

ヘッセンベルグ行列に関連するラックス方程式の時間発展

阪本, 豪太郎
同志社大学理工学研究科

新庄, 雅斗
同志社大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/2924864>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．2019A0-S2, pp.120-125, 2020-03．九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」 (研究代表者 永井 敦)

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 21 (pp. 120 - 125)

ヘッセンベルグ行列に関連する ラックス方程式の時間発展

阪本 豪太郎 (Sakamoto Kotaro), 新庄 雅斗 (Shinjo Masato)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

ヘッセンベルグ行列に関連するラックス方程式の時間発展

同志社大学理工学研究科 阪本 豪太郎 (SAKAMOTO Kotaro)

同志社大学理工学部 新庄 雅斗 (SHINJO Masato)

概要

可積分系研究において有名な戸田方程式は3重対角行列に関連するラックス方程式で記述される。適切に離散化された離散戸田方程式は3重対角行列の固有値を保存量とする離散力学系となる。本稿では、ヘッセンベルグ行列が現れるラックス方程式に対する離散化とその離散時間発展について解説する。

1 はじめに

十分な保存量をもつ求積可能な非線形力学系を可積分系といい、ソリトンなどに関わる非線形な波動現象はラックス方程式で記述される。非線形バネによる連成振動系を記述する戸田方程式 [9] は、有限非周期境界条件の下、適当な変数変換を通じて、 $m \times m$ 非対称3重対角行列 $A(t)$ に関連するラックス方程式 $dA(t)/dt = A(t)B(t) - B(t)A(t), t \geq 0$ で表せる。ただし、 t は連続時間変数、 $B(t)$ は $A(t)$ から上二重対角部を除いてできる対角成分がすべて0の下二重対角行列である。上二重対角行列 $C(t) := A(t) - B(t)$ を導入すると、ラックス方程式から、フラシュカ変数 [1] を用いた戸田方程式:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{J}_k(t) = \mathcal{V}_{k-1}(t) - \mathcal{V}_k(t), & k = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{V}_k(t) = \mathcal{V}_k(t)(\mathcal{J}_k(t) - \mathcal{J}_{k+1}(t)), & k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (1.1)$$

が得られる。ただし、 $\mathcal{J}_k(t)$ は $C(t)$ の対角成分の -1 倍であり、 $\mathcal{V}_k(t)$ は $B(t)$ の下副対角成分である。 $\mathcal{J}_k(t)$ を電流、 $\mathcal{V}_k(t)$ を電圧の値とすれば、(1.1) は非線形素子を用いた電気回路における電流と電圧の時間変化を記述する方程式と見なせるので、(1.1) は戸田方程式に対する電流電圧表示とも呼ばれる [9]。

非線形波動を数値的に捉えるためには微分方程式の離散化が重要となるが、固有値を保存量とする離散可積分系として、[3] において提案された離散戸田方程式:

$$\begin{cases} J_k^{(n+1)} - J_k^{(n)} = \delta^{(n+1)} V_{k-1}^{(n+1)} - \delta^{(n)} V_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m, \\ V_k^{(n+1)} - V_k^{(n)} = \delta^{(n+1)} J_k^{(n+1)} V_k^{(n+1)} - \delta^{(n)} J_{k+1}^{(n)} V_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (1.2)$$

がある。ただし、 $\delta^{(n)}$ は離散化で生じる離散パラメータである。離散戸田 (dToda) 方程式 (1.2) は、適当な変数変換を経由すると、ルティスハウザーの提案した qd アルゴリズム [6] に原点シフトを導入したシフト付き qd アルゴリズムと等価な漸化式となる。

戸田方程式に対する一般化は数多く存在するが、空間方向への拡張の一つにコストント戸田 (KToda) 方程式 [5] がある。LU フロー [11] における KToda 方程式は $m \times m$ 下ヘッセンベルグ行列 $A(t)$ を用いたラックス方程式:

$$\frac{d}{dt} A(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t), \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

