超離散ハングリー戸田方程式によるmin-plus代数上の固有値計算

菅, 雅文
芝浦工業大学大学院理工学研究科

福田, 亜希子
芝浦工業大学システム理工学部

渡邉, 扇之介
小山工業高等専門学校一般科

https://doi.org/10.15017/2924866

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.132-137, 2020-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 23 (pp. 132 - 137)

超離散ハングリー戸田方程式による min-plus代数上の固有値計算

菅 雅文（**Kan Masafumi**），福田 亜希子（**Fukuda Akiko**），渡邉 扇之介（**Watanabe sennosuke**）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

超離散ハングリー戸田方程式による min-plus 代数上の固有値計算

芝浦工業大学大学院理工学研究科　菅 雅文　(KAN Masafumi)
芝浦工業大学システム理工学部　福田 亜希子　(FUKUDA Akiko)
小山工業高等専門学校一般科　渡邉 扇之介　(WATANABE Sennosuke)

概 要

固有値計算アルゴリズムとして知られる qd 法の漸化式が離散戸田方程式と一致することは良く知られている．近年 [4] において超離散戸田方程式の時間発展で min-plus 代数上の固有値を計算できることが報告されている．ここで，min-plus 代数とは集合 $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に 2 つの 2 項演算 $\oplus = \min$ および $\otimes = +$ を導入した可換な半環である．一方，[2] では，離散戸田方程式の拡張にあたる離散ハングリー戸田方程式を用いると非対称帯行列の固有値が求まることが示されている．本研究では超離散ハングリー戸田方程式の時間発展で min-plus 代数上の帯行列の固有値が計算できることを示す．

1　はじめに

これまでに，離散可積分系の数値計算アルゴリズムへの応用が数多く報告されている．例えば，何らかの固有値計算アルゴリズムに応用可能な離散可積分系としては，離散戸田方程式，離散ロトカ・ボルテラ系，離散ハングリー戸田方程式，離散二次元戸田方程式，離散ハングリーロトカ・ボルテラ系などが挙げられる．特に，離散戸田方程式の拡張にあたる離散ハングリー戸田方程式

$$\begin{cases} q_k^{(n+M)} = q_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)} + e_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \\ e_k^{(n+1)} = \dfrac{q_{k+1}^{(n)}}{q_k^{(n+M)}} e_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ e_0^{(n)} := 0, \quad e_m^{(n)} := 0, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

は totally nonnegative な帯行列の固有値を計算できることが報告されている [2]．

一方，[4] では，超離散戸田方程式が通常の線形代数としての固有値ではなく，min-plus 代数上の固有値を計算できることが示されている．そこで本研究では，離散ハングリー戸田方程式を超離散化して得られる超離散ハングリー戸田方程式

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} = \bigotimes_{j=1}^{k} Q_j^{(n)} \oslash \bigotimes_{j=1}^{k-1} Q_j^{(n+M)} \oplus E_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \\ E_k^{(n+1)} = Q_{k+1}^{(n)} \otimes E_k^{(n)} \oslash Q_k^{(n+M)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \\ E_0^{(n)} := \varepsilon, \quad E_m^{(n)} := \varepsilon, \quad n = 0, 1, \ldots. \end{cases} \tag{1.2}$$

の時間発展によって，min-plus 代数上でのある帯行列の固有値が求まることを示す．

2 Min-plus 代数

集合 $\mathbb{R}_{\min} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対し，和 $\oplus$ と積 $\otimes$ をそれぞれ

$$a \oplus b := \min(a, b), \quad a \otimes b := a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}_{\min}$$

と定義した代数を max-plus 代数という．和 $\oplus$ は可換で結合則を持ち，$\varepsilon = +\infty$ を零元とする．積 $\otimes$ も可換で結合則を持ち，$e = 0$ を単位元とする．また，$\otimes$ は $\oplus$ に関して分配的である．$\otimes$ は ε 以外で逆元を持つことに対し，$\oplus$ は ε 以外で逆元を持たないことに注意が必要である．本報告では，特に混乱を招かない場合，積の記号 $\otimes$ を省略することがある．

