

2変数Oregonatorの超離散解析

柏舘, 悠平
山形大学大学院理工学研究科理学専攻数理科学分野

<https://doi.org/10.15017/2924859>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019A0-S2, pp.89-94, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」 (研究代表者 永井 敦)

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 16 (pp. 89 - 94)

2変数 Oregonator の超離散解析

柏舘 悠平 (Kashiwatate Yuhei)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

2 変数 Oregonator の超離散解析

山形大学大学院 理工学研究科 理学専攻 数理科学分野 柏舘 悠平 (KASHIWATATE Yuhei)

概要

BZ 反応を記述する数理モデルである 2 変数 Oregonator に対して村田の方法と 5 近傍の離散化を適用し、超離散方程式を導出する。Oregonator の特徴的な現象として、リミットサイクルと興奮解がある。導出した超離散方程式やセル・オートマトンモデルにおいても類似した現象を確認できた。また、反応場の不均一性を考慮し、ノイズがパターン形成に及ぼす影響を示した。

1 2 変数 Oregonator

空間 2 次元の場合の 2 変数 Oregonator は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + a \left\{ u(1-u) - \frac{fv(u-q)}{u+q} \right\}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u - v \end{cases} \quad (1.1)$$

で与えられる。\$D_u, D_v\$ は拡散係数、\$u(t, x, y), v(t, x, y)\$ はそれぞれ活性因子-抑制因子、\$a, q\$ は定数である。\$f\$ は興奮性の閾値であり、解の挙動を決定するパラメータである。

2 超離散化

(1.1) の超離散化を村田の方法 [1] と 5 近傍の離散化に沿って行う。(1.1) の拡散項の離散化を

$$\begin{cases} m_\alpha(u_n^{j,k}) = \frac{1}{5}(u_n^{j,k} + u_n^{j-\alpha,k} + u_n^{j+\alpha,k} + u_n^{j,k-\alpha} + u_n^{j,k+\alpha}), \\ m_\beta(v_n^{j,k}) = \frac{1}{5}(v_n^{j,k} + v_n^{j-\beta,k} + v_n^{j+\beta,k} + v_n^{j,k-\beta} + v_n^{j,k+\beta}) \end{cases} \quad (2.1)$$

と与える。ここで \$t = n\Delta t\$, \$x = j\Delta x\$, \$y = k\Delta y\$ (\$\Delta x = \Delta y\$) とおき、\$(t, x, y)\$ 周りで 1 次近似をすると

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\alpha^2 \Delta x^2}{5\Delta t} u_{xx} + \frac{\alpha^2 \Delta y^2}{5\Delta t} u_{yy} + N(\Delta t, \Delta x, \Delta y), \\ v_t &= \frac{\beta^2 \Delta x^2}{5\Delta t} v_{xx} + \frac{\beta^2 \Delta y^2}{5\Delta t} v_{yy} + N(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

を得る。\$D_u = \alpha^2 \Delta x^2 / 5\Delta t = \alpha^2 \Delta y^2 / 5\Delta t\$, \$D_v = \beta^2 \Delta x^2 / 5\Delta t = \beta^2 \Delta y^2 / 5\Delta t\$ を変えないように、\$\Delta t, \Delta x, \Delta y \to +0\$ とすると (1.1) の拡散項が得られることにより、離散化になっていることが確認できる。これを 5 近傍の離散化と呼ぼう。

離散 2 変数 Oregonator は、村田の方法と (2.1) と組み合わせて

$$\begin{cases} u_{n+1}^{j,k} = \frac{\varepsilon^{-1} m_\alpha(u_n^{j,k}) + a m_\alpha(u_n^{j,k}) + a f q v_n^{j,k} / \{m_\alpha(u_n^{j,k}) + q\}}{\varepsilon^{-1} + a m_\alpha(u_n^{j,k}) + a f v_n^{j,k} / \{m_\alpha(u_n^{j,k}) + q\}}, \\ v_{n+1}^{j,k} = \frac{\varepsilon^{-1} m_\beta(v_n^{j,k}) + m_\beta(u_n^{j,k})}{\varepsilon^{-1} + 1} \end{cases} \quad (2.2)$$

