

## 量子ウォークのmax-plus類似とその性質

渡邊, 扇之介  
小山工業高等専門学校

福田, 亜希子  
芝浦工業大学

瀬川, 悦生  
横浜国立大学

佐藤, 巖  
小山工業高等専門学校

<https://doi.org/10.15017/2924857>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019A0-S2, pp.77-82, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2  
「非線形波動研究の多様性」 (研究代表者 永井 敦)  
Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

*Diversity in the research of nonlinear waves*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 14 (pp. 77 - 82)

## 量子ウォークの max-plus 類似とその 性質

渡邊 扇之介 (Watanabe sennosuke), 福田 亜希子 (Fukuda Akiko), 瀬川 悦生 (Segawa Etsuo), 佐藤 巖 (Sato Iwao)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2020

# 量子ウォークの max-plus 類似とその性質

小山工業高等専門学校 渡邊 扇之介 (WATANABE Sennosuke)  
芝浦工業大学 福田 亜希子 (FUKUDA Akiko)  
横浜国立大学 瀬川 悦生 (SEGAWA Etsuo)  
小山工業高等専門学校 佐藤 巖 (SATO Iwao)

## 概要

Max-plus 代数とは、実数に  $-\infty$  を加えた集合に 2 つの二項演算として和  $\oplus$  と積  $\otimes$  をそれぞれ  $\oplus = \max$  と  $\otimes = +$  で定義した代数である。Max-plus 代数における行列の固有値はその行列を重み付き隣接行列とすることで表現されるグラフの最大平均閉路重みと一致することが知られている [1, 2]。著者らは [4] において max-plus 代数における次元整数格子上のウォークとして max-plus ウォークを提案し、その保存量や定常状態などを議論した。本研究では、max-plus ウォークの極限測度について議論する。

## 1 Max-plus 代数

集合  $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  に 2 つの二項演算を

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = a + b \quad (a, b \in \mathbb{R}_{\max})$$

と定義した代数を max-plus 代数という。和  $\oplus$  は可換で結合則を持ち、 $\varepsilon = -\infty$  を零元とする。積  $\otimes$  も可換で結合則を持ち、 $e = 0$  を単位元とする。また、 $\otimes$  は  $\oplus$  に関して分配的である。 $\otimes$  は  $\varepsilon$  以外で逆元を持つことに対し、 $\oplus$  は  $\varepsilon$  以外で逆元を持たないことに注意が必要である。次に、max-plus 行列の演算を定義する。 $m$  行  $n$  列の max-plus 行列全体を  $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$  と書く。2 つの max-plus 行列  $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$  の和  $A \oplus B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$  は

$$[A \oplus B]_{ij} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ij}.$$

で定義される。ただし、 $[X]_{ij}$  は行列  $X$  の  $i$  行  $j$  列成分を表す。また、2 つの max-plus 行列  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times k}$  と  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times n}$  の積  $A \otimes B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$  は

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{l=1}^k [A]_{il} \otimes [B]_{lj}$$

で定義される。Max-plus 代数では前述したように和  $\oplus$  に関する逆元が存在しないため、max-plus 行列  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  の行列式としては、置換の符号を考えない以下のトロピカル行列式を用いることが一般的である。

$$\text{tropdet}(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} [A]_{1\sigma(1)} \otimes [A]_{2\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes [A]_{n\sigma(n)}.$$