$m \times n$ の min-plus 行列全体を $\mathbb{R}_{\min}^{m \times n}$ と書く．2 つの min-plus 行列 $A, B \in \mathbb{R}_{\min}^{m \times n}$ の和 $A \oplus B \in \mathbb{R}_{\min}^{m \times n}$ を以下で定義する．

$$[A \oplus B]_{ij} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ij}.$$

ただし，$[X]_{ij}$ は行列 X の i 行 j 列成分を表す．また，2 つの min-plus 行列 $A \in \mathbb{R}_{\min}^{m \times k}$ と $B \in \mathbb{R}_{\min}^{k \times n}$ の積 $A \otimes B \in \mathbb{R}_{\min}^{m \times n}$ を以下で定義する．

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{k} [A]_{ik} \otimes [B]_{kj}.$$

次に min-plus 行列の固有値と固有ベクトルを定義する．

定義 1 (固有値と固有ベクトル)**.** Min-plus 行列 $A \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ において，

$$A \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes \boldsymbol{x}$$

をみたすベクトル $\boldsymbol{x} \neq (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)^\top \in \mathbb{R}_{\min}^{n}$ が存在するとき，$\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ を A の固有値といい，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルという．

ここで，行列 A を隣接行列とする重み付き有向グラフを $G(A)$ とすると，A の固有値と $G(A)$ の閉路に関する以下の補題が知られている．

補題 2 (F. Baccelli, G. Cohen, G.L. Olsder and J.P Quadrat [1])**.** Max-plus 行列 $A \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$ について，A を重み付き隣接行列とするグラフ $G(A)$ は強連結であるとする．このとき A の固有値は唯一であり，その値は $G(A)$ にある閉路の平均重みの最大値と一致する．

3 超離散ハングリー戸田方程式と min-plus 代数上の固有値計算

本節では，離散ハングリー戸田方程式 (1.1) を超離散化した超離散ハングリー戸田方程式 (1.2) を用いて min-plus 代数上の帯行列の固有値が求まることを示す．

まず，超離散ハングリー戸田方程式 (1.2) の変数 $Q_k^{(n)}, E_k^{(n)}$ を成分に含む行列 $\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{R}^{(n)} \in \mathbb{R}_{\min}^{m\times m}$ を以下で定義する．

$$\mathcal{L}^{(n)} := \begin{bmatrix} Q_1^{(n)} & \varepsilon & \cdots & \cdots & \varepsilon \\ e & Q_2^{(n)} & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon & e & Q_m^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}^{(n)} := \begin{bmatrix} e & E_1^{(n)} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & e & E_2^{(n)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \ddots & E_{m-1}^{(n)} \\ \varepsilon & \cdots & \cdots & \varepsilon & e \end{bmatrix}.$$

さらに，行列 $\mathcal{A}^{(n)} \in \mathbb{R}_{\min}^{m\times m}$ を

$$\mathcal{A}^{(n)} := \mathcal{L}^{(n)} \otimes \mathcal{L}^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}^{(n+M-1)} \otimes \mathcal{R}^{(n)} \tag{3.1}$$

と定義すると $\mathcal{A}^{(n)}$ は上帯幅 1，下帯幅 M の帯行列となる．

ここで，行列 $\mathcal{A}^{(n)} = (a_{ij})$ に対応する有向グラフ $G(\mathcal{A}^{(n)})$ において，すべての長さ ℓ の閉路の平均重みの最小値を $\mathrm{minave}(\ell)$ とすると

$$\begin{aligned} &\mathrm{minave}(1) = \bigoplus_{k=1}^{m} a_{k,k}, \quad \mathrm{minave}(2) = \frac{1}{2} \times \bigoplus_{k=1}^{m-1} a_{k,k+1} \otimes a_{k+1,k}, \\ &\mathrm{minave}(3) = \frac{1}{3} \times \bigoplus_{k=1}^{m-2} a_{k,k+1} \otimes a_{k+1,k+2} \otimes a_{k+2,k}, \ldots, \\ &\mathrm{minave}(\ell) = \frac{1}{\ell} \times \bigoplus_{k=1}^{m-\ell+1} \left(\bigotimes_{i=1}^{\ell-1} a_{k+i-1,k+i} \right) \otimes a_{k+\ell-1,k} \end{aligned}$$

