行列値Bratu方程式の可積分性について

井上, 公人
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

https://doi.org/10.15017/2924854

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 2019AO-S2, pp.58-63, 2020-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.2019AO-S2
「非線形波動研究の多様性」（研究代表者　永井　敦）

Reports of RIAM Symposium No.2019AO-S2

Diversity in the research of nonlinear waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University, Kasuga, Fukuoka, Japan, October 31 - November 2, 2019

Article No. 11 (pp. 58 - 63)

行列値Bratu方程式の可積分性について

井上 公人（Inoue Hiroto）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2020

行列値 Bratu 方程式の可積分性について

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　　井上公人 (INOUE Hiroto)

概 要

古典的な Bratu 方程式の行列拡張である行列値 Bratu 方程式を導入し, その初期値問題の解を与える. 解は指数行列解として与えられ, その対角化からベキ級数解が得られる. さらに指数行列の Lie 代数表示や幾何的解釈について述べる.

1 行列値 Bratu 方程式の導入

1.1 対称錐 $\Omega = \mathrm{Sym}^+_{n+r}(\mathbb{R})$ の測地線の方程式

$(n+r)$ 次元の正定値対称行列のなす対称錐 $\Omega = \mathrm{Sym}^+_{n+r}(\mathbb{R})$ を考え, Ω に次のリーマン計量を定める.

$$ds^2 = \mathrm{tr}\left((\Sigma^{-1}d\Sigma)^2\right), \quad \Sigma \in \mathrm{Sym}^+_{n+r}(\mathbb{R}).$$

Ω の測地線 $\Sigma(s)$ $(s \in \mathbb{R})$ の方程式は

$$(\Sigma'(s)\Sigma(s)^{-1})' = 0$$

である. この方程式の初期条件 $\Sigma(0) = I, \Sigma'(0) = X$ をみたす解は次で与えられる.

$$\Sigma(s) = \exp(sX), \quad X \in \mathrm{Sym}_{n+r}(\mathbb{R}).$$

また境界条件 $\Sigma(0) = A, \Sigma(1) = B$ をみたす解は次で与えられる.

$$\Sigma(s) = A^{\frac{1}{2}} \exp\left(s \cdot \log(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})\right) A^{\frac{1}{2}}.$$

Remark 1.1. 境界値問題に関しては, 2 点 A, B の中点 $\Sigma(1/2)$ に収束する算術調和平均アルゴリズム (中村 [7]) も知られている. □

1.2 部分多様体 N_n の測地線の方程式

Ω の部分多様体 N_n を

$$N_n = \left\{ \Sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ * & I_r \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}^+_{n+r}(\mathbb{R}) \right\}$$

で定め, N_n 上に誘導計量 $ds^2|_{N_n}$ を入れる.

Remark 1.2. 多様体 N_n は実ジーゲル領域と微分同相であり, $r = 1$ の場合は正規分布族の統計多様体として現れる (ref. [6]). □

N_n の測地線 $\Sigma(s)$ の方程式は次のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathrm{tr}\left((\Sigma'(s)\Sigma(s)^{-1})^2\right) + \lambda(s)\,\mathrm{tr}\left[\Sigma(s)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}\right]$$

から導かれる. ここで $\lambda(s)$ は未定乗数とする. $\mathcal{L}$ のオイラー・ラグランジュ方程式は

$$(\Sigma'(s)\Sigma(s)^{-1})' = \lambda(s)\Sigma(s)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

となる.

未知関数 $\Sigma(s), \lambda(s)$ のうち, $\Sigma(s)$ がみたす方程式

$$(\Sigma'(s)\Sigma(s)^{-1})' = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

を, 初期条件

$$\Sigma(0) = I_{n+r}, \quad \Sigma'(0) = \begin{pmatrix} B & a \\ {}^t a & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{n+r}(\mathbb{R})$$

のもとで考える. これは一回積分することにより, 次の初期値問題

$$\Sigma'(s)\Sigma(s)^{-1} = \begin{pmatrix} B & * \\ {}^t a & * \end{pmatrix}, \quad \Sigma(0) = I_{n+r} \tag{1.1}$$

と同値となる.

