

## dLVs系から導かれる “ 加速型 ” 箱玉系

関口, 真基  
東京都立荻窪高等学校

岡, 来美  
京都府立大学生命環境学部

岩崎, 雅史  
京都府立大学生命環境学部

石渡, 恵美子  
東京理科大学理学部

<https://doi.org/10.15017/2927450>

---

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 2019A0-S2, pp.151-156, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2  
「非線形波動研究の多様性」 (研究代表者 永井 敦)  
Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2  
*Diversity in the research of nonlinear waves*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 26 (pp. 151 - 156)

## dLVs系から導かれる“加速型”箱玉系

関口 真基 (Sekiguchi Masaki), 岡 来美 (Oka Kurumi), 岩  
崎 雅史 (Iwasaki Masashi), 石渡 恵美子 (Ishiwata Emiko)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2020

# dLVs系から導かれる“加速型”箱玉系

東京都立荻窪高等学校 関口 真基 (SEKIGUCHI Masaki)  
京都府立大学生命環境学部 岡 来美 (OKA Kurumi)  
京都府立大学生命環境学部 岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi)  
東京理科大学理学部 石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko)

**概要** シフトパラメータを含む差分 Lotka-Volterra (dLVs) 系を超離散化し、玉の移動が加速されたような箱玉系を定式化する。また、得られた“加速型”箱玉系の拡張について考察し、その逆超離散化で新たに得られるタイムラグ付き dLVs 系についても紹介する。

## 1 はじめに

箱玉系は、一列に並べられた無限個の箱を有限個の玉が左から右へと移動する様子を描いた力学系である。1個の箱に2個以上の玉を入れることはできず、ある箱を0番目としてそれより左側の箱は-1番目、-2番目、...、右側の箱は1番目、2番目、...と順序付けされるのが一般的である。本報告では、簡単化のため  $j$  番目の箱を箱  $j$  と呼ぶことにする。時刻  $n$  において箱  $j$  の中に玉がある状態を  $B_j^{(n)} = 1$ 、箱に玉がない状態を  $B_j^{(n)} = 0$  と表し、例えば運動方程式

$$B_{j+1}^{(n+1)} = \min \left( 1 - B_j^{(n)}, \sum_{i=-\infty}^j (B_i^{(n)} - B_i^{(n+1)}) \right), \quad j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

による時刻  $n$  から時刻  $n+1$  への時間発展を考えると、よく知られた箱玉系が導かれる。どのように玉が移動するのか理解するには、玉を移動させる1人の運搬人を導入すると分かりやすい。なお、この運搬人は複数個の玉を手を持つことができる。

運動方程式 (1.1) で定まる箱玉系

時刻  $n$  において運搬人は左から右に移動しながら以下の操作を行う：

- \* 箱の中に玉がある場合、その玉を箱から取り出す
- \* 箱が空で、手持ちの玉がない場合、何もしない
- \* 箱が空で、手持ちの玉がある場合、その玉を箱に入れる

運搬人がすべての玉の移動を終えたら時刻を1つ進めて  $n+1$  とする。

縦方向を時刻  $n$ 、横方向を箱の番号  $j$  として、玉が左から右に移動する様子を図1と図2に示す。なお、箱の中に玉がある箱をグレーで表している。図1の初期条件は  $B_j^{(0)} = 1$  ( $j = 1, 2, 3, 13, 14, 20$ ),  $B_j^{(0)} = 0$  ( $j \neq 1, 2, 3, 13, 14, 20$ ) であり、図2の初期条件は  $B_j^{(0)} = 1$  ( $j = 1, 3, 4, 16, 18, 25$ ),  $B_j^{(0)} = 0$  ( $j \neq 1, 3, 5, 16, 18, 25$ ) である。連続する玉を“かたまり”と呼ぶことにすると、かたまりの移動速度はかたまりの大きさに比例するので、図1のように、大きなかたまりが左にある場合はいずれかのタイミングで小さなかたまりと衝突する。衝突してかたまりの大きさが一時的に変化しても、のちにかたまりの大きさは元に戻り、結果的に、大きなかたまりが小さなかたまりを追い越したように見える。一方、図2の場合はいずれの玉も孤立しているので、衝突も追い越しも発生しない。

