1 & & \\ & & e_3^{(0)} & q_3^{(0)} & 1 & & \\ & & e_3^{(0)} e_4^{(0)} & e_4^{(0)} q_3^{(0)} & e_5^{(0)} + q_4^{(0)} + e_4^{(0)} & q_5^{(0)} & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Algorithm 2 TN な Laurent-Jacobi 行列を構成するためのアルゴリズム

1: 行列サイズ N, 相異なる正の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, 正の定数 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ を決める．

2: Algorithm 1 の 2–4 を用いて，$q_n^{(0)}, e_n^{(0)}$ を計算する．

3: 2 で計算した $q_n^{(0)}, e_n^{(0)}$ から $\tilde{A} = \tilde{A}^{(0)}$ を構成する：

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(0)} =$$

$$\begin{pmatrix} e_1^{(0)} + q_0^{(0)} & \sqrt{e_1^{(0)} q_1^{(0)}} & \sqrt{e_1^{(0)} e_2^{(0)}} & & & & \\ \sqrt{e_1^{(0)} q_1^{(0)}} & q_1^{(0)} & \sqrt{e_2^{(0)} q_1^{(0)}} & & & & \\ \sqrt{e_1^{(0)} e_2^{(0)}} & \sqrt{e_2^{(0)} q_1^{(0)}} & e_3^{(0)} + q_2^{(0)} + e_2^{(0)} & \sqrt{e_3^{(0)} q_3^{(0)}} & \sqrt{e_3^{(0)} e_4^{(0)}} & & \\ & & \sqrt{e_3^{(0)} q_3^{(0)}} & q_3^{(0)} & \sqrt{e_4^{(0)} q_3^{(0)}} & & \\ & & \sqrt{e_3^{(0)} e_4^{(0)}} & \sqrt{e_4^{(0)} q_3^{(0)}} & e_5^{(0)} + q_4^{(0)} + e_4^{(0)} & \sqrt{e_5^{(0)} q_5^{(0)}} & \sqrt{e_5^{(0)} e_6^{(0)}} \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

成された非対称 Laurent-Jacobi 行列 $A = A^{(0)}$ は，以下である：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{200}{111} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{200}{111} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{118}{333} & \frac{11800}{12321} & \frac{103652}{32745} & \frac{189677}{66375} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{267732}{835145} & \frac{189677}{66375} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1776}{36875} & \frac{32058244}{74671875} & \frac{3947}{1125} \end{pmatrix}$$

行列 A が指定した固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 5$ をもち，かつ TN 行列であることは，Mathematica の Eigenvalues 関数および Minors 関数を用いて簡単に確かめられる．

次の例は，TN な Laurent-Jacobi 行列である．先程の例と同じ固有値 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 5$ と定数 $c_1 = c_2 = \cdots = c_5 = 1$ を与えるとき，Algorithm 2 によって構成された Laurent-Jacobi 行列 $\tilde{A} = \tilde{A}^{(0)}$ は，以下である：

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3.66667 & 1.09599 & 0.595277 & 0 & 0 \\ 1.09599 & 1.80180 & 0.978629 & 0 & 0 \\ 0.595277 & 0.978629 & 3.16543 & 0.957137 & 0.219460 \\ 0 & 0 & 0.957137 & 2.85766 & 0.655226 \\ 0 & 0 & 0.219460 & 0.655226 & 3.50844 \end{pmatrix}$$

演算は有理数で厳密に行ったが，スペースの都合上，小数で近似して記載している．行列 $\tilde{A}$ が指定した固有値をもち，かつ TN 行列であることは，先程の例と同様にして確かめられる．

6 おわりに

本稿では，Laurent 双直交多項式と直交 Laurent 多項式を利用して，zig-zag 構造をもつ 5 重対角行列である（非対称）Laurent-Jacobi 行列の逆固有値問題の解法を示した．提案手法は，有限回の演算で厳密解，すなわち，指定した固有値をもつ（非対称）Laurent-Jacobi 行列を求めることが可能である．今後は，同様の zig-zag 構造をもつ任意帯幅の行列に対しても，直交多項式理論や離散可積分系を用いて逆固有値問題の解法を定式化していく．

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP17K18229 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, H. Tsutsumi and K. Kondo, An finite-step construction of totally nonnegative matrices with specified eigenvalues, *Numer. Algor.* **70** (2015), 469–484.

[2] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, A. Yoshida and K. Kondo, An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, *Numer. Algor.* **75** (2017), 1079–1101.

[3] T. Ando, Totally positive matrices, *Linear Algebra Appl.* **90** (1987), 165–219.

[4] M. T. Chu, and C. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems, Theory, Algorithms and Applications*, Oxford University Press, New York, 2005.

[5] S. M. Fallat and M. I. Gekhtman, Jordan structures of totally nonnegative matrices, *Canad. J. Math.* **57** (2005), 82–98 .

[6] S. M. Fallat and C. R. Johnson, *Totally Nonnegative Matrices*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2011.

[7] F. R. Gantmacher and M. G. Krein, *Oscillation Matrices and Kernels and Small Vibrations of Mechanical Systems* (English Transl., 2000), AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 1950.

[8] E. Hendriksen and C. Nijhuis, Laurent Jacobi matrices and the strong Hamburger moment problem, *Acta Appl. Math.* **61** (2000), 119–132.

[9] S. Karlin, *Total Positivity, Vol. 1*, Stanford Univ. Press, CA, 1968.

[10] O. Rojo, R. Soro and J. Egaña, A note on the construction of a positive oscillatory matrix with a prescribed spectrum, *Comput. Math. Appl.* **41** (2001), 353–361.

[11] S. Tsujimoto and A. Zhedanov, Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle, *SIGMA* **5** (2009), 033, 30 pages.