Soliton方程式のnonlocal reductionとdelay reduction

常松, 愛加
早稲田大学基幹理工学部

田中, 悠太
早稲田大学基幹理工学研究科

丸野, 健一
早稲田大学理工学術院

https://doi.org/10.15017/2927449

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.144-150, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 25 (pp. 144 - 150)

Soliton方程式のnonlocal reduction とdelay reduction

**常松 愛加（Tsunematsu Aika），田中 悠太（Tanaka Yuta），
丸野 健一（Maruno Ken-ichi）**

**Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020**

Soliton 方程式の nonlocal reduction と delay reduction

早稲田大学基幹理工学部　常松愛加 (Aika Tsunematsu)
早稲田大学基幹理工学研究科　田中悠太 (Yuta Tanaka)
早稲田大学理工学術院　丸野健一 (Ken-ichi Maruno)

概 要

Manakov 系 (結合型非線形 Schrödinger 方程式) のソリトン解に対して nonlocal reduction を課すことで非局所型非線形 Schrödinger 方程式のソリトン解を構成する．また, 1 次元及び 2 次元戸田格子方程式に対して delay reduction を課すことで得られる戸田型遅延微分方程式のソリトン解を構成する．

1　はじめに

通常の量子力学の枠組みでは, 観測量である固有値が実数となることから演算子がエルミートであることが要請される．1998 年, Bender らは, 演算子がエルミートであることは固有値が実数となることの十分条件であるが必要条件ではない, すなわち, 演算子がエルミートであれば固有値は実数となるが, 固有値が実数であるからといって演算子がエルミートになるとは限らないことに着目し, 演算子が非エルミートであっても, パリティ･時間 (PT) 対称であれば, その固有値が実数になりうることを見出した [1]. PT 対称とは, P（空間反転）, T（時間反転）に関して対称であることである．

最近, PT 対称性は非線形光学などの分野でも注目されており, PT 対称性を持つ非線形波動の研究が活発に行われている [2]. PT 対称性を持つ非線形波動方程式で可積分であるものはしばらく知られていなかったが, 2013 年に Ablowitz と Musslimani は AKNS 型の Lax ペアから非線形 Schrödinger(NLS) 方程式を導出する際に用いる簡約 (reduction) とは違う簡約 (以後, nonlocal reduction と呼ぶ）を課すことで PT 対称性を持つ可積分な非局所的非線形 Schrödingr 方程式

$$\mathrm{i}u_t(x,t)+u_{xx}(x,t)+2\sigma u(x,t)^2u^*(-x,t)=0,\quad (\sigma=\pm 1),\quad u^*\text{は }u\text{ の複素共役} \tag{1}$$

をはじめとする PT 対称性を持つ nonlocal なソリトン方程式を発見した [3]．方程式 (1) は PT 変換 $x\to -x, t\to -t, u\to u^*$ で不変であり, $u(x,t)$ が解ならば $u^*(-x,-t)$ も解となる．これまで見つかった可積分な PT 対称なソリトン方程式で物理への応用を持つものはなかったが, 最近, Yang は物理的に意味を持つ可能性のある非局所的非線形 Schrödinger(nNLS) 方程式

$$\mathrm{i}u_t(x,t)+u_{xx}(x,t)+2\sigma(|u(x,t)|^2+|u(-x,t)|^2)u(x,t)=0,\quad (\sigma=\pm 1) \tag{2}$$

を提案し, 逆散乱法により厳密解を求めた [4]．Yang は光ファイバー中のパルスを記述する Manakov 系（結合型 NLS 方程式）[5]

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+2\sigma(|u|^2+|v|^2)u=0,\quad \mathrm{i}v_t+v_{xx}+2\sigma(|u|^2+|v|^2)v=0 \tag{3}$$

に nonlocal reduction の条件

$$v(x,t)=u(-x,t) \tag{4}$$

を課してこの nNLS 方程式を得た．nonlocal reduction は 2 つの成分が x の反転に関して対称（空間反転対称, パリティ対称）の関係にあるという条件であるので, (2) の非線形項のポテンシャルはパリティ対称で実となり．nNLS 方程式もパリティ対称性を持つ（同時に PT 対称性も持つ）．