とすればよい。これは、(2.2) を

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}^{j,k} - u_n^{j,k}}{\varepsilon} = \frac{m_\alpha(u_n^{j,k}) - u_n^{j,k}}{\varepsilon} + a \left\{ m_\alpha(u_n^{j,k})(1 - u_n^{j,k}) - \frac{f v_n^{j,k}(u_n^{j,k} - q)}{m_\alpha(u_n^{j,k}) + q} \right\} + O(\varepsilon), \\ \frac{v_{n+1}^{j,k} - v_n^{j,k}}{\varepsilon} = \frac{m_\beta(v_n^{j,k}) - v_n^{j,k}}{\varepsilon} + m_\beta(u_n^{j,k}) - v_n^{j,k} + O(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.3)$$

と変形して、 $\varepsilon \rightarrow +0$ をすると、(1.1) が得られることにより離散化になっていることが確認できる。

(2.2) に対して、各変数に次の指数関数型の変換

$$\begin{aligned} u_n^{j,k} &= \exp(U_n^{j,k}/\lambda), & v_n^{j,k} &= \exp(V_n^{j,k}/\lambda), & \varepsilon &= \exp(E/\lambda), \\ a &= \exp(A/\lambda), & f &= \exp(F/\lambda), & q &= \exp(Q/\lambda) \end{aligned} \quad (2.4)$$

を行い、 $\lambda \rightarrow +0$ の極限をとると、超離散方程式

$$\begin{cases} M_\alpha(U_n^{j,k}) = \max(U_n^{j,k}, U_n^{j-\alpha,k}, U_n^{j+\alpha,k}, U_n^{j,k-\alpha}, U_n^{j,k+\alpha}), \\ M_\beta(V_n^{j,k}) = \max(V_n^{j,k}, V_n^{j-\beta,k}, V_n^{j+\beta,k}, V_n^{j,k-\beta}, V_n^{j,k+\beta}), \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} U_{n+1}^{j,k} = \max\{M_\alpha(U_n^{j,k}) - E, A + M_\alpha(U_n^{j,k}), A + F + Q + V_n^{j,k} - \max(M_\alpha(U_n^{j,k}), Q)\} \\ \quad - \max\{-E, A + M_\alpha(U_n^{j,k}), A + F + V_n^{j,k} - \max(M_\alpha(U_n^{j,k}), Q)\}, \\ V_{n+1}^{j,k} = \max\{M_\beta(V_n^{j,k}) - E, M_\beta(U_n^{j,k})\} - \max\{-E, 0\} \end{cases} \quad (2.6)$$

を得る。今回は一般に解析が容易になる手続きとして $E \rightarrow +\infty$ を適用する。整理すると

$$\begin{cases} U_{n+1}^{j,k} = \max\{M_\alpha(U_n^{j,k}), F + Q + V_n^{j,k} - \max(M_\alpha(U_n^{j,k}), Q)\} \\ \quad - \max\{M_\alpha(U_n^{j,k}), F + V_n^{j,k} - \max(M_\alpha(U_n^{j,k}), Q)\}, \\ V_{n+1}^{j,k} = M_\beta(U_n^{j,k}) \end{cases} \quad (2.7)$$

を得る。(2.7) から $U_n^{j,k}$ 単独の方程式

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{j,k} &= \max\{M_\alpha(U_n^{j,k}), F + Q + M_\beta(U_{n-1}^{j,k}) - \max(M_\alpha(U_n^{j,k}), Q)\} \\ &\quad - \max\{M_\alpha(U_n^{j,k}), F + M_\beta(U_{n-1}^{j,k}) - \max(M_\alpha(U_n^{j,k}), Q)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

を得る。

3 解の挙動

(2.8) において拡散効果がない場合、つまり $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ を考えると、2 階の常差分方程式

$$U_{n+1} = \max\{U_n, F + Q + U_{n-1} - \max(U_n, Q)\} - \max\{U_n, F + U_{n-1} - \max(U_n, Q)\} \quad (3.1)$$

を得る。この方程式の平衡点は F と Q の値によって異なり、

(I) $U_n \geq Q$ の場合:

$$\bar{U} = \begin{cases} 0 & (F + Q \leq 0 \text{ \& } F \leq 0), \\ Q & (F \geq 0 \text{ \& } F \geq Q). \end{cases} \quad (3.2)$$

(II) $U_n \leq Q$ の場合:

$$\bar{U} = \begin{cases} 0 & (F \leq Q \text{ \& } F \leq 0), \\ F & (0 < F < Q), \\ Q & (F \geq 0 \text{ \& } F \geq Q) \end{cases} \quad (3.3)$$

となる。ここで、 $0, Q$ は安定平衡点であり、 F は不安定平衡点である。 $F, Q, U_0, U_1 \in \mathbb{Z}$ を満たすとき、 F の値によって解は以下の 2 種類の挙動を描くことが確認できる。したがって、 f の興奮性の閾値としての性質を保存している。

3.1 リミットサイクル

$F \in (0, Q)$ のとき安定平衡点が消滅し, ある時刻から以下の周期解

$$U_n = \begin{cases} 0 \\ Q \end{cases}$$

を得る (図 3.1). この解は元の微分方程式のリミットサイクルに対応する.