1.3 行列値 Bratu 方程式

方程式 (1.1) において, 未知関数 $\Sigma(s) \in N_n$ を

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma(s) + \mu(s){}^t\mu(s) & \mu(s) \\ {}^t\mu(s) & I_r \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \sigma(s) \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R}), \\ \mu(s) \in \mathbb{R}^{n\times r} \end{matrix}$$

と表すと, 初期値問題は次と同値となる.

$$\begin{cases} \sigma'(s)\sigma(s)^{-1} - \mu(s){}^t a = -B, \\ \sigma(s)^{-1}\mu'(s) = -a. \end{cases}$$

これから $\mu'(s)$ を消去すると, $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$-値関数 $\sigma(s)$ の方程式

$$(\sigma'(s)\sigma(s)^{-1})' + \sigma(s)a{}^t a = 0$$

が得られる. さらに $h(s) := \sigma(s)^{-1}$ とおいて両辺の転置をとると

$$(h'(s)h(s)^{-1})' = (a{}^t a)h(s)^{-1} \tag{1.2}$$

となる.

定義 1. $a \in \mathbb{R}^{n\times r}$ を定行列とする. $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$-値関数 $h(s)$ に対する方程式 (1.2) を行列値 Bratu 方程式という.

2 初期値問題の解の構成

2.1 指数行列解

記号 $b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^{n\times r}$ に対して, 次の行列 B, G を定義する.

$$B = B(b,a) := \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ {}^t a & 0 & -{}^t a \\ 0 & -a & -b \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{2n+r}(\mathbb{R}),$$

$$G = G(s) = G(s;b,a) := \exp(sB(b,a)) \in \mathrm{Sym}_{2n+r}^+(\mathbb{R}).$$

ここで $s \in \mathbb{R}$ を実変数とする.

また,

$$J = J_{n,r} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_r & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{2n+r}(\mathbb{R}).$$

とおく．このとき次が成り立つことがわかる:

$$JBJ = -B,$$

従って,

$$JGJ = G^{-1} \quad (\text{or } JG^{-1}J = G).$$

定理 1 ([2], [3])**.** *$b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^{n\times r}$ に対して, 関数 $\widetilde{h}(s) \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ $(s \in \mathbb{R})$ を次で定義する:*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{h}(s) & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} := G(s) = \exp\left[s \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ {}^t a & 0 & -{}^t a \\ 0 & -a & -b \end{pmatrix} \right]. \tag{2.1}$$

このとき, $\widetilde{h}(s)$ は行列値 Bratu 方程式 (1.2) の初期条件 $h'(0) = B$ をみたす解となる.

さらに, 指数行列 (2.1) の $(n+r)$ 次の首座小行列の逆行列

$$\Sigma(s) := \begin{pmatrix} \widetilde{h}(s) & * \\ * & * \end{pmatrix}^{-1}$$

が測地線の方程式 (1.1) をみたすことが示される ().

2.2 ベキ級数解

直交行列 $K \in \mathrm{O}(2n+r)$ を次で定める.

$$K = K_{n,r} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & 0 & I_n \\ 0 & \sqrt{2} I_r & 0 \\ -I_n & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

定義 2. $b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^{n\times r}$ に対して,

$$C := \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,{}^t a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r)\times n}$$

とおき, 次の特異値分解を考える:

$$C = U \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} {}^t v, \qquad \begin{array}{l} U \in \mathrm{O}(n+r), \quad v \in \mathrm{O}(n), \\ \sigma = \mathrm{diag}(\sigma_i)_{i=1}^n,\ \sigma_i \in \mathbb{R}. \end{array}$$

このとき, 直交行列 $\tilde{P}, P \in \mathrm{O}(2n+r)$ を次で定める.

$$\tilde{P} := \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad P := K\tilde{P}\,{}^t K.$$

定理 2 ([3])**.** *P, σ を定義 2 の行列とする．このとき, 次が成立する.*

1. *$PJ\,{}^tP = J$.*

2. *行列 $B(b,a)$ は次のように対角化される:*

$$B(b,a) = PB(\sigma, 0)\,{}^t P.$$

系 3 ([1], [3]). 定義 *2* の行列 U を

$$U = \begin{pmatrix} * & * \\ * & u \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

のように書く. このとき, 定理 *1* の関数 $\widetilde{h}(s)$ は次のベキ級数展開をもつ:

$$\widetilde{h}(s) = I_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(v\sigma^{2n}\,{}^t\!v + u\sigma^{2n}\,{}^t\!u\right)\frac{s^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(u\sigma^{2n-1}\,{}^t\!v + v\sigma^{2n-1}\,{}^t\!u\right)\frac{s^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

上式は指数関数を使って次のように表せる.