で記述される．ただし， $B(t) := (A(t))_{<0}$ は $A(t)$ から上二重対角部を除いてできる狭義下三角行列を表す．行列 $A(t)$ の固有値を λ_i ，対応する固有ベクトルを $\psi_i(t)$ とすると，ラックス方程式 (1.3) は $\psi_i(t)$ に関する 2 つの線形方程式の組みであるラックス・ペア:

$$\begin{cases} A(t)\psi_i(t) = \lambda_i\psi_i(t), & i = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{d}{dt}\psi_i(t) = -B(t)\psi_i(t), & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1.4)$$

の両立条件として捉えることもできる．ラックス・ペア (1.4) において，第一式は行列 $A(t)$ に関する固有値問題，第二式は固有ベクトル $\psi_i(t)$ の時間変化を記述している．ヘッセンベルグ行列に関わる離散可積分系として，離散ハングリー戸田 (dhToda) 方程式 [2, 8] がある．dhToda 方程式に基づいて定式化された固有値計算アルゴリズムはヘッセンベルグ行列の固有値を高精度に計算できる．本稿では，ラックス方程式の離散化の観点から，KToda 方程式 (1.3) を捉えることで，dToda 方程式 (1.2) の一般化に相当する離散方程式を導く．また，得られた離散方程式と dhToda 方程式との対応関係を明らかにし，離散時間極限 $n \rightarrow \infty$ における漸近挙動についても議論する．

2 二重対角分解可能なコストント戸田方程式

戸田方程式の場合と同様にして，上二重対角行列 $C(t) := A(t) - B(t)$ を導入すると，KToda 方程式 (1.3) から，戸田方程式 (1.1) に対する拡張系として

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}J_k(t) = V_{k-1,1}(t) - V_{k,1}(t), & k = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{d}{dt}V_{k,j}(t) = V_{k,j}(t)(J_k(t) - J_{k+j}(t)) + V_{k,j+1}(t) - V_{k-1,j+1}(t), \\ \quad j = 1, 2, \dots, M-1, & k = 1, 2, \dots, m-j, \\ \frac{d}{dt}V_{k,M}(t) = V_{k,M}(t)(J_k(t) - J_{k+M}(t)), & k = 1, 2, \dots, m-M \end{cases} \quad (2.1)$$

が得られる．ただし， M は下帯幅に対応する自然数， $J_k(t)$ は $C(t)$ の対角成分の -1 倍であり， $V_{k,j}(t)$, $j = 1, 2, \dots, M$ は $B(t)$ の下三角部に現れる $(k+j, k)$ 成分である．ここで，ヘッセンベルグ行列 $A(t)$ が，上二重対角行列 $R(t)$ と下二重対角行列 $L_s(t)$:

$$R(t) := \begin{pmatrix} q_1(t) & 1 & & \\ & q_2(t) & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & q_m(t) \end{pmatrix}, \quad L_s(t) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ e_{1,s}(t) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e_{m-1,s}(t) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

を用いて，二重対角行列の積:

$$A(t) = L_0(t)L_1(t) \cdots L_{M-1}(t)R(t), \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

へ分解可能であるとする．このとき，ラックス方程式 (1.3) から， $q_k(t)$, $e_{k,s}(t)$ のみたす微分方程式として，ハングリー戸田 (hToda) 方程式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} q_k(t) = q_k(t) \left[(e_{k,0}(t) + e_{k,1}(t) + \cdots + e_{k,M-1}(t)) \right. \\ \quad \left. - (e_{k-1,0}(t) + e_{k-1,1}(t) + \cdots + e_{k-1,M-1}(t)) \right], \\ \frac{d}{dt} e_{k,0}(t) = e_{k,0}(t) \left[(q_{k+1}(t) + e_{k,1}(t) + \cdots + e_{k,M-1}(t)) \right. \\ \quad \left. - (q_k(t) + e_{k-1,1}(t) + \cdots + e_{k-1,M-1}(t)) \right], \\ \frac{d}{dt} e_{k,j}(t) = e_{k,j}(t) \left[(q_{k+1}(t) + e_{k+1,0}(t) + \cdots + e_{k+1,j-1}(t) + e_{k,j+1}(t) + \cdots + e_{k,M-1}(t)) \right. \\ \quad \left. - (q_k(t) + e_{k,0}(t) + \cdots + e_{k,j-1}(t) + e_{k-1,j+1}(t) + \cdots + e_{k-1,M-1}(t)) \right], \\ \quad j = 1, 2, \dots, M-2, \\ \frac{d}{dt} e_{k,M-1}(t) = e_{k,M-1}(t) \left[(q_{k+1}(t) + e_{k+1,0}(t) + \cdots + e_{k+1,M-2}(t)) \right. \\ \quad \left. - (q_k(t) + e_{k,0}(t) + \cdots + e_{k,M-2}(t)) \right] \end{array} \right. \quad (2.4)$$

