離散ハングリー戸田方程式を用いた逆固有値問題の解法

上田, 純也
同志社大学理工学研究科

近藤, 弘一
同志社大学理工学部

https://doi.org/10.15017/2924863

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.114-119, 2020-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University, Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 20 (pp. 114 - 119)

離散ハングリー戸田方程式を用いた逆固有値問題の解法

上田 純也（Ueda Junya），近藤 弘一（KONDO Koichi）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

離散ハングリー戸田方程式を用いた逆固有値問題の解法

同志社大学理工学研究科　上田 純也　(JUNYA Ueda)
同志社大学理工学部　近藤 弘一　(KONDO Koichi)

概要

本稿では，下ヘッセンベルグ型帯行列に関する要素指定逆固有値問題の解法を示す．II 型離散ハングリー戸田方程式の一般解に含まれる任意定数と初期値との 1 対 1 対応を示し，その結果を逆固有値問題の解法に応用する．一部の要素および固有値が指定された行列の構成方法を導出する．

1　下ヘッセンベルグ型行列の要素指定逆固有値問題

本稿で取り扱う逆固有値問題は次の通りである．

問題 1.1 (下ヘッセンベルグ型行列の要素指定逆固有値問題) m, N を自然数とし，$\ell_{\mathrm{ent}} = N(m-1), \ell_{\max} = \ell_{\mathrm{ent}} + m$ とおく．非零な複素定数 $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\ldots,m}$ と非零な実定数 $\{v_\ell\}_{\ell=1,2,\ldots,\ell_{\mathrm{ent}}}$ が与えられているとする．このとき，次の条件 (i)–(iii) をみたす下ヘッセンベルグ型実行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ を求めよ．
(i) 行列 $A^{(0)}$ は，下ヘッセンベルグ型の帯幅が $N+2$ の帯行列であり，2 重対角行列の積 $A^{(0)} = L^{(0)}L^{(1)}\cdots L^{(N-1)}R^{(0)}$ の形で表されるとする．ただし，$R^{(0)}, L^{(n)}$ はそれぞれ，$m \times m$ の上二重対角行列，下二重対角行列

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} q_1^{(0)} & 1 & & \\ & q_2^{(0)} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & q_m^{(0)} \end{pmatrix}, \quad L^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ e_1^{(n)} & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & e_{m-1}^{(n)} & \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1.1}$$

であり，要素 $e_k^{(n)}, q_k^{(0)}$ は非零とする．
(ii) 行列 $A^{(0)}$ の固有値は，定数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ と等しいとする．
(iii) 行列 $L^{(n)}$ と $R^{(0)}$ に含まれる要素 $e_k^{(n)}, q_k^{(0)}$ を

$$q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, e_1^{(1)}, \ldots, e_1^{(N-1)}; \ldots\ldots; q_{m-1}^{(0)}, e_{m-1}^{(0)}, e_{m-1}^{(1)}, \ldots, e_{m-1}^{(N-1)}; q_m^{(0)} \tag{1.2}$$

の順で並び替える．このとき，(1.2) の第 1 番目から第 ℓ_{ent} 番目までの各要素は，定数 $v_1, v_2, \ldots, v_{\mathrm{ent}}$ とそれぞれ等しいとする．

問題 1.1 の条件 (i) では，構成する行列 $A^{(0)}$ の形に制限を課している．行列 $A^{(0)}$ に含まれる変数の個数は $\ell_{\max}$ であるから，$A^{(0)}$ 全体の集合の自由度は $\ell_{\max}$ である．条件 (iii) は，$\ell_{\max}$ 個の変数の内で ℓ_{ent} 個の変数に制限を課している．(i) と (iii) を合わせると，自由度は $\ell_{\max} - \ell_{\mathrm{ent}} = m$ となる．つまり，残る未知変数は，(1.2) の第 $\ell_{\mathrm{ent}}+1$ 番目から第 $\ell_{\max}$ 番目までの m 個の変数である．条件 (ii) では，$A^{(0)}$ の m 個の全て固有値に制限を課しているので，残る m 個の未知変数が，条件 (ii) より一意に定まるかが課題である．

2 II 型離散ハングリー戸田方程式の一般解

II 型離散ハングリー戸田方程式に関する既知の結果を紹介する．行列の列 $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots$ を導入し，それぞれ

$$A^{(n)} = L^{(n)} L^{(n+1)} \cdots L^{(n+N-1)} R^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

と表されるとする．さらに，$L^{(0)}, L^{(1)}, \ldots$ と $R^{(0)}, R^{(1)}, \ldots$ は，条件

$$L^{(n+N)} R^{(n+1)} = R^{(n)} L^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