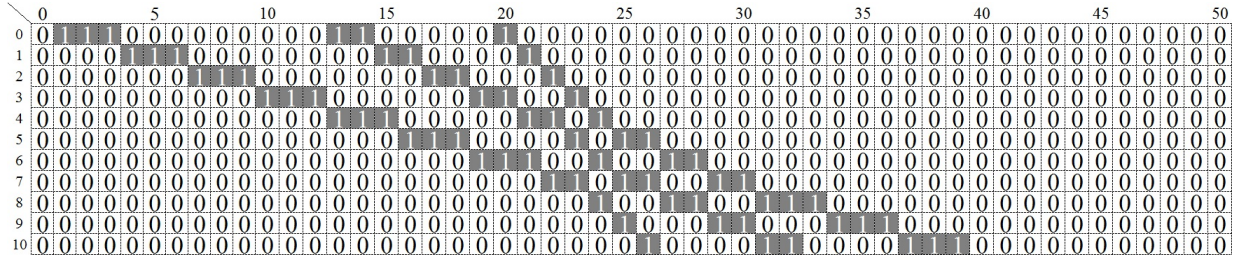


図 1:  $n = 0$  において 3 つの異なる大きさのかたまりが存在する場合 (縦方向: 時刻  $n$ , 横方向: 箱の番号  $j$ , 0: 箱に玉がない状態, 1: 箱に玉がある状態)

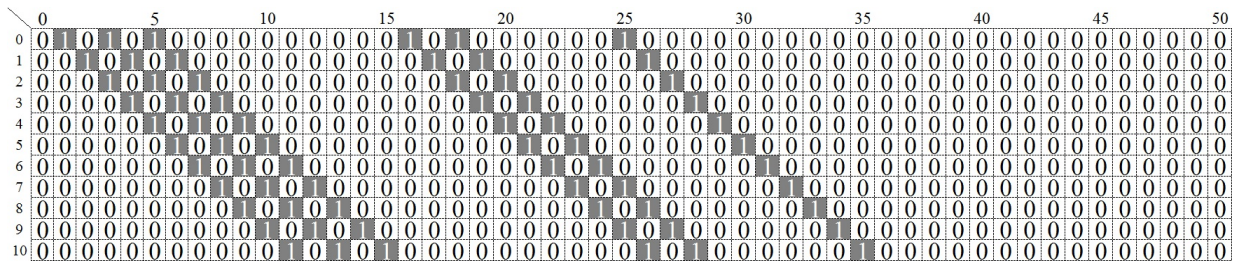


図 2:  $n = 0$  において玉が孤立している場合

運動方程式 (1.1) に対して逆超離散化を施すと, 差分化パラメータ  $\delta$  を含む差分 Lotka-Volterra (dLV: discrete Lotka-Volterra) 系

$$u_j^{(n+1)} \left( 1 + \delta u_{j-1}^{(n+1)} \right) = u_j^{(n)} \left( 1 + \delta u_{j+1}^{(n)} \right) \quad (1.2)$$

が得られる [2]. ここで, dLV 系 (1.2) は捕食-被食関係を記述した Lotka-Volterra (LV) 系の時間離散版であり,  $u_j^{(n)}$  は時刻  $n$  における個体番号  $j$  の個体数と対応する. 境界条件  $u_0^{(n)} \equiv 0, u_{2m}^{(n)} \equiv 0$  かつ初期条件  $u_1^{(0)} > 0, u_2^{(0)} > 0, \dots, u_{2m-1}^{(0)} > 0$  のもとでは任意の  $n$  に対して  $u_1^{(n)} > 0, u_2^{(n)} > 0, \dots, u_{2m-1}^{(n)} > 0$  であり,  $n \rightarrow \infty$  において  $u_2^{(n)}, u_4^{(n)}, \dots, u_{2m-2}^{(n)}$  は 0 に,  $u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, \dots, u_{2m-1}^{(n)}$  は初期値に依存する正の定数に収束する. このような dLV 系 (1.2) の性質をもとに対称 3 重対角行列の固有値 (上 2 重対角行列の特異値) を求めるための dLV 法が定式化されている. 対称 3 重対角行列の固有値をできる限り 0 に近づける原点シフト操作を導入することで, dLV 法の収束速度を向上させた dLVs (dLV with shift) 法が提案されている [3]. dLVs 法の核となる漸化式

