外部変数付きmax方程式と連立max方程式の初期値問題について

保坂, 圭祐
早稲田大学基幹理工学研究科

高橋, 大輔
早稲田大学基幹理工学研究科

https://doi.org/10.15017/2924862

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.108-113, 2020-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 19 (pp. 108 - 113)

外部変数付きmax方程式と連立max方程式の初期値問題について

保坂 圭祐（**Hosaka Keisuke**），高橋 大輔（**TAKAHASHI daisuke**）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

外部変数付き max 方程式と連立 max 方程式の初期値問題について

早稲田大学基幹理工学研究科　保坂圭祐 (HOSAKA Keisuke)
早稲田大学基幹理工学研究科　高橋大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

概要

外部変数付き max 方程式と連立 max 方程式の初期値問題を考える．これら方程式のうち，解表現の複雑度が多項式オーダーになるものを具体例を挙げて紹介する．

1　はじめに

本研究の先行研究として，max, min, 符号反転 $-$ の 3 種類の演算のみによって定義される時間 1 階 3 近傍の差分方程式

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \qquad (j;\text{空間サイト}, n;\text{時刻}) \tag{1}$$

が文献 [1] で議論されている．この方程式の一例として

$$u_j^{n+1} = \min(\max(-u_{j-1}^n, -u_j^n), u_{j+1}^n) \tag{2}$$

がある．このような方程式を以降では max 方程式と呼び，$n = 0$ を初期時刻として初期値 $\{u_i^0\}$ を与えたときの時間発展を考える．

初期値のみで表現された解の振る舞いを議論する際，解の表現をどれだけ簡明なものに帰着できるか否かは重要である．もし (1) について項や演算の整理をしないなら

$$\begin{aligned}
&u_j^1 = f(u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0),\\
&u_j^2 = f(f(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, u_j^0), f(u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0), f(u_j^0, u_{j-1}^0, u_{j+2}^0)),\\
&\quad \cdots
\end{aligned}$$

という具合に，n の増加とともに項の数が指数的に増える．これに対して，max, min の公式等を用いれば，たとえば (2) の解は

$$u_j^n = u_{j+n}^1 = \min(\max(-u_{j+n-2}^0, -u_{j+n-1}^0), u_{j+n}^0)$$

と項を整理でき，任意の n において一定数の初期項で解を表現できる．すると初期値 $\{u_i^0\}$ から $\{u_i^1\}$ が計算された後は n とともに $-j$ 方向に $\{u_i^1\}$ の分布がずれていくだけであることが直ちにわかる．

文献 [1] では，(1) の形式の方程式について，時刻 n の解に含まれる初期項 $\{u_i^0\}$ あるいは演算 (max, min, $-$) の個数をできるだけ減らしたときに，その個数が n に対して多項式オーダーになるものを探索し報告している．このような個数は解の複雑度を数量的に表しているとみなせる．本研究ではその形式を拡張し，u_j^n と独立な外部変数 a_j^n を付加した

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, a_j^n) \tag{3}$$

という形式，および，u_j^n と v_j^n の 2 つの変数が連立した

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, v_j^n), \\ v_j^{n+1} = f(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n, u_j^n) \end{cases} \tag{4}$$

という形式について解の複雑度を議論する．それぞれの f は (1) と同様に，引数の項と max, min および符号反転 $-$ で構成される関数である．

2　外部変数付き max 方程式

2.1　解の複雑度に対する外部変数の影響

(3) の形式では，外部変数 $\{a_i^m\}$ は $\{u_i^0\}$ と独立であるため大小比較ができない．そのため (3) では初期値の項数を減らせず，解の複雑度が多項式オーダーに収まらない場合が非常に多い．たとえば

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n) \tag{5}$$

に外部変数を導入した

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n, a_j^n) \tag{6}$$

を考える．この方程式の解の時間発展は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, a_j^0), \\ u_j^2 &= \min\Big(\max(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, -a_{j-1}^0), \max(u_{j-1}^0, u_j^0, -a_j^0), a_j^1\Big), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_j^3 &= \min\Big(\max\Big(\min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0, a_{j-2}^0), \min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, a_{j-1}^0), -a_{j-1}^1\Big), \\
&\qquad \max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, a_{j-1}^0), \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, a_j^0), -a_j^1\Big), a_j^2\Big) \\
&= \min\Big(\max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, a_{j-1}^0), \\
&\qquad \min\Big(\max\Big(\min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0, a_{j-2}^0), -a_{j-1}^1\Big), \\
&\qquad\qquad \max\Big(\min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, a_j^0), -a_j^1\Big)\Big)\Big), a_j^2\Big)
\end{aligned}
$$

$\{a_i^m\}$ の存在によって，大小比較ができる項が少なく項数を減らせないため，n について指数オーダーで項数が増加する．つまり (6) の解の複雑度は多項式オーダーではない．