が得られる．従属変数変換：

$$\begin{aligned} q_k(t) &= U_{(M+1)(k-1)+1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ e_{k,s}(t) &= U_{(M+1)(k-1)+s+2}(t), \quad s = 0, 1, \dots, M-1, \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}$$

を考えると，hToda 方程式 (2.4) は，複数種の生物の捕食関係に関わる可積分系として知られるハングリーロトカ・ボルテラ (hLV) 方程式 [4]：

$$\frac{d}{dt} U_k(t) = U_k(t) \left(\sum_{\ell=1}^M U_{k+\ell}(t) - \sum_{\ell=1}^M U_{k-\ell}(t) \right), \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)m - M \quad (2.5)$$

に対応づく．hLV 方程式 (2.5) の一般解は， $k = 1, 2, \dots, m$ に対して，

$$U_{(M+1)(k-1)+1}(t) = \frac{W_{k-1,0}(t)W_{k,M}(t)}{W_{k,0}(t)W_{k-1,M}(t)}, \quad U_{(M+1)(k-1)+s+2}(t) = \frac{W_{k-1,s+1}(t)W_{k+1,s}(t)}{W_{k,s+1}(t)W_{k,s}(t)}$$

で表現できる．ただし， $W_{k,s}(t)$ は，初期値から定まる関数 $f_i(t)$ を成分とするロンスキアン $W_{k,s}(t) := \det((d^{i-1}f_{s+j-1}(t)/dt^{i-1})_{1 \leq i,j \leq k})$ である．

3 離散コストント戸田方程式とその漸近挙動

固有値を保存量とする，すなわち，連続系と離散系で固有値問題を共有するような離散化 [10] として，KToda 方程式に関するラックス・ペア (1.4) の離散類似：

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{(n)} \psi_i^{(n)} = \lambda_i \psi_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\psi_i^{(n+1)} - \psi_i^{(n)}}{\delta^{(n)}} = -B^{(n)} \psi_i^{(n+1)}, \\ \frac{\psi_i^{(n+1)} - \psi_i^{(n)}}{\delta^{(n)}} = C^{(n)} \psi_i^{(n)} - A^{(n+1)} \psi_i^{(n+1)} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

を導入する．ただし， $B^{(n)}$ および $C^{(n)}$ は， $A(t) = B(t) + C(t)$ の離散類似 $A^{(n)} = B^{(n)} + C^{(n)} + \delta^{(n)} B^{(n)} C^{(n)}$ で定まる狭義下三角行列と上三角行列である．連続極限 $\delta^{(n)} \rightarrow 0$ において，(3.1) は (1.4) と一致するため，本稿では (3.1) を離散ラックス・ペアと呼ぶ．ラックス・ペアの両立条件とラックス方程式が数学的に等価であることを背景に，離散ラックス・ペアの両立条件を考えると，狭義下三角行列 $B^{(n)}$ と上三角行列 $C^{(n)}$ は

$$\begin{cases} B^{(n+1)} - B^{(n)} = (\delta^{(n)} C^{(n)} B^{(n)} - \delta^{(n+1)} B^{(n+1)} C^{(n+1)})_{<0}, \\ C^{(n+1)} - C^{(n)} = (\delta^{(n)} C^{(n)} B^{(n)} - \delta^{(n+1)} B^{(n+1)} C^{(n+1)})_{\geq 0} \end{cases} \quad (3.2)$$