ここで、 $S_n$  は  $\{1, 2, \dots, n\}$  の置換全体である。次に行列の固有値と固有ベクトルを定義する。

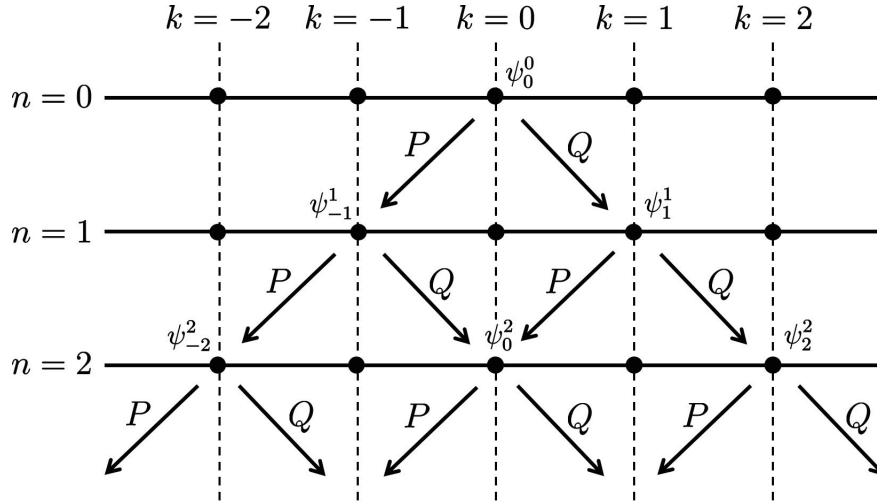


図 1: Max-plus ウォーク

定義 1 (固有値と固有ベクトル). Max-plus 行列  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  において,

$$A \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$$

をみたすベクトル  $\mathbf{x} \neq (\varepsilon, \dots, \varepsilon)^\top \in \mathbb{R}_{\max}^n$  が存在するとき,  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  を  $A$  の固有値といい,  $\mathbf{x}$  を  $\lambda$  に対する固有ベクトルという.

頂点集合を  $V$ , 辺集合を  $E \subset V \times V$ , 辺の重みを  $w$  とする. これらの組として表される重み付き有向グラフ  $G = (V, E, w)$  は次の重み付き隣接行列  $A(G) \in \mathbb{R}_{\max}^{|V| \times |V|}$  で表される.

$$[A(G)]_{ij} = \begin{cases} w(e) & \text{if } e = (i, j) \in E, \\ \varepsilon & \text{if } e = (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Max-plus 行列の固有値とグラフの関係について以下の補題が知られている.

補題 2 (cf. [1]). Max-plus 行列  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  について,  $A$  を重み付き隣接行列とするグラフ  $G(A)$  は強連結とする. このとき  $A$  の固有値は唯一であり, その値は  $G(A)$  にある閉路の平均重みの最大値と一致する. ここで, 閉路の平均重みとは, 閉路に含まれる辺の重みの総和を辺の数で割った値とする.

## 2 Max-plus ウォーク [4]

1次元整数格子上的各格子点に, max-plus 代数におけるベクトルを与える. このとき, これらのベクトルがある決められた max-plus 行列によって時間発展するモデルを max-plus ウォークと呼ぶ. 格子点上のベクトルのことを状態と呼び, 時刻  $n \in \mathbb{N}$  で場所  $k \in \mathbb{Z}$  にある状態を  $\psi_k^n$  と書く. 本研究では, 2次元ベクトルの状態  $\psi_k^n \in \mathbb{R}_{\max}^2$  が2つの2行2列の max-plus 行列  $P, Q \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$  で時間発展する図1のような max-plus ウォークを考える. このとき, 状態  $\psi_k^n$  は次のような時間発

展系で決まる.

$$\psi_k^n = (P \otimes \psi_{k+1}^{n-1}) \oplus (Q \otimes \psi_{k-1}^{n-1}) = A_k^n \otimes \psi_0^0.$$

ここで, 行列  $A_k^n \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$  をこの max-plus ウォークの状態決定行列と呼ぶ. 発展行列  $P, Q$  をそれぞれ

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ c & d \end{pmatrix}$$

とし, 新たに2つの行列  $R, S \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$  を

$$R = \begin{pmatrix} c & d \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ a & b \end{pmatrix}$$

とする. 左 ( $P$ ) に  $\ell$  回, 右 ( $Q$ ) に  $m$  回進み,  $\tilde{r}$  を  $P$  から  $Q$  もしくは  $Q$  から  $P$  に曲がる回数として  $r = \lfloor \tilde{r}/2 \rfloor$  とする. このとき, 時刻  $n$ , 場所  $k$  での状態決定行列  $A_k^n$  は

$$\begin{aligned} A_k^n = & \bigoplus_{r=1}^{(\ell-1) \wedge m} \{(\ell-r-1)a + rb + rc + (m-r)d\} \otimes P \\ & \oplus \bigoplus_{r=1}^{\ell \wedge (m-1)} \{(\ell-r)a + rb + rc + (m-r-1)d\} \otimes Q \\ & \oplus \bigoplus_{r=1}^{\ell \wedge m} \{(\ell-r)a + rb + (r-1)c + (m-r)d\} \otimes R \\ & \oplus \bigoplus_{r=1}^{\ell \wedge m} \{(\ell-r)a + (r-1)b + rc + (m-r)d\} \otimes S \end{aligned}$$

