超離散戸田方程式による単因子計算アルゴリズム

小林, 克樹
京都大学情報学研究科数理工学専攻

https://doi.org/10.15017/2927448

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.138-143, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 24 (pp. 138 - 143)

超離散戸田方程式による単因子計算アルゴリズム

小林 克樹（**Kobayashi Katsuki**）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

超離散戸田方程式による単因子計算アルゴリズム

小林 克樹 (Katsuki KOBAYASHI)

京都大学情報学研究科 数理工学専攻

概要

超離散戸田方程式の $(\min, +)$ 演算を $(\gcd, \times)$ 演算に置き換えて得られる力学系が, 二重対角整数行列の単因子, すなわち対応する整数行列の基本変形に対する不変量を計算するアルゴリズムであることを示す.

1　はじめに

離散可積分系の数値計算アルゴリズムへの応用はこれまでに数多く報告されている [2, 3]. 例えば離散戸田方程式は三重対角行列の固有値計算アルゴリズムである qd 法 (quotient-difference algorithm) の漸化式と同一であることが知られている. また, 離散可積分系は超離散化と呼ばれる極限操作により, 区分線型な方程式系に変換される. そうして得られる方程式系は超離散可積分系と呼ばれ, セルオートマトンとの深い関係が見つかるなど注目を集めている [7].

そこで超離散可積分系を用いて, 行列の何らかの不変量を計算するアルゴリズムを定式化できるかどうかは自然な問題である. 本稿では超離散戸田方程式の $(\min, +)$ 演算を $(\gcd, \times)$ 演算に置き換えて得られる力学系が, 二重対角整数行列の単因子を計算するアルゴリズムを与えることを示す. 単因子とは整数行列の可逆行列倍に関する不変量であり, 整数論などにも現れる重要な量である.

本稿の構成は以下の通りである. 2 節では, 整数行列の単因子の定義を与える. 3 節では, 超離散戸田方程式と箱玉系を定義し, それらの基本的な性質を述べる. 4 節では, 二重対角整数行列の単因子を計算するアルゴリズムを与える. 5 節で, 本稿のまとめと今後の課題について述べる.

2　単因子

本節では整数行列の単因子の定義を与える.

定理 2.1. A を $n \times n$ 整数行列とする．このとき可逆な整数行列 $P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ が存在して,

$$PAQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & & \alpha_r & & & \vdots \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

であって, 全ての $1 \leq i \leq r$ について $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$ となるようにできる．このとき対角成分 α_i は ± 1 倍を除いて一意に定まる．ここで $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$ は α_i が α_{i+1} を割り切ることを表す.

定理 2.1 の (1) に現れる対角成分 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ を A の**単因子**と呼び, 行列 (1) を A の **Smith 標準形**と呼ぶ. 次の補題はアルゴリズムの漸化式が単因子を保存することを示すのに用いられる.

補題 2.1 ([5])**.** $A \in M(n, \mathbb{Z})$ を $n \times n$ 行列とし, $d_i(A)$ を A のすべての $i \times i$ 小行列式たちの最大公約数とする．このとき $d_i(A)$ と A の単因子 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ の間には次の関係がある.

$$\begin{aligned} &d_n(A) = \cdots = d_{l+1}(A) = 0, \\ &d_l(A) = u_l \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l, \\ &\vdots \\ &d_2(A) = u_2 \alpha_1 \alpha_2, \\ &d_1(A) = u_1 \alpha_1. \end{aligned}$$

ここで $u_1, u_2, ..., u_l \in \{\pm 1\}$.

3 超離散戸田方程式と箱玉系

離散戸田方程式は次の形の方程式である.

$$\begin{aligned} &q_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_n^{(t)} - e_{n-1}^{(t+1)}, \\ &e_n^{(t+1)} = q_{n+1}^{(t)} e_n^{(t)} / q_n^{(t+1)}, \\ &e_{-1}^{(t)} = e_{N-1}^{(t)} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

方程式 (2) を書き直して, 右辺に減算を含まない形にすると

$$\begin{aligned} &q_n^{(t+1)} = e_n^{(t)} + \frac{\prod_{j=0}^{n} q_j^{(t)}}{\prod_{j=0}^{n-1} q_j^{(t+1)}}, \\ &e_n^{(t+1)} = e_n^{(t)} q_{n+1}^{(t)} / q_n^{(t+1)}, \\ &e_{-1}^{(t)} = e_{N-1}^{(t)} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

となる．(3) を超離散化して区分線型な方程式系

$$\begin{aligned} Q_n^{(t+1)} &= \min\left(E_n^{(t)},\ \sum_{j=0}^{n} Q_j^{(t)} - \sum_{j=0}^{n-1} Q_j^{(t+1)}\right), \\ E_n^{(t+1)} &= E_n^{(t)} + Q_{n+1}^{(t)} - Q_n^{(t+1)}, \\ E_{-1}^{(t)} &= E_{N-1}^{(t)} = +\infty, \quad Q_n^{(t)}, E_n^{(t)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{aligned} \tag{4}$$