$$\begin{cases} u_{2k-1}^{(n+1)} \left( 1 + \delta u_{2k-2}^{(n+1)} \right) = \frac{1}{\delta} \left( 1 + \delta u_{2k-1}^{(n)} \right) \left( 1 + \delta u_{2k}^{(n)} \right), \\ u_{2k}^{(n+1)} \left( 1 + \delta u_{2k-1}^{(n+1)} \right) = \delta u_{2k}^{(n)} u_{2k+1}^{(n)} \end{cases} \quad (1.3)$$

は dLVs 系と呼ばれ, dLV 系 (1.2) と違って下付き添字の偶奇で時間発展則が異なる. dLV 系 (1.2) は前述したように箱玉系と対応付けられているが, dLVs 系 (1.3) がどのような箱玉系と結び付くのかについては明らかにされていない. 対称 3 重対角行列の固有値を求める際に, dLV 系 (1.2) よりも dLVs 系 (1.3) を用いた方が収束が加速するように, dLVs 系 (1.3) の超離散化で得られる箱玉系において玉の移動が加速されることを示す. また, 得られた新しい箱玉系を一般化して逆超離散化することでタイムラグ付き dLVs 系を提案する. 近年, 個体群動態の数理モデルとしての LV 系に対してタイムラグを導入し, その解の閾値挙動への影響について議論されている [5, 6]. dLV

系 (1.2) のタイムラグ付き版についても研究が進められており、それぞれのブロックが対称 3 重対角行列であるブロック対角行列の固有値を求められることが示されている [4]。本報告では、タイムラグ付き dLVs (ddLVs: delay dLVs) 系に基づく固有値計算アルゴリズムの定式化に向けて、ddLVs 系の収束性に関する数値特性について触れる。

## 2 dLVs 系から導かれる箱玉系

dLVs 系 (1.3) に対して、いくつかの変数変換と極限操作  $\epsilon \rightarrow +0$  を施し、2 つの実数  $X, Y$  に対して  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log (e^{X/\epsilon} + e^{Y/\epsilon}) = \max(X, Y)$  が成り立つことに注意すると、

$$B_{j+1}^{(n+1)} = \max \left( 0, -B_j^{(n+1)} + \min \left( 1 - B_{j+1}^{(n)} - B_j^{(n)}, \sum_{i=-\infty}^{j-1} B_i^{(n)} - \sum_{i=-\infty}^j B_i^{(n+1)} \right) \right) \quad (2.1)$$

が得られる。ここで、 $\dots, B_{-2}^{(n)}, B_{-1}^{(n)}, B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \dots$  の値が 0 か 1 のどちらかならば、 $\dots, B_{-2}^{(n+1)}, B_{-1}^{(n+1)}, B_0^{(n+1)}, B_1^{(n+1)}, B_2^{(n+1)}, \dots$  の値も 0 か 1 のどちらかになることは明らかである。さらに (2.1) は

$$\begin{aligned} B_{j+1}^{(n+1)} = & \min \left( 1 - B_{j+1}^{(n)}, \sum_{i=-\infty}^j (B_i^{(n)} - B_i^{(n+1)}) \right) \\ & - \min \left( 1 - B_{j+1}^{(n)}, \sum_{i=-\infty}^j (B_i^{(n)} - B_i^{(n+1)}), B_j^{(n)} + B_j^{(n+1)} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