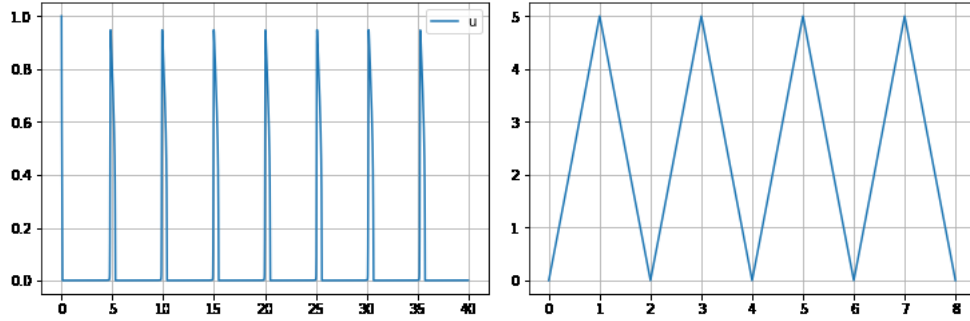


図 3.1 (左) 微分方程式のリミットサイクル. (右) 超離散方程式のリミットサイクル.

3.2 興奮解

$F \notin (0, Q)$ のとき興奮解が現れるが, 特に $0 < Q < F$ のとき

$$U_n = Q \quad (n \geq n_0)$$

を得る (図 3.2). この解はある時刻 n_0 から定常解へ落ち着き, 元の微分方程式の興奮解に対応する.

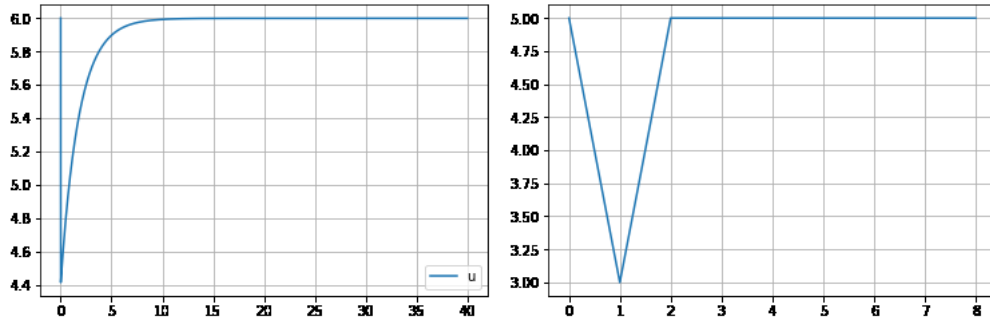


図 3.2 (左) 微分方程式の興奮解. (右) 超離散方程式の興奮解.

4 セル・オートマトン

元の方程式のパラメータの値に対応して $Q < 0 < F$ とする. セル・オートマトンを生成するために, $Q = -1, F = 1, U_0^{j,k}, U_1^{j,k} \in \{-1, 0\}$ と仮定すると $U_n^{j,k} \in \{-1, 0\}$ に制限できる. 0 と 1 のみで表現するために

$$W_n^{j,k} = U_n^{j,k} - Q \quad (4.1)$$

とすると (2.8) は

$$W_{n+1}^{j,k} = \max\{2M_\alpha(W_n^{j,k}) - M_\beta(W_{n-1}^{j,k}) - 1, 0\} \quad (4.2)$$

となり, $W_n^{j,k} \in \{0, 1\}$ のセル・オートマトンを生成できる. (4.2) の時間発展規則はルール表 1 に従う.

$M_\alpha(W_n^{j,k}), M_\beta(W_{n-1}^{j,k})$	0, 0	0, 1	1, 0	1, 1
$W_{n+1}^{j,k}$	0	0	1	0

表 1 (4.2) の時間発展規則

(4.2) は $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ としたとき, 高橋, 志田, 宇佐美の max-plus 方程式 [3] のひとつと同値である. このときリング, ターゲット, スパイラルなど BZ 反応特有のパターンが現れる (図 4.1).

