

## レイノルズ数を考慮したBurgers CAの振る舞い

渡辺, 広太  
創価大学大学院工学研究科

森田, 孝一  
創価大学理工学部

石井, 良夫  
創価大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/2924865>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．2019A0-S2, pp.126-131, 2020-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2  
「非線形波動研究の多様性」 (研究代表者 永井 敦)  
Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

*Diversity in the research of nonlinear waves*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 22 (pp. 126 - 131)

# レイノルズ数を考慮した Burgers CA の振る舞い

渡辺 広太 (Watanabe Kouta), 森田 孝一 (Morita koichi),  
石井 良夫 (Ishii Yoshio)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2020

## レイノルズ数を考慮した Burgers CA の振る舞い

創価大学大学院工学研究科  
創価大学理工学部

渡辺広太 (WATANABE Kouta)  
森田孝一 (MORITA Koichi)  
石井良夫 (ISHII Yoshio)

概要 セルオートマトンは全変数が離散的な数理モデルであり，単純化したモデルから特徴的なパターンを得て，その一つが流体力学における乱流現象を模した結果として知られている．本研究では，一次元乱流モデルである Burgers 方程式についてレイノルズ数のパラメータを含んだ超離散 Burgers 方程式を導出する．レイノルズ数の値による Burgers セルオートマトンの解の挙動を観察し，従来の結果と比較検討し，レイノルズ数の効果における特徴的な振る舞いについても考察する．

### 1 はじめに

Reynolds の実験[1]により，円管内の流れから層流から乱流に遷移することが観測され，流れの遷移は慣性と粘性の強さの比率である無次元量のレイノルズ数 $Re$ によって決まることが示された．他方，非圧縮性流体運動の支配方程式である Navier-Stokes 方程式は以下のように記述され，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

層流や乱流状態など様々な流体现象を記述していると考えられており，この方程式の理論的，数值的及び実験的に，多岐にわたり研究されている．他方，J. M. Burgers は複雑な乱流現象を理解するための手がかりを得ようと，Navier-Stokes 方程式の本質的特徴を含んだ簡単なモデル方程式を提案した[2]．さらに巽友正は，乱流モデルとして Burgers 乱流現象の概観を試みた[3]．

S. Wolfram は複雑系に分類される数理モデルであるセルオートマトン (CA) [4]について，単純化したモデルから得たいくつかの特徴的なパターンを4つのクラスに分類し，その一つが乱流現象などを模した結果に類似しているのではないかと知られている．これらの規則正しく，あるいはカオス的に変化するパターンは，微分方程式で表すことは困難であるが，CA は局所的な相互作用から，これらの現象を表すことができ，一つの特徴として自己相似性などの特徴が見られる．流れの様子はレイノルズ数の変化に伴いそれぞれの状態が形成されるが，それらの変化は，例えば，減衰，振動，乱れなどは，CA パターンにおける4つのクラスにそれぞれ対応していると考えられている．

本研究では，流れの状態がレイノルズ数によって変化することを鑑み，乱流モデルの一つとして考えられている Burgers 方程式の離散化，超離散化について，従来行われていなかったレイノルズ数をパラメータとして組み込んだ Burgers 方程式の離散化，超離散化を設計構築し，さらにその振る舞いについて初期条件（密集度）及びレイノルズ数を変化した場合について考察する．

## 2 Burgers 方程式の離散化と超離散化

### 2.1 Burgers 方程式の離散化

本研究で扱う Burgers 方程式は以下のように記述する.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \quad (2)$$

ここで, 左辺第二項が非線形項であり, 右辺が拡散項となり流体を記述する非線形性一次元 Navier-Stokes 方程式に類似しているとしても知られている. 式(2)は Cole-Hopf 変換

$$\mathbf{u} = \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \ln f \quad (3)$$

で以下の拡散方程式に帰着する性質がある.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (4)$$

ここで,  $Re$ はレイノルズ数を表す. この関係性を用いて, Burgers 方程式に離散化を試みる. まず, 拡散方程式に FTCS (Forward in Time and Centered Difference in Space) 法を用いて離散化し, 整理すると以下の式になる.