と変形できるので、 $B_j^{(n)} + B_j^{(n+1)} \neq 2$  であることが分かる。よって、 $\dots, B_{-2}^{(n)}, B_{-1}^{(n)}, B_0^{(n)}, B_1^{(n)}, B_2^{(n)}, \dots$  の値が 0 か 1 のどちらかならば、任意の  $n$  に対して

$$B_j^{(n)} + B_j^{(n+1)} \in \{0, 1\}, \quad j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

が成り立つ。これは (1.1) では見られない (2.1) 特有の性質である。

次に (2.1) を運動方程式として定まる箱玉系について説明する。時刻  $n$  において前述の箱玉系と同じルールで運搬人が箱  $j$  に対する操作までを完了し、「運搬人の手持ちの玉がない」あるいは「箱  $j+1$  の中に玉がある」の場合と、「運搬人の手持ちの玉がある」かつ「箱  $j+1$  の中に玉がある」場合を考える。前者の場合は運動方程式 (2.2) の第 1 項は

$$\min \left( 1 - B_{j+1}^{(n)}, \sum_{i=-\infty}^j (B_i^{(n)} - B_i^{(n+1)}) \right) = 0$$

であり、(2.3) を踏まえると

$$B_{j+1}^{(n+1)} = 0 - \min \left( 0, B_j^{(n+1)} + B_j^{(n)} \right) = 0$$

が得られる。つまり、玉の移動が発生しない場合については前述の箱玉系と違いはない。後者の場合は (2.2), (2.3) より

$$B_{j+1}^{(n+1)} = 1 - \min \left( 1, B_j^{(n+1)} + B_j^{(n)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{if } B_j^{(n+1)} + B_j^{(n)} = 0, \\ 0 & \text{if } B_j^{(n+1)} + B_j^{(n)} = 1 \end{cases}$$

となる。これは時刻  $n$  と  $n+1$  において箱  $j$  が空ならば運搬人は手持ちの玉を箱  $j+1$  に入れられることを意味する。

運動方程式 (2.1) で定まる箱玉系

時刻  $n$  において運搬人は左から右に移動しながら以下の操作を行う：

- \* 箱の中に玉がある場合，その玉を箱から取り出す
- \* 箱が空で，手持ちの玉がない場合，何もしない
- \* 箱が空で，手持ちの玉がある場合，以下に注意しながら玉を箱に入れる
  - (a) 時刻  $n$  において空でない箱の右隣の箱には玉を入れてはならない
  - (b) 時刻  $n$  において玉が入れられた箱の右隣の箱には玉を入れてはならない

運搬人がすべての玉の移動を終えたら時刻を 1 つ進めて  $n+1$  とする。

図 3 と図 4 は新しく導出した箱玉系の数値例である。なお，図 3 と図 4 の  $n=0$  における状態はそれぞれ図 2，図 1 と同じであることに注意されたい。間隔を箱 1 個分だけ空けて連なる玉を“まとまり”と呼ぶことにすると，時間経過のもとでまとまりの大きさを維持しながら，大きいまとまりほど速く移動し，小さなまとまりを追い抜く様子が図 3 から窺える。加えて，図 1 と比較すると，まとまりが大きい順に並びかわるまでに要する時間が短縮されていることもわかる。つまり，dLVs 系 (1.3) では dLV 系 (1.2) よりも定常状態への収束が速まるように，その超離散版に対しても加速の性質が引き継がれている。(2.1) で定まる箱玉系では運動方程式 (1.1) で定まる箱玉系よりも玉の移動が加速されるといえる。また，図 4 では  $n=0$  において玉のかたまりが存在するので， $n=1$  において運搬人は玉のかたまりを玉のまとまりに変換しているように見える。