一方，外部変数 a_j^n が無い (5) の解は，たとえば上の u_j^3 については外部変数を削除すると

$$
\begin{aligned}
u_j^3 &= \max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), \min\Big(\min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0), \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0)\Big)\Big) \\
&= \max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), \min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, -u_j^0)\Big) \\
&= \min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0)
\end{aligned}
$$

と項数がかなり減少する．実は

$$
u_j^{2n+1} = u_{j-n}^1, \qquad u_j^{2n+2} = u_{j-n}^2 \tag{7}
$$

となることが少し計算すればわかるので，(5) の解の複雑度は多項式オーダーである．解の複雑度が激変するので，外部変数が無い場合と有る場合では解の振る舞いも大きく異なる．有限サイズのサイト空間を設定し周期境界条件を与え，初期値 $\{u_i^0\}$ を $0 \le u \le 1$ の範囲の乱数を与えたときの (5) の時間発展の例を図 1 (a) に示す．図ではサイトの値が大きいほど濃い色で示している．解 (7) からもわかるように，偶奇時刻の解のパターンがそれぞれ $+j$ 方向に速さ 1 で伝播している．一方，外部変数 a_j^n を $0 \le a \le 1$ の範囲の乱数で j, n 毎に与えて (6) を計算した結果を図 1 (b) に示す．外部変数が解の値に影響して不規則なパターンが出現している．

2.2 多項式オーダーの外部変数付き max 方程式

外部変数が有るために解の複雑度が指数オーダーになるものの例を紹介したが，複雑度を多項式オーダーに減らせる場合に解表現が解の振る舞いに重要な手がかりを与える．そこで外部変数を付与しても多項式オーダーを維持する方程式として，以下を取り上げる．

$$
u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n, a_j^n) \tag{8}
$$

解は初期値と外部変数によって

$$u_j^n = \min\Big(\max\Big(\min(u_{j-1}^0, \min_{0\le k\le n-2} a_{j-1}^k), \min(u_{j+1}^0, \min_{0\le k\le n-2} a_{j+1}^k)\Big), u_j^0, \min_{0\le k\le n-1} a_j^k\Big) \tag{9}$$

で与えられ，複雑度が多項式オーダー $O(n^1)$ であることがわかる．外部変数が無い場合の方程式

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n) \tag{10}$$

の解は，上の解の a の項を無視することによって直ちに

$$u_j^n = u_j^1 = \min(\max(u_{j-1}^0, u_{j+1}^0), u_j^0)$$

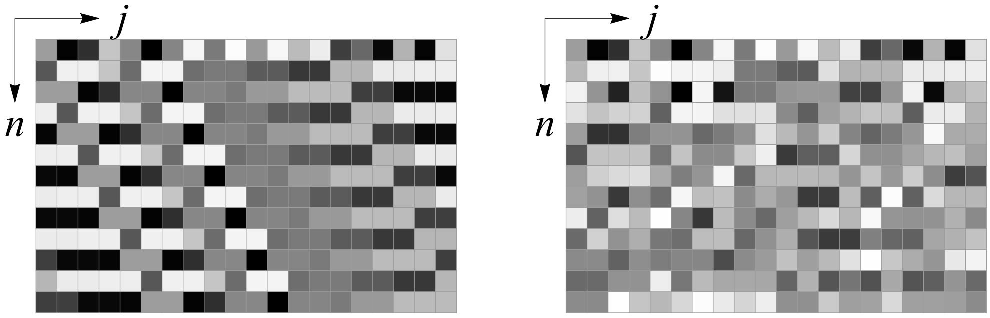
となり，やはり多項式オーダー $O(n^0)$ の複雑度である．

(10) および (8) の解の時間発展の例をそれぞれ図 2 (a), (b) に示す．初期値と外部変数の与え方は図 1 と同じである．

外部変数の無い (10) の解は $n \ge 1$ で静止解になる．一方，(8) では $\{a_i^m\}$ を $0 \le a \le 1$ の乱数で与える場合，解 (9) の外部変数の項，たとえば最後の項 $\min_{0\le k\le n-1} a_j^k$ は n とともに単調に減少し，$n \to \infty$ で 0 に収束する．したがって u_j^n も n とともに単調減少であり，$n \to \infty$ で 0 に収束する．図 2 (b) の図でも，それぞれの j において独立に 0 に単調減少していく様子が観察できる．

3　連立 max 方程式

本節では，(4) の形式の u と v の連立の max 方程式について解の複雑度が多項式オーダーになるものを紹介する．なお，(4) は u, v について対称な時間発展形であるので，複



(a)　　(b)

図 1　時間発展の例．(a) 外部変数が無い方程式 (5)，(b) 外部変数が有る方程式 (6)

雑度は片方のみで評価すればよい．

例として，

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n, v_j^n), \\ v_j^{n+1} = \min(-v_{j-1}^n, -v_j^n, u_j^n) \end{cases} \tag{11}$$