と書ける．よって，補題 2 より $\mathcal{A}^{(n)}$ の固有値は

$$\lambda(\mathcal{A}^{(n)}) = \bigotimes_{\ell=1}^{M+1} \mathrm{minave}(\ell) = \bigoplus_{k=1}^{m} a_{k,k} \oplus \frac{1}{\ell} \times \bigoplus_{\ell=2}^{M+1} \bigoplus_{k=1}^{m-\ell+1} \left(\bigotimes_{i=1}^{\ell-1} a_{k+i-1,k+i} \right) \otimes a_{k+\ell-1,k} \tag{3.2}$$

となる．ここで，$\mathcal{A}^{(n)}$ の成分 $a_{i,j}$ は (3.1) より変数 $Q_k^{(n)}$, $E_k^{(n)}$ で与えられているので，それらを用いた表現に書き換え，さらに，

$$\begin{aligned} &Q_1^{(n)}, Q_1^{(n+1)}, \ldots, Q_1^{(n+M-1)}, E_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, Q_2^{(n+1)}, \ldots, Q_2^{(n+M-1)}, E_2^{(n)}, \\ &\ldots, E_{m-1}^{(n)}, Q_m^{(n)}, Q_m^{(n+1)}, \ldots, Q_m^{(n+M-1)} \end{aligned}$$

の値をそれぞれ左から順に

$$W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, \ldots, W_{(M+1)m-2}^{(n)}, W_{(M+1)m-1}^{(n)}$$

と置き換える．

ここで，$M = 3, m = 5$ に対する具体的な例を示す．このときの $\mathcal{A}^{(n)}$ に対する固有値は (3.2) より $\lambda(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathrm{minave}(1) \oplus \mathrm{minave}(2) \oplus \mathrm{minave}(3) \oplus \mathrm{minave}(4)$ となるので，この右辺の各項は

$W_k^{(n)}$ を用いて書き直すと以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{minave}(1) &= W_1W_2W_3 \oplus W_2W_3W_4 \oplus \cdots \oplus W_{17}W_{18}W_{19}, \\
\mathrm{minave}(2) &= \frac{1}{2} \times \{(W_1W_2W_3W_4(W_2W_3 \oplus W_3W_5 \oplus W_5W_6) \\
&\quad \oplus W_5W_6W_7W_8(W_3W_4 \oplus W_4W_6 \oplus W_4W_9 \oplus W_6W_7 \oplus W_7W_9 \oplus W_9W_{10}) \\
&\quad \oplus W_9W_{10}W_{11}W_{12}(W_7W_8 \oplus W_8W_{10} \oplus W_8W_{13} \oplus W_{10}W_{11} \oplus W_{11}W_{13} \oplus W_{13}W_{14}) \\
&\quad \oplus W_{13}W_{14}W_{15}W_{16}(W_{11}W_{12} \oplus W_{12}W_{14} \oplus W_{12}W_{17} \oplus W_{14}W_{15} \oplus W_{15}W_{17} \oplus W_{17}W_{18})\}, \\
\mathrm{minave}(3) &= \frac{1}{3} \times \{W_1W_2W_3W_4W_5W_6W_7W_8(W_3 \oplus W_6 \oplus W_9) \\
&\quad \oplus W_5W_6W_7W_8W_9W_{10}W_{11}W_{12}(W_4 \oplus W_7 \oplus W_{10} \oplus W_{13}) \\
&\quad \oplus W_9W_{10}W_{11}W_{12}W_{13}W_{14}W_{15}W_{16}(W_8 \oplus W_{11} \oplus W_{14} \oplus W_{17})\}, \\
\mathrm{minave}(4) &= \frac{1}{4} \times (W_1W_2W_3W_4W_5W_6W_7W_8W_9W_{10}W_{11}W_{12} \\
&\quad \oplus W_5W_6W_7W_8W_9W_{10}W_{11}W_{12}W_{13}W_{14}W_{15}W_{16}).
\end{aligned}$$