PT 対称性を持つソリトン方程式の探索を契機に, 上記で挙げたような非局所的ソリトン方程式の研究が活発化しているが, 非局所的ソリトン方程式は基本的には複数の従属変数を持つ結合型ソリトン方程式に非局所的な拘束条件 (nonlocal reduction) を課して得られる．

一方, 交通流などの分野でも現れる遅延微分方程式 [6–14], 半離散ソリトン方程式に拘束条件 (delay reduction) を課すことで可積分な遅延微分方程式が得られることが知られている [10–14]．これは, 遅延の効果を半離散ソリトン方程式の離散変数を利用して生み出す手法である．半離散ソリトン方程式の厳密解のうち, 拘束条件を満たすものは遅延微分方程式の厳密解となる．

半離散ソリトン方程式から得られる可積分な遅延微分方程式と非局所的ソリトン方程式は, 共に方程式に内在している離散構造を利用し拘束条件を課すことで得られるという共通点がある．

本稿では, Manakov 系のソリトン解に対して nonlocal reduction を課すことで nNLS 方程式 (2) のソリトン解を構成する．また, 1 次元及び 2 次元戸田格子方程式に対して delay reduction を課すことで得られる戸田型遅延微分方程式のソリトン解を構成する．

2 非局所的非線形 Schrödinger 方程式の bright ソリトン解

2.1 nNLS 方程式の 1-bright ソリトン解

まず Manakov 系 (3) で $\sigma = +1$ の場合（focusing の場合）の解を求める．従属変数変換

$$u(x,t) = \frac{g(x,t)}{f(x,t)}, \quad v(x,t) = \frac{h(x,t)}{f(x,t)}, \quad f \in \mathbb{R}, \quad g, h \in \mathbb{C} \tag{5}$$

を代入すると, 双線形形式は次のようになる:

$$(\mathrm{i}D_t + D_x^2) g \cdot f = 0, \qquad (\mathrm{i}D_t + D_x^2) h \cdot f = 0, \quad D_x^2 f \cdot f = 2(g^* g + h^* h). \tag{6}$$

これに対して, 摂動展開

$$f = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4 + \cdots, \quad g = \epsilon g_1 + \epsilon^3 g_3 + \cdots, \quad h = \epsilon h_1 + \epsilon^3 h_3 + \cdots,$$

を代入し, 広田の直接法の手順に従って計算すると

$$g_1 = \alpha_1 e^{\eta_1}, \quad h_1 = \beta_1 e^{\eta_1}, \quad f_2 = \frac{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2}{(p_1 + p_1^*)^2} e^{\eta_1 + \eta_1^*}, \quad \eta_1 = p_1 x + \mathrm{i} p_1^2 t + \eta_1^{(0)},$$

$f_n, g_n = 0\,(n \geq 3)$ が得られる．ここで, $p_1, \eta_1^{(0)}, \alpha_1, \beta_1$ は複素数である．したがって, Manakov 系の 1-bright ソリトン解は

$$u(x,t) = \frac{\alpha_1}{e^{-\eta_1} + R e^{\eta_1^*}}, \quad v(x,t) = \frac{\beta_1}{e^{-\eta_1} + R e^{\eta_1^*}}, \quad R = \frac{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2}{(p_1 + p_1^*)^2}, \quad \eta_1 = p_1 x + \mathrm{i} p_1^2 t + \eta_1^{(0)} \tag{7}$$

で与えられる．

今, 1-bright ソリトン解のパラメータ p_1 に $p_1 \in \mathbb{R}$ の制限（つまり, p_1 を実数とする制限）を課し位相定数 $\eta_1^{(0)}$ を 0 とすると, $-\eta_1 = -p_1 x - \mathrm{i} p_1^2 t$, $\eta_1^* = p_1 x - \mathrm{i} p_1^2 t$ より

$$u(x,t) = \frac{\alpha_1 e^{\mathrm{i} p_1^2 t}}{e^{-p_1 x} + R e^{p_1 x}}, \quad v(x,t) = \frac{\beta_1 e^{\mathrm{i} p_1^2 t}}{e^{-p_1 x} + R e^{p_1 x}}, \quad R = \frac{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2}{4 p_1^2} \tag{8}$$