をみたすとする．行列の要素 $e_k^{(n)}, q_k^{(n)}$ を (1.1) と同様に定め，方程式 (2.2) の両辺を比較すると，変数 $e_k^{(n)}, q_k^{(n)}$ がみたすべき漸化式および境界条件は，

$$q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+N)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.3}$$

$$e_k^{(n+N)} = \frac{q_{k+1}^{(n)}}{q_k^{(n+1)}} e_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2.4}$$

$$e_0^{(n)} = 0, \quad e_m^{(n)} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.5}$$

となる．このとき, 与えられた初期値 $A^{(0)}$ に対する時間発展 $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ を考える．(2.3)–(2.5) を II 型離散ハングリー戸田方程式と呼び，(2.2) をそのラックス表示という．

II 型離散ハングリー戸田方程式の分子解と呼ばれる行列式解は,

$$e_k^{(n)} = \frac{\tau_{k+1}^{(n)} \tau_{k-1}^{(n+1)}}{\tau_k^{(n)} \tau_k^{(n+1)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.6}$$

$$q_k^{(n)} = \frac{\tau_{k-1}^{(n+N)} \tau_k^{(n+1)}}{\tau_k^{(n)} \tau_{k-1}^{(n+N)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.7}$$

となる．ただし，$\tau_k^{(n)}$ は k 次の拡張ハンケル行列式であり，$\tau_{-1}^{(n)} = 0, \tau_0^{(n)} = 1$ と

$$\tau_k^{(n)} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{n+(k-1)} \\ f_{n+N} & f_{n+N} & f_{n+N+2} & \cdots & f_{n+N+(k-1)} \\ f_{n+2N} & f_{n+2N+1} & f_{n+2N+2} & \cdots & f_{n+2N+(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+(k-1)N} & f_{n+(k-1)N+1} & f_{n+(k-1)N+2} & \cdots & f_{n+(k-1)N+(k-1)} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

とおく．さらに，行列式の要素であるモーメント $\{f_n\}_{n=0,1,\ldots}$ は，

$$f_n = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(n \bmod N)} \lambda_i^{\lfloor \frac{n}{N} \rfloor}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{2.9}$$

とおく．ここで，$\{\lambda_i\}_{i=1,2,\ldots,m}$ と $\{c_i^{(j)}\}_{i=1,2,\ldots,m}^{j=0,1,\ldots,N-1}$ は任意定数である．任意定数の総数は，$m + Nm$ 個である．一方，初期値 $A^{(0)}$ に含まれる変数の個数は，$m + N(m-1)$ 個である．任意定数の個数の方が多いので，分子解 (2.6)–(2.7) は一般解といえる．自由度を一致させるためには，$\{c_i^{(j)}\}_{i=1,2,\ldots,m}^{j=0,1,\ldots,N-1}$ に N 個の制限を加えて，$f_0 = f_1 = \cdots = f_{N-1} = 1$ とおけば良い．

3　一般解の任意定数と初期値との 1 対 1 対応

II 型離散ハングリー戸田方程式 (2.3)–(2.5) の一般解 (2.6)–(2.7) に関して，次の定理が成り立つ．

定理 3.1 (一般解の任意定数と初期値との **1** 対 **1** 対応) 任意定数 $\{c_i^{(j)}\}_{i=1,2,\dots,m}^{j=0,1,\dots,N-1}$ と $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ に対して，モーメント (2.9) と行列式 (2.8) を定義する．条件

$$f_0 = f_1 = \cdots = f_{N-1}, \quad \tau_k^{(n)} \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, N \tag{3.1}$$

みたすとき，非零な初期値 $\{q_k^{(0)}\}_{k=1,2,\dots,m}, \{e_k^{(j)}\}_{k=1,2,\dots,m-1}^{j=0,1,\dots,N-1}$ が (2.6)–(2.7) より定まる．

逆に，任意の初期値 $\{q_k^{(0)}\}_{k=1,2,\dots,m}, \{e_k^{(j)}\}_{k=1,2,\dots,m-1}^{j=0,1,\dots,N-1}$ は非零とする．このとき，定数 $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ と $\{c_i^{(j)}\}_{i=1,2,\dots,m}^{j=0,1,\dots,N-1}$ は，条件 (3.1) をみたし，かつ次の手順により定まる．まず，行列 $A^{(0)}$ の固有多項式 を $P(z) = \det(zI - A^{(0)}) = \sum_{i=1}^{m}(z - \lambda_i)$ とおくと，固有値の定数 $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,m}$ が定まる．次に，モーメント $\{f_n\}_{n=0,1,,\dots,mN+m-1}$ を

$$f_n = 1, \qquad n = 0, 1, \dots, N, \tag{3.2}$$

$$f_{n+kN} = -\sum_{j=1}^{k} b_{k,j}^{(n)} f_{n+(k-j)N}, \qquad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \tag{3.3}$$

$$f_{n+mN} = -\sum_{i=1}^{m} a_i f_{n+(m-i)N}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N \tag{3.4}$$