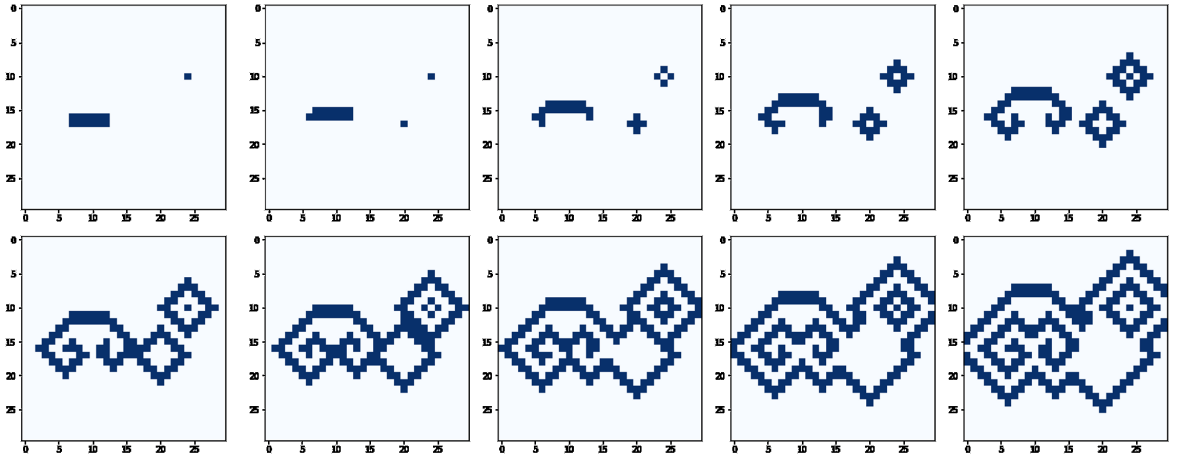


図 4.1 セル・オートマトンパターン (■ = 1, □ = 0)

5 ノイズ付きセル・オートマトン

BZ 反応場には濃度の揺らぎや不純物の混合などのノイズが生じる場合がある. 微分方程式のモデルではこれらを考慮したシミュレーションが研究されている (図 5.1). 前章までのモデルはこれらノイズを考慮しないモデルであるため, パターン形成過程への影響を考察する場合には現象的に適切なモデルとはいえない. ノイズには反応を妨害するもの (負のノイズ) と誘発するもの (正のノイズ) が考えられるが本論文では負のノイズのみ考えることにする.

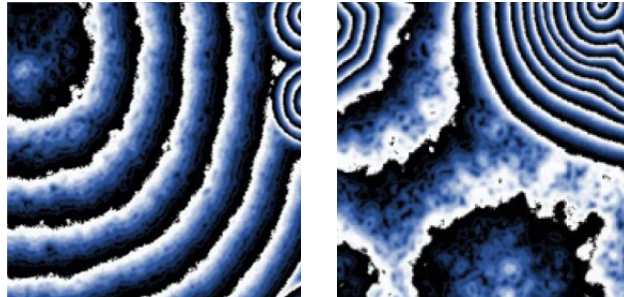


図 5.1 不純物が含まれる反応場での BZ 反応の hodgepodge machine シミュレーション (D.Stys et al., arXiv:1606.04363v1, [nlin.CG] Jun., 12 (2016)).

活性因子にノイズがある場合を考慮し、次のような方程式を与える。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + a \left\{ u(1-u) - \frac{fv(u-q)}{u+q} \right\} + noise, & (a) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u - v. & (b) \end{cases} \quad (5.1)$$

(5.1-a) の拡散項にノイズを添加して離散化を行うと

$$l_\alpha(u_n^{j,k}) = \frac{1}{5}(u_n^{j,k} + u_n^{j-\alpha,k} + u_n^{j+\alpha,k} + u_n^{j,k-\alpha} + u_n^{j,k+\alpha}) + noise \cdot \Delta t \quad (5.2)$$

を得る。ここでは活性因子の濃度に依存して拡散を妨害するノイズとして $\xi_n^{(i)j,k} \leq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を考えて

$$noise = \xi_n^{(1)j,k} u_n^{j-\alpha,k} + \xi_n^{(2)j,k} u_n^{j+\alpha,k} + \xi_n^{(3)j,k} u_n^{j,k-\alpha} + \xi_n^{(4)j,k} u_n^{j,k+\alpha} \quad (5.3)$$