$$f_j^{n+1} = (1 - 2\delta) f_j^n + \delta (f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) \quad (5)$$

次に, 離散 Cole-Hopf 変換を以下のように記述して,

$$u_j^n = \frac{2}{Re \cdot \Delta x} \ln \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \quad (6)$$

変数変換  $v_j^n = \exp\left(\frac{Re \cdot \Delta x}{2} \cdot u_j^n\right)$  として  $v_j^n$  を定義すると,

$$v_j^n = \alpha \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \quad (7)$$

となる変換を得る. Burgers 方程式が Cole-Hopf 変換で拡散方程式を導出できるため, 同様に離散 Burgers 方程式も, 離散拡散方程式に上記の変換を用いることで以下の離散 Burgers 方程式を得ることができる.

$$v_j^{n+1} = v_j^n \frac{\frac{1 - 2\delta}{\alpha \delta} + \frac{v_{j+1}^n}{\alpha^2} + \frac{1}{v_j^n}}{\frac{1 - 2\delta}{\alpha \delta} + \frac{v_j^n}{\alpha^2} + \frac{1}{v_{j-1}^n}} \quad (8)$$

ただし,  $\delta = \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  と  $\alpha = \frac{Re \cdot \Delta x}{2}$  として, レイノルズ数をパラメータとして含んでいる.

## 2.2 Burgers 方程式の超離散化

超離散化は、次の極限公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \ln \left( e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} \right) = \max(A, B) \quad (9)$$

を用いて、離散式の従属変数を離散化する手法である[5]. ただし、 $\varepsilon, A, B > 0$ とする. 超離散式は  $\max$  ( $\min$ ) 演算で表される線形時間発展方程式で構成され、超離散極限から、可積分性を表す性質を保持したまま独立変数だけでなく従属変数の値を離散化することができる.

この極限公式を用いて、Burgers 方程式を超離散化することを試みる. 離散 Burgers 方程式(8)の各項を変数変換すると以下ようになる.

$$\begin{cases} v_j^n = e^{V_j^n/\varepsilon} \\ \frac{1-2\delta}{\alpha\delta} = e^{-M/\varepsilon} \\ \alpha^2 = e^{L/\varepsilon} \end{cases} \quad (10)$$

極限公式(9)を用いて、極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ をとることで、超離散 Burgers 方程式が以下のように導出できる.

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \min(M, L - V_{j+1}^n, V_j^n) + \min(M, L - V_j^n, V_{j-1}^n) \quad (11)$$

ここで、 $L, M$ は定数であり、 $L, M > 0$ を満たす.

## 3 超離散 Burgers 方程式におけるレイノルズ数の効果

### 3.1 セルオートマトンの定義

セルオートマトン (CA) はその振る舞いから、複雑な自然現象を取り扱う数理モデルの一つとして考えられてきた. CA は独立変数 (時間, 空間) 及び従属変数 (物理量) が全て離散値で記述され、セルの値が同じ規則に従って同期的に決定するモデルである. 例として、従属変数 $a_j^n$ を離散時刻 $n$ 、離散位置 $j$ を変数としたとき、3近傍における $a_j^n$ の時間発展は

$$a_j^{n+1} = F(a_{j-1}^n, a_j^n, a_{j+1}^n) \quad (12)$$

と記述される. Wolfram はこの規則から得られる CA の解の挙動を 4 つのクラス, I: 一定, II: 周期的, III: カオス的, IV: 複雑 (カオスの縁) に分類した. 乱流現象はクラス III, 乱流遷移現象はクラス IV に相当すると考えられている[6]. 4 つのクラスの時間発展パターンを図 1 に示す. ここで、横軸、縦軸はそれぞれ空間、時間 (下方が進行方向) とする.