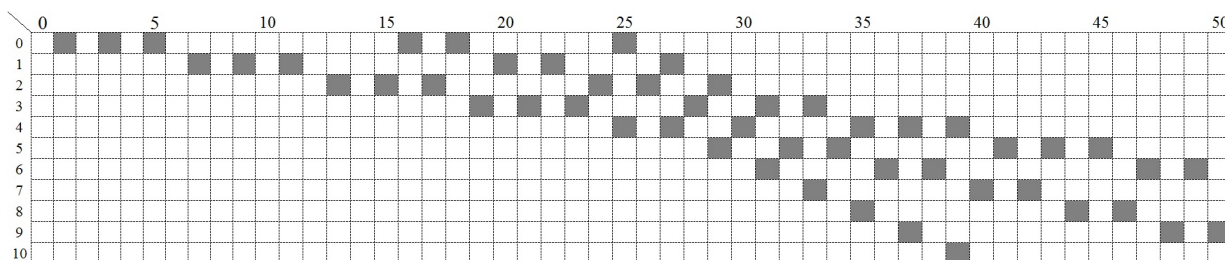


図 3:  $n=0$  において 3 つの異なるまとまりが存在する場合

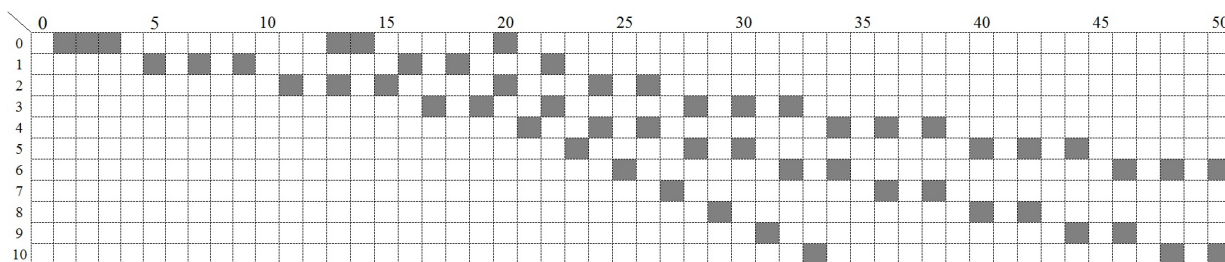


図 4:  $n=0$  において 3 つの異なる大きさのかたまりが存在する場合

### 3 “加速型”箱玉系の拡張とタイムラグをもつ dLVs 系

玉のまとまりを箱  $\omega$  個分とびの玉の連なりに拡張し，時間経過のもとでそのまとまりが維持されるような運動方程式を考えると，

$$B_{j+1}^{(n+1)} = \max \left( 0, - \sum_{i=j-\omega+1}^j B_i^{(n+1)} + \min \left( 1 - \sum_{i=j-\omega+1}^{j+1} B_i^{(n)}, \sum_{i=-\infty}^{j-\omega} B_i^{(n)} - \sum_{i=-\infty}^j B_i^{(n+1)} \right) \right) \quad (3.1)$$