と表すことができる. ただし,  $a \wedge b = \min\{a, b\}$  とする. ここで, 行列  $P, Q$  の成分であった  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{\max}$  に対して以下の条件を課す.

$$\begin{cases} a \otimes d = e, \\ b \otimes c = e. \end{cases} \quad (\text{C1})$$

この条件 (C1) は max-plus 行列  $U \in \mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$  を

$$U = P \oplus Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

としたときに, 通常の線形代数におけるユニタリ行列が持つ性質の1つ「行列式の絶対値が1となる」という性質の max-plus 類似である

$$\text{tropdet}(U) = (a \otimes d) \oplus (b \otimes c) = e$$

をみたす条件となっている。  $\ell a + md = (\ell - m)a = -ka$  であることに注意すると、状態決定行列  $A_k^n$  は以下のようになる。

$$A_k^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} -ka & (-k-1)a+b \\ (-k+1)a-b & -ka \end{pmatrix} & \text{if } k = -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, \\ \begin{pmatrix} na & (n-1)a+b \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} & \text{if } k = -n, \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ (-n+1)-b & -na \end{pmatrix} & \text{if } k = n. \end{cases}$$

この行列  $A_k^n$  の固有値  $\lambda(A_k^n)$  を考えると、補題 2 より

$$\lambda(A_k^n) = \frac{1 + (-1)^{k+n}}{2}(-ak), \quad -n \leq k \leq n$$

となる。ここで、 $k$  は場所であることに注意すると、以下の定理が得られる。

**定理 3** (S. Watanabe, A. Fukuda, E. Segawa, I. Sato [4]). Max-plus ウォークにおいて、条件 (C1) を仮定した状態決定行列  $A_k^n$  の固有値  $\lambda(A_k^n)$  の場所  $k$  に関する総和  $\Phi^n$  は時間に依らず一定で、その値は

$$\Phi^n = 0$$

となる。つまり、固有値の総和は max-plus ウォークの保存量となる。

### 3 Max-plus ウォークの極限測度

通常量子ウォークにおける確率分布について知られている結果を紹介する。初期状態を原点における確率  $1/2$  の混合状態とすると、時刻  $n$  での確率分布  $\mu_n : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$  は、以下のように分布収束する。任意の  $x \in \mathbb{R}$  において、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq nx} \mu_n(k) = \int_{-\infty}^x f_K(u; |a|) du$$

と書ける。ただし、 $f_K(u; |a|)$  は今野関数で

$$f_K(u; |a|) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-u^2)\sqrt{|a|^2-u^2}}, & \text{if } -|a| \leq u \leq |a|, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。以下ではこれに対応する max-plus ウォークの極限測度について議論する。状態決定行列  $A_k^n$  の固有値に対し、 $k$  に関する以下のような和をとる。

$$\sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) = \sum_{k \leq nx} \frac{1 + (-1)^{k+n}}{2}(-ak) \mathbf{1}_{[-n, n]}(k).$$

ただし,  $\mathbf{1}_{[-n,n]}(k)$  は  $-n \leq k \leq n$  のとき 1, そうでなければ 0 をとる関数とする. ここで,  $p$  は非負整数とし,  $-n + 2p$  を  $nx$  より小さく一番大きい整数とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq nx} \frac{1 + (-1)^{k+n}}{2} (-ak) \mathbf{1}_{[-n,n]}(k) &= -a \{-n + (-n + 2) + \cdots + (-n + 2p)\} \\ &= a(p+1)(n-p) \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる. ここで,  $-n + 2p \leq nx < -n + 2p + 2$  より

$$-1 + \frac{n}{2}(x+1) < p \leq \frac{n}{2}(x+1) \quad (3.2)$$

となるので, (3.2) を用いて (3.1) を上から評価すると,

$$\sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) = a(p+1)(n-p) < a \left( \frac{1+x}{2}n + 1 \right) \left( n - \frac{1+x}{2}n + 1 \right) \quad (3.3)$$