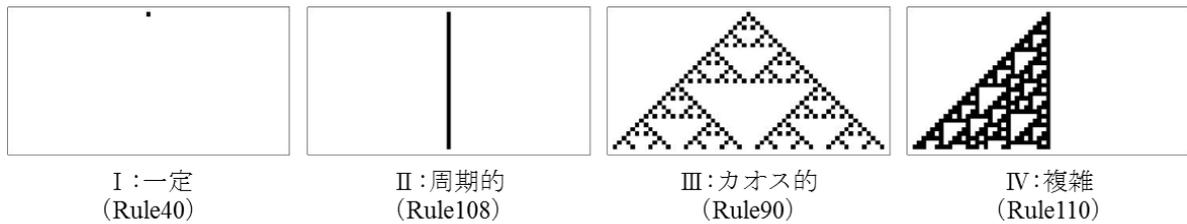


図1 4つのクラスにおける解の挙動

### 3.2 超離散 Burgers 方程式のセルオートマトンパターン

超離散 Burgers 方程式(11)において, レイノルズ数の効果は $M$ と $L$ に現れる. 表1にレイノルズ数による $M$ と $L$ の値を示す. ただし,  $\Delta x = 1 \times 10^{-5}, \Delta t = 5 \times 10^{-11}, \varepsilon = 0.01$ とする. この表からわかるようにレイノルズ数が高くなると $M, L$ の値はともに小さくなる.

表1  $M$ と $L$ の値

レイノルズ数 ( $Re$ )	$M$	$L$
1	$+\infty$	0.24
50	0.04	0.17
100	0.02	0.15
200	0.01	0.14

また,  $Re = 1$ のとき Wolfram コードからルール 184 に相当し, 交通流[7]などで用いられる一般的な超離散 Burgers 方程式と同等となる.  $M$ と $L$ の値は実数値を取るため, 多状態3近傍なCAとして解の挙動を初期密集度が低と高の2通りの条件下で検討する.  $0 \leq V_j^n \leq L$ としたため, 初期値を0と $L$ に限定し, 低密集度を図2, 高密集度を図3に示す. ここでこれらの図は横軸を空間, 縦軸を時間とし, □は0, ■は $L$ の値を表し, グレースケールのセルは0以上 $L$ 以下の値を示す.

図2, 3 (a)はそれぞれ交通流における低密集度における非渋滞, 高密集度における渋滞の性質を表しており, 初期密集度の違いによって, 交通流における車の渋滞発生など,  $Re = 1$ の場合は先行研究と同様の結果が得られていることがわかる. これより本研究でのレイノルズ数の効果を含んだ超離散 Burgers 方程式は従来の交通流の性質を保持しているものと考えられる.

図2, 3 (b), (c), (d)に見られるように, レイノルズ数の値を $Re = 50, 100, 200$ と高くすることで新たに一次元CAに次の特徴が見られる.  $Re = 50$ の場合, 時間発展とともに減衰が見られ, さらに $Re = 100, 200$ の場合, 減衰時間は長くなり, 最終的に計算時間内に減衰が見られなくなる. これがどこまで続くかは, 今後の検討とする. さらに初期密集度が高い場合についても, 同様の結果が得られているが, 初期密集度が高いため, より多くの状態が下流(時間方向)に伸び, 減衰が見られなくなっている. これより,  $Re$ が高くなると初期状態が, 時間の進行とともに保存されていると考えられる.