が得られる．このとき，“加速型”箱玉系における運搬人の操作 (a), (b) はそれぞれ以下の (a'), (b') で置き換えられる．

(a') 時刻  $n$  において空でない箱の右隣  $\omega$  個分の箱には玉を入れてはならない

(b') 時刻  $n$  において玉が入れられた箱の右隣  $\omega$  個分の箱には玉を入れてはならない

図 5 は  $\omega = 3$  の場合の数値例であり，玉の移動速度が  $\omega = 1$  の場合よりもさらに加速することがわかる．

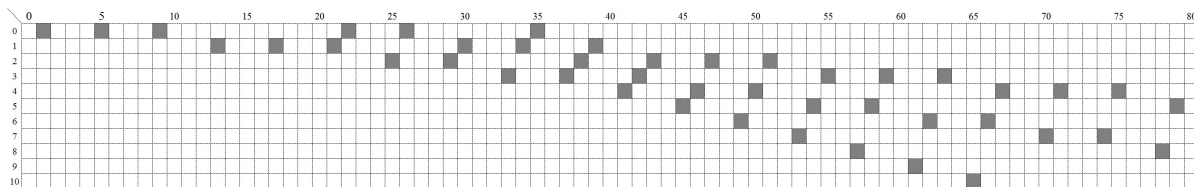


図 5:  $n = 0$  において 3 つの異なる大きさのまとまり ( $\omega = 3$ ) が存在する場合

運動方程式 (3.1) に対して変数変換と逆超離散化を施すと，

$$\begin{cases} u_{2k-1}^{(n+1)} \left( 1 + \delta u_{2k-2}^{(n+1)} \right) = \frac{1}{\delta} \left( 1 + \delta u_{2k-1}^{(n)} \right) \left( 1 + \delta u_{2k}^{(n)} \right), \\ u_{2k}^{(n+1)} \left( 1 + \delta u_{2k-1}^{(n+1)} \right) = \delta u_{2k-1+\omega}^{(n+1-\omega)} u_{2k+\omega}^{(n+1-\omega)} \end{cases} \quad (3.2)$$

が得られる．(3.2) の第 1 式は dLVs 系 (1.3) の第 1 式と同じであるが，(3.2) の第 2 式は dLVs 系 (1.3) の第 2 式に対して  $\omega$  分の時間と空間のずれが含まれる．よって，(3.2) をタイムラグ付き dLVs (ddLVs: deley dLVs) 系と呼ぶことにする．もちろん， $\omega = 1$  である ddLVs 系 (3.2) は dLVs 系 (1.3) と一致する．ゆえに，箱玉系において玉と玉の間隔  $\omega$  を 2 以上にすると，逆超離散化で得られる離散力学系にタイムラグが追加されることがわかる．

dLVs 変数と ddLVs 変数の収束履歴を図 6～図 9 に示す．ただし，ddLVs 系 (3.2) のタイムラグパラメータは  $\omega = 2$  とした．図 6～図 9 は時刻  $n$  における  $\log_{10} u_1^{(n)}, \log_{10} u_2^{(n)}, \dots, \log_{10} u_7^{(n)}$  の値をプロットしたグラフである．なお，プロットされていない値はすべて  $10^{-5}$  以下である．dLVs 系 (1.3) と ddLVs 系 (3.2) において  $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_7^{(0)}$  を同じ値に設定し，ddLVs 系 (3.2) の  $u_1^{(-1)}, u_2^{(-1)}, \dots, u_7^{(-1)}$  については (1)  $u_j^{(-1)} = 3$ , (2)  $u_j^{(-1)} = -(j-2)^2 + 17$ , (3)  $u_j^{(-1)} = (j-4)^2 + 1$  の 3 通りについて調べた．図 6 は dLVs 変数の収束履歴であり，図 7，図 8，図 9 は  $u_1^{(-1)}, u_2^{(-1)}, \dots, u_7^{(-1)}$  の値をそれぞれ (1), (2), (3) で定めたときの ddLVs 変数の収束履歴である．図 6 と図 7 より dLVs 系 (1.3) と ddLVs 系 (3.2) のどちらにおいても時間経過のもとで  $u_2^{(n)}, u_4^{(n)}, u_6^{(n)}$  の値は減少し， $u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_5^{(n)}, u_7^{(n)}$  の値は正の定数に漸近することがわかる．また，ddLVs 系変数の方が dLVs 変数よりも速く収束することが確認できるが，収束が加速する ddLVs 系 (3.2) の性質が  $u_1^{(-1)}, u_2^{(-1)}, \dots, u_7^{(-1)}$  の値に依存しないことは図 7～図 9 から明らかである．