となる．よって

$$u(-x,t) = \frac{\alpha_1 e^{\mathrm{i} p_1^2 t}}{e^{p_1 x} + R e^{-p_1 x}} = \frac{\frac{\alpha_1}{R} e^{\mathrm{i} p_1^2 t}}{e^{-p_1 x} + \frac{1}{R} e^{p_1 x}} \tag{9}$$

が得られる．これが nonlocal reduction の条件 $v(x,t) = u(-x,t)$ を満たすのは $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{R}$, $R = \frac{1}{R}$ となる時であるが, これは $\beta_1 = \alpha_1$, $p_1 = \pm \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{2}}$ であれば成り立つ．この時, $R = 1$ であるから, nNLS 方程式 (2) の 1-bright ソリトン解

$$u(x,t) = \frac{\alpha_1 e^{\mathrm{i} \frac{|\alpha_1|^2}{2} t}}{e^{-\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} x} + e^{\frac{|\alpha_1|}{\sqrt{2}} x}} = \frac{\alpha_1 e^{\mathrm{i} \frac{|\alpha_1|^2}{2} t}}{2} \mathrm{sech} \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{2}} x \tag{10}$$

が得られる．

2.2 nNLS 方程式の 2-bright ソリトン解

Manakov 系 (3) の 2-bright ソリトン解は

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=\frac{g(x,t)}{f(x,t)},\quad v(x,t)=\frac{h(x,t)}{f(x,t)}\\
&f(x,t)=1+\frac{|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2}{(p_1+p_1^*)^2}e^{\eta_1+\eta_1^*}+\frac{\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*}{(p_1+p_2^*)^2}e^{\eta_1+\eta_2^*}+\frac{\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2}{(p_1^*+p_2)^2}e^{\eta_1^*+\eta_2}+\frac{|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2}{(p_2+p_2^*)^2}e^{\eta_2+\eta_2^*}\\
&\quad+\frac{(p_1-p_2)(p_1^*-p_2^*)}{(p_1+p_1^*)(p_1+p_2^*)(p_1^*+p_2)(p_2+p_2^*)}\Big(\frac{(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{(p_1+p_1^*)(p_2+p_2^*)}\\
&\quad-\frac{|\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*|^2}{(p_1+p_2)(p_1^*+p_2^*)}\Big)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*},\\
&g(x,t)=\alpha_1e^{\eta_1}+\alpha_2e^{\eta_2}\\
&\quad+\frac{p_1-p_2}{(p_1+p_1^*)(p_1^*+p_2)}\left(\frac{\alpha_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{p_1^*+p_2}-\frac{\alpha_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{p_1+p_1^*}\right)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2}\\
&\quad+\frac{p_2-p_1}{(p_1+p_2^*)(p_2+p_2^*)}\left(\frac{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{p_1+p_2^*}-\frac{\alpha_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{p_2+p_2^*}\right)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*},\\
&h(x,t)=\beta_1e^{\eta_1}+\beta_2e^{\eta_2}\\
&\quad+\frac{p_1-p_2}{(p_1+p_1^*)(p_1^*+p_2)}\left(\frac{\beta_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{p_1^*+p_2}-\frac{\beta_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{p_1+p_1^*}\right)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2}\\
&\quad+\frac{p_2-p_1}{(p_1+p_2^*)(p_2+p_2^*)}\left(\frac{\beta_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{p_1+p_2^*}-\frac{\beta_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{p_2+p_2^*}\right)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*}\\
&\eta_i=p_ix+\mathrm{i}p_i^2t+\eta_i^{(0)},\qquad(i=1,2)
\end{aligned}
$$

で与えられる．これが nonlocal reduction の条件 $v(x,t)=u(-x,t)$ を満たすのは p_1,p_2 が実数である場合と p_1,p_2 が複素数で互いに複素共役 $(p_2=p_1^*)$ の場合である．

(i) $p_1,p_2\in\mathbb{R}$ **の場合**

$p_1,p_2\in\mathbb{R}$ という条件を課し位相定数 $\eta_1^{(0)}$, $\eta_2^{(0)}$ を 0 とすると, Manakov 系の 2-bright ソリトン解は