をみたすことがわかる．ただし， $(\cdot)_{\geq 0}$ は $\cdot$ の上三角部を表す．行列離散方程式 (3.2) の両辺において，成分のみたす関係式を書き下せば，離散コストント戸田 (dKToda) 方程式:

$$\begin{cases} J_k^{(n+1)} - J_k^{(n)} = \delta^{(n+1)} V_{k-1,1}^{(n+1)} - \delta^{(n)} V_{k,1}^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m, \\ V_{k,j}^{(n+1)} - V_{k,j}^{(n)} = \delta^{(n+1)} J_k^{(n+1)} V_{k,j}^{(n+1)} - \delta^{(n+1)} V_{k-1,j+1}^{(n+1)} + \delta^{(n)} V_{k,j+1}^{(n)} - \delta^{(n)} J_{k+j}^{(n)} V_{k,j}^{(n)}, \\ \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \quad k = 1, 2, \dots, m-j, \\ V_{k,M}^{(n+1)} - V_{k,M}^{(n)} = \delta^{(n+1)} J_{k,M}^{(n+1)} V_{k,M}^{(n+1)} - \delta^{(n)} J_{k+M}^{(n)} V_{k,M}^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m-M \end{cases} \quad (3.3)$$

が得られる．ただし， $J_k^{(n)}$, $V_{k,j}^{(n)}$ はそれぞれ $J_k(t)$, $V_{k,j}(t)$ の離散対応変数である．もちろん， $M = 1$ とすれば，dKToda 方程式 (3.3) は dToda 方程式 (1.2) と一致する．

補助的な行列として， $\hat{L}^{(n)} := I + \delta^{(n)} B^{(n)}$, $\hat{R}^{(n)} := I / \delta^{(n)} + C^{(n)}$ を導入すると，離散ラックス・ペア (3.1) は， $\mu^{(n)} := -1/\delta^{(n)}$ をシフトパラメータとするシフト付き LU 分解法:

$$\begin{cases} A^{(n)} - \mu^{(n)} I = \hat{L}^{(n)} \hat{R}^{(n)}, & n = 0, 1, \dots, \\ A^{(n+1)} = \hat{R}^{(n)} \hat{L}^{(n)} + \mu^{(n)} I, & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

へと書き換えられる．シフト付き LU 分解法 (3.4) において， n から $n+1$ への離散時間発展は下ヘッセンベルグ行列 $A^{(n)}$ に対する相似変換 $A^{(n+1)} = \hat{R}^{(n)} A^{(n)} (\hat{R}^{(n)})^{-1}$ を与える．

シフト付き LU 分解の L 因子 $\hat{L}^{(n)}$ を対角成分がすべて 1 の下二重対角行列の積 $\hat{L}^{(n)} = \hat{L}_0^{(n)} \hat{L}_1^{(n)} \dots \hat{L}_{M-1}^{(n)}$ へと分解すると， $\hat{L}_{s'}^{(n)}$ の下副対角成分 $E_{k,s,s'}^{(n)}$ は

$$E_{k,s,s'}^{(n)} = \frac{H_{k-1,s,s'+1}^{(n)} H_{k+1,s,s'}^{(n)}}{H_{k,s,s'}^{(n)} H_{k,s,s'+1}^{(n)}}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$$

で表現できる．ただし， $H_{k,s,s'}^{(n)}$ は， $s' = 0, 1, \dots, M$ に対して，

$$H_{k,s,s'}^{(n)} := \det \begin{pmatrix} f_{s+s'}^{(n)} & \cdots & f_{s+M-1}^{(n)} & f_s^{(n+1)} & \cdots & f_{s+s'+k-1-M}^{(n+1)} \\ f_{s+s'+M}^{(n)} & \cdots & f_{s+2M-1}^{(n)} & f_{s+M}^{(n+1)} & \cdots & f_{s+s'+k-1}^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{s+s'+(k-1)M}^{(n)} & \cdots & f_{s+(k-1)M-1}^{(n)} & f_{s+(k-1)M}^{(n+1)} & \cdots & f_{s+s'+(k-1)(M+1)}^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

である．行列式 $H_{k,s,s'}^{(n)}$ の $n \rightarrow \infty$ における漸近展開を通じて， $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{k,s,s'}^{(n)} \rightarrow 0$ であることがわかるので， $n \rightarrow \infty$ で $V_{k,1}^{(n)}, V_{k,2}^{(n)}, \dots, V_{k,M}^{(n)}$ は 0 へと収束する．