ただし，上付き添え字 (n) と $\otimes$ は省略している．ここで，新たな記号 $\mathbb{W}_k := W_k^{(n)}W_{k+1}^{(n)}\cdots W_{k+M-1}^{(n)}$, $k = 1,\ldots,m(M+1)-M$ を用いて上式の右辺をそれぞれ置き換えると

$$\mathrm{minave}(1) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{W}_{17}, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{minave}(2) = \frac{1}{2} \times (&\mathbb{W}_1\mathbb{W}_2 \oplus \mathbb{W}_1\mathbb{W}_3 \oplus \mathbb{W}_1\mathbb{W}_4 \\
&\oplus \mathbb{W}_3\mathbb{W}_6 \oplus \mathbb{W}_4\mathbb{W}_6 \oplus \mathbb{W}_4\mathbb{W}_7 \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_6 \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_7 \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_8 \\
&\oplus \mathbb{W}_7\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_8\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_8\mathbb{W}_{11} \oplus \mathbb{W}_9\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_9\mathbb{W}_{11} \oplus \mathbb{W}_9\mathbb{W}_{12} \\
&\oplus \mathbb{W}_{11}\mathbb{W}_{14} \oplus \mathbb{W}_{12}\mathbb{W}_{14} \oplus \mathbb{W}_{12}\mathbb{W}_{15} \oplus \mathbb{W}_{13}\mathbb{W}_{14} \oplus \mathbb{W}_{13}\mathbb{W}_{15} \oplus \mathbb{W}_{13}\mathbb{W}_{16}),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{minave}(3) = \frac{1}{3} \times (&\mathbb{W}_1\mathbb{W}_3\mathbb{W}_6 \oplus \mathbb{W}_1\mathbb{W}_4\mathbb{W}_6 \oplus \mathbb{W}_1\mathbb{W}_4\mathbb{W}_7 \\
&\oplus \mathbb{W}_4\mathbb{W}_7\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_7\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_8\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_8\mathbb{W}_{11} \\
&\oplus \mathbb{W}_8\mathbb{W}_{11}\mathbb{W}_{14} \oplus \mathbb{W}_9\mathbb{W}_{11}\mathbb{W}_{14} \oplus \mathbb{W}_9\mathbb{W}_{12}\mathbb{W}_{14} \oplus \mathbb{W}_9\mathbb{W}_{12}\mathbb{W}_{15}),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\mathrm{minave}(4) = \frac{1}{4} \times (\mathbb{W}_1\mathbb{W}_4\mathbb{W}_7\mathbb{W}_{10} \oplus \mathbb{W}_5\mathbb{W}_8\mathbb{W}_{11}\mathbb{W}_{14}) \tag{3.6}$$

と書ける．一般に，長さ ℓ の平均閉路重みの最小値は

$$\mathrm{minave}(\ell) = \frac{1}{\ell} \times \bigoplus_{i=1}^{m-\ell+1} \bigoplus_{\substack{b_j \in N_{M+2-\ell} \\ b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_\ell}} \bigotimes_{j=1}^{\ell} \mathbb{W}_{\ell-M+M(j-1)+(M+1)(i-1)+b_j}$$

となることが示せる．ただし，$N_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$ とする．ここで，任意の $X_k \in \mathbb{R}_{\min}$, $k = 1,2,\ldots,n$ に対して以下の不等式

$$\bigoplus_{k=1}^{n} X_k \le \frac{1}{n} \times \bigotimes_{k=1}^{n} X_k \tag{3.7}$$

が成り立つことを利用すると，(3.4), (3.5), (3.6) の各項は (3.3) の対応する項以上の値になることがわかる．従って，(3.3) から (3.6) の全ての項の $\otimes$ をとると minave(1) の項のみで表現される．すなわち，

$$\lambda(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathrm{minave}(1) = \bigoplus_{k=1}^{17} \mathbb{W}_k$$