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=\frac{g(x,t)}{f(x,t)},\quad v(x,t)=\frac{h(x,t)}{f(x,t)}\\
&f(x,t)=1+\frac{|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2}{4p_1^2}e^{\eta_1+\eta_1^*}+\frac{\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*}{(p_1+p_2)^2}e^{\eta_1+\eta_2^*}+\frac{\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2}{(p_1+p_2)^2}e^{\eta_1^*+\eta_2}+\frac{|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2}{4p_2^2}e^{\eta_2+\eta_2^*}\\
&\quad+\frac{(p_1-p_2)^2}{4p_1p_2(p_1+p_2)^2}\Big(\frac{(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{4p_1p_2}-\frac{|\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*|^2}{(p_1+p_2)^2}\Big)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*},\\
&g(x,t)=\alpha_1e^{\eta_1}+\alpha_2e^{\eta_2}+\frac{p_1-p_2}{2p_1(p_1+p_2)}\left(\frac{\alpha_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{p_1+p_2}-\frac{\alpha_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{2p_1}\right)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2}\\
&\quad+\frac{p_2-p_1}{2p_2(p_1+p_2)}\left(\frac{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{p_1+p_2}-\frac{\alpha_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{2p_2}\right)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*},\\
&h(x,t)=\beta_1e^{\eta_1}+\beta_2e^{\eta_2}+\frac{p_1-p_2}{2p_1(p_1+p_2)}\left(\frac{\beta_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{p_1+p_2}-\frac{\beta_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{2p_1}\right)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2}\\
&\quad+\frac{p_2-p_1}{2p_2(p_1+p_2)}\left(\frac{\beta_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{p_1+p_2}-\frac{\beta_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{2p_2}\right)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*},\\
&\eta_i=p_ix+\mathrm{i}p_i^2t,\qquad(i=1,2)
\end{aligned}
$$

となる．$\tilde{f}(x,t)=e^{-\eta_1-\eta_2}f(x,t)$, $\tilde{g}(x,t)=e^{-\eta_1-\eta_2}g(x,t)$, $\tilde{h}(x,t)=e^{-\eta_1-\eta_2}h(x,t)$ とすれば

$$
u(-x,t)=\frac{g(-x,t)}{f(-x,t)}=\frac{\tilde{g}(-x,t)}{\tilde{f}(-x,t)},\quad v(x,t)=\frac{h(x,t)}{f(x,t)}=\frac{\tilde{h}(x,t)}{\tilde{f}(x,t)}\tag{11}
$$

より

$$\tilde{f}(x,t)=\tilde{f}(-x,t),\quad \tilde{h}(x,t)=\tilde{g}(-x,t) \tag{12}$$

を満たせば $v(x,t)=u(-x,t)$ を満たす．$e^{\eta_1^*-\eta_1}$ と $e^{\eta_2^*-\eta_2}$ は x 依存性がなくなるのでパリティ対称性を持つことに注意すると，(12) を満たすにはパラメーターが以下の 6 つの条件を満たせばよい:

$$\frac{|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2}{p_1^2}=\frac{|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2}{p_2^2}, \tag{13}$$

$$\frac{(p_1-p_2)^2}{4p_1p_2(p_1+p_2)^2}\left(\frac{(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{4p_1p_2}-\frac{|\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*|^2}{(p_1+p_2)^2}\right)=1, \tag{14}$$

$$\frac{p_2-p_1}{2p_2(p_1+p_2)}\left(\frac{\beta_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{p_1+p_2}-\frac{\beta_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{2p_2}\right)=\alpha_1, \tag{15}$$

$$\frac{p_1-p_2}{2p_1(p_1+p_2)}\left(\frac{\beta_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{p_1+p_2}-\frac{\beta_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{2p_1}\right)=\alpha_2, \tag{16}$$

$$\frac{p_2-p_1}{2p_2(p_1+p_2)}\left(\frac{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{p_1+p_2}-\frac{\alpha_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{2p_2}\right)=\beta_1, \tag{17}$$

$$\frac{p_1-p_2}{2p_1(p_1+p_2)}\left(\frac{\alpha_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{p_1+p_2}-\frac{\alpha_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{2p_1}\right)=\beta_2. \tag{18}$$