より定める．ただし，係数 $\{a_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ は，$P(z)$ を展開した $P(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^{m-i}$ の係数とし，係数 $\{b_{k,j}^{(n)}\}$ は，

$$b_{k,j}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{if } j < 0 \text{ or } k < j, \\ 1 & \text{if } j = 0, \\ b_{k-1,j}^{(N)} - q_k^{(0)} b_{k-1,j-1}^{(0)} & \text{if } n = 0 \text{ and } 1 \leq j \leq k, \\ b_{k,j}^{(n-1)} - e_k^{(n-1)} b_{k-1,j-1}^{(n)} & \text{if } n \geq 1 \text{ and } 1 \leq j \leq k, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$j = 0, 1, \dots, k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

とする．最後に，連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(j)} \\ c_1^{(j)} \\ \vdots \\ c_m^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \\ f_{N+j} \\ \vdots \\ f_{N(m-1)+j} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{3.6}$$

を解き，任意定数 $\{c_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,m}^{j=0,\dots,N-1}$ が求まる．

4　逆固有値問題への応用

II 型離散ハングリー戸田方程式 (2.3)–(2.5) を順問題として考えるとき，与えられた初期値 $\{q_k^{(0)}\}_{k=1,\ldots,m}, \{e_k^{(j)}\}_{k=1,\ldots,m-1}^{j=0,\ldots,N-1}$ に対して，一般解 (2.6)–(2.7) を求める問題である．一方，逆固有値問題 1.1 においては，初期値 $\{q_k^{(0)}\}_{k=1,\ldots,m}, \{e_k^{(j)}\}_{k=1,\ldots,m-1}^{j=0,\ldots,N-1}$ の一部と，固有値 $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,m}$ が与えられたとき，残った初期値を求める問題とみることができる．定理 3.1 を証明するために導入した関係式を逆固有値問題 1.1 の解法に利用する．結果として次の定理を得る．

定理 4.1 **(逆固有値問題 1.1 の一意解)** 次のアルゴリズムにより変数 $\{q_k^{(0)}\}_{k=1,\ldots,m}$ と $\{e_k^{(j)}\}_{k=1,\ldots,m-1}^{j=0,\ldots,N-1}$ を定める．これらの変数が有限なとき，逆固有値問題 1.1 は一意な解をもつ．有限ではないとき，逆固有値問題 1.1 の解は存在しない．

1. $\tau_{-1}^{(n)} := 0$
2. $\tau_0^{(n)} := 1$
3. $\tau_{m+1}^{(n)} := 0$
4. **for** $k = 1, 2, \ldots, m$ **do**
5. 　**for** $n = 0, 1, \ldots, M$ **do**
6. 　**if** $q_k^{(n)}, e_k^{(n)} \in V_1$
7. 　　**if** $0 \le n \le M-1$
8. 　　　$\tau_k^{(n)} := \tau_{k-1}^{(n+1)} \prod_{j=1}^{k-1} e_j^{(n)}$
9. 　　**if** $n = M$
10. 　　　$\tau_k^{(M)} := \tau_k^{(0)} \prod_{j=1}^{k} q_j^{(0)}$
11. 　　**else**
12. 　　　$\tau_k^{(n)} := 0$
13. 　**else**
14. 　　$\tau_k^{(n)}$ を (2.8) より計算する．
15. 　　もし，$\tau_k^{(n)} = 0$ のときは，逆固有値問題の解は存在しない．
16. 　**end do**
17. **end do**
18. $q_k^{(0)} := \dfrac{\tau_{k-1}^{(0)}\tau_k^{(N)}}{\tau_k^{(0)}\tau_{k-1}^{(N)}}, \quad e_k^{(n)} := \dfrac{\tau_{k+1}^{(n)}\tau_{k-1}^{(n+1)}}{\tau_k^{(n)}\tau_k^{(n+1)}}$

定理 4.1 は，逆固有値問題 1.1 の一意な解の必要十分条件を示し，かつ具体的な計算アルゴリズムを提示している．有限ステップのアルゴリズムであることも重要な点である．