ここで、 $A^{(n)}$ が二重対角行列の積へ分解可能、つまり、(2.3) の離散対応物として、

$$A^{(n)} = L_0^{(n)} L_1^{(n)} \cdots L_{M-1}^{(n)} R^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

で表されるとする。ただし、 $R^{(n)}, L_s^{(n)}$ は (2.2) で定義される $R(t), L_s(t)$ の成分 $q_k(t), e_{k,s}(t)$ をそれぞれ $q_k^{(n)}, e_{k,s}^{(n)}$ へと置き換えた行列である。[7] によると、シフト付き dhToda 方程式は、 $Q_{1,s}^{(n)} = q_1^{(n)} - \mu^{(n)}$ として、補助行列

$$\hat{R}_s^{(n)} := \begin{pmatrix} Q_{1,s}^{(n)} & 1 & & & \\ & Q_{2,s}^{(n)} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & Q_{m,s}^{(n)} & \end{pmatrix}$$

を用いた行列の LR 変換に相当する時間発展式 $L_s^{(n+1)} \hat{R}_{s+1}^{(n)} = \hat{R}_s^{(n)} L_s^{(n)}, R^{(n+1)} \hat{R}_s^{(n)} = \hat{R}_{s+M}^{(n)} R^{(n)}$ で表せる。また、dhToda 方程式は、ベックルンド変換 [7] によって、hLV の離散版である離散 hLV(dhLV) 方程式:

$$U_k^{(n+1)} = \prod_{\ell=1}^M \frac{1 + \delta^{(n)} U_{k+\ell}^{(n)}}{1 + \delta^{(n+1)} U_{k-\ell}^{(n+1)}} U_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)m - M$$

へと変換される。dhLV 変数の一般解は、 $k = 1, 2, \dots, m$ に対して、

$$U_{(M+1)(k-1)+1}^{(n)} = \frac{C_{k-1,0}^{(n+1)} C_{k,M}^{(n)}}{C_{k,0}^{(n)} C_{k-1,M}^{(n+1)}}, \quad U_{(M+1)(k-1)+s+1}^{(n)} = \frac{C_{k-1,s+1}^{(n+1)} C_{k+1,s}^{(n)}}{C_{k,s+1}^{(n)} C_{k,s}^{(n+1)}}$$

のようにカソラチアン $C_{k,s}^{(n)} := \det((f_{s+j-1}^{(n+i-1)})_{1 \leq i,j \leq k})$ の組み合わせで表せる。 $C_{k,s}^{(n)}$ の漸近展開を通じて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{(M+1)(k-1)+1}^{(n)} = \lambda_k, \lim_{n \rightarrow \infty} U_{(M+1)(k-1)+s+1}^{(n)} = 0$ がわかるので、シフト付き LU 分解の U 因子 $\hat{R}^{(n)}$ の対角成分が $Q_{k,0}^{(n)}$ であることと併せると、 $n \rightarrow \infty$ において、 $A^{(n)}$ は対角成分に固有値が並ぶ上二重対角行列へと収束することがわかる。

Fig. 1 は初期行列 $A^{(0)}$ を

$$A^{(0)} := \begin{pmatrix} 19 & 1 & & & \\ 285 & 3 & 1 & & \\ -57 & -135 & 11 & 1 & \\ -114 & -42 & 3 & 3 & 1 \\ & -60 & 5 & 40 & -14 \end{pmatrix}$$

として、dKToda 方程式 (3.3) による $J_k^{(n)}$ の時間発展をプロットしたものである。ただし、 $A^{(0)}$ から一意的に定まる dKToda 変数の初期値は $J_1^{(0)} = -19, J_2^{(0)} = 11.9215, J_3^{(0)} = 0.1675, J_4^{(0)} = -2.889, J_5^{(0)} = 30.2752$ である。Fig. 1 から $J_k^{(n)}$ が $A^{(0)}$ の固有値 λ_k の -1 倍へ収束していることが確認できる。一方、Fig. 2 は、 $A^{(0)}$ から定まる初期値 $V_{1,1}^{(0)} = 1.4921, V_{2,1}^{(0)} = 1.1167, V_{3,1}^{(0)} = 0.0711, V_{4,1}^{(0)} = 1.6275, V_{1,2}^{(0)} = -0.2984, V_{2,2}^{(0)} = 0.3048, V_{3,2}^{(0)} = 0.1119, V_{1,3}^{(0)} = -0.5969, V_{2,3}^{(0)} = 0.5076$ に対して、dKToda 方程式 (3.3) による $V_{k,j}^{(n)}$ の時間発展をプロットしたものである。Fig. 2 から、明らかに、 $n \rightarrow \infty$ で dKToda 変数 $V_{k,j}^{(n)}$ が 0 へと収束することが確認できる。