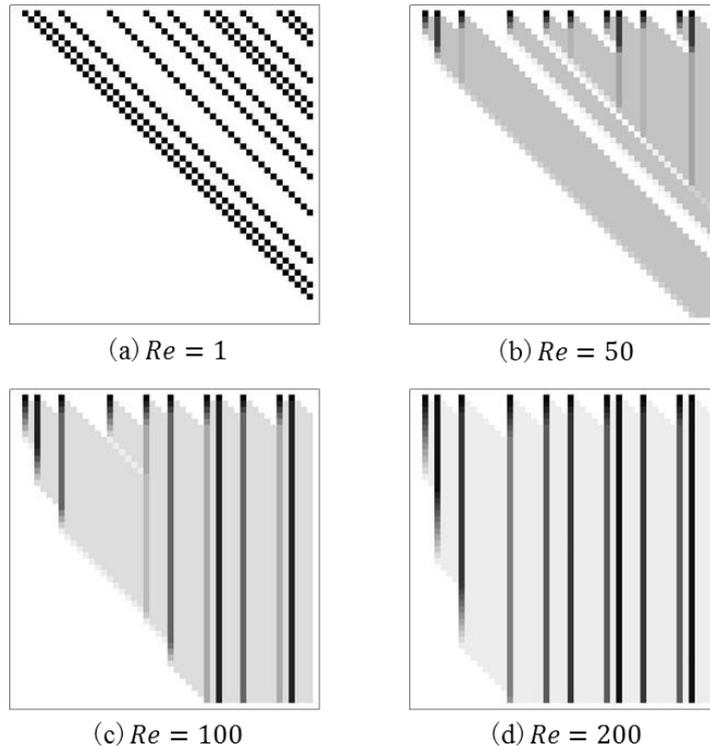


图 2 低密集度

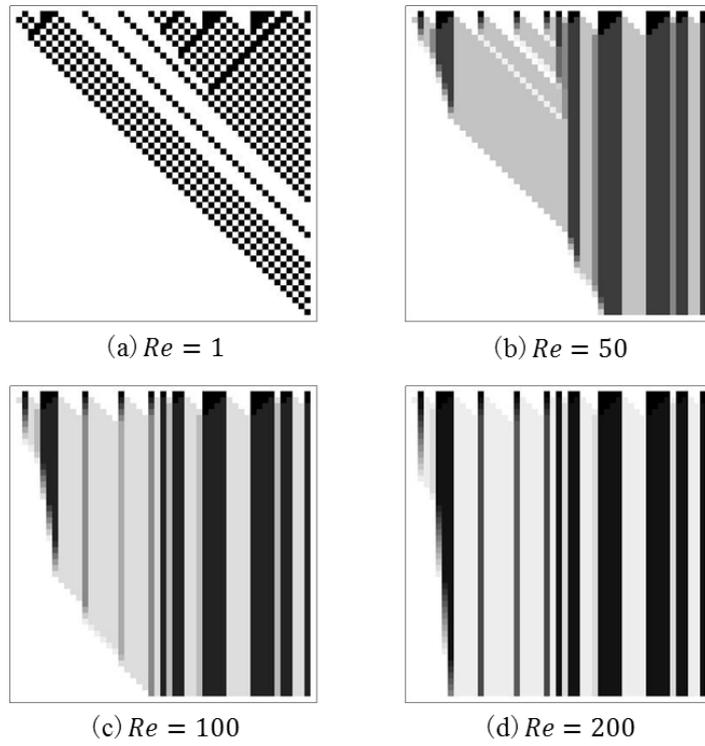


图 3 高密集度

#### 4 おわりに

本研究では, Burgers 方程式にレイノルズ数の効果を加え, 従来になかった超離散 Burgers 方程式を設計構築した. そして, レイノルズ数 $Re$ をパラメータとした CA における解の挙動を観測した.

これらの結果は,  $Re=1$  の場合, 一般的な超離散 Burgers 方程式と同等の挙動が得られ, レイノルズ数の値が高くなることによって, 特徴的な振る舞いが観測された.

今後の展望として, 実際の層流乱流遷移は高レイノルズ数で遷移するが, 現在の条件を踏まえた上で高レイノルズ数に対応させるには独立変数を連続極限,  $\varepsilon$  を超離散極限とする必要があり, 解の性質を保存して CA で解の挙動を観察することができない. そこで, 本研究では FTCS 法を用いて離散化したが, 他の離散手法を用いることで以上の課題を回避したいと考えている.

#### 参考文献

- [1] O. Reynolds, *Phil. Trans. R. Soc. London* 174, P953, (1883).
- [2] J. M. Burgers, *Adv. Appl. Mech*, vol.1, 171-199, (1948).
- [3] 巽友正, Burgers 乱流, 日本物理学会誌 30 巻 2 号, pp.106-115, (1975).
- [4] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, (2002).
- [5] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, (2003).
- [6] 加藤恭義, 光成友孝, 築山 洋, セルオートマトン法, 森北出版, (1998).
- [7] 西成活裕, 渋滞の研究:超離散的アプローチ, 基研研究会「統計物理の展望」, 研究報告会, (1999).