つまり, これら 6 つの条件を満たすパラメーターを取れば, nNLS 方程式 (2) の 2 ソリトン解が得られる．

(ii) $p_1=a+\mathrm{i}b, p_2=a-\mathrm{i}b$, $(a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0)$ の場合
$p_1=a+\mathrm{i}b, p_2=a-\mathrm{i}b$ の制限を課し位相定数 $\eta_1^{(0)}$, $\eta_2^{(0)}$ を 0 とすると，Manakov 系の 2-bright ソリトン解は

$$\begin{aligned}
&u(x,t)=\frac{g(x,t)}{f(x,t)},\quad v(x,t)=\frac{h(x,t)}{f(x,t)}\\
&f(x,t)=1+\frac{|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2}{4a^2}e^{\eta_1+\eta_1^*}+\frac{\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*}{4(a+\mathrm{i}b)^2}e^{\eta_1+\eta_2^*}+\frac{\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2}{4(a-\mathrm{i}b)^2}e^{\eta_1^*+\eta_2}+\frac{|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2}{4a^2}e^{\eta_2+\eta_2^*}\\
&\quad -\frac{b^2}{16a^4(a^2+b^2)}((|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)-|\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*|^2)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*},\\
&g(x,t)=\alpha_1e^{\eta_1}+\alpha_2e^{\eta_2}+\frac{\mathrm{i}b}{4a(a-\mathrm{i}b)}\left(\frac{\alpha_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{a-\mathrm{i}b}-\frac{\alpha_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{a}\right)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2}\\
&\quad -\frac{\mathrm{i}b}{4a(a+\mathrm{i}b)}\left(\frac{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{a+\mathrm{i}b}-\frac{\alpha_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{a}\right)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*},\\
&h(x,t)=\beta_1e^{\eta_1}+\beta_2e^{\eta_2}\quad+\frac{\mathrm{i}b}{4a(a-\mathrm{i}b)}\left(\frac{\beta_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{(a-\mathrm{i}b)}-\frac{\beta_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{a}\right)e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2}\\
&\quad -\frac{\mathrm{i}b}{4a(a+\mathrm{i}b)}\left(\frac{\beta_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{a+\mathrm{i}b}-\frac{\beta_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{a}\right)e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*},\\
&\eta_i=p_ix+\mathrm{i}p_i^2t,\qquad (i=1,2)
\end{aligned}$$

となる．(i) と同様にして (12) を満たせば $v(x,t)=u(-x,t)$ を満たせばよい．$e^{\eta_2^*-\eta_1}$ と $e^{\eta_1^*-\eta_2}$ は x 依存性がなくなるのでパリティ対称性を持つことに注意すると，(12) を満たすにはパラメーターが以下の 6

つの条件を満たせばよい:

$$\frac{\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*}{(a+\mathrm{i}b)^2}=\frac{\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2}{(a-\mathrm{i}b)^2} \tag{19}$$

$$-\frac{b^2}{16a^4(a^2+b^2)}((|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)-|\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*|^2)=1 \tag{20}$$

$$-\frac{\mathrm{i}b}{4a(a+\mathrm{i}b)}\left(\frac{\beta_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{a+\mathrm{i}b}-\frac{\beta_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{a}\right)=\alpha_1 \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{i}b}{4a(a-\mathrm{i}b)}\left(\frac{\beta_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{(a-\mathrm{i}b)}-\frac{\beta_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{a}\right)=\alpha_2 \tag{22}$$

$$-\frac{\mathrm{i}b}{4a(a+\mathrm{i}b)}\left(\frac{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2^*+\beta_1\beta_2^*)}{a+\mathrm{i}b}-\frac{\alpha_1(|\alpha_2|^2+|\beta_2|^2)}{a}\right)=\beta_1 \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{i}b}{4a(a-\mathrm{i}b)}\left(\frac{\alpha_1(\alpha_1^*\alpha_2+\beta_1^*\beta_2)}{a-\mathrm{i}b}-\frac{\alpha_2(|\alpha_1|^2+|\beta_1|^2)}{a}\right)=\beta_2 \tag{24}$$

つまり, これら 6 つの条件を満たすパラメーターを取れば, nNLS 方程式 (2) の 2 ソリトン解が得られる.

2.3 戸田型遅延微分方程式

2.3.1 1 次元戸田型遅延微分方程式の厳密解

1 次元戸田格子方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1+V_n)=V_{n+1}-2V_n+V_{n-1} \tag{25}$$

に delay reduction (traveling wave reduction)

$$V_n(t)=w(z), \qquad z=hn+t, \quad h \text{ は実定数} \tag{26}$$

を課すと, 1 次元戸田型遅延微分方程式

$$\frac{d^2}{dz^2}\log(1+w(z))=w(z+h)-2w(z)+w(z-h) \tag{27}$$

が得られる.