5　逆固有値問題の数値例

逆固有値問題 1.1 に対する定理 4.1 の数値例を示す．

行列サイズを $m=6$ とし，$N=3$ とすると帯幅は $N+2$ である．構成する行列 $A^{(0)}$ は下ヘッセンベルグ型の実帯行列 $A^{(0)}=L^{(0)}L^{(1)}L^{(2)}R^{(0)}$ である．指定固有値を $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3,\lambda_4=4,\lambda_5=5,\lambda_6=6$ とする．指定要素を (1.2) に従い，$q_1^{(0)}=1,e_1^{(0)}=2,e_1^{(1)}=3,e_1^{(2)}=4,q_2^{(0)}=5,e_2^{(0)}=6,e_2^{(1)}=7,e_2^{(2)}=8,q_3^{(0)}=9,e_3^{(0)}=10,e_3^{(1)}=11,e_3^{(2)}=12,q_4^{(0)}=13,e_4^{(0)}=14,e_4^{(1)}=15$ とする．与えられた条件から定まる行列 $L^{(n)},R^{(0)}$ は，

$$L^{(0)}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\2&1&&&&\\&6&1&&&\\&&10&1&&\\&&&14&1&\\&&&&e_5^{(0)}&1\end{pmatrix},\quad L^{(1)}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\3&1&&&&\\&7&1&&&\\&&11&1&&\\&&&15&1&\\&&&&e_5^{(1)}&1\end{pmatrix},$$

$$L^{(2)}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\4&1&&&&\\&8&1&&&\\&&12&1&&\\&&&e_4^{(2)}&1&\\&&&&e_5^{(2)}&1\end{pmatrix},\quad R^{(0)}=\begin{pmatrix}1&1&&&&\\&5&1&&&\\&&9&1&&\\&&&13&1&\\&&&&q_5^{(0)}&1\\&&&&&q_6^{(0)}\end{pmatrix}$$

となる．指定がない残る要素は，$e_4^{(2)},q_5^{(0)},e_5^{(0)},e_5^{(1)},e_5^{(2)},q_6^{(0)}$ の 6 個である．これらの未知要素を定理 4.1 のアルゴリズムを用いて計算すると，

$$e_4^{(2)}=-\frac{1869033}{520},\qquad q_5^{(0)}=\frac{429038697}{45760},\qquad e_5^{(0)}=\frac{595718671}{63360},$$
$$e_5^{(1)}=\frac{138882984644663}{39473976960},\qquad e_5^{(2)}=\frac{41455483437182425}{12830199727520016},\qquad q_6^{(0)}=\frac{56320}{429038697}$$

と求まる．さらに，$A^{(0)}=L^{(0)}L^{(1)}L^{(2)}R^{(0)}$ は，

$$A^{(0)}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\9&14&1&0&0&0\\70&175&30&1&0&0\\280&1470&535&46&1&0\\0&6160&5750&-45846.8&5810.55&1\\0&0&-1.52314\times10^7&2.71399\times10^8&-3.41281\times10^7&-5810.55\end{pmatrix}$$

と求まる．もちろん，$A^{(0)}$ の固有値は，指定した固有値 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\ldots,\lambda_6=6$ と等しいことが確認される．

6　まとめ

本稿では，II 型離散ハングリー戸田方程式の一般解の任意定数と初期値との 1 対 1 対応を示した．さらにその結果を用いて，一部の要素と全ての固有値を指定した下ヘッセンベルグ型実帯行列の逆固有値問題に関する一意な解の導出に成功した．

参考文献

[1] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, H. Tsutsumi and K. Kondo, A finite step construction of totally nonnegative matrices with specified eigenvalues, Numer. Algor. **70** (2015), pp. 469–484.

[2] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, A. Yoshida and K. Kondo, An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, Numer Algor. **75** (2017), pp. 079–1101.

[3] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki and Y. Nakamura, Integrable discrete hungry systems and their related matrix eigenvalues, Ann. Mat. Pura Appl. **192** (2013), pp. 423–445.

[4] 中村 佳正, 可積分系の機能数理, 共立出版株式会社, 2006.

[5] 中村 佳正, 高崎 金久, 辻本 諭, 尾角 正人, 井ノ口 順一, 可積分系の数理, 朝倉書店，2018.

[6] 堤 久宜, 離散ハングリー戸田方程式における任意の初期値に対する一般解とその漸近挙動, 同志社大学大学院理工学研究科修士論文，2016.

[7] M. T. Chu and G. H. Golub, Inverse Eigenvalue Problems, Oxford Science Publications, 2005.