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(s) &= I_n + \frac{1}{4}(u+v)(e^{s\sigma} - I_n)({}^t\!u + {}^t\!v) + \frac{1}{4}(u-v)(e^{-s\sigma} - I_n)({}^t\!u - {}^t\!v) \\ &= \boldsymbol{e}(s)\,{}^t\boldsymbol{e}(s), \quad \boldsymbol{e}(s) = \frac{1}{2}(u+v)e^{\frac{s}{2}\sigma} - \frac{1}{2}(u-v)e^{-\frac{s}{2}\sigma}.\end{aligned}$$

2.3 3×3 ブロック行列の Lie 代数による表示

$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数とし, $\mathfrak{g}$ の Cartan-Weyl 基底 $\{e_\alpha, h_\alpha\}$ をとる.

命題 1 ([3]). *次のような* $\mathfrak{g}$ *の元*

$$A \in \bigoplus_{\alpha:\text{基本ルート}} \mathbb{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}) \oplus \mathbb{R}h_\alpha.$$

をとる. このとき, A *の随伴作用* $\mathrm{ad}(A)$ *は, Chevalley 基底に関して次の形の表現行列を持つ.*

$$\mathrm{ad}(A) = B(b,a), \qquad b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}^{n\times r}.$$

ここで $r = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}, \ \dim\mathfrak{g} = r + 2n$.

2.4 測地線の水平射影

多様体 M と, 可微分写像 $\pi : M \to \mathrm{Sym}^+_{n+r}(\mathbb{R})$ を次で定義する.

$$M := \{g \in \mathrm{Sym}^+_{2n+r}(\mathbb{R});\ JgJ = g^{-1}\} \cong \mathrm{SO}_0(n+r,n)/\,\mathrm{SO}(n+r)\times\mathrm{SO}(n),$$

$$\pi : M \ni \begin{pmatrix} x & y & * \\ {}^t\!y & z & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ {}^t\!y & z \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{Sym}^+_{n+r}(\mathbb{R}).$$

命題 2 ([4]). *1.* $\pi(M) \subset N_n$.

2. $\pi : M \to N_n$ *はリーマンしずめ込みである.*

3. 点 $e = I_{2n+r} \in M$ *における接空間* T_eM *は* π *に関する水平成分と垂直成分に次のように分解される:*

$$\begin{array}{ccccccc} \text{接空間} & & \text{水平成分} & & \text{垂直成分} & & \\ T_eM & = & H_e & \oplus & V_e & & \\ \Cup & & \Cup & & \Cup & & \\ \begin{pmatrix} b & a & c \\ {}^t\!a & 0 & -{}^t\!a \\ {}^t\!c & -a & -b \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ {}^t\!a & 0 & -{}^t\!a \\ 0 & -a & -b \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^t\!c & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{array}{l} b = {}^t\!b, \\ c = -{}^t\!c, \\ a \in \mathbb{R}^{n\times r}. \end{array} \end{array}$$

以上より, 接空間 T_eM の水平な接ベクトルとして行列 $B(b,a)$ を特徴付けることができる. さらに N_n の測地線の方程式 (行列値 Bratu 方程式) の指数行列解は, M における水平な測地線の N_n への射影として理解できる.

3 Bratu 方程式とその周辺

行列値 Bratu 方程式 (1.2) の $n = 1$ の場合は未知変数 $\sigma(s)$ の値は正の実数であり, $\varphi(s) = \log \sigma(s)$ と変換すると,

$$\varphi''(s) = \lambda e^{\varphi(s)}, \quad \lambda = a^2 \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

となる. この方程式は Bratu 方程式と呼ばれている.