を得る．方程式系 (4) を超離散戸田方程式という．超離散戸田方程式が箱玉系の時間発展方程式とみなせることを説明する．まず箱玉系の定義を述べる．$u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ を両側無限 01 列とし，有限個の n を除いて $u_n = 0$ と仮定する．'0', '1' をそれぞれ箱，玉と呼ぶ．写像 $T\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ を

$$(Tu)_n = \min\left\{1 - u_n,\ \sum_{m=-\infty}^{n-1} (u_m - (Tu)_m)\right\},$$

と定める．T を 01 列の時間発展を定める写像とみなし，力学系 $u^{(t)} = T^t(u^{(0)}),\ t = 0, 1, 2, ...$ を**箱玉系**と呼ぶ．時間発展の例を図 1 に示す．連続する玉のかたまり (例えば図 1 の u の行だと '1111',

$$\begin{aligned} u:&\ 1111000111001000000000000000 \\ T^1u:&\ 0000111000110111000000000000 \\ T^2u:&\ 0000000111001000111100000000 \\ T^3u:&\ 0000000000110110000011110000 \\ T^4u:&\ 0000000000001001110000001111 \end{aligned}$$

図 1　箱玉系の時間発展

'111', '1') の前後に十分多くの箱があるとき，そのかたまりは自身の長さと同じ速度で右方向へ伝搬してゆく．そのような玉のかたまりは**ソリトン**と呼ばれる．ソリトンの長さは時間 t に依存しないことが示される [6].

N 個のソリトンを持つ箱玉系を考える．方程式 (4) は以下の同一視により箱玉系の時間発展方程式とみなせる [7].

- $Q_n^{(t)}$: 時刻 t おける，左から n 番目にある玉のかたまりの長さ，
- $E_n^{(t)}$: 時刻 t おける，左から n 番目と $n+1$ 番目にある玉のかたまりの間の箱の数.

箱玉系の保存量を超離散戸田方程式の従属変数を用いて書く．従属変数

$$Q_0^{(t)}, E_0^{(t)}, Q_1^{(t)}, \cdots, Q_{N-2}^{(t)}, E_{N-2}^{(t)}, Q_{N-1}^{(t)}$$

を

$$W_1^{(t)}, W_2^{(t)}, \cdots, W_{2N-1}^{(t)},$$

と書き換え, $uC_1, uC_2, ..., uC_N$ を

$$
\begin{aligned}
uC_1 &= \min_{1\le j_1 \le 2N-1} W_{j_1}^{(t)}, \\
uC_2 &= \min_{\substack{j_1,j_2 \\ 1\le j_1 < j_2 -1 \le 2N-1}} (W_{j_1}^{(t)} + W_{j_2}^{t}), \\
&\vdots \\
uC_l &= \min_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_l \\ 1\le j_1 < j_2 -1 < \cdots < j_l - l + 1 \le 2N-1}} (W_{j_1}^{(t)} + W_{j_2}^{(t)} + \cdots W_{j_l}^{(t)}), \\
&\vdots \\
uC_N &= \min_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_N \\ 1\le j_1 < j_2 -1 < \cdots < j_N - N + 1 \le 2N-1}} (W_{j_1}^{(t)} + W_{j_2}^{(t)} + \cdots W_{j_N}^{(t)}),
\end{aligned}
$$

と定める. このとき次が成立する.

命題 3.1 ([6])**.** 超離散戸田方程式 (4) の n 個の独立な保存量は $uC_1, uC_2, ..., uC_N$ で与えられる.

方程式 (4) の従属変数 $Q_0^{(t)}, \cdots Q_{N-1}^{(t)}, E_0^{(t)}, ..., E_{N-2}^{(t)}$ について次の二つが成り立つ.

補題 3.1 ([4])**.** 正整数 T が存在して, すべての $t > T$ に対して

$$Q_0^{(t)} \le Q_1^{(t)} \le \cdots Q_{N-1}^{(t)}.$$

上の性質は箱玉系の **sorting property** と呼ばれる.

補題 3.2. 正整数 T が存在して全ての $t > T$ に対して,

$$Q_i^{(t)} \le E_i^{(t)}, \quad i = 0, 1, ..., N-2.$$

補題 3.1 および 3.2 は 4 節で提案するアルゴリズムの収束性を証明する際に重要な役割をはたす.