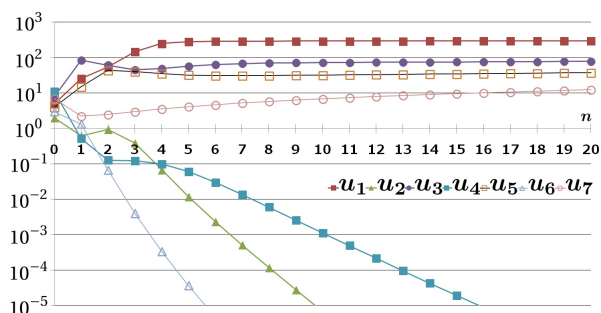


図 6: dLVs 変数の収束履歴

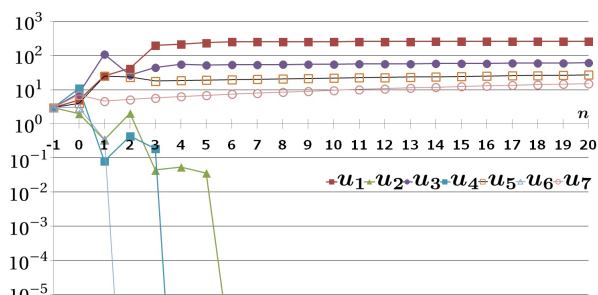


図 7:  $u_j^{(-1)}$  の値を (1) のように定めた場合の ddLVs 変数の収束履歴

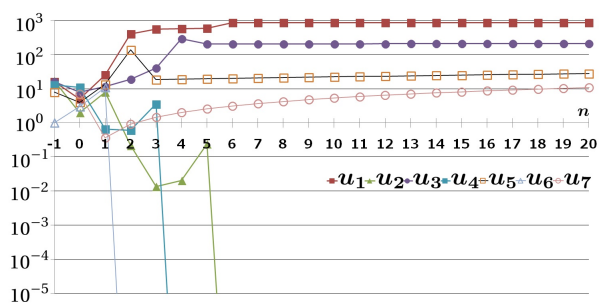


図 8:  $u_j^{(-1)}$  の値を (2) のように定めた場合の ddLVs 変数の収束履歴

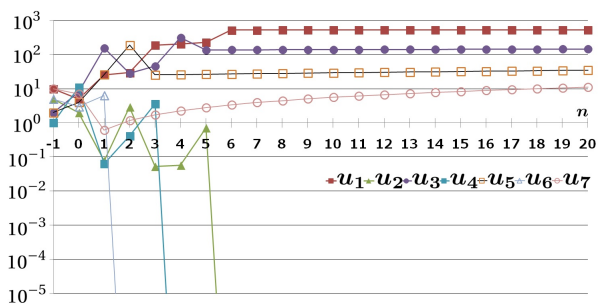


図 9:  $u_j^{(-1)}$  の値を (3) のように定めた場合の ddLVs 変数の収束履歴

#### 4 まとめ

本報告では、まず dLVs 系 (1.3) の超離散化を通じて“加速型”箱玉系 (2.1) を導出した。dLV アルゴリズムの収束を速めるための原点シフト導入が、箱玉系において玉の移動の加速に結び付くことを見出した。続いて、得られた“加速型”箱玉系を拡張し、その逆超離散化からタイムラグ付き dLVs 系 (3.2) を提案した。まとめり内において玉と玉の間隔を広げることがポイントであり、玉の移動がさらに加速される箱玉系を明らかにし、dLVs 系 (1.3) に対するタイムラグの導入にも成功した。今後の課題は、“加速型”箱玉系の保存量を明らかにすることや、タイムラグ付き dLVs 系 (3.2) に基づく固有値（特異値）を求めるためのアルゴリズムの定式化などが挙げられる。

#### 参考文献

- [1] 時弘哲治『箱玉系の数理』朝倉書店 (2006)
- [2] 中村佳正『可積分系の機能数理』共立出版 (2006)
- [3] 中村佳正, 高崎金久, 辻本諭, 尾角正人, 井ノ口順一『解析学百科 II 可積分系の数理』朝倉書店 (2018)
- [4] 岡来美, 関口真基, 岩崎雅史, 石渡恵美子『タイムラグを考慮した離散ロトカ・ボルテラ系とその固有値計算への応用』日本応用数理学会 2019 年度年会予稿集
- [5] Y. Saito, W. Ma and T. Hara, A necessary and sufficient condition for permanence of a Lotka-Volterra discrete system with delays, *J. Math. Anal. Appl.* **256** (2001) 162–174.
- [6] Y. Saito, The necessary and sufficient condition for global stability of a Lotka-Volterra cooperative or competition system with delays, *J. Math. Anal. Appl.* **268** (2002) 109–124.