戸田格子との関係 Bratu 方程式は非周期的有限戸田格子の最も簡単な場合となっている. 実際, 格子点数が $N = 2$ の非周期的有限戸田格子の方程式

$$\begin{aligned} q_1''(s) &= -g^2 e^{q_1(s) - q_2(s)}, \\ q_2''(s) &= g^2 e^{q_{N-1}(s) - q_N(s)} \end{aligned}$$

において, $\varphi(s) := q_1(s) - q_2(s)$, $\lambda := -2g^2$ とおくと Bratu 方程式 (3.1) となる. この方程式の行列値への拡張が行列値 Bratu 方程式であるのに対し, 戸田格子は離散変数を導入した拡張となっている:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{行列値 Bratu 方程式}} & \\ \boxed{\text{Bratu 方程式}} \arrow[u, "\text{値の拡張}"] \arrow[r, "\text{離散変数}"'] & \boxed{\text{戸田格子}} \end{tikzcd}$$

よく知られているように, 戸田格子には QR 分解による行列解法 (より一般には AKS 定理) が存在する. これは行列値 Bratu 方程式の行列解法と以下の表のように比較することができる. しかしこれらの解法は独立に発見されたものであり, 共通部分である Bratu 方程式でみても両者の関係はよく分かっていない.

	戸田格子	行列値 Bratu 方程式
初期値	$L_0 \in \mathrm{Sym}_N(\mathbb{R})$	$B \in \mathrm{Sym}_{2n+r}(\mathbb{R})$
	3 重対角行列	3 重対角ブロック行列
時間発展	$\exp(sL_0)$	$\exp(sB)$
射影	$Q(s)$ をとる	小行列をとる
	(QR 分解から)	(Gauss 分解から)

Liouville 方程式との関係 $D \subset \mathbb{R}^N$ を領域, Δ を $\mathbb{R}^N$ 上のラプラシアンとする. D 上の関数 $u(x)$ の次の方程式

$$\Delta u(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

を Liouville 方程式という. $N = 1$ の場合は Bratu 方程式である. $N = 2$ の場合は, 2 次元曲面のガウス曲率が一定となる条件や, 等温座標系についてのガウス-コダッチ方程式として現れる. Liouville 方程式の次の境界値問題を Liouville-Bratu-Gelfand 問題という:

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda e^{u(x)} = 0 & (x \in D), \\ u(x) = 0 & (x \in \partial D). \end{cases}$$

$N = 3$ の場合は, 内燃機関の理論における Frank-Kamenetskii のモデルや, 宇宙物理学における Chandrasekhar 方程式として現れる. 領域 D が単位球 $B_1(0)$ であるとき, Liouville-Bratu-Gelfand 問題の動径部分は, $u(r)$ ($r = \|x\|$) に対する次の方程式となる.

$$\begin{cases} u''(r) + \dfrac{N-1}{r} u'(r) + \lambda e^{u(r)} = 0, \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

この方程式について, N や定数 λ の値に依存する解 $u(r)$ の存在の様子が調べられている (ref. [5]).

参考文献

[1] M. Calvo and J. M. Oller. An explicit solution of information geodesic equations for the multivariate normal model. *Statist. Decisions*, 9(1-2):119–138, 1991.

[2] P. S. Eriksen. Geodesics connected with the Fisher metric on the multivariate normal manifold. In *Proceedings of the GST Workshop, Lancaster 1987*, pages 225–229, 1987.

[3] H. Inoue. Matrix-valued Bratu equation and the exact solution of its initial value problem. *preprint*.

[4] H. Inoue. *A symmetric subdomain contained in a fiber of the Siegel upper half space*. Ph.d. thesis, Kyushu University, 2017.

[5] J. Jacobsen and K. Schmitt. The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators. *Journal of Differential Equations*, 184(1):283–298, 2002.

[6] H. Shima. *The geometry of Hessian structures*. World Scientific, 2007.

[7] 中村佳正. 可積分系とアルゴリズム. In **可積分系の応用数理**, pages 171–223. 裳華房, 2000.