とする。中心部である $u_n^{j,k}$ にノイズを発生させるとパターン形成が停止してしまうため、周囲の4点にのみノイズを添加している。(5.2) を整理すると

$$l_\alpha(u_n^{j,k}) = \frac{1}{5}(u_n^{j,k} + \gamma_1 u_n^{j-\alpha,k} + \gamma_2 u_n^{j+\alpha,k} + \gamma_3 u_n^{j,k-\alpha} + \gamma_4 u_n^{j,k+\alpha}) \quad (5.4)$$

とできる。ここで $\gamma_i = 1 + 5\xi_n^{(i)j,k} \Delta t$ である。変数変換 (2.4) と

$$\gamma_i = \exp(-\Gamma_i/\lambda)$$

を適用して、 $\lambda \rightarrow +0$ の極限をとると、式 (5.4) はノイズを考慮した以下の超離散系に変換される。本論文では $\Gamma_i \in \{0, 1\}$ として議論を進める。

$$L_\alpha(U_n^{j,k}) = \max(U_n^{j,k}, U_n^{j-\alpha,k} - \Gamma_1, U_n^{j+\alpha,k} - \Gamma_2, U_n^{j,k-\alpha} - \Gamma_3, U_n^{j,k+\alpha} - \Gamma_4). \quad (5.5)$$

連続ノイズと超離散ノイズの関係は

$$\begin{aligned} \Gamma_i = 1 &\Leftrightarrow \gamma_i < 1 \Leftrightarrow \xi_n^{(i)j,k} < 0, \\ \Gamma_i = 0 &\Leftrightarrow \gamma_i = 1 \Leftrightarrow \xi_n^{(i)j,k} = 0 \end{aligned}$$

が成り立っている。確率的な効果を取り入れるために変数 p_i に対し、 $0 < p_i < 1$ ならば

$$\Gamma_i(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{with the probability } p_i, \\ 0 & \text{with the probability } 1 - p_i. \end{cases}$$

$p_i \notin [0.1]$ ならば $\Gamma_i(p_i) \equiv 0$ とする。以上より、操作 (4.1) を行くとノイズ付き超離散方程式

$$W_{n+1}^{j,k} = \max\{2L_\alpha(W_n^{j,k}) - M_\beta(W_{n-1}^{j,k}) - 1, 0\} \quad (5.6)$$

を得る。以下にノイズ付きセル・オートマトンパターンを示す。

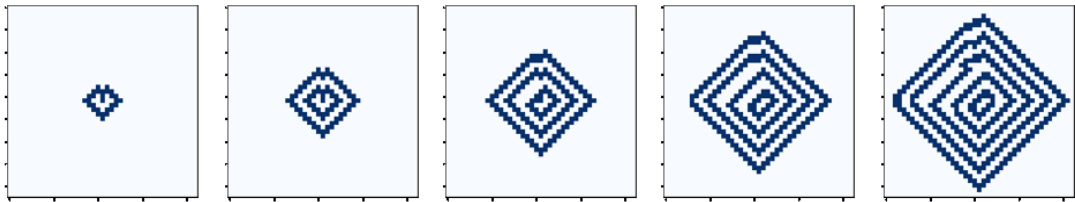


図 5.2 $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, $p_i = 0.05$

参考文献

- [1] M. Murata “Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-cahn equation,” J, differ. Equ. Appl., 19 (2013), 1008-1021.
- [2] K. Matsuya and M. Murata “Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model,” Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 20 (2015), 173-187.
- [3] D. Takahashi, A. Shida and M. Usami “On the pattern formation mechanism of (2+1)D max-plus models,” J. Phys. A: Math. Gen., 34 (2001), 10715-10726.
- [4] M. Ishikawa and K. Miyajima “On the Stochastic Modeling of BZ Reaction and Simulation Studies,” The 32nd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (Nov. 2000, Tottori).
- [5] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003).
- [6] 三池秀敏, 森義仁, 山口智彦, 「非平衡系の科学 III 反応拡散系のダイナミクス」, 講談社サイエンティフィック (1997).
- [7] 佐々木幹子, 西岡斉治, 本郷史也, 村田実貴生, 「FitzHugh-Nagumo 方程式の超離散化」, 九州大学学術情報リポジトリ. 応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.81-87, Mar., (2018).
- [8] Y. Kashiwatate “Ultradiscrete two-variable Oregonator” arXiv:1901.02581v2, [math.DS] Aug., 2 (2019). Preprint.