となる．このように (3.2) は一般に

$$\lambda(\mathcal{A}^{(n)}) = \bigoplus_{k=1}^{m(M+1)-M} \mathbb{W}_k \tag{3.8}$$

となる．

超離散ハングリー戸田方程式 (1.2) は通常の箱玉系に対し，玉に番号を付けることによって区別する拡張を行った番号付き箱玉系の運動方程式と一致することが知られている [3]．ここで，$Q_k^{(n)}$ は時刻 n における左から k 番目のソリトンを構成する 1 の玉の数，$E_k^{(n)}$ は左から k 番目と $k+1$ 番目のソリトンの間にある空き箱の数を表す．(3.8) の右辺の値は番号付き箱玉系すなわち超離散ハングリー戸田方程式の保存量であることも [3] において報告されている．従って，$\mathcal{A}^{(n)}$ の固有値は超離散ハングリー戸田方程式 (1.2) の時間発展によって不変であり，

$$\lambda(\mathcal{A}^{(n)}) = \lambda(\mathcal{A}^{(n+1)})$$

が成り立つ．

超離散ハングリー戸田方程式の時間発展によって番号付き箱玉系におけるソリトンの数は不変であり，離散時間 n を十分に大きくすると，ソリトンは左から小さい順に並び，ソリトン間の空き箱の数は時間発展につれて増加する．すなわち，以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} & Q_1^{(n)} \otimes Q_1^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes Q_1^{(n+M-1)} \le Q_2^{(n)} \otimes Q_2^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes Q_2^{(n+M-1)} \le \cdots \\ & \qquad \le Q_m^{(n)} \otimes Q_m^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes Q_m^{(n+M-1)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$Q_k^{(n)} \le E_k^{(n)} \tag{3.10}$$

(3.8) の右辺は元の超離散ハングリー戸田方程式 (1.2) の変数で表すと $Q_k^{(n)} \otimes Q_k^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes Q_k^{(n+M-1)}$ であり，(3.9), (3.10) より超離散ハングリー戸田方程式 (1.2) の時間発展 $Q_1^{(n)} \otimes Q_1^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes Q_1^{(n+M-1)}$ が最小値をとる．以上をまとめると本報告の主結果として次の定理が得られる．

定理 3. 行列 $\mathcal{A}^{(0)} \in \mathbb{R}_{\min}^{m \times m}$ の固有値 $\lambda(\mathcal{A}^{(0)})$ は十分大きい n において，以下で与えられる．

$$\lambda(\mathcal{A}^{(0)}) = Q_1^{(n)} \otimes Q_1^{(n+1)} \otimes \cdots \otimes Q_1^{(n+M-1)}.$$

4 まとめ

本報告では，超離散ハングリー戸田方程式の時間発展によって，min-plus 代数上の帯行列の固有値が求められることを示した．本研究で得られた固有値の計算方法は離散ハングリー戸田方程式に基づいて定式化された線形代数の意味での帯行列の固有値を求める dhToda アルゴリズムの

超離散類似と言える．さらに，[4] で導出された固有値計算法のハングリー版への拡張となっている．dhToda アルゴリズムの場合と同様に，帯行列の固有値は超離散ハングリー戸田方程式の保存量となっていることが示され，従って，超離散ハングリー戸田方程式の時間発展によって固有値を求めることができる．

参考文献

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G.L. Olsder and J.P Quadrat, Syncronization and Linearity, Wiley, New York, 1992.

[2] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, Y. Nakamura, Integrable discrete hungry systems and their related matrix eigenvalues, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **192**(2013), 423–445.

[3] T. Tokihiro, A. Nagai, J. Satsuma, Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization, Inverse Problems, **15**(1999), 1639–1662.

[4] S. Watanabe, A. Fukuda, H. Shigitani, M. Iwasaki, Min-plus eigenvalue of tridiagonal matrices in terms of the ultradiscrete Toda equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **51**(2018), 444001.