4　超離散戸田方程式による単因子計算アルゴリズム

超離散戸田方程式 (4) をそのまま使うのではなく, 次の漸化式を考える.

$$
\begin{aligned}
q_n^{(t+1)} &= \gcd\left(e_n^{(t)},\ \prod_{j=0}^{n} q_j^{(t)} \Big/ \prod_{j=0}^{n-1} q_j^{(t+1)} \right), \\
e_n^{(t+1)} &= e_n^{(t)} q_{n+1}^{(t)} / q_n^{(t+1)}, \\
e_{-1}^{(t)} &= e_{N-1}^{(t)} = 0, \quad e_n^{(t)}, q_n^{(t)} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(5) は (4) における $(\min,+)$ 演算を $(\gcd,\times)$ に置き換えたものである. $X^{(0)}\in M(n,\mathbb{Z})$ を下二重対角整数行列とし, $X^{(0)}$ の要素を

$$X^{(0)}=\begin{pmatrix} q_0^{(0)} & & & & \\ e_0^{(0)} & q_1^{(0)} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & e_{N-3}^{(0)} & q_{N-2}^{(0)} & \\ & & & e_{N-2}^{(0)} & q_{N-1}^{(0)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

と表す. ここで $q_0^{(0)},q_1^{(0)},\cdots,q_{N-1}^{(0)}$ と, $e_0^{(0)},e_1^{(0)},\cdots,e_{N-2}^{(0)}$ は 0 でないと仮定する. 漸化式 (5) を用いて $q_n^{(t)},e_n^{(t)}$ for $t=1,2,...$ を計算し, 行列 $X^{(t)}$ を

$$X^{(t)}=\begin{pmatrix} q_0^{(t)} & & & & \\ e_0^{(t)} & q_1^{(t)} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & e_{N-3}^{(t)} & q_{N-2}^{(t)} & \\ & & & e_{N-2}^{(t)} & q_{N-1}^{(t)} \end{pmatrix}$$

と定める. 次が本稿の主定理である.

定理 4.1 ([1])**.** 整数 $T>0$ が存在して, 任意の $t>T$ について行列 $X^{(t)}$ の対角部分は初期行列 $X^{(0)}$ の Smith 標準形と一致する. すなわち, 方程式 (5) の従属変数 $q_0^{(t)},q_1^{(t)},...,q_{N-1}^{(t)}$ は有限時間で $X^{(0)}$ の単因子に収束する.

定理 4.1 に基づいて, 二重対角整数行列に対する単因子計算アルゴリズムを次で与える.

二重対角整数行列の単因子計算アルゴリズム

1. 与えられた下二重対角行列 $X^{(0)}\in M(n,\mathbb{Z})$ に対して, 漸化式 (5) の初期値を (6) のように定める. $t=0$ とする.
2. $X^{(t+1)}$ を (5) によって計算する.
3. 全ての $i=0,1,...,N-2$ について $q_i^{(t)}\mid q_{i+1}^{(t)}$, $q_i^{(t)}\mid e_i^{(t)}$ が成立するならステップ 4 に進み, 成立しないなら $t\to t+1$ とし, ステップ 2 に戻る.
4. $q_0^{(t)},q_1^{(t)},...,q_{N-1}^{(t)}$ を出力し, アルゴリズムを停止する.

以下に計算例を示す.

例 4.1. 初期行列 $X^{(0)}$ を

$$X^{(0)}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ 4 & 6 & \\ & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

とする．このとき漸化式 (5) による計算は次のように進む．

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 4 & 6 & \\ & 3 & 9 \end{pmatrix} \to X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 12 & 3 & \\ & 9 & 18 \end{pmatrix} \to X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 18 & 3 & \\ & 54 & 18 \end{pmatrix}$$
$$\to X^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 27 & 3 & \\ & 324 & 18 \end{pmatrix} \to X^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 81 & 6 & \\ & 972 & 18 \end{pmatrix}$$

最後の行列 $X^{(4)}$ はアルゴリズムの停止条件 $q_i^{(t)} \mid q_{i+1}^{(t)}$, $q_i^{(t)} \mid e_i^{(t)}, i = 0, 1, ..., N-2$ を満たしている．ゆえに $X^{(0)}$ の単因子は $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 18$ である．

5 おわりに

本稿では超離散戸田方程式の (min, +) 演算を (gcd, ×) 演算に置き換えた力学系を導入することで, 二重対角整数行列の単因子を計算するアルゴリズムを定式化した．

今後の課題として, 本稿で提案したアルゴリズムの時間計算量などを評価し, 既存の単因子計算アルゴリズムとの性能比較を行うことがあげられる．また, より一般の超離散可積分系を用いて, 二重対角とは限らない行列の単因子計算アルゴリズムを定式化することも興味深い問題の一つである．

参考文献

[1] K. Kobayashi. *Computation of the invariant factors of bidiagonal integer matrices by the ultradiscrete Toda lattice*, in preparation.

[2] M. Iwasaki and Y. Nakamura, *Accurate computation of singular values in terms of shifted integrable schemes*, Jpn. J. Indust. Appl. Math. **23** (2006) 239–259.

[3] 中村 佳正, 可積分系の機能数理, 共立出版, (2006).

[4] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro, *Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm*, Phys. Lett. A **255** (1999) 265–271.

[5] 酒井 文雄, 環と体の理論. 共立出版, (1997).

[6] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma, *Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization*, Inverse Probl. **15** (1999) 1639—1662.

[7] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250.