となる. ここで, (3.3) の最右辺に対し,  $n^2$  で割って変形すると,

$$\frac{1}{n^2} a \left( \frac{1+x}{2}n + 1 \right) \left( n - \frac{1+x}{2}n + 1 \right) = a \left( \frac{1-x^2}{4} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

となる. ここで,  $n \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \left( \frac{1-x^2}{4} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{a}{4}(1-x^2)$$

となる. 従って,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) \leq \frac{a}{4}(1-x^2) \quad (3.4)$$

が得られる.

一方, (3.2) を用いて (3.1) を下から評価すると,

$$\sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) = a(p+1)(n-p) > a \left( \frac{n}{2}(x+1) \right) \left( n - \frac{n}{2}(x+1) \right) = \frac{n^2}{4} a(1-x^2)$$

となる.  $n^2$  で割って,  $n \rightarrow \infty$  の極限をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) \geq \frac{a}{4}(1-x^2) \quad (3.5)$$

が得られる. 従って, (3.4) と (3.5) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) = \frac{a}{4}(1-x^2) \quad (3.6)$$

となる. (3.6) の右辺は

$$\frac{a}{4}(1-x^2) = \int_{-\infty}^x -\frac{au}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u) du$$

と書ける. まとめると, 次の定理が得られる.

定理 4. Max-plus ウォークにおける極限測度は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \leq nx} \lambda(A_k^n) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

となる。ただし、

$$f(u) = \begin{cases} -\frac{au}{2}, & u \in [-1, 1], \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。

## 4 まとめ

本研究では、[4] で提案されている量子ウォークの max-plus 類似である max-plus ウォークに対する極限測度について議論した。

定理 3 により、max-plus ウォークはある条件を満たすと、時刻に対する不変量が存在し、それによって各時刻ごとに決まる  $\mathbb{Z}$  上の符号付き測度が与えられる。これは通常の量子ウォークにおける、時間発展のユニタリ性から  $\ell^2$  ノルムが保存され、確率が定義されることに対応している。通常の量子ウォークにおける状態決定行列を  $B_k^n \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  とおく (具体的な表示に関しては例えば [3] を参照)。初期状態を原点における確率  $1/2$  の混合状態とすると、時刻  $n$  での確率分布  $\mu_n : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$  は、 $(1/2) \|B_k^n\|_F^2 = \sum_i (\sigma_i)^2$  で書き表され、max-plus ウォークの測度を彷彿させる。ただし、 $\|\cdot\|_F$  はフロベニウスノルム、 $\sigma_i$  は  $B_k^n$  の特異値である。

この max-plus ウォークの符号付測度の極限の時刻に対するスケーリングのオーダーと通常の量子ウォークのスケーリングのオーダーは共に線形であり、一致している。つまり、量子ウォークの特徴的な挙動であるいわゆる線形的拡がり (linearly spreading) を反映していることを示唆している。また、max-plus ウォークの符号付極限測度がパラメータ “ $a$ ” のみによって記述されているのに対し、同様に通常の量子ウォークにおいてもその拡がりを記述する擬速度と呼ばれる、今野関数のパラメータ “ $a$ ” のみによって、記述されている点も興味深い。このように、max-plus ウォークの極限測度が量子ウォークのどのような挙動を抽出しているのかをより明らかにするのは今後の課題として残されている。

## 参考文献

- [1] F. Baccelli, G. Cohen, G.L. Olsder and J.P. Quadrat, Synchronization and Linearity, Wiley, New York, 1992.
- [2] D. Maclagan and B. Sturmfels, Introduction to Tropical Geometry, American Mathematical Society, 2015.
- [3] N. Konno, Quantum Walk, Lecture Notes in Mathematics, 1954(2008), 309–452.
- [4] S. Watanabe, A. Fukuda, E. Segawa, I. Sato, A walk on max-plus algebra, arxiv:1908.09051