を考える．この連立 max 方程式の時間発展をたどると

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, v_j^0), \\ u_j^2 &= \min(-u_{j-1}^1, -u_j^1, v_j^1) \\ &= \min(\max(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, -v_{j-1}^0), \max(u_{j-1}^0, u_j^0, -v_j^0), \min(-v_{j-1}^0, -v_j^0, u_j^0)) \\ &= \min(\max(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, -v_{j-1}^0), \max(u_{j-1}^0, u_j^0, -v_j^0), -v_{j-1}^0, -v_j^0, u_j^0) \\ &= \min(-v_{j-1}^0, -v_j^0, u_j^0) \\ &= v_j^1 \end{aligned}$$

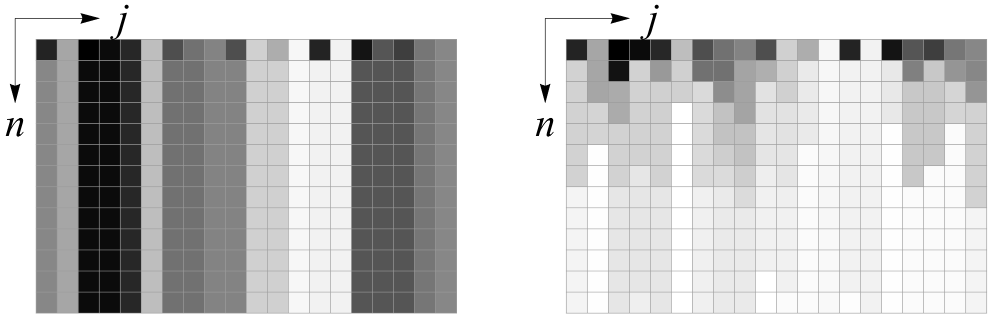
となるので，解は

$$u_j^{2n-1} = v_j^{2n} = u_j^1, \qquad v_j^{2n-1} = u_j^{2n} = v_j^1 \qquad (n \geq 1)$$

となり，その複雑度は多項式オーダー $O(n^0)$ となる．

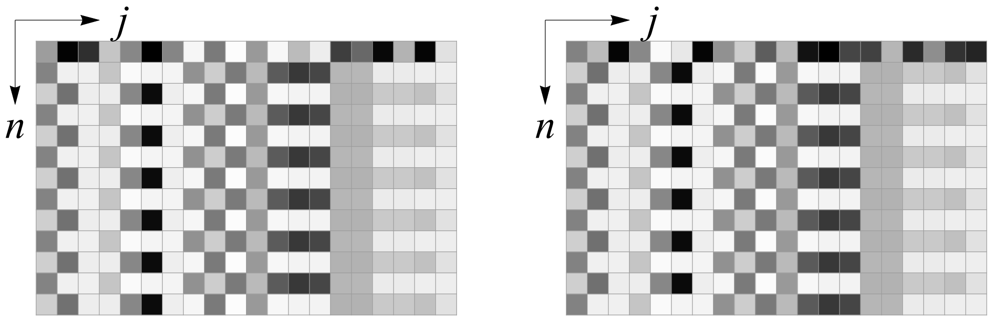
実は，連立方程式 (11) は外部変数付き max 方程式 (6) と関連があり，(6) を u, v それぞれに立て，外部変数に互いの変数を代入したものが (11) である．(6) では外部変数 a が u の項数を減らす障害となり解の複雑度を下げられない．一方，(11) では外部変数が互いの変数に置き換わっているため項の大小比較が可能となり項数を減らせる．

初期値を $0 \leq u_i^0, v_i^0 \leq 1$ の乱数に設定したときの u, v の時間発展の例を図 3 に示す．さらに，連立でない単独の方程式 (5) の場合の解は (7) であり，図 1 (a) のように周期 2



(a) (b)

図 2　時間発展の例．(a) 外部変数が無い方程式 (10), (b) 外部変数が有る方程式 (8)



(a) (b)

図 3　連立方程式 (11) の時間発展の例．(a) u_j^n, (b) v_j^n

で $+j$ 方向に伝播する解となるのに対し，上の連立の場合は周期性は変わらないが同じサイトで動かない解に変わる．このように方程式に外部変数が有るか無いか，連立か単独であるかによって解の振る舞いがかなり変わり興味深い．

4　終わりに

本稿では，外部変数付き max 方程式と連立 max 方程式の二通りの場合に対して，解の複雑度が多項式オーダーのものを一例ずつ紹介した．紙数の関係で省略するが，時間 1 階 3 近傍の max 方程式について，解の複雑度が多項式オーダーになるものとして 13 種類の外部変数付き max 方程式と 25 種類の連立 max 方程式が既に見つかっており，現在はその一般構造を解析中である．

参考文献

[1] T.Ikegami, D.Takahashi, J.Matsukidaira, ”On solutions to evolution equations defined by lattice operators”, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014) 211-230, 2014