1 次元戸田格子方程式の N-ソリトン解は

$$V_n(t)=\frac{d^2}{dt^2}\log\tau_n(t), \quad \tau_n(t)=\det\left(\delta_{ij}+\frac{\phi_i\psi_j}{p_i-p_j^{-1}}\right)_{1\le i,j\le N}, \tag{28}$$
$$\phi_i=e^{p_it+n\log p_i+\phi_i^{(0)}}, \quad \psi_i=e^{-p_i^{-1}t+n\log p_i+\psi_i^{(0)}}, \quad i=1,2,\cdots,N$$

で与えられる [15].

1 次元戸田格子方程式の 1 ソリトン解

$$\tau_n(t)=1+\frac{e^{\left(p_1-p_1^{-1}\right)t+n\log p_1^2+\phi_1^{(0)}+\psi_1^{(0)}}}{p_1-p_1^{-1}}=1+\frac{e^{\left(p_1-p_1^{-1}\right)\left(t+n\frac{p_1\log p_1^2}{p_1^2-1}\right)+\phi_1^{(0)}+\psi_1^{(0)}}}{p_1-p_1^{-1}}$$

において条件

$$\frac{p_1\log p_1^2}{p_1^2-1}=h \tag{29}$$

を課すと $\tau_n(t) = 1 + \frac{1}{p_1 - p_1^{-1}} e^{(p_1 - p_1^{-1})(t+nh) + \phi_1^{(0)} + \psi_1^{(0)}}$ となるので, $z = t + nh$ とおけば 1 次元戸田型遅延微分方程式 (27) の 1 ソリトン解

$$w(z) = \frac{d^2}{dz^2} \log f(z), \quad \tau_n(t) = f(z) = 1 + \frac{e^{\left(p_1 - p_1^{-1}\right)z + \phi_1^{(0)} + \psi_1^{(0)}}}{p_1 - p_1^{-1}} \tag{30}$$

が得られる．

1 次元戸田格子方程式の 2 ソリトン解

$$\begin{aligned} \tau_n(t) &= \begin{vmatrix} 1 + \frac{\phi_1\psi_1}{p_1 - p_1^{-1}} & \frac{\phi_1\psi_2}{p_1 - p_2^{-1}} \\ \frac{\phi_2\psi_1}{p_2 - p_1^{-1}} & 1 + \frac{\phi_2\psi_2}{p_2 - p_2^{-1}} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\phi_1\psi_1}{p_1 - p_1^{-1}} + \frac{\phi_2\psi_2}{p_2 - p_2^{-1}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{(p_1 - p_1^{-1})(p_2 - p_2^{-1})} - \frac{1}{(p_1 - p_2^{-1})(p_2 - p_1^{-1})} \right) \phi_1\psi_1\phi_2\psi_2 \end{aligned} \tag{31}$$

において

$$\phi_i\psi_i = e^{\left(p_i - p_i^{-1}\right)t + n\log p_i^2 + \phi_i^{(0)} + \psi_i^{(0)}} = e^{\left(p_i - p_i^{-1}\right)\left(t + \frac{p_i \log p_i^2}{p_i^2 - 1} n\right) + \phi_i^{(0)} + \psi_i^{(0)}} \tag{32}$$

となるので, パラメーター $p_1, p_2 (p_1 \neq p_2)$ が

$$\frac{p_i \log p_i^2}{p_i^2 - 1} = h, \quad (i = 1, 2) \tag{33}$$

を満たせば delay reduction で解が生き残るが, これは $h > 0$ であれば可能である．$f(p) = \frac{p \log p^2}{p^2 - 1}$ とするとき, $0 < f(p) < 1$, $f(p) = f(p^{-1})$ であるから, $0 < h < 1$ であれば (33) を満たす p_1, $p_2 = p_1^{-1}$, $(p_1, p_2 \neq 1)$ をとることができる．しかしながら, $1/(p_1 - p_2^{-1})$, $1/(p_2 - p_2^{-1})$ が発散してしまうので, delay reduction で 2 ソリトン解は生き残らない．したがって, 1 次元戸田型遅延微分方程式の 2 ソリトン解は存在しない．