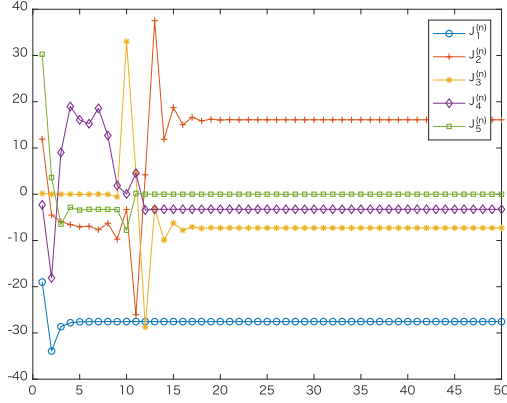


Fig. 1. A graph of the discrete-time n (x -axis) and the values of $J_k^{(n)}$ (y -axis) via the discrete Kostant Toda equation with $M = 3$ and $m = 5$.

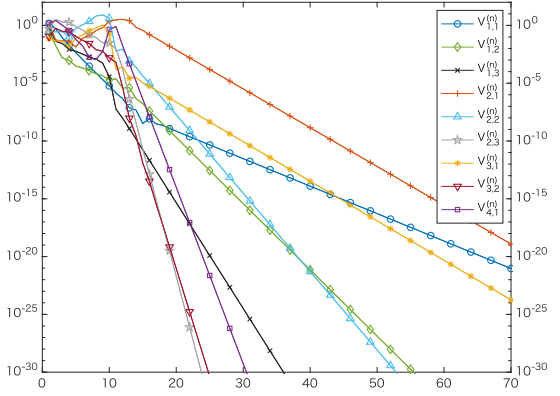


Fig. 2. A graph of the discrete-time n (x -axis) and the values of $V_{k,j}^{(n)}$ (y -axis) via the discrete Kostant Toda equation with $M = 3$ and $m = 5$.

4 まとめ

本稿では、ヘッセンベルグ行列が現れるラックス方程式に対して、連続系と離散系の両面から時間発展について解説した。また、ヘッセンベルグ行列が二重対角行列の積へ分解可能な場合について、ラックス方程式の観点から、ハングリー可積分系との関係を明らかにした。さらに、離散コストアント戸田変数 $J_k^{(n)}, V_{k,1}^{(n)}, V_{k,2}^{(n)}, \dots, V_{k,M}^{(n)}$ の離散時間極限 $n \rightarrow \infty$ における漸近挙動を明らかにし、離散コストアント戸田方程式 (3.3) がヘッセンベルグ行列 $A^{(n)}$ の固有値を保存する離散力学系であることを示した。

参考文献

- [1] H. Flaschka, *Phys. Rev. B*, **9**, (1974), 1924–1925.
- [2] A. Fukuda et. al, *Monatsh. Math.*, **170**, (2013), 11–26.
- [3] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66** (1997), 283–284.
- [4] Y. Itoh, *Prog. Theor. Phys.*, **78** (1987), 507–510.
- [5] B. Kostant, *Adv. Math.*, **34** (1979), 195–338.
- [6] H. Rutishauser, Birhäuser, Boston, 1990.
- [7] M. Shinjo et. al., *J. Integrable Syst.*, **3** (2018), 1–27.
- [8] R. Sumikura et. al., *AIP Conference Proceedings*, **1648** (2015), 690006.
- [9] 戸田盛和, 岩波書店, 1978.
- [10] S. Tsujimoto, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **38** (2002), 113–133.
- [11] D. S. Watkins, *SIAM Rev.*, **26** (1984), 379–391.