2.3.2 2 次元戸田型遅延偏微分方程式の厳密解

2 次元戸田格子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1 + V_n) = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \tag{34}$$

に delay reduction (traveling wave reduction)

$$V_n(x, y) = w(z, y), \qquad z = hn + x, \quad h \text{ は実定数} \tag{35}$$

を課すと, 2 次元戸田型遅延偏微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \log(1 + w(z, y)) = w(z + h, y) - 2w(z, y) + w(z - h, y) \tag{36}$$

が得られる．

2 次元戸田格子方程式の N ソリトン解は

$$\begin{aligned} &V_n(t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \tau_n(t), \\ &\tau_n = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\phi_i\psi_j}{p_i - q_j}\right)_{1 \le i,j \le N} = \det\left(\delta_{ij}\frac{\phi_j}{\phi_i} + \frac{\phi_j\psi_j}{p_i - q_j}\right)_{1 \le i,j \le N} = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\phi_j\psi_j}{p_i - q_j}\right)_{1 \le i,j \le N}, \\ &\phi_i = e^{p_i t - p_i^{-1} y + n \log p_i + \phi_i^{(0)}}, \quad \psi_i = e^{-q_i x + q_i^{-1} y - n \log q_i + \psi_i^{(0)}}, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned} \tag{37}$$

で与えられる [15].

$$\phi_i\psi_i = e^{(p_i-q_i)x-(p_i^{-1}-q_i^{-1})y+(\log p_i-\log q_i)n+\phi_i^{(0)}+\psi_i^{(0)}}, \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

となるので, パラメーター $p_i, q_i (i=1,2,\cdots,N)$ が

$$\frac{\log p_i - \log q_i}{p_i - q_i} = h \tag{38}$$

を満たせば delay reduction で解が生き残る. p_i, q_i が条件 (38) を満たす時, $z = t + nh$ とおけば 2 次元戸田型遅延偏微分方程式 (36) の N ソリトン解

$$w(z,y) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\log f(z,y), \quad f(z,y) = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\phi_i\psi_j}{p_i - q_j}\right)_{1\le i,j\le N} = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\phi_j\psi_j}{p_i - q_j}\right)_{1\le i,j\le N} \tag{39}$$

$$\phi_i = e^{p_i z - p_i^{-1}y+\phi_i^{(0)}}, \quad \psi_i = e^{-q_i z + q_i^{-1}y + \psi_i^{(0)}}, \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

が得られる.

3 まとめ

本稿では, Manakov 系のソリトン解に対して nonlocal reduction を課すことで Yang によって最近提案された nNLS 方程式 (2) のソリトン解を求めた. また, 1 次元及び 2 次元戸田格子方程式に対して delay reduction を課すことで得られる戸田型遅延微分方程式のソリトン解を求めた.

2 次元戸田型遅延偏微分方程式は N ソリトン解を持つが, 遅延微分方程式でこれまで多ソリトン解を持つものは我々の知る限りこれまで知られていなかったようである.

謝辞

研究集会で議論をしていただいた Ralph Willox 先生に感謝いたします.

参考文献

[1] C. M. Bender, K. A. Milton, Phy. Rev. Lett. **80** (1998) 5243.

[2] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, D. Kip, Nature Phys. **6** (2010) 192.

[3] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 064105.

[4] J. Yang, Phy. Rev. E **98** (2018) 042202.

[5] S. V. Manakov, Sov. Phys. JETP **38** (1974) 248.

[6] K. Hasebe, A. Nakayama, Y. Sugiyama, Phys. Lett. A, **259** (1999) 135.

[7] Y. Tutiya, M. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 083002.

[8] B. Grammaticos, A. Ramani, I. C. Moreira, Physica A **196** 574.

[9] R. Halburd, R. Korhonen, Proc. Amer. Math. Soc. **145** 2513.

[10] A. Ramani, B. Grammaticos, K. M. Tamizhmani, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) L53.

[11] N. Joshi, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 022001.

[12] N. Joshi, P. E. Spicer, J. Phy. Soc. Jpn. **78** (2009) 094006.

[13] C-M. Viallet, arXiv:1408.6161 (2014).

[14] B. K. Berntson, SIGMA, **14** (2018) 020.

[15] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理 (